COURS. Mathématiques Géné. 2
Chapitre 01: Déterminants de Matrice

Département Mathématiques.

PRESENTATION
Dr. André Souleye Diabang.

3 février 2023

Plan

1. Rappel. Définition et composantes d'une matrice

2. Déterminant d'une matrice

Plan

1. Rappel. Définition et composantes d'une matrice

2. Déterminant d'une matrice

Définition et composantes d'une matrice

Définitions. Matrices

Une matrice est un tableau rectangulaire de la forme.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Définition et composantes d'une matrice

Définitions. Matrices

Une matrice est un tableau rectangulaire de la forme.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})$$

Définition et composantes d'une matrice

Définitions. Matrices

Une matrice est un tableau rectangulaire de la forme.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})$$

Une matrice est dite d'ordre $m \times n$ lorsque celle-ci possède m lignes et n colonnes.

Définition et composantes d'une matrice

Définitions. Matrices

Une matrice est un tableau rectangulaire de la forme.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})$$

Une matrice est dite d'ordre $m \times n$ lorsque celle-ci possède m lignes et n colonnes.
Une matrice est dite carrée lorsqu'elle a le même nombre de lignes et de colonnes..

Définitions. Matrices

Définitions. Matrices

Dans une matrice carré, les a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} forment la diagonale principale.

Définitions. Matrices

Définitions. Matrices

Dans une matrice carré, les a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} forment la diagonale principale.
La matrice d'ordre $n \times p$ dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée $O_{n,p}$ ou plus simplement O.

Définitions. Matrices

Définitions. Matrices

Dans une matrice carré, les a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} forment la diagonale principale.
La matrice d'ordre $n \times p$ dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée $O_{n,p}$ ou plus simplement O.
Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

Définitions. Matrices

Définitions.Matrices

La matrice carrée dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls est appelée matrice identité notée I_n.

Définitions. Matrices

Définitions.Matrices

La matrice carrée dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls est appelée matrice identité notée I_n.
Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Définitions. Matrices

Définitions.Matrices

La matrice carrée dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls est appelée matrice identité notée I_n.
Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

$$A.I_n = I_n.A = A$$

Définitions. Matrices.

Opérations sur les matrices.

Soient $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

Définitions. Matrices.

Opérations sur les matrices.

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

Définitions. Matrices.

Opérations sur les matrices.

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Définitions. Matrices.

Opérations sur les matrices.

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\alpha.A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha.a_{ij})$$

Définitions. Matrices.

Opérations sur les matrices.

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\alpha . A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha . a_{ij})$$

$$AB = (c_{ij}),$$

Définitions. Matrices.

Opérations sur les matrices.

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\alpha.A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha.a_{ij})$$

$$AB = (c_{ij}), c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}$$

Application.

A1.

Quels sont les produits possibles ? Les calculer.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Applications.

A2.

On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, B^2, AB et BA.

En déduire $(A+B)^2$

Applications.

A3.

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer A^n et B^n et Montrer que $AB = BA$. En déduire $(A+B)^n$.

Applications.

A3.

On donne $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $2A - A^2$.

Plan

1. Rappel. Définition et composantes d'une matrice

2. Déterminant d'une matrice

Déterminant d'une matrice.

Déterminant d'une matrice.

Le déterminant sera un outil essentiel pour identifier les points maximum et minimum ou les points de selle d'une fonction de plusieurs variables.

Déterminant d'une matrice.

Le déterminant sera un outil essentiel pour identifier les points maximum et minimum ou les points de selle d'une fonction de plusieurs variables.

Définition.

À toute matrice carrée A correspond une valeur réelle appelée le déterminant de A,que l'on dénote par $det(A)$ ou encore $|A|$.

Déterminant d'une matrice.

Le déterminant sera un outil essentiel pour identifier les points maximum et minimum ou les points de selle d'une fonction de plusieurs variables.

Définition.

À toute matrice carrée A correspond une valeur réelle appelée le déterminant de A,que l'on dénote par $det(A)$ ou encore $|A|$. Nous éviterons la définition formelle du déterminant (qui implique des notions de permutations) mais nous allons plutôt nous concentrer sur le calcul de celui-ci.

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2.

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2.

Définition.

Considérons A une matrice carrée d'ordre 2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Le déterminant de la matrice A est définie par la relation :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Le résultat est donc obtenu en effectuant le produit des éléments opposés et en calculant la différence entre ces deux produits.

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2.

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2.

Exemple.

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

Le déterminant de A est ainsi : $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} =$

Exercice.

Calculer le déterminant des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et
$D = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Avant de ne pouvoir évaluer le déterminant d'une matrice 3×3 (ou toute autre matrice d'ordre supérieure), il nous faut d'abord voir quelques concepts qui s'y rattachent...

Définition d'un mineur.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1ère ligne et la 2^e ˆcolonne de A. C'est-à-dire $M_{12} =$

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 2^e ligne et la 2^e colonne de A. C'est-à-dire $M_{22} =$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Définition d'un cofacteur.

Le cofacteur C_{ij} d'une matrice A est déini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Exermple Calculer C_{12} et C_{22} de l'exemple précedent.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

♣ Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la ligne ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

♣ Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la ligne ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)

♣ Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij} correspondant.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

♣ Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la ligne ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)

♣ Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij} correspondant.

♣ Faire la somme de ces résultats.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Si on choisit de faire une expansion de la première ligne, alors

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Si on choisit de faire une expansion de la première ligne, alors

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Si l'on avait choisi de faire une expansion de la deuxième colonne, alors il faudrait calculer

$$det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

Calcul du déterminant pour une matrice 3 × 3.

Calcul du déterminant.

Si on choisit de faire une expansion de la première ligne, alors

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Si l'on avait choisi de faire une expansion de la deuxième colonne, alors il faudrait calculer

$$det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

Le résultat du déterminant sera le même quelque soit le choix de la ligne ou de la colonne. Vérifions par un exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$