RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

16 janvier 2023

Table des matières

Chapitre 1

Programmation linéaire : Méthode du simplexe

1.1 Problèmes de maximisation

1.1.1 Exemple de problème à résoudre par Simplexe

Exemple 1.1.1 *Un fabricant produit des tables et des bureaux. Chaque table nécessite 2h30mn pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 1h pour la mise en caisse. Chaque bureau exige 1h pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 2h pour la mise en caisse. L'entreprise dispose, chaque semaine, de 20h pour l'assemblage, 30h pour le polissage et 16h pour la mise en caisse. Sa marge de profit est de 3 000 F par table et de 4 000 F par bureau.*

1. *Déterminer la combinaison de produits (nombre de tables et de bureaux à fabriquer) qui maximisera les profits hebdomadaires de l'entreprise.*
2. *Quel sera ce profit maximum ?*

N.B. :
La résolution de ce problème nécessite les étapes suivantes :

1. Analyse du problème
2. Système des contraintes
3. Programme mathématique à résoudre (Ajout des variables d'écarts)
4. Déroulement de l'algorithme
5. Résultats et conclusion

1.1.2 Résolution du problème

Analyse du problème

Ressources/Produits	Tables	Bureaux	Disponibilités
Assemblage	2,5h	1h	20h
Polissage	3h	3h	30h
Mise en caisse	1h	2h	16h
Marge de profit	3000	4000	

Système de contraintes

Soient x_1 le nombre de tables à fabriquer et x_2 le nombre de bureaux à fabriquer.
Le système des contraintes est :

$$\begin{cases} 2,5x_1 + x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La fonction économique à maximiser est : $Z(x_1, x_2) = 3000x_1 + 4000x_2$

— La matrice

$$T = \begin{pmatrix} 2,5 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

du système des contraintes est appelée **matrice technologique** de l'entreprise

—

$$\begin{cases} 2,5x_1 + x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

représente les contraintes de production

— $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ sont des contraintes logiques

— Les coefficients 3000 et 4000 de la fonction économique à maximiser sont appelés **indicateurs**

Programme mathématique à résoudre (ajout des variables d'écart)

On transforme les inégalités du système des contraintes en égalités en ajoutant des **variables d'écart** e_1, e_2 et e_3 :

$$\begin{cases} MaxZ(x_1, x_2) = 3000x_1 + 4000x_2 \\ 2,5x_1 + x_2 + e_1 = 20 \\ 3x_1 + 3x_2 + e_2 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + e_3 = 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Déroulement de l'algorithme du simplexe

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	Disponibilités	Ratio
e_1	2,5	1	1	0	0	20	$\frac{20}{1} = 20$
e_2	3	3	0	1	0	30	$\frac{30}{3} = 10$
e_3	1	**2**	0	0	1	16	$\frac{16}{2} = \underline{8}$
Z	3000	$\underline{4000}$	0	0	0		

Etape 1 : choix du pivot

Après avoir mis le programme sous forme de tableau, on cherche **le pivot.** Pour cela on détermine **la colonne pivot** qui correspond à celle du plus grand indicateur positif (dans l'exemple c'est 4000 : on dit que x_2 entre dans la base). Ensuite on détermine **la ligne pivot** qui est celle du plus petit ratio positif (dans l'exemple c'est 8 : on dit que e_3 sort de la base). L'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot donne le pivot (dans l'exemple le pivot est 2).

N.B. :

- les ratios sont obtenus en divisant les valeurs des disponibilités par les valeurs de la colonne pivot (lorsqu'ils ne sont pas nuls)
- dans la base, la variable qui sort est remplacée par celle qui entre.

Etape 2 : pivotage

On annule tous les coefficients de la colonne pivot (sauf l'élèment pivot) en utilisant des combinaisons linéaires des lignes correspondantes avec la ligne pivot (méthode du pivot de Gauss), ce qui conduit à un nouveau tableau. On revient ensuite à la première étape.

Remarque 1.1.1 *:*
Lorsque l'on fait l'option de ne pas réduire la valeur du pivot à 1, les combinaisons linéaires doivent être effectuées de manière à ce que les valeurs des disponibilités restent toujours positives tandis que la valeur de la dernière ligne sous la colonne des disponibilités doit rester négative.

Etape 3 : condition d'arrêt

L'algorithme est terminé lorsque tous les coefficients de la dernière ligne du tableau sont négatifs ou nuls.

Deuxième tableau :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	Disponibilités	Ratio
e_1	2	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	12	$\frac{12}{2} = 6$
e_2	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	0	0	1	$\frac{-3}{2}$	6	$\frac{6}{\frac{3}{2}} = \underline{4}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	8	$\frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$
Z	<u>1000</u>	0	0	0	-2000	-32000	

Troisième tableau :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	Disponibilités
e_1	0	0	1	$\frac{-4}{3}$	$\frac{3}{2}$	4
x_1	1	0	0	$\frac{2}{3}$	-1	4
x_2	0	1	0	$\frac{-1}{3}$	1	6
Z	0	0	0	$\frac{-2000}{3}$	-1000	-36000

Dans ce troisième tableau tous les coefficients de la dernière ligne sont négatifs ou nuls : c'est le dernier tableau

Résultats et conclusion

Dans le dernier tableau, on considère les variables de la fonction économique qui se retrouvent dans la base.

<u>**Remarque**</u> **1.1.2** *:*
Toute variable de la fonction économique qui ne se retrouve pas dans la base du dernier tableau a pour valeur 0.

Dans notre exemple, $x_1 = 4$ et $x_2 = 6$.

Conclusion :
Pour maximiser son profit, l'entreprise doit produire **4 tables et 6 bureaux**. Ce profit maximum est **36000 F.**

1.2 Résumé de l'algorithme du simplexe (Maximisation)

Soit à résoudre le programme suivant (forme canonique) :

$$\begin{cases} Z(x_1, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. On transforme les inégalités en égalités en ajoutant les variables d'écart (on obtient la forme standard)

$$\begin{cases} Z(x_1, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + e_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + e_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + e_3 = b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. On établit le premier tableau du simplexe :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Disponibilités
e_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1
e_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	b_2
e_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3
Z	c_1	c_2	c_3	0	0	0	

3. Déroulement :
   1ère étape : choix du pivot
   -On cherche dans **la dernière ligne du tableau le coefficient positif le plus grand** et on sélectionne la colonne correspondante : **c'est la colonne pivot.**
   -On divise les coefficients de la colonne des disponibilités par les coefficients correspondant de la colonne pivot, quand ils ne sont pas nuls et on sélectionne la ligne correspondant **au plus petit résultat positif : c'est la ligne pivot.**
   - Le coefficient placé à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot est choisi comme **élément pivot.**

   2ème étape : pivotage
   On annule tous les autres coefficients de la colonne pivot (donc sauf l'élément pivot) en utilisant des combinaisons linéaires des lignes correspondantes avec la ligne pivot **(méthode du pivot de Gauss)**. On obtient donc un nouveau tableau puis on revient à la première étape.

   3ème étape : condition d'arrêt
   L'algorithme est terminé lorsque **tous les coefficients de la dernière ligne du tableau sont négatifs ou nuls.**

1.2.1 Exercices

Résoudre les problème de maximisation du chapitre précédent en utilisant la méthode du simplexe.

1.3 Problèmes de minimisation ; dualité

1.3.1 Dualité

Le **dual** du problème (considéré comme **primal**)

$$\begin{cases} maxZ(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \dots \vdots \dots \vdots \dots \vdots \dots\dots\dots \vdots \dots \vdots \dots \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_n \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

est :

$$\begin{cases} minZ(u_1,...,u_n) = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n \\ a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_n \geq c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_n \geq c_2 \\ \vdots \dots \vdots \dots \vdots \dots \vdots \dots\dots\dots \vdots \dots \vdots \dots \vdots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_n \geq c_n \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

1.3.2 Passage du primal au dual

1. Les coefficients de la fonction économique deviennent les seconds membres des contraintes et vice versa
2. Les variables des deux problèmes sont positives ou nulles
3. Les inégalité des contraintes changent de sens
4. Les matrices des coefficients affectés aux deux variables dans les contraintes des deux problèmes sont transposées l'une de l'autre.

Le dual du dual est le primal et on passe de la solution de l'un des deux problèmes à celle de l'autre grâce aux théorèmes suivants :

Théorème 1.3.1 *:*
Si le primal a une solution, le dual en a une aussi, et le maximum de l'un est égal au minimum de l'autre.

Théorème 1.3.2 *:*
*Si la **i-ème variable** est **non nulle** à l'optimum du primal, alors la **i-ème contrainte** est **saturée** à l'optimum du dual.*

Théorème 1.3.3 *:*
*Si la **i-ème contrainte** est **non saturée** à l'optimum du primal, alors la **i-ème variable** est **saturée** à l'optimum du dual.*

Exemple 1.3.1 *:*

$$\begin{cases} minZ = 20u_1 + 25u_2 \\ u_1 + 5u_2 \geq 5 \\ u_1 + 2u_2 \geq 4 \\ 3u_1 + 2u_2 \geq 6 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution :
Le système (primal)

$$\begin{cases} minZ = 20u_1 + 25u_2 \\ u_1 + 5u_2 \geq 5 \\ u_1 + 2u_2 \geq 4 \\ 3u_1 + 2u_2 \geq 6 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{a pour dual} \quad \begin{cases} maxZ = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard : ajoutons les variables d'écart pour transformer les inégalités en égalités.

$$\begin{cases} maxZ = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + e_1 = 20 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + e_2 = 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

On établit le premier tableau du simplexe :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	Disponibilités	Ratio
e_1	1	1	$\mathbf{3}$	1	0	20	$\frac{20}{3} = \underline{3,3}$
e_2	5	2	2	0	1	25	$\frac{25}{2} = 12,5$
Z	5	4	$\underline{6}$	0	0		

Le deuxième tableau est :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	Disponibilités	Ratio
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3} \div \frac{1}{3} = 20$
e_2	$\mathbf{\frac{13}{3}}$	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{35}{3}$	$\frac{35}{2} \div \frac{13}{3} = \underline{2,6}$
Z	$\underline{3}$	2	0	-2	0	-40	

Le troisième tableau est :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	Disponibilités	Ratio
x_3	0	$\frac{3}{13}$	1	$\frac{5}{13}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{75}{13}$	$\frac{75}{13} \div \frac{3}{13} = 25$
x_1	1	$\mathbf{\frac{4}{13}}$	0	$\frac{-2}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{35}{13}$	$\frac{35}{13} \div \frac{4}{13} = \underline{8,7}$
Z	0	$\underline{\frac{14}{13}}$	0	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-9}{13}$	$\frac{-625}{13}$	

Le quatrième tableau est :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	Disponibilités
x_3	$\frac{-3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{15}{4}$
x_2	$\frac{13}{4}$	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{35}{4}$
Z	$\frac{-7}{2}$	0	0	-1	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-115}{2}$

Ainsi $minZ = 57,5$ pour $u_1 = 1$ et $u_2 = 1,5$

1.3.3 Exercices

Résoudre par la méthode du simplexe les programmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} minZ = 9u_1 + 8u_2 \\ 3u_1 + u_2 \geq 270 \\ u_1 + 2u_2 \geq 140 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} minZ = 4u_1 + u_2 + 12u_3 \\ 3u_1 + u_2 + 0,5u_3 \geq 5 \\ u_1 + u_2 + 7u_3 \geq 3 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 4 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} minZ = 2u_1 + u_2 + 12u_3 \\ 3u_1 + u_2 + 0,5u_3 \geq 5 \\ u_1 + u_2 + 7u_3 \geq 3 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 4 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$