

COURS. PROBABILITE-STATISTIQUE.

Chapitre 02: CALCUL DE PROBABILITE

Département Mathématiques.

PRESENTATION
Dr. André Souleye Diabang.

19 septembre 2022

Plan

- 1 Introduction.
- 2 Probabilité.
- 3 Probabilité conditionnelle

Plan

- 1 Introduction.
- 2 Probabilité.
- 3 Probabilité conditionnelle

Introduction.

Introduction.

La théorie de probabilité a pour objectif de modéliser des expériences où plusieurs résultats sont possibles mais où leur réalisation n'est pas déterminé à l'avance :

Introduction.

Introduction.

La théorie de probabilité a pour objectif de modéliser des expériences où plusieurs résultats sont possibles mais où leur réalisation n'est pas déterminé à l'avance :

Par exemple :

Introduction.

Introduction.

La théorie de probabilité a pour objectif de modéliser des expériences où plusieurs résultats sont possibles mais où leur réalisation n'est pas déterminé à l'avance :

Par exemple : lancer de dés,

Introduction.

Introduction.

La théorie de probabilité a pour objectif de modéliser des expériences où plusieurs résultats sont possibles mais où leur réalisation n'est pas déterminé à l'avance :

Par exemple : lancer de dés, prix d'une action,

Introduction.

Introduction.

La théorie de probabilité a pour objectif de modéliser des expériences où plusieurs résultats sont possibles mais où leur réalisation n'est pas déterminé à l'avance :

Par exemple : lancer de dés, prix d'une action, perturbation sur une ligne téléphonique,

Introduction.

Introduction.

La théorie de probabilité a pour objectif de modéliser des expériences où plusieurs résultats sont possibles mais où leur réalisation n'est pas déterminé à l'avance :

Par exemple : lancer de dés, prix d'une action, perturbation sur une ligne téléphonique, fils d'attente, . . . etc.

Introduction.

Introduction.

La théorie de probabilité a pour objectif de modéliser des expériences où plusieurs résultats sont possibles mais où leur réalisation n'est pas déterminé à l'avance :

Par exemple : lancer de dés, prix d'une action, perturbation sur une ligne téléphonique, fils d'attente, . . . etc. Ceci pour évaluer les risques et mettre sur pied des stratégies pour faire face aux aléas.

Introduction.

Introduction.

- La première difficulté est donc de d'écrire correctement l'expérience aléatoire afin d'énumérer l'ensemble des résultats possibles.

Introduction.

Introduction.

- La première difficulté est donc de d'écrire correctement l'expérience aléatoire afin d'énumérer l'ensemble des résultats possibles.

Un résultat étant généralement noté ω . On regroupe les résultats possibles dans un ensemble noté Ω et appelé espace des issus ou univers.

Introduction.

Introduction.

- La première difficulté est donc de d'écrire correctement l'expérience aléatoire afin d'énumérer l'ensemble des résultats possibles.

Un résultat étant généralement noté ω . On regroupe les résultats possibles dans un ensemble noté Ω et appelé espace des issus ou univers.

On appelle événement tout sous-ensemble de Ω . Les singletons de Ω noté $\{\omega\}$ sont appelés événements élémentaires.

Introduction.

Introduction.

- La deuxième difficulté est alors d'attribuer à chaque événement $A \subseteq \Omega$ un nombre compris entre 0 et 1 qui estime les chances qu'à cet événement de se réaliser. On appelle ce nombre la probabilité de A .

Plan

- 1 Introduction.
- 2 **Probabilité.**
- 3 Probabilité conditionnelle

Définition de la Probabilité et propositions.

Définition.

Une probabilité, notée P est une fonction de $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$ dans $[0, 1]$ telle que

Définition de la Probabilité et propositions.

Définition.

Une probabilité, notée P est une fonction de $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$ dans $[0, 1]$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$

Définition de la Probabilité et propositions.

Définition.

Une probabilité, notée P est une fonction de $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$ dans $[0, 1]$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont disjoints.

Définition de la Probabilité et propositions.

Définition.

Une probabilité, notée P est une fonction de $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$ dans $[0, 1]$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont disjoints.

Le triplet (Ω, \mathcal{F}, P) est appelé espace probabilisé. On en déduit quelques propriétés

Définition de la Probabilité et propositions.

Proposition.

Si P est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ alors pour tous A , et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition de la Probabilité et propositions.

Proposition.

Si P est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ alors pour tous A , et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. $P(\emptyset) = 0$.

Définition de la Probabilité et propositions.

Proposition.

Si P est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ alors pour tous A , et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Définition de la Probabilité et propositions.

Proposition.

Si P est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ alors pour tous A , et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Définition de la Probabilité et propositions.

Proposition.

Si P est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ alors pour tous A , et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Définition de la Probabilité et propositions.

Théorème.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini. Si P_1, P_2, \dots, P_n sont les probabilités des événements $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ on a

Définition de la Probabilité et propositions.

Théorème.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini. Si P_1, P_2, \dots, P_n sont les probabilités des événements $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ on a

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

Définition de la Probabilité et propositions.

Théorème.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini. Si P_1, P_2, \dots, P_n sont les probabilités des événements $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ on a

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

La probabilité P est unique et est définie par $\forall A \in \mathcal{F}(\Omega)$,

$$P(A) = \sum_{i=1}^m P_i.$$

Cas équiprobabilité.

Définition et propriété.

On dit qu'on a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ont la même probabilité de se produire : $P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{n}$.

On obtient,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}}$$

Cas équiprobabilité.

Définition et propriété.

On dit qu'on a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ont la même probabilité de se produire : $P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{n}$.

On obtient,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}}$$

Remarque

Cette formule n'est valable que lorsque les événements élémentaires sont bien équiprobables.

Cas équiprobabilité.

Définition et propriété.

On dit qu'on a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ont la même probabilité de se produire : $P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{n}$.

On obtient,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}}$$

Remarque

Cette formule n'est valable que lorsque les événements élémentaires sont bien équiprobables. Dans ce cas, il suffit de savoir calculer le cardinal des ensembles considérés pour calculer les probabilités.

Plan

- 1 Introduction.
- 2 Probabilité.
- 3 Probabilité conditionnelle

Exemple

Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon ?

Exemple

Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon ?
Information supplémentaire : Vous fumez une vingtaine de cigarettes par jour.

Exemple

Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon ?
Information supplémentaire : Vous fumez une vingtaine de cigarettes par jour. cette information va changer la probabilité.

Exemple

Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon ?
Information supplémentaire : Vous fumez une vingtaine de cigarettes par jour. cette information va changer la probabilité.
L'outil qui permet cette mise à jour est la probabilité conditionnelle.

Définition

Soient A et B deux événements avec $P(A) > 0$, on appelle probabilité de B sachant A , la probabilité notée $P(B | A)$ définie par

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(B | A) \times P(A)$.

Définition

Soient A et B deux événements avec $P(A) > 0$, on appelle probabilité de B sachant A , la probabilité notée $P(B | A)$ définie par

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(B | A) \times P(A)$.

De plus, la probabilité conditionnelle sachant A , est une nouvelle probabilité et possède donc toutes les propriétés d'une probabilité.

Exemples

Exemple1

Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit "gagné" ou soit "perdu".

Sur 15 boules rouges, il est marqué "gagné"

Sur 9 boules noires, il est marqué "gagné"

On tire au hasard une boule dans le sac.

Soit R l'événement "On tire une boule rouge"

Soit G l'événement "On tire une boule marquée gagné"

Quelle est la probabilité qu'on tire une boule marquée "gagné" sachant qu'elle est rouge ?

Formule des probabilités totales

Proposition

Soit $(A_i)_i$ une partition de Ω , telle que $P(A_i) > 0, \forall i \in I$.
Alors pour tout événement B .

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \mid A_i) P(A_i)$$

Formule de Bayes

Proposition

Soit $(A_i)_i$ une partition de Ω , telle que $P(A_i) > 0$, $\forall i \in I$. Soit un événement B tel que $P(B) > 0$. Alors pour tout $i \in I$

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{i \in I} P(B | A_i)P(A_i)}$$

Arbre pondéré

Définition

On utilise un arbre pondéré de probabilités pour dénombrer toutes les issues possibles, en précisant la probabilité de réalisation de chaque branche.

Arbre pondéré

Règles d'utilisation

R1 La probabilité de la branche partant de A vers B est égale à "la probabilité de B sachant que A est réalisé"

$$A \xrightarrow{P(B|A)} B$$

Arbre pondéré

Règles d'utilisation

R1 La probabilité de la branche partant de A vers B est égale à "la probabilité de B sachant que A est réalisé"

$$A \xrightarrow{P(B|A)} B$$

En particulier : la probabilité de la branche partant de Ω vers A est égale à $P(A)$ c'est-à-dire :

$$\Omega \xrightarrow{P(A)} A$$

Arbre pondéré

Règles d'utilisation

R1 La probabilité de la branche partant de A vers B est égale à "la probabilité de B sachant que A est réalisé"

$$A \xrightarrow{P(B|A)} B$$

En particulier : la probabilité de la branche partant de Ω vers A est égale à $P(A)$ c'est-à-dire :

$$\Omega \xrightarrow{P(A)} A$$

R2 La somme des probabilités des branches partant d'un même noeud est toujours égale à 1.

Arbre pondéré

Règles d'utilisation

R3 La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur toutes les branches de ce chemin.

Arbre pondéré

Règles d'utilisation

R3 La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur toutes les branches de ce chemin.

R4 La probabilité d'un événement E est égale à la somme des probabilités de tous les chemins qui conduisent à E .

Arbre pondéré

Exemple 2

Construire l'arbre pondéré de l'exemple 1.

Arbre pondéré

Exemple 3

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2% est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

- 1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
- 2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Arbre pondéré

Exemple 4

Un club sportif compte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique. Chaque inscrit pratique un seul sport. On donnera les valeurs exactes puis une valeur approchée arrondie au dix-millième près.

Parmi les inscrits en natation, 45% sont des filles. De même 20% des inscrits en athlétisme et 60% des inscrits en gymnastique sont des filles.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. On choisit un inscrit au hasard. Quelle est la probabilité que :
 - (a) ce soit une fille pratiquant l'athlétisme ?
 - (b) ce soit une fille ?
3. On choisit au hasard une fille, quelle est la probabilité qu'elle pratique l'athlétisme ?

Arbre pondéré

Exemple 5

Deux opérateurs de saisie, A et B, entrent respectivement 100 et 200 tableaux sur informatique. Les tableaux de A comportent des fautes dans 5,2% des cas et ceux de B dans 6,7% des cas. On prend un tableau au hasard. Il comporte des fautes. Quelle est la probabilité pour que A se soit occupé de ce tableau ?

Probabilité et indépendance

Définition

On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.