COURS. STATISTIQUE DESCRIPTIVE
Chapitre 02. Calcul Matriciel

Département Mathématiques.

PRESENTATION
Dr. André Souleye Diabang

22 mars 2022

Plan

Plan

DEFINITION. 1

DEFINITIONS.

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments réels.

DEFINITION. 1

DEFINITIONS.

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments réels.Elle est dite de taille (ordre) $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.

DEFINITION. 1

DEFINITIONS.

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments réels.Elle est dite de taille (ordre) $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.

DEFINITION. 1

DEFINITIONS.

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments réels.Elle est dite de taille (ordre) $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.Le coefficient situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne est noté a_{ij}.

DEFINITION. 1

DEFINITIONS.

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments réels.Elle est dite de taille (ordre) $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.Le coefficient situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne est noté a_{ij}.Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

DEFINITION. 1

DEFINITIONS.

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments réels.Elle est dite de taille (ordre) $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.Le coefficient situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne est noté a_{ij}.Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

DEFINITION. 1

DEFINITIONS.

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments réels.Elle est dite de taille (ordre) $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.Le coefficient situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne est noté a_{ij}.Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad ou$$

DEFINITION. 1

DEFINITIONS.

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments réels.Elle est dite de taille (ordre) $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.Le coefficient situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne est noté a_{ij}.Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad ou \quad A = (a_{ij})$$

Exemple 1.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3.

DEFINITION. 2

DEFINITION.

– Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colones.

DEFINITION. 2

DEFINITION.

– Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colones.
– Une matrice ligne est une matrice dont le nombre de lignes est égal à 1.

DEFINITION. 2

DEFINITION.

– Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colones.
– Une matrice ligne est une matrice dont le nombre de lignes est égal à 1.
– Une matrice colonne est une matrice dont le nombrre de colonnes est égal à 1.

Exemple 2.

– $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carré d'ordre 2.

Exemple 2.

– $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carré d'ordre 2.

– $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne d'ordre 1×5.

Exemple 2.

– $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carré d'ordre 2.

– $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne d'ordre 1×5.

– $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de taille 4×1.

DEFINITION

REMARQUE

Pour une matrice carrée, on appelle **diagonale principale**, la diagonale qui relie le coin situé en haut à gauche au coin situé en bas à droite. Sur l'exemple ci-dessous, les coefficients de la diagonale principale sont marqués en gras.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{7} & -8 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & \mathbf{6} & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & \mathbf{3} & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Matrices Particuliers

Matrices : nulle, diagonale, identité

Matrices Particuliers

Matrices : nulle, diagonale, identité

– La matrice **nulle** d'ordre $n \times p$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

Matrices Particuliers

Matrices : nulle, diagonale, identité

– La matrice **nulle** d'ordre $n \times p$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.
– Une matrice **diagonale** est une matrice carrée dont tous les coefficients situés en dehors de la diagonale principale sont nuls.

Matrices Particuliers

Matrices : nulle, diagonale, identité

– La matrice **nulle** d'ordre $n \times p$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

– Une matrice **diagonale** est une matrice carrée dont tous les coefficients situés en dehors de la diagonale principale sont nuls.

– La matrice **identité** d'ordre n est la matrice carrée d'ordre n, qui contient des 1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs notée :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.

– $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 4.

Exemple 3.

– $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 4.

– $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice identité d'ordre 2.

Matrices Particuliers

Matrices : Supérieure-inférieure

Matrices Particuliers

Matrices : Supérieure-inférieure

– Les matrices **triangulaires** sont des matrices carrées dont une partie triangulaire des valeurs, délimitée par la diagonale principale, est nulle.

Matrices Particuliers

Matrices : Supérieure-inférieure

– Les matrices **triangulaires** sont des matrices carrées dont une partie triangulaire des valeurs, délimitée par la diagonale principale, est nulle.

– Une matrice **triangulaire supérieure** est une matrice carrée dont les valeurs sous la diagonale principale sont nulles :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$ est triangulaire supérieur si

$\forall i > j \; a_{ij} = 0$

Matrices Particuliers

Matrices : Supérieure-inférieure

Matrices Particuliers

Matrices : Supérieure-inférieure

– Une matrice **triangulaire inférieure** est une matrice carrée dont les valeurs au-dessus de la diagonale principale sont nulles : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieur si $\forall i < j \; a_{ij} = 0$

Exemple 3.

– $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre 4.

Exemple 3.

– $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure d'ordre 4.

– $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure d'ordre 3.

Plan

SOMME DE MATRICES

Définition

SOMME DE MATRICES

Définition

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même ordre. La somme $A + B$ des matrices A et B s'obtient en ajoutant les coefficients de A aux coefficients de B situés à la même position.

SOMME DE MATRICES

Définition

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même ordre. La somme $A + B$ des matrices A et B s'obtient en ajoutant les coefficients de A aux coefficients de B situés à la même position.
$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Exemple 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & -1 & 9 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 & 7 \\ 9 & -1 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

Remarque

– On ne peut additionner deux matrices que si elles ont les même dimensions, c'est à dire le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

Remarque

– On ne peut additionner deux matrices que si elles ont les même dimensions, c'est à dire le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.
On définit de manière analogue la différence de deux matrices.

PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN NOMBRE REEL

Définition

PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN NOMBRE REEL

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice et α un nombre réel.

PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN NOMBRE REEL

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice et α un nombre réel.
Le produit αA est la matrice obtenue en multipliant chacun des coefficients de A par α.

Exemple.

PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN NOMBRE REEL

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice et α un nombre réel.
Le produit αA est la matrice obtenue en multipliant chacun des coefficients de A par α.

Exemple.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, alors $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 18 & 4 \end{pmatrix}$ et
$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -9 & -2 \end{pmatrix}$

PROPRIETE

Soient A, B et C trois matrices de mêmes dimensions et α et α' deux réels.

PROPRIETE

Soient A, B et C trois matrices de mêmes dimensions et α et α' deux réels.

$A + B = B + A$

PROPRIETE

Soient A, B et C trois matrices de mêmes dimensions et α et α' deux réels.

$A + B = B + A$

(A+B)+C=A+(B+C)

PROPRIETE

Soient A, B et C trois matrices de mêmes dimensions et α et α' deux réels.

$A + B = B + A$

(A+B)+C=A+(B+C)

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Multiplication de deux matrices.

Définition.

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$.

Multiplication de deux matrices.

Définition.

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$.
Alors le produit $AB = (c_{ij})$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

Multiplication de deux matrices.

Définition.

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$.
Alors le produit $AB = (c_{ij})$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Multiplication de deux matrices.

Définition.

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$.
Alors le produit $AB = (c_{ij})$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Remarque

Le produit AB de deux matrices A et B est défini

Multiplication de deux matrices.

Définition.

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$.
Alors le produit $AB = (c_{ij})$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Remarque

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A

Multiplication de deux matrices.

Définition.

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$.
Alors le produit $AB = (c_{ij})$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Remarque

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Multiplication de deux matrices

Exemple.

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Multiplication de deux matrices

Exemple.

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer si possible AB et BA.

Multiplication de deux matrices

Propriété.

Soient A, B, et C trois matrices. On a

Multiplication de deux matrices

Propriété.

Soient A, B, et C trois matrices. On a

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$

Multiplication de deux matrices

Propriété.

Soient A, B, et C trois matrices. On a

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$
3. $A.0 = 0$,

Multiplication de deux matrices

Propriété.

Soient A, B, et C trois matrices. On a

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$
3. $A.0 = 0$, $0.A = 0$

Multiplication de deux matrices

Propriété.

Soient A, B, et C trois matrices. On a

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$
3. $A.0 = 0$, $0.A = 0$ et $A.I_n = I_n.A = A$.

Puissance d'une matrice.

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit les puissances successives de A par

Puissance d'une matrice.

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit les puissances successives de A par
$A^0 = I_n$,

Puissance d'une matrice.

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit les puissances successives de A par
$A^0 = I_n, \ A^1 = A$

Puissance d'une matrice.

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit les puissances successives de A par
$A^0 = I_n$, $A^1 = A$ $A^2 = A \times A$

Puissance d'une matrice.

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit les puissances successives de A par
$A^0 = I_n$, $A^1 = A$ $A^2 = A \times A$ $A^3 = A^2 \times A = A \times A^2$.

Puissance d'une matrice.

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit les puissances successives de A par
$A^0 = I_n$, $A^1 = A$ $A^2 = A \times A$ $A^3 = A^2 \times A = A \times A^2$.
et $A^{p+1} = A^p \times A = A \times A^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Puissance d'une matrice.

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit les puissances successives de A par
$A^0 = I_n,\ A^1 = A\ A^2 = A \times A\ A^3 = A^2 \times A = A \times A^2$.
et $A^{p+1} = A^p \times A = A \times A^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exemple

Calculer A^n pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Formule du binôme.

Calcul de $(A+B)^n$ lorsque $AB = BA$

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n qui commutent, c'est à dire $AB = BA$,

Formule du binôme.

Calcul de $(A+B)^n$ lorsque $AB = BA$

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n qui commutent, c'est à dire $AB = BA$, alors pour tout entier n on a la formule

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

Formule du binôme.

Calcul de $(A+B)^n$ lorsque $AB = BA$

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n qui commutent, c'est à dire $AB = BA$, alors pour tout entier n on a la formule

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On pose $N = A - I_3$ Calculer les puissances de N puis en déduire A^n.

Plan

Déterminant d'une matrice.

Déterminant d'une matrice.

Définition.

À toute matrice carrée A correspond une valeur réelle appelée le déterminant de A,que l'on dénote par $det(A)$ ou encore $|A|$.

Déterminant d'une matrice.

Définition.

À toute matrice carrée A correspond une valeur réelle appelée le déterminant de A,que l'on dénote par $det(A)$ ou encore $|A|$. Nous éviterons la définition formelle du déterminant (qui implique des notions de permutations) mais allons plutôt nous concentrer sur le calcul celui-ci.

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2.

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2.

Définition.

Considérons A une matrice carrée d'ordre 2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Le déterminant de la matrice A est définie par la relation :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Le résultat est donc obtenu en effectuant le produit des éléments opposés et en calculant la différence entre ces deux produits.

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2.

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2.

Exemple.

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Avant de ne pouvoir évaluer le déterminant d'une matrice 3×3 (ou toute autre matrice d'ordre supérieure), il nous faut d'abord voir quelques concepts qui s'y rattachent...

Définition d'un mineur.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1ère ligne et la 2ème colonne de A. C'est-à-dire

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 24 = -9$$

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 2^e ligne et la 2^e colonne de A. C'est-à-dire

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 6 - 32 = -26$$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Définition d'un cofacteur.

Le cofacteur C_{ij} d'une matrice A est déini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Définition d'un cofacteur.

Le cofacteur C_{ij} d'une matrice A est déini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

L'exermple précédent on a

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Définition d'un cofacteur.

Le cofacteur C_{ij} d'une matrice A est déini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

L'exermple précédent on a
$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 9$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Définition d'un cofacteur.

Le cofacteur C_{ij} d'une matrice A est déini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

L'exermple précédent on a
$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 9$
$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = -26.$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

♣ Choisir une ligne ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la ligne ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

♣ Choisir une ligne ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la ligne ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)

♣ Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la ligne (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij} correspondant.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

♣ Choisir une ligne ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la ligne ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)

♣ Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la ligne (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij} correspondant.

♣ Faire la somme de ces résultats.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Si on choisit de faire une expansion de la première ligne, alors

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Si on choisit de faire une expansion de la première ligne, alors

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Si l'on avait choisi de faire une expansion de la deuxième colonne, alors il faut calculer

$$det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3.

Calcul du déterminant.

Si on choisit de faire une expansion de la première ligne, alors

$$det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Si l'on avait choisi de faire une expansion de la deuxième colonne, alors il faut calculer

$$det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

Le résultat du déterminant sera le même quelque soit le choix de la ligne ou de la colonne. Vérifions par un exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice.

Inverse d'une matrice.

Définition .

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Inverse d'une matrice.

Définition .

Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est dite inversible s'il existe une matrice carrée A' d'ordre n telle que
$AA' = A'A = I_n$.
La matrice A' est aussi inversible appelée l'inverse de A et notée $A^{-1} = A'$

Calcul de l'inverse pour une matrice carrée d'ordre 2×2.

Théorème

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Calcul de l'inverse pour une matrice carrée d'ordre 2×2.

Exemple

Calculer si possible l'inverse des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$

Inverse d'une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$.

Exemple.

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2, A^3.

2) Calculer $-A^3 + 11A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

Inverse d'une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$.

Théorème.

Une matrice A est inversible, si et seulement si, $det(A) \neq 0$. et

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \left(A^{\star}\right)^{t}$$

avec $A^{\star} = (C_{ij})$ appelée la comatrice de A.

Inverse d'une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$

Exemple.

Calculer si possible l'inverse des matrices suivantes

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Plan