COURS. MATHEMATIQUES APPLIQUEES.OPTIMISATION DES FONCTIONS

Département Mathématiques.

PRESENTATION
Dr. André Souleye Diabang

14 février 2023

Plan

Plan

1. I. Optimisation sans contrainte (Libre)
   - 1. Optimisation d'une fonction d'une variable réelle
   - 2. Optimisation d'une fonction de deux variables.

Introduction

On s'intéresse ici à la recherche de minimum ou de maximum d'une fonction réelle f. Lorsque l'on cherche x vérifiant Minimiser $f(x)$, $x \in I$, ou Maximiser $f(x)$, $x \in I$ on dit que l'on a un problème d'optimisation. La fonction f est souvent appelée fonction objectif.

Introduction

Maximum et minimum

Soit f une fonction définie sur I et a un point de I.

Introduction

Maximum et minimum

Soit f une fonction définie sur I et a un point de I.
(1) On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $J \subset I$ et pour tout $x \in J$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)

Introduction

Maximum et minimum

Soit f une fonction définie sur I et a un point de I.
(1) On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $J \subset I$ et pour tout $x \in J$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)
(2) On dit que f admet un maximum global (resp. minimum global) en a pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)

Introduction

Maximum et minimum

Soit f une fonction définie sur I et a un point de I.
(1) On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $J \subset I$ et pour tout $x \in J$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)
(2) On dit que f admet un maximum global (resp. minimum global) en a pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)
(3) On dit que f admet un extremum en a si et seulement si f admet un minimum ou un maximum en a

Introduction

Remarque

Un extremum global est un extremum local.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$. Alors f admet un maximum et un minimum global sur cet intervalle I.

Conditions du 1^e ordre.

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un ouvert I et si f admet en un point x_0 de I un extremum, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Conditions du 1^e ordre.

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un ouvert I et si f admet en un point x_0 de I un extremum, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Remarques

Conditions du 1^e ordre.

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un ouvert I et si f admet en un point x_0 de I un extremum, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Remarques

–R1. La réciproque de ce théorème est fausse.
Contre-exemple : La fonction cube (en zéro, la dérivée s'annule mais ce n'est pas un extremum.)

Conditions du 1^e ordre.

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un ouvert I et si f admet en un point x_0 de I un extremum, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Remarques

–R1. La réciproque de ce théorème est fausse.
Contre-exemple : La fonction cube (en zéro, la dérivée s'annule mais ce n'est pas un extremum.)
–R2. Si $f'(x_0) = 0$ pour un point x_0 de I ouvert, on dit que x_0 est un point critique (ou stationnaire) de f. Le théorème précédent dit que les extremums sur l'ouvert I sont à chercher parmi les points critiques.
R3. Si on doit optimiser f sur $[a, b]$ fermé, on optimise f sur $]a, b[$ ouvert puis on regarde ce qui se passe en a et en b.

Conditions du second ordre.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f. Alors :

–

Conditions du second ordre.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f. Alors :

– Si $f"(x_0) > 0$, f présente en x_0 un minimum local.

–

Conditions du second ordre.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f. Alors :

– Si $f''(x_0) > 0$, f présente en x_0 un minimum local.

– Si $f''(x_0) < 0$, f présente en x_0 un maximum local.

–

Conditions du second ordre.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f. Alors :

– Si $f''(x_0) > 0$, f présente en x_0 un minimum local.

– Si $f''(x_0) < 0$, f présente en x_0 un maximum local.

– Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire.

Exercices

Exercice 01

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 12x + 3$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les dérivées première et seconde de f.
3. Construire le tableau de variations de f.
4. Les extrema de f sont-ils globaux ?

Exercices

Exercice 02

Le coût d'un produit varie selon la vitesse de production x, il se traduit par : $C(x) = x^2 - 6x + 10$. Déterminer le niveau de production donnant un coût minimal.

Exercices

Exercice 03

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les dérivées première et seconde de f.
3. Construire le tableau de variations de f.
4. Les extrema de f sont-ils globaux ?

Fonction de deux variables.

Définition

Une fonction à deux variables est une application
$f :]a, b[\times]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}\,;\ (x, y) \longmapsto f(x, y)$

Exemples.

La fonctions $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$ est une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.
La fonction $g(x, y) = \sqrt{x + 2y - 1}$.
Calculer $f(0, 1)$, $f(-3, 2)$, $g(0, 1)$ et $g(1, 0)$.

Fonction de deux variables.

Point critique

Soit f une fonction dérivable par rapport à chacune de ses variables. On a :
Si le point (x_0, y_0) est un extrémum de f, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Lorsque les 2 dérivées partielles sont nulles en (x_0, y_0), on dit que (x_0, y_0) est un poinr critique.

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Gradient d'une fonction

Soit f une fonction à deux variables continument dérivable 2 fois par rapport à chacune de ses variables.
Le gradient de f en (x_0, y_0) est
$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Gradient d'une fonction

Soit f une fonction à deux variables continument dérivable 2 fois par rapport à chacune de ses variables.
Le gradient de f en (x_0, y_0) est
$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$
On note usuellement :
$r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$,

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Gradient d'une fonction

Soit f une fonction à deux variables continument dérivable 2 fois par rapport à chacune de ses variables.
Le gradient de f en (x_0, y_0) est
$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$
On note usuellement :
$r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),$

Matrice Hessienne d'une fonction f

On appelle matrice hessienne de f en (x_0, y_0), la matrice :
$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Remarque

On a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Le résultat d'une dérivation à l'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation par rapport aux 2 variables considérées. (Théorème de Schwarz).

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Remarque

On a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Le résultat d'une dérivation à l'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation par rapport aux 2 variables considérées. (Théorème de Schwarz).

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Propriété

Si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, alors (x_0, y_0) est une point critique.

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Propriété

Si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, alors (x_0, y_0) est une point critique.
De plus :

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Propriété

Si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, alors (x_0, y_0) est une point critique.
De plus :
Si $det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ et $r > 0$, alors le point (x_0, y_0) est un minimum local.

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Propriété

Si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, alors (x_0, y_0) est une point critique.
De plus :
Si $det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ et $r > 0$, alors le point (x_0, y_0) est un minimum local.
Si $det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ et $r < 0$, alors le point (x_0, y_0) est un maximum local.

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Propriété

Si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, alors (x_0, y_0) est une point critique.
De plus :
Si $det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ et $r > 0$, alors le point (x_0, y_0) est un minimum local.
Si $det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ et $r < 0$, alors le point (x_0, y_0) est un maximum local.
Si $det(Hf(x_0, y_0)) < 0$, alors le point (x_0, y_0) est un point "selle" ou "col".

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Propriété

Si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, alors (x_0, y_0) est une point critique.
De plus :
Si $det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ et $r > 0$, alors le point (x_0, y_0) est un minimum local.
Si $det(Hf(x_0, y_0)) > 0$ et $r < 0$, alors le point (x_0, y_0) est un maximum local.
Si $det(Hf(x_0, y_0)) < 0$, alors le point (x_0, y_0) est un point "selle" ou "col".
Si $det(Hf(x_0, y_0)) = 0$, alors On ne peut pas conclure.

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Exemple

Optimiser les fonctions suivantes :
$f(x, y) = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4.$

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Exemple

Optimiser les fonctions suivantes :
$f(x, y) = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4.$
$g(x, y) = 2x^2 + 6y^2 - 5x + 4y.$

Condition suffisante (Ordre 2) pour extremums locaux.

Exemple

Optimiser les fonctions suivantes :

$f(x, y) = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4.$

$g(x, y) = 2x^2 + 6y^2 - 5x + 4y.$

$h(x, y) = xy^2 + 2x^2 + y^2.$