COURS. PROBABILITE.
Chapitre 03: Variables aléatoires et loi de probabilité

Département Mathématiques.

PRESENTATION
Dr. André Souleye Diabang.

10 octobre 2022

Plan

Plan

Etude d'exemple.

Exemple

Un joueur lance un dé cubique équilibré.

Etude d'exemple.

Exemple

Un joueur lance un dé cubique équilibré.
Si le numéro obtenu est 1, 2, 3, ou 4, on perd 500 Francs.

Etude d'exemple.

Exemple

Un joueur lance un dé cubique équilibré.
Si le numéro obtenu est 1, 2, 3, ou 4, on perd 500 Francs.
Si le numéro obtenu est 5, on gagne 700 Francs.

Etude d'exemple.

Exemple

Un joueur lance un dé cubique équilibré.
Si le numéro obtenu est 1, 2, 3, ou 4, on perd 500 Francs.
Si le numéro obtenu est 5, on gagne 700 Francs.
Si le numéro obtenu est 6, on gagne 1000 Francs.

Etude d'exemple.

Exemple

Un joueur lance un dé cubique équilibré.
Si le numéro obtenu est 1, 2, 3, ou 4, on perd 500 Francs.
Si le numéro obtenu est 5, on gagne 700 Francs.
Si le numéro obtenu est 6, on gagne 1000 Francs.
On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Etude d'exemple.

Exemple

Un joueur lance un dé cubique équilibré.
Si le numéro obtenu est 1, 2, 3, ou 4, on perd 500 Francs.
Si le numéro obtenu est 5, on gagne 700 Francs.
Si le numéro obtenu est 6, on gagne 1000 Francs.
On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Déterminer les valeurs de X, et pour chaque valeur calculer sa probabilité

Définition

Variable aléatoire discrète et continue

• Une variable aléatoire est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un réel.

Définition

Variable aléatoire discrète et continue

• Une variable aléatoire est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un réel.

• Lorsque la variable X ne prend que des valeurs discrètes, on parle de variable aléatoire discrète.

Définition

Variable aléatoire discrète et continue

• Une variable aléatoire est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un réel.
• Lorsque la variable X ne prend que des valeurs discrètes, on parle de variable aléatoire discrète.
• Lorsque les valeurs possibles de X sont réparties de façon continue sur un intervalle, on parle de variable aléatoire continue.

Définition

Variable aléatoire discrète et continue

• Une variable aléatoire est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un réel.
• Lorsque la variable X ne prend que des valeurs discrètes, on parle de variable aléatoire discrète.
• Lorsque les valeurs possibles de X sont réparties de façon continue sur un intervalle, on parle de variable aléatoire continue.

Définition

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités p_i des événements $X = x_i$, x_i parcourant l'univers image (support de X) $X(\Omega)$.

Définition

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités p_i des événements $X = x_i$, x_i parcourant l'univers image (support de X) $X(\Omega)$. La loi de probabilité est donnée par les $(x_i; p_i)$.

Variable aléatoire et loi de probabilité

Exemples

$E1$ On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la variable aléatoire X égale à la somme des points.

Variable aléatoire et loi de probabilité

Exemples

$E1$ On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la variable aléatoire X égale à la somme des points.
Déterminer $X(\Omega)$ et sa loi de probabilité.

Variable aléatoire et loi de probabilité

Exemples

$E1$ On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la variable aléatoire X égale à la somme des points.
Déterminer $X(\Omega)$ et sa loi de probabilité.
$E2$ On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la variable aléatoire Y égale au plus grand chiffre obtenu.

Variable aléatoire et loi de probabilité

Exemples

$E1$ On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la variable aléatoire X égale à la somme des points.
Déterminer $X(\Omega)$ et sa loi de probabilité.
$E2$ On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la variable aléatoire Y égale au plus grand chiffre obtenu.
Déterminer $Y(\Omega)$ et sa loi de probabilité.

Plan

Espérance mathématique

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers probabilisé Ω, on appelle espérance de X, le réel défini par :

Espérance mathématique

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers probabilisé Ω, on appelle espérance de X, le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad avec p_i = P(X = x_i)$$

Espérance mathématique

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors

Espérance mathématique

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, adméttant une espérance, alors

1.$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Espérance mathématique

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, adméttant une espérance, alors

1.$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

2. $E(aX) = aE(X)$ et $E(a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Variance et Ecart-type

Définition

La variance d'une variable aléatoire $V(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique.

Variance et Ecart-type

Définition

La variance d'une variable aléatoire $V(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique. c'est à dire le nombre

Variance et Ecart-type

Définition

La variance d'une variable aléatoire $V(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique. c'est à dire le nombre

$$V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$$

Variance et Ecart-type

Définition

La variance d'une variable aléatoire $V(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique. c'est à dire le nombre

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

On appelle écart-type de X le nombre réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Covariance d'un couple de variables aléatoires

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, adméttant une espérance,

Covariance d'un couple de variables aléatoires

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, adméttant une espérance, La covariance du couple (X, Y) est le nombre

Covariance d'un couple de variables aléatoires

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, La covariance du couple (X, Y) est le nombre

$$cov(X, Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Variance et Ecart-type

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, adméttant une espérance, alors

Variance et Ecart-type

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, adméttant une espérance, alors
1. $V(aX+b) = a^2V(X)$ pour tous a, $b \in \mathbb{R}$.

Variance et Ecart-type

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, adméttant une espérance, alors
1. $V(aX+b) = a^2V(X)$ pour tous a, $b \in \mathbb{R}$.
2. $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$.

Variance et Ecart-type

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, adméttant une espérance, alors

1. $V(aX+b)=a^2V(X)$ pour tous a, $b\in\mathbb{R}$.
2. $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2cov(X,Y)$.
3. X et Y sont indépendantes si et seulement si $cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$.

Variance et Ecart-type

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, adméttant une espérance, alors

1. $V(aX + b) = a^2V(X)$ pour tous a, $b \in \mathbb{R}$.
2. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$.
3. X et Y sont indépendantes si et seulement si $cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$.
4. Si X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Application

Exercice

1) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$, En déduire $E(20X+200)$ et $V(20X+200)$.

Application

Exercice

1) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$, En déduire $E(20X+200)$ et $V(20X+200)$.
2) Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$, En déduire $E(20Y+200)$ et $V(20Y+200)$.

Plan

1. Variables aléatoires et loi de probabilité
2. Espérance mathématique ; variance ; écart-type
3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.
4. Représentation graphique.
5. Applications

Fonction de répartition

Définition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X, la fonction F_X telle que :

Fonction de répartition

Définition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X, la fonction F_X telle que :$F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x)$

Fonction de répartition

Définition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X, la fonction F_X telle que :$F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x)$
Concrètement la fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées.

Fonction de répartition.

Proposition.

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X, alors :

Fonction de répartition.

Proposition.

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X, alors :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

Fonction de répartition.

Proposition.

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X, alors :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

Fonction de répartition.

Proposition.

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X, alors :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition.

Proposition.

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X, alors :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F_X(x) = 1$
4. Si $a \leq b$, $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Plan

d'une loi de Probabilité.

Définition.

On représente en général le diagramme en bâtons pour la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

d'une loi de Probabilité.

Définition.

On représente en général le diagramme en bâtons pour la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

Exemple

Représenter la loi de probabilité de X.

d'une fonction de répartition.

Définition.

On représente en général le diagramme cumulatif pour la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

d'une fonction de répartition.

Définition.

On représente en général le diagramme cumulatif pour la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

Exemple

Représenter la fonction de répartition de X.

Plan

Applications.

Application1.

A) On lance trois pièces équilibrées. On désigne par X le nombre de piles.

Applications.

Application1.

A) On lance trois pièces équilibrées. On désigne par X le nombre de piles.
1) Déterminer la loi de probabilité de X. Puis sa fonction de répartition.

Applications.

Application1.

A) On lance trois pièces équilibrées. On désigne par X le nombre de piles.
1) Déterminer la loi de probabilité de X. Puis sa fonction de répartition.
2) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Applications.

Application1.

A) On lance trois pièces équilibrées. On désigne par X le nombre de piles.
1) Déterminer la loi de probabilité de X. Puis sa fonction de répartition.
2) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3) Représenter la loi de probabilité et la fonction de répartition de X.

Applications.

Application1.

A) On lance trois pièces équilibrées. On désigne par X le nombre de piles.
1) Déterminer la loi de probabilité de X. Puis sa fonction de répartition.
2) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3) Représenter la loi de probabilité et la fonction de répartition de X.
B) On pose $Y = 2X + 1$. Déterminer la loi de probabilité de Y . Puis calculer $E(Y)$ et $V(Y)$

Applications.

Application 2.

A) Une variable aléatoire X est établie par la loi de probabilité suivante :

x	-2	-1	0	1	2	3
P(X=x)	0,3	0,05	0,1	p	0,2	0,05

Soit F sa fonction de répartition.
1) Calculer p.
2) Calculer $F(0,5)$ et $F(1,2)$.
3) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\Omega(X)$.
B) On pose Y = 2X + 4. Déterminer la loi de probabilité de Y . Puis calculer E(Y) et V (Y).