

L2 ISM. 2022-2023. Semestre 4. Mathématiques.
DEVOIR MAISON A RENDRE (01 – 05 au 06 – 05)

Exercice 1.

Un industriel produit simultanément 2 biens A et B dont il a le monopole de la production et de la vente dans un pays. Soit x la quantité produite du premier bien et y la quantité produite du second. Les prix p_A et p_B auxquels il vend respectivement les biens A et B sont fonction des quantités écoulées selon les relations $p_A(x) = 33 - 4x$ et $p_B(y) = 27 - y$. Le coût de production total des quantités x et y est la fonction $c(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy$. Le bénéfice de l'entreprise si elle vend les quantités x et y est donc la fonction $B(x, y)$.

1) L'industriel peut produire simultanément au mieux 5 biens. En supposant que l'entreprise désire utiliser à pleine capacité son usine, trouver la répartition de la production mensuelle permettant de maximiser le bénéfice de l'entreprise. Donner la valeur maximale du bénéfice ainsi que les prix de vente de chacun des biens.

2) L'industriel s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise le bénéfice sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du bénéfice. La solution obtenue est-elle réalisable pour l'industriel ?

Exercice 2.

Une grande brasserie veut allouer un budget de 500000 Euros à la publicité au cours des six prochains mois. Les annonces publicitaires seront présentées dans deux médias : la télévision et les journaux. Les profits générés par cette campagne sont estimés par la fonction suivante : $p(x, y) = -x^2 - y^2 + 500x + 1000y$.

où x représente le montant investi dans la publicité dans les journaux (en milliers d'Euros) et y montant investi dans la publicité à la télévision (en milliers d'Euros).

1) En considérant que le budget est totalement dépensé, déterminer l'allocation aux deux médias qui permette de maximiser les profits de la brasserie. Quel est le profit maximum obtenu ? Vérifier que le point stationnaire est un maximum absolu.

2) La brasserie s'interroge sur la pertinence de vouloir utiliser la totalité du budget. Elle se demande si la solution qu'elle obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-la à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise les profits sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu. La solution obtenue est-elle réalisable ?

3) En exploitant les résultats obtenus aux points précédents, suggériez-vous à la brasserie de diminuer le budget consacré à la publicité ou d'utiliser la totalité du budget alloué ?

Exercice 3.

Au ministère de l'agriculture, on a établi que le profit annuel (en Euros) pour les fermes cultivant des germes de soja et des pistaches est exprimé par la fonction $P(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$.

Où x représente le nombre d'acres plantés en germes de soja et y le nombre d'acres planté en pistaches.

1) Un fermier possède une terre de 500 acres. En supposant qu'il désire utiliser à pleine capacité ses terres, trouver la répartition de la production permettant de maximiser son profit. Prouver qu'il s'agit bien d'un maximum absolu.

2) Le fermier s'interroge sur la pertinence de vouloir cultiver à pleine capacité ses terres. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise le profit sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu. La solution obtenue est-elle réalisable ?

3) En exploitant les résultats obtenus aux point précédent, suggériez-vous au fermier de diminuer la surface totale consacrée à ces deux cultures ou d'utiliser à pleine capacité ses terres ?

Exercice 4.

Une entreprise fabrique deux modèles de vélos de montagne : le modèle X est plus abordable et se vend 500 Euros l'unité, tandis que le modèle Y se vend 1000 Euros l'unité. Les coûts totaux de fabrication (en Euros) sont exprimés par la fonction $c(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - \frac{5}{2}xy + 10000$ où x est le nombre de vélos du modèle X et y est le nombre de vélos du modèle Y , produits mensuellement. On suppose que chaque vélo produit peut être vendu sur le marché. 1) Écrire $P(x, y)$ la fonction des profits totaux mensuels.

2) La capacité de production de l'entreprise est de 150 vélos par mois. En supposant que l'entreprise désire utiliser à pleine capacité son usine, trouver la répartition de la production mensuelle permettant de maximiser les profits. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du profit mensuel.

3) Le patron de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise les profits sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du profit mensuel. La solution obtenue est-elle réalisable pour l'entreprise ?