# MATRICES

**EXERCICE 01** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -6 & 8 \\ \frac{1}{5} & 7 & 0 & 4 & 1 \\ \frac{-8}{5} & 7 & 9 & 15 & 367 \end{pmatrix}$

1) Donner l'ordre de la matrice $A$. Puis Donner la valeur de chacun des éléments $a_{23}$, $a_{25}$, $a_{33}$, $a_{31}$.

2) Ecrire la matrice transposée $A^t$ de $A$ et donner son ordre.

**EXERCICE 02** On donne $B = \begin{pmatrix} 2 & \dots & -4 & \dots \\ 6 & 13 & \dots & \dots \\ \dots & 2 & \dots & 0 \\ 879 & 58 & 7 & 0 \\ 3 & \frac{23}{6} & e^5 & \dots \end{pmatrix}$

1) Compléter l'écriture de $B$ avec : $a_{54} = 0$, $a_{24} = 5$, $a_{23} = 0$, $a_{14} =$, $a_{31} = -1$, $a_{33} = 0$, et $a_{12} = 13$.

2) Ecrire la matrice transposée $B^t$ de $B$ et donner son ordre.

**EXERCICE 03**

1) On donne $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $C+D$ $C-4D$ et $5C+3(C-4D)$.

2) On donne $E = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} -1 & -59 & 0 \\ 12 & 43 & 56 \end{pmatrix}$ Trouver $x$ et $y$ tels que $xE + yF = G$.

3) Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi ?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**EXERCICE 04**

1) Vérifier que la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ satsifait à l'équation $J^3 - 2J^2 - J + 2I_3 = 0_3$.

2) En déduire qu'elle est inversible et déterminer son inverse.

**EXERCICE 05**

1) Soit $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer $K^3 - K$. En déduire que $K$ est inversible et déterminer $K^{-1}$.

2) Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices suivantes :

$L = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) Exprimer les systèmes linéaires suivants sous forme matricielle et les résoudre en inversant la matrice. Puis par la méthode des déterminants.

(a) $\begin{cases} 2x + 4y = 7 \\ -2x + 3z = -14 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2y + 3z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -2y + 3z = 5 \\ x + z = 4 \end{cases}$

# Logique et Raisonnement.

## Exercice 01.

Université Ibe Der Thiam de Thiès Année académique : 2020-2021.
UFR : SET Géométrie affine Intervenant : Dr. A. S. Diabang
Département Mathématiques et Informatique.
. TD.1. Espaces affines

**Exercice 01.**

1) Montrer que, pour tout espace vectoriel $E$, l'application
$\phi : E \times E \longrightarrow E$, $(x, y) \longmapsto y - x$
munit $E$ d'une structure d'espace affine (dont l'espace vectoriel sous-jacent est $E$ lui-même).
2) Soit $E$ un espace affine et $A \in E$, Montrer que $(E, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, avec $P \oplus Q = A + (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ})$ et $\alpha \otimes P = A + \alpha\overrightarrow{AP}$, pour tous $P, Q \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On note parfois $E_A$ cet espace vectoriel appelé vectorialisé de $E$ en $A$.

**Exercice 02.**

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$. $E_1 = \{f \in E, \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 1\}$ et $E_0 = \{f \in E, \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0\}$.
1) Montrer que $E$ et $E_0$ sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriels de dimension finie.
2) Soient $f$, $g$ dans $E_1$. Les éléments $f + g$, $f - g$ et $\dfrac{f + g}{2}$ sont-ils dans $E_1$, dans $E_0$ ?
3) Montrer que $E_1$ peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $E_0$.

**Exercice 03.**

Déterminer lesquels des sous-ensembles suivants sont des sous-espaces affines :
$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + z = 1\}$ : $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + z = 1 \ et \ 3x + 2y = 0\}$ ;
$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 6y = 4\}$ ; $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$ ;
$V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2xy + y^2 = 1\}$ ;

**Exercice 04.**

Montrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire (avec second membre) est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$; autrement dit, montrer que ; pour toute matrice $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ et tout vecteur $B \in \mathbb{R}^p$, l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}^q; AX = B\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^q$.

Application : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $X$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^4$ dont les coordonnées vérifient le système

$S = \{x + 2y + 3z + 4t = 1 \quad x + 3y + z + 2t = 1\}$ munir $X$ d'une structure d'espace affine dont on précisera la direction.

**Exercice 05.**

1) Montrer que l'ensemble $V_1 = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}); f'(t) = cos(r),\ t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace affine de $C^1([0, 1], \mathbb{R})$. De même, montrer que l'ensemble $V_2 = \{f \in C^2([0, 1], \mathbb{R}); f"(t)+5f(t) = 3,\ t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace affine de $C^2([0, 1], \mathbb{R})$. Généraliser.

2) Montrer que l'ensemble $V_3 = \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; U_{n+1} - 3U_n + 1 = n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Généraliser.

**Exercice 06.**

1) Soit $V$ l'ensemble des fonctions $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à 4, et telle que $\int_0^1 f(t)dt = 1$. Montrer que $V$ est un sous-espace affine de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Quel est sa dimension ?

Montrer que l'ensemble des fonctions de $V$ qui, en tant que polynômes, sont divisibles par $(x - \dfrac{1}{2})^2$ est un plan affine de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2) Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Monttrer que pour tout élément $y$ de $F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est un sous-espace affine de $E$.

**Exercice 07**

1) Plans dans $\mathbb{R}^3$.

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les points $A(1,2,3)$, $B=(2,-1,1)$ et $C=(1,1,1)$. Montrer que $A$, $B$ et $C$ sont non alignés.

On note $P_1$ le plan passant par les points $A$, $B$ et $C$.

2) Soit $A'$ le point $(2,-2,-3)$ et $D$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par les équations. $2x+y+z-5=0$ et $-2x-y+z+3=0$.

Vérifier que $D$ est une droite de $\mathbb{R}^3$ et que $A'$ n'est pas dans $D$.

On note $P_2$ le plan passant par $A'$ et contenant $D$.

3) Montrer que $P_2$ est parallèle à $P_1$ et n'est pas confondu avec $P_1$.

**Exercice 08**

1) Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les droites $D$ et $D'$ d'équations :

$D : (2x+3y-4z=-1 \; x-2y+z=3)$ et $D' : (11x-y-7z=\alpha \; x+y+z=1)$

Les droites sont-elles parallèles, Sécantes ou coplanaires ?

2) L'espace affine de dimension 3 est rapporté à un repère cartésien. Ecrire l'équation du plan passnt par le point $(0,1,0)$ et parallèle au plan d'équation $x+y-z+3=0$.

3) Soit, dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère cartésien, D la droite d'équations $x+y-z+3=0$, $2x+z-2=0$. Donner l'équation du plan $P$ contenant $D$ et passant par le point $(1,1,1)$.

**Exercice 09** Dans le plan $\mathbb{R}^2$

1) Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point $(0,\sqrt{3})$ et parallèle à la droite d'équation $2x-y+3=0$, de celle passant par ce même point et orthogonale à la droite donnée.

2) Soient $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(-3,-2)$ et $D(0,1)$ quatre points de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont non alignés. Montrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont non parallèles.

Donner une équation cartésienne de la droite $(AB)$. Calculer le point d'insection des droites $(AB)$ et $(CD)$.

**Exercice 10**

1) Soit $D_1$ la droite d'équation $x-y+2=0$ et $D_2$ celle d'équation $2x+3y+1=0$. A tout réel $m$ on associe la droite $D_m$ l'équation $(2m+1)x+(3m-1)y+m+2=0$.

Soit $M_0$ le point commum de $D_1$ et $D_2$. Montrer que $M_0$ est sur $D_m$ quel que soit $m$.

2) Montrer que les points $A(1,2,-1)$, $B=(1,3,4)$, $C(2,2,2)$ et $D(0,2,-4)$ sont coplanaires.