RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

25 janvier 2023

Table des matières

Introduction Générale

Une définition possible de la recherche opérationnelle pourrait être la suivante : il s'agit d'un ensemble de méthodes d'analyse scientifique (Mathématiques et Informatique) des phénomènes d'organisation qui traite de la maximisation d'un profit, d'une performance, d'un rendement ou bien de la minimisation d'un coût, d'une dépense.
La recherche opérationnelle est avant tout un outil d'aide à la décision.
Le schéma général suivi par ces méthodes est :

Problème concret (de type R.O.) → Modélisation → Résolution par une méthode R.0. → Interprétation des résultats → Prise de décision.

Chapitre 1

Programmation linéaire : méthode graphique

1.1 Introduction

La programmation mathématique recouvre un ensemble de techniques d'optimisation sous contraintes qui permettent de déterminer dans quelles conditions on peut rendre maximum ou minimum une fonction objectif $Z(X_j)$ de n variables X_j liées par m relations ou contraintes $H_i(X_j) \leq 0$.
De nombreux problèmes de l'entreprise peuvent s'exprimer en termes d'optimisation contrainte, aussi rencontre t-on de multiples applications de la programmation mathématique et ceci dans pratiquement tous les domaines de la **gestion**.
La gestion de production est le domaine où ces applications sont plus nombreuses :

- l'élaboration de plans de production et de stockage
- le choix de technique de production
- l'affectation des moyens de production
- la détermination de la composition des produits

Les applications sont également nombreuses dans le domaine du **Marketing** :

- le choix des plans-média
- la détermination de politiques de prix
- la répartition des efforts de la force de vente
- la sélection des caractéristiques de produit

On citera encore des applications en matière **financière** (choix des programmes d'investissement) en matière **logistique** (gestion des transports) et en matière de **gestion des ressources humaine** (affectation de personnel).
Si les applications de la programmation mathématique sont aussi nombreuses, on doit l'attribuer en grande partie à la souplesse de ses techniques en ce qui concerne leur formulation mais aussi à la relative simplicité des méthodes de résolution utilisables dans les cas les plus courants et pour lesquelles existent des programmes informatiques largement répandus.
Parmi les techniques de programmation mathématique, **la programmation linéaire** est la plus classique.

1.2 Modélisation d'un programme linéaire

Le procédé par lequel nous utilisons des expressions mathématiques pour décrire une situation quantitative réelle s'appelle la **modélisation**.
La formalisation d'un programme est une tâche délicate mais essentielle car elle conditionne la découverte ultérieure de la bonne solution. Elle comporte les mêmes phases quelles que soient les techniques requises ultérieurement pour le traitement :

1. **La détection du problème et l'identification des variables**. Ces variables doivent correspondre exactement aux préoccupations du responsable de la décision. En programmation mathématique, les variables sont des variables décisionnelles.
2. **La formulation de la fonction économique (ou fonction objectif)** traduisant les préférences du décideur exprimées sous la forme d'une fonction des variables identifiées.
3. **La formulation des contraintes**. Il est bien rare qu'un responsable dispose de toute liberté d'action. Le plus souvent il existe des limites à ne pas dépasser qui revêtent la forme d'équations ou d'inéquations mathématiques.

Le responsable d'une décision ne dispose que de sa compétence pour réaliser une formalisation correcte du problème posé car il n'existe pas de méthode en la matière. Un moyen d'acquérir cette compétence est l'apprentissage comme proposé dans les exemples suivants :

Exemple 1.2.1 *:*
Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2 à l'aide de trois matières premières M_1, M_2 et M_3 dont on dispose en quantité limité. Il faut 1 unité de M_1, 1 unité de M_2 et 2 unités de M_3 pour fabriquer 1 unité du produit P_1. Pour fabriquer 1 unité du produit P_2, il faut 3 unités de M_1, 1 unité de M_2 et 1 unité de M_3. La disponibilité en matières premières est de 18 unités de M_1, 8 unités de M_2 et 14 unités de M_3. Le bénéfice unitaire est de 300F pour P_1 et de 450F pour P_2.
Déterminer le programme de fabrication tel que les contraintes de ressources en matières premières soient respectées et que le bénéfice réalisé par la vente de la production soit maximum. (Problème d'utilisation optimale de stock)

Solution :
Soient x le nombre d'unités de P_1 fabriquées et y le nombre d'unités de P_2 fabriquées.

	P_1	P_2	Disponibilités
M_1	1	3	18
M_2	1	1	8
M_3	2	1	14
Marge de profit	300	450	

On obtient le programme suivant :

$$\begin{cases} maxZ = 300x + 450y \\ x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 14 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 1.2.2 *:*
L'intendant d'un lycée doit composer un menu qui doit contenir un minimum d'éléments nutritifs et qui doit être le moins couteux possible. On se limite à une situation simple, deux denrées alimentaires principales D_1, D_2 et trois éléments nutritifs les vitamines V, les calories C et les protéines P. Pour composer D_1 il faut 1 unité de V, 1 unité de C et 3 unités de P ; et pour D_2 on a besoin de 5 unités de V, 2 unités de C et 2 unités de P. Le menu doit comporter au minimum 5 unités de V, 4 unités de C et 6 unités de P. Les coûts unitaires sont 20F pour D_1 et 25F pour D_2.
Déterminer le programme de composition de sorte à respecter les contraintes d'éléments nutritifs et à minimiser le coût.

Solution :
Soient x le nombre d'unités de D_1 et y le nombre d'unités de D_2.

	D_1	D_2	Contraintes
V	1	5	5
C	1	2	4
P	3	2	6
Coût	20	25	

On obtient le programme suivant :

$$\begin{cases} minZ = 20x + 25y \\ x + 5y \geq 5 \\ x + 2y \geq 4 \\ 3x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Formule générale d'un programme linéaire (P.L.)

De façon générale, un problème de programmation mathématique met en jeu quatre catégories d'éléments :

— des variables ou activités
— des coefficients économiques
— des ressources
— des coefficients techniques

Les activités sont les variables de décision du problème étudié. Il s'agit pour l'entreprise de sélectionner le meilleur programme d'activités $X = (x_1, ..., x_n)$, c'est à dire le plus conforme à ses objectifs.
Les coefficients économiques mesurent le degré de réalisation de l'objectif de l'entreprise, associé à une valeur unitaire de chacune des variables. A chaque variable x_j est ainsi associé un coefficient économique c_j.
Les ressources sont les éléments qui limitent le calcul économique de l'entreprise : des capacités de productions limitées, des normes à respecter, des potentiels de ventes. On note $B = (b_1, ..., b_n)$ le vecteur de ressources.

Par coefficients techniques on désignera le degré de consommation par une activité. A la ressource i et à l'activité j correspondra le coefficient technique a_{ij}.

Forme canonique

$$\begin{cases} Z(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq ou \geq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq ou \geq 0 \\ \vdots \cdots\cdots\cdots\cdots \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq ou \geq 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre le P.L. consiste à déterminer les n-uplets $(x_1,...,x_n)$ qui optimisent Z ou à montrer que de tels n-uplets n'existent pas.
On donne les définitions suivantes :

Définition 1.2.1 :

1. *On appelle* ***solution réalisable*** *tout n-uplet $(x_1,...,x_n)$ vérifiant le système d'inéquations précédent.*
2. *On appelle* ***solution optimale*** *toute solution réalisable qui optimise Z.*
3. *On appelle* ***fonction objectif*** *la forme linéaire $Z(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$*
4. *L'ensemble des solutions réalisables du P.L. est appelé* ***domaine des solutions réalisables****. Lorsque ce domaine est non vide, on dit que PL est réalisable*

Il existe diverses techniques de résolution d'un PL parmi lesquelles la méthode graphique se montre à l'évidence la plus rapide et la plus simple mais aussi la plus limitée, car dès lors que le nombre de variables dépasse deux, elle devient impraticable.

1.3 Méthode graphique

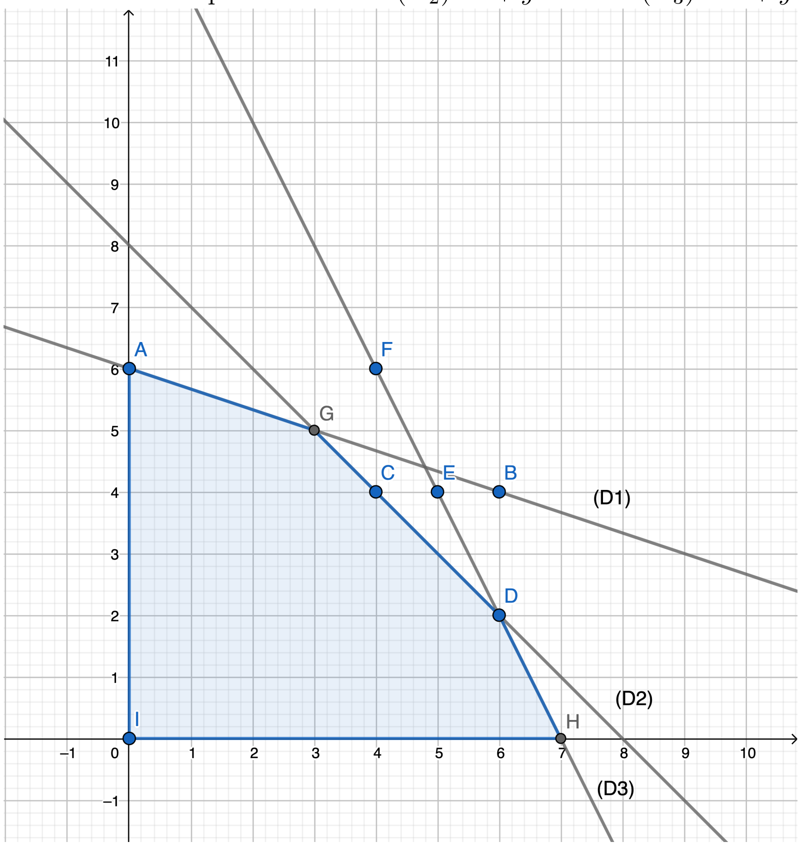
Exemple 1.3.1 :
Résoudre graphiquement le programme linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} maxZ = 300x + 450y \\ x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 14 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solution

Soient les droites suivantes :
$(D_1) : x + 3y = 18, \quad (D_2) : x + y = 8 \quad et \quad (D_3) : 2x + y = 14$
On trace la droite $(D_1) : x + 3y = 18$.

Comment déterminer le demi-plan qui convient ? Il suffit de prendre un point quelconque du plan et d'observer si ses coordonnées vérifient l'inéquation. Si c'est le cas, le point se situe dans le bon demi-plan. Considérons par exemple l'origine, $x + 3y = 0 + 3 \times 0 = 0 < 18$ **c'est vrai** ; donc l'origine est solution et tous les points situés dans le demi-plan contenant l'origine sont solutions.
On fait de même pour les droites $(D_2) : x + y = 8$ *et* $(D_3) : 2x + y = 14$



Considérons les différents sommets du polygone régulier (ensemble des solutions réalisables) et déterminons la valeur de Z en ces points :

Sommets	x	y	Z
O	0	0	0
A	0	6	2700
G	3	5	3150
D	6	2	2700
H	7	0	2100

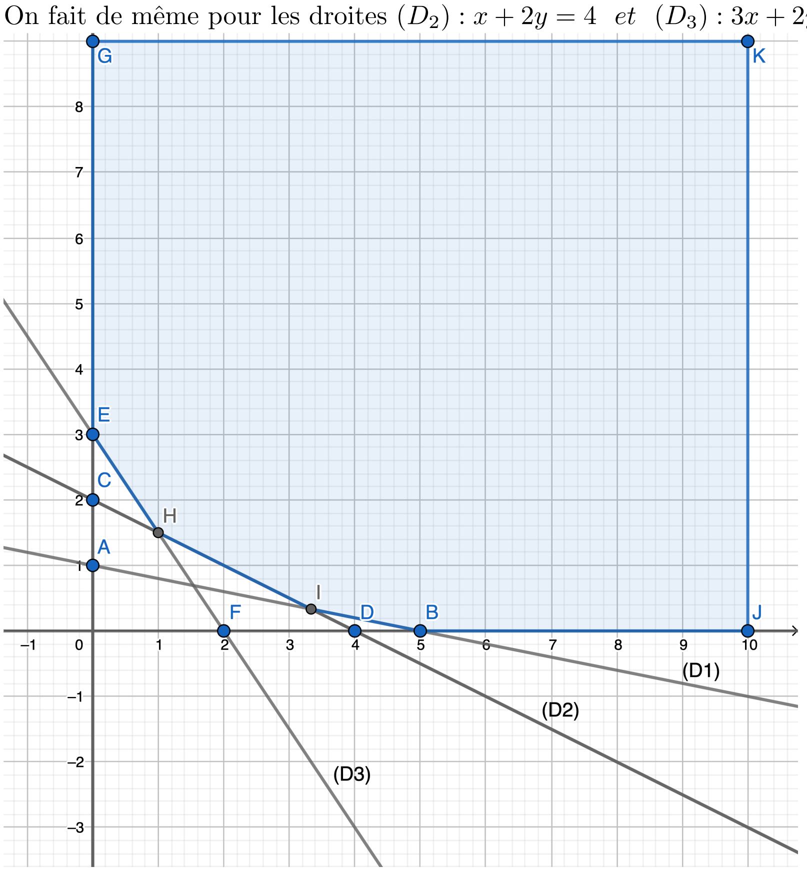
Ainsi on a : $maxZ = 3150$ pour $x = 3$ et $y = 5$.

Exemple 1.3.2 :
Résoudre graphiquement le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} minZ = 20x + 25y \\ x + 5y \geq 5 \\ x + 2y \geq 4 \\ 3x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solution

Soient les droites suivantes :
$(D_1) : x + 5y = 5, \quad (D_2) : x + 2y = 4 \quad et \quad (D_3) : 3x + 2y = 6$
On trace la droite $(D_1) : x + 5y = 5$.
Comment déterminer le demi-plan qui convient ? Il suffit de prendre un point quelconque du plan et d'observer si ses coordonnées vérifient l'inéquation. Si c'est le cas, le point se situe dans le bon demi-plan. Considérons par exemple l'origine, $x + 5y = 0 + 5 \times 0 = 0 \geq 5$ **c'est faux** ; donc l'origine n'est pas solution et tous les points situés dans le demi-plan contenant l'origine ne sont pas solutions.
On fait de même pour les droites $(D_2) : x + 2y = 4 \quad et \quad (D_3) : 3x + 2y = 6$



Considérons les différents sommets du polygone régulier (ensemble des solutions réalisables) et déterminons la valeur de Z en ces points :

Sommets	x	y	Z
E	0	3	75
H	1	1,5	57,5
I	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	75
B	5	0	100

Ainsi on a : $minZ = 57,5$ pour $x = 1$ et $y = 1,5$.

Exercices

Exercice 1.3.1 *:*
Un fabricant produit des tables et des bureaux. Chaque table nécessite 2h30mn pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 1h pour la mise en caisse. Chaque bureau exige 1h pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 2h pour la mise en caisse. L'entreprise dispose, chaque semaine, de 20h pour l'assemblage, 30h pour le polissage et 16h pour la mise en caisse. Sa marge de profit est de 3 000 F par table et de 4 000 F par bureau.

1. *Ecrire le programme linéaire correspondant*
2. *Résoudre graphiquement ce PL*

Exercice 1.3.2 *Une entreprise fabrique des tables et des chaises à l'aide de deux machines A et B disponibles respectivement pendant 70 heures et 40 heures. Une table fait trois heures dans A et une heure dans B et rapporte 5 000 F de bénéfice alors qu'une chaise fait une heure dans A et deux heures dans B et rapporte 3 500 F de bénéfice.*

1. *Ecrire le programme de production qui donne le bénéfice maximal.*
2. *Déterminer le bénéfice maximal et les nombres de tables et de chaises à fabriquer*

Exercice 1.3.3 *Résoudre graphiquement les programmes suivants :*

$$1)\begin{cases} maxZ = 270x + 140y \\ 3x + y \leq 9 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} maxZ = -x + y \\ -2x + y \leq 1 \\ x + 3y \leq 10 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} maxZ = x + 3y \\ x + y \leq 14 \\ -2x + 3y \leq 12 \\ 2x - y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} minZ = 9x + 8y \\ 3x + y \geq 270 \\ x + 2y \geq 140 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Chapitre 2

Programmation linéaire : Méthode du simplexe

2.1 Problèmes de maximisation

2.1.1 Exemple de problème à résoudre par Simplexe

Exemple 2.1.1 *Un fabricant produit des tables et des bureaux. Chaque table nécessite 2h30mn pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 1h pour la mise en caisse. Chaque bureau exige 1h pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 2h pour la mise en caisse. L'entreprise dispose, chaque semaine, de 20h pour l'assemblage, 30h pour le polissage et 16h pour la mise en caisse. Sa marge de profit est de 3 000 F par table et de 4 000 F par bureau.*

1. *Déterminer la combinaison de produits (nombre de tables et de bureaux à fabriquer) qui maximisera les profits hebdomadaires de l'entreprise.*
2. *Quel sera ce profit maximum ?*

N.B. :
La résolution de ce problème nécessite les étapes suivantes :

1. Analyse du problème
2. Système des contraintes
3. Programme mathématique à résoudre (Ajout des variables d'écarts)
4. Déroulement de l'algorithme
5. Résultats et conclusion

2.1.2 Résolution du problème

Analyse du problème

Ressources/Produits	Tables	Bureaux	Disponibilités
Assemblage	2,5h	1h	20h
Polissage	3h	3h	30h
Mise en caisse	1h	2h	16h
Marge de profit	3000	4000	

Système de contraintes

Soient x_1 le nombre de tables à fabriquer et x_2 le nombre de bureaux à fabriquer.
Le système des contraintes est :

$$\begin{cases} 2,5x_1 + x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La fonction économique à maximiser est : $Z(x_1, x_2) = 3000x_1 + 4000x_2$

— La matrice

$$T = \begin{pmatrix} 2,5 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

du système des contraintes est appelée **matrice technologique** de l'entreprise

—

$$\begin{cases} 2,5x_1 + x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

représente les contraintes de production

— $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ sont des contraintes logiques

— Les coefficients 3000 et 4000 de la fonction économique à maximiser sont appelés **indicateurs**

Programme mathématique à résoudre (ajout des variables d'écart)

On transforme les inégalités du système des contraintes en égalités en ajoutant des **variables d'écart** e_1, e_2 et e_3 :

$$\begin{cases} MaxZ(x_1, x_2) = 3000x_1 + 4000x_2 \\ 2,5x_1 + x_2 + e_1 = 20 \\ 3x_1 + 3x_2 + e_2 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + e_3 = 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Déroulement de l'algorithme du simplexe

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	Disponibilités	Ratio
e_1	2,5	1	1	0	0	20	$\frac{20}{1} = 20$
e_2	3	3	0	1	0	30	$\frac{30}{3} = 10$
e_3	1	**2**	0	0	1	16	$\frac{16}{2} = \underline{8}$
Z	3000	$\underline{4000}$	0	0	0		

Etape 1 : choix du pivot

Après avoir mis le programme sous forme de tableau, on cherche **le pivot.** Pour cela on détermine **la colonne pivot** qui correspond à celle du plus grand indicateur positif (dans l'exemple c'est 4000 : on dit que x_2 entre dans la base). Ensuite on détermine **la ligne pivot** qui est celle du plus petit ratio positif (dans l'exemple c'est 8 : on dit que e_3 sort de la base). L'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot donne le pivot (dans l'exemple le pivot est 2).

N.B. :

- les ratios sont obtenus en divisant les valeurs des disponibilités par les valeurs de la colonne pivot (lorsqu'ils ne sont pas nuls)
- dans la base, la variable qui sort est remplacée par celle qui entre.

Etape 2 : pivotage

On annule tous les coefficients de la colonne pivot (sauf l'élèment pivot) en utilisant des combinaisons linéaires des lignes correspondantes avec la ligne pivot (méthode du pivot de Gauss), ce qui conduit à un nouveau tableau. On revient ensuite à la première étape.

Remarque 2.1.1 *:*
Lorsque l'on fait l'option de ne pas réduire la valeur du pivot à 1, les combinaisons linéaires doivent être effectuées de manière à ce que les valeurs des disponibilités restent toujours positives tandis que la valeur de la dernière ligne sous la colonne des disponibilités doit rester négative.

Etape 3 : condition d'arrêt

L'algorithme est terminé lorsque tous les coefficients de la dernière ligne du tableau sont négatifs ou nuls.

Deuxième tableau :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	Disponibilités	Ratio
e_1	2	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	12	$\frac{12}{2}=6$
e_2	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	0	0	1	$\frac{-3}{2}$	6	$\frac{6}{\frac{3}{2}}=\underline{4}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	8	$\frac{8}{\frac{1}{2}}=16$
Z	<u>1000</u>	0	0	0	-2000	-32000	

Troisième tableau :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	Disponibilités
e_1	0	0	1	$\frac{-4}{3}$	$\frac{3}{2}$	4
x_1	1	0	0	$\frac{2}{3}$	-1	4
x_2	0	1	0	$\frac{-1}{3}$	1	6
Z	0	0	0	$\frac{-2000}{3}$	-1000	-36000

Dans ce troisième tableau tous les coefficients de la dernière ligne sont négatifs ou nuls : c'est le dernier tableau

Résultats et conclusion

Dans le dernier tableau, on considère les variables de la fonction économique qui se retrouvent dans la base.

<u>**Remarque**</u> **2.1.2** *:*
Toute variable de la fonction économique qui ne se retrouve pas dans la base du dernier tableau a pour valeur 0.

Dans notre exemple, $x_1 = 4$ et $x_2 = 6$.

Conclusion :
Pour maximiser son profit, l'entreprise doit produire **4 tables et 6 bureaux**. Ce profit maximum est **36000 F.**

2.2 Résumé de l'algorithme du simplexe (Maximisation)

Soit à résoudre le programme suivant (forme canonique) :

$$\begin{cases} Z(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. On transforme les inégalités en égalités en ajoutant les variables d'écart (on obtient la forme standard)

$$\begin{cases} Z(x_1, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + e_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + e_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + e_3 = b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. On établit le premier tableau du simplexe :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Disponibilités
e_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1
e_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	b_2
e_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3
Z	c_1	c_2	c_3	0	0	0	

3. Déroulement :
1ère étape : choix du pivot
-On cherche dans **la dernière ligne du tableau le coefficient positif le plus grand** et on sélectionne la colonne correspondante : **c'est la colonne pivot.**
-On divise les coefficients de la colonne des disponibilités par les coefficients correspondant de la colonne pivot, quand ils ne sont pas nuls et on sélectionne la ligne correspondant **au plus petit résultat positif : c'est la ligne pivot.**
- Le coefficient placé à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot est choisi comme **élément pivot.**

2ème étape : pivotage
On annule tous les autres coefficients de la colonne pivot (donc sauf l'élément pivot) en utilisant des combinaisons linéaires des lignes correspondantes avec la ligne pivot **(méthode du pivot de Gauss)**. On obtient donc un nouveau tableau puis on revient à la première étape.

3ème étape : condition d'arrêt
L'algorithme est terminé lorsque **tous les coefficients de la dernière ligne du tableau sont négatifs ou nuls.**

2.2.1 Exercices

Résoudre les problème de maximisation du chapitre précédent en utilisant la méthode du simplexe.

2.3 Problèmes de minimisation ; dualité

2.3.1 Dualité

Le **dual** du problème (considéré comme **primal**)

$$\begin{cases} maxZ(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots \ldots\ldots\ldots \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_n \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

est :

$$\begin{cases} minZ(u_1,...,u_n) = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n \\ a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_n \geq c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_n \geq c_2 \\ \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots \ldots\ldots\ldots \vdots \ldots \vdots \ldots \vdots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_n \geq c_n \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

2.3.2 Passage du primal au dual

1. Les coefficients de la fonction économique deviennent les seconds membres des contraintes et vice versa
2. Les variables des deux problèmes sont positives ou nulles
3. Les inégalité des contraintes changent de sens
4. Les matrices des coefficients affectés aux deux variables dans les contraintes des deux problèmes sont transposées l'une de l'autre.

Le dual du dual est le primal et on passe de la solution de l'un des deux problèmes à celle de l'autre grâce aux théorèmes suivants :

Théorème 2.3.1 *:*
Si le primal a une solution, le dual en a une aussi, et le maximum de l'un est égal au minimum de l'autre.

Théorème 2.3.2 *:*
*Si la **i-ème variable** est **non nulle** à l'optimum du primal, alors la **i-ème contrainte** est **saturée** à l'optimum du dual.*

Théorème 2.3.3 *:*
*Si la **i-ème contrainte** est **non saturée** à l'optimum du primal, alors la **i-ème variable** est **saturée** à l'optimum du dual.*

Exemple 2.3.1 *:*

$$\begin{cases} minZ = 20u_1 + 25u_2 \\ u_1 + 5u_2 \geq 5 \\ u_1 + 2u_2 \geq 4 \\ 3u_1 + 2u_2 \geq 6 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution :
Le système (primal)

$$\begin{cases} minZ = 20u_1 + 25u_2 \\ u_1 + 5u_2 \geq 5 \\ u_1 + 2u_2 \geq 4 \\ 3u_1 + 2u_2 \geq 6 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{a pour dual} \quad \begin{cases} maxZ = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard : ajoutons les variables d'écart pour transformer les inégalités en égalités.

$$\begin{cases} maxZ = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + e_1 = 20 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + e_2 = 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

On établit le premier tableau du simplexe :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	Disponibilités	Ratio
e_1	1	1	**3**	1	0	20	$\frac{20}{3} = \underline{3,3}$
e_2	5	2	2	0	1	25	$\frac{25}{2} = 12,5$
Z	5	4	$\underline{6}$	0	0		

Le deuxième tableau est :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	Disponibilités	Ratio
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3} \div \frac{1}{3} = 20$
e_2	$\boldsymbol{\frac{13}{3}}$	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{35}{3}$	$\frac{35}{2} \div \frac{13}{3} = \underline{2,6}$
Z	$\underline{3}$	2	0	-2	0	-40	

Le troisième tableau est :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	Disponibilités	Ratio
x_3	0	$\frac{3}{13}$	1	$\frac{5}{13}$	$\frac{-1}{13}$	$\frac{75}{13}$	$\frac{75}{13} \div \frac{3}{13} = 25$
x_1	1	$\boldsymbol{\frac{4}{13}}$	0	$\frac{-2}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{35}{13}$	$\frac{35}{13} \div \frac{4}{13} = \underline{8,7}$
Z	0	$\underline{\frac{14}{13}}$	0	$\frac{-20}{13}$	$\frac{-9}{13}$	$\frac{-625}{13}$	

Le quatrième tableau est :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	Disponibilités
x_3	$\frac{-3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{15}{4}$
x_2	$\frac{13}{4}$	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{35}{4}$
Z	$\frac{-7}{2}$	0	0	-1	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-115}{2}$

Ainsi $minZ = 57,5$ pour $u_1 = 1$ et $u_2 = 1,5$

2.3.3 Exercices

Résoudre par la méthode du simplexe les programmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} minZ = 9u_1 + 8u_2 \\ 3u_1 + u_2 \geq 270 \\ u_1 + 2u_2 \geq 140 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} minZ = 4u_1 + u_2 + 12u_3 \\ 3u_1 + u_2 + 0,5u_3 \geq 5 \\ u_1 + u_2 + 7u_3 \geq 3 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 4 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} minZ = 2u_1 + u_2 + 12u_3 \\ 3u_1 + u_2 + 0,5u_3 \geq 5 \\ u_1 + u_2 + 7u_3 \geq 3 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 4 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$

Chapitre 3

Ordonnancement

Étant donné un ensemble de tâches contribuant à la réalisation d'un projet, on se propose d'établir un planning (sous forme de graphe) indiquant dans quel ordre doivent être effectuées les tâches en question, précisant celles qui peuvent être effectuées en parallèle, et donnant le calendrier qu'il faudra suivre pour éviter les perte de temps et terminer la réalisation du projet au plus vite.
Pour élaborer ce planning, il est nécessaire de connaitre :
- la liste complète des tâches à effectuer,
- la durée des tâches et éventuellement les autres contraintes de temps,
- les relations d'antériorité entre les tâches. Nous développerons essentiellement ici la **méthode MPM** (Méthode des potentiels Metra), mais nous indiquerons ensuite rapidement le principe de la **méthode PERT** (Program Evaluation Research Task), moins facile, mais qui reste très utilisée.

3.1 MMP (Méthode des Potentiels Métra)

3.1.1 Principe de la représentation

L'ensemble du projet est représenté par un graphe dans lequel :
- chaque **sommet** représente une **tâche**
- chaque **arc** représente une **relation d'antériorité**
- la **longueur** d'un arc (X, Y) est le temps minimum qui doit s'écouler entre le début de la tâche X et le début de la tâche Y.

3.1.2 Élaboration du graphe

Les étapes à suivre sont :
- suppression des redondances
- détermination des niveaux
- construction du graphe ordonnancé par niveaux

Application 3.1.1 :

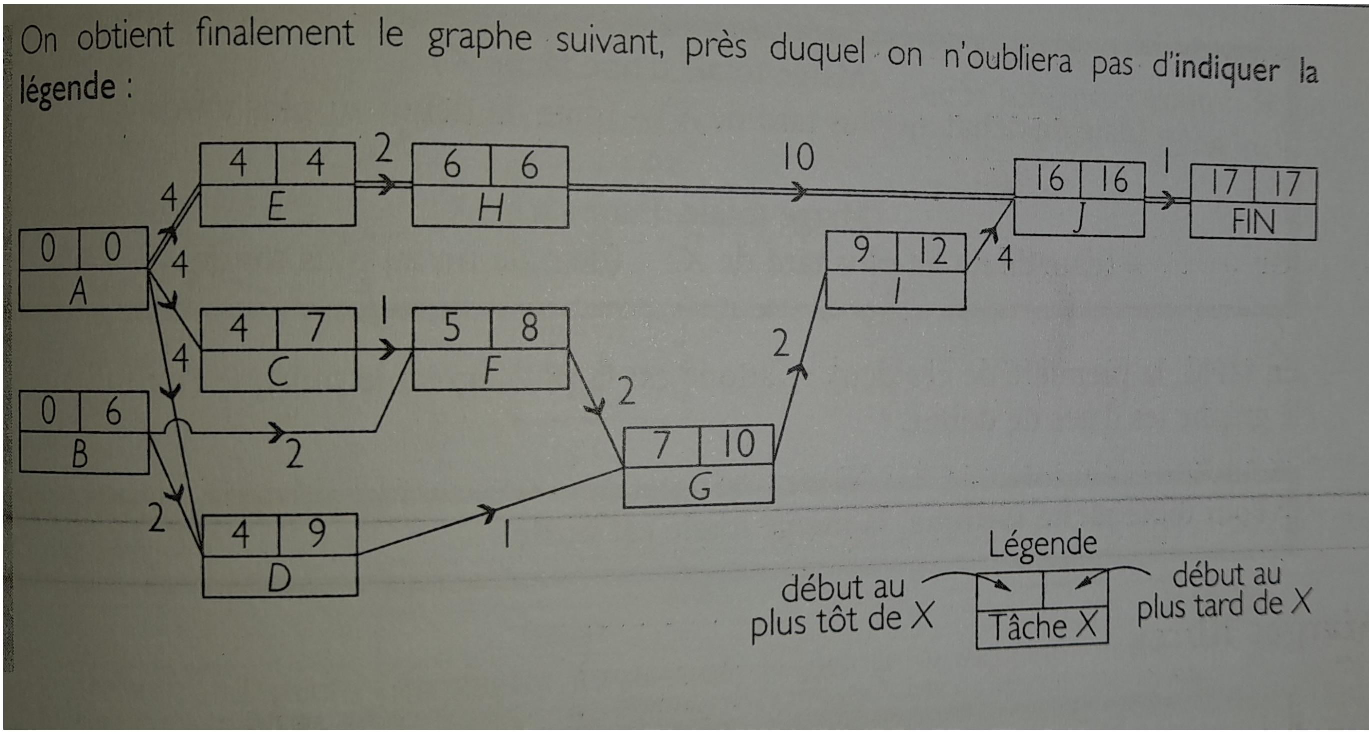
La construction d'un entrepôt peut se décomposer en 10 tâches, décrites dans le tableau ci-dessous :

Tâches	Désignation	Tâches prérequises	Durée (en jours)
A	Acceptattion des plans	-	4
B	Préparation du terrain	-	2
C	Commande des matériaux	A	1
D	Creusage des fondations	A, B	1
E	Commande des portes et fenêtres	A	2
F	Livraison des matériaux	C ,B, A	2
G	Coulage des fondations	D, F, C, A	2
H	Livraison des portes et fenêtres	E, A	10
I	Pose des murs, de la charpente, du toit	G	4
J	Mise en place des portes et fenêtres	H, I, A	1

Dans le tableau suivant les tâches qui y apparaissent sont les tâches immédiatement antérieures

Tâches	Désignation	Tâches prérequises	Durée (en jours)
A	Acceptattion des plans	-	4
B	Préparation du terrain	-	2
C	Commande des matériaux	A	1
D	Creusage des fondations	A, B	1
E	Commande des portes et fenêtres	A	2
F	Livraison des matériaux	C ,B	2
G	Coulage des fondations	D, F	2
H	Livraison des portes et fenêtres	E	10
I	Pose des murs, de la charpente, du toit	G	4
J	Mise en place des portes et fenêtres	H, I	1

Niveau 0 : A, B — *Niveau 3 : G*
Niveau 1 : C, D, E — *Niveau 4 : I*
Niveau 2 : F, H — *Niveau 5 : J*
Niveau 6 : FIN
On obtient :



3.1.3 Durée minimum de réalisation du projet

La durée minimale de réalisation du projet est égale à la longueur du chemin le plus long entre une tâche de niveau 0 et le sommet FIN.

3.1.4 Chemin et tâches critiques

Le chemin le plus long entre une tâche de niveau 0 et la FIN est appelé **chemin critique** ; tous les sommets de ce chemin sont les **tâches critiques**.
Tout retard pris dans la mise en route d'une tâche critique retardera la date de fin du projet.

3.1.5 Calcul des marges

Marges totales

La marge totale d'une tâche est le retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route de cette tâche, sans modifier la date de fin des travaux.

Marge totale = date de début au plus tard - date de début au plus tôt

Marges libres

La marge libre d'une tâche est le retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route de cette tâche, sans modifier les dates de début au plus tôt des tâches suivantes.

Marge libre X = min[(date de début au plus tôt de Y) - (date de début au plus tôt de X) - (durée de X)]

NB :
$ML \leqslant MT$
$MT = ML = 0$ pour toute tâche critique

3.2 PERT

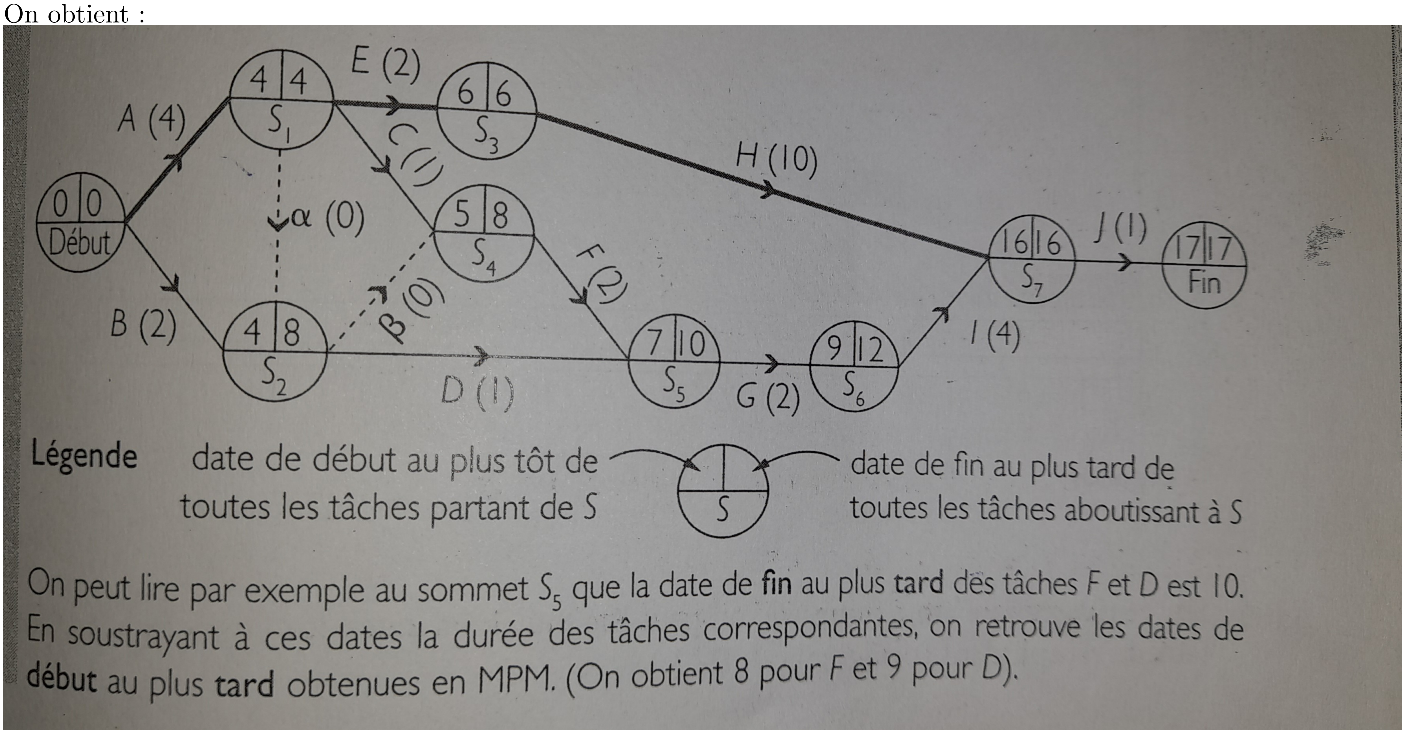
3.2.1 Principe de la représentation

L'ensemble du projet est représenté par un graphe dans lequel :
- chaque **arc** représente une **tâche**
- la **longueur** de cet arc est la durée de cette tâche.
- chaque **sommet** correspond à une étape entre tâches

3.2.2 Élaboration du graphe

Les étapes à suivre sont :
- suppression des redondances (comme en MPM)
- détermination des niveaux
- construction du graphe ordonnancé par niveaux

On obtient :



3.2.3 Chemin et tâches critiques

On les détermine comme en MPM en cherchant le chemin le plus long entre l'étape DÉBUT et l'étape FIN.

3.2.4 Marges

Les définitions sont bien sur les mêmes qu'en MPM et les modes de calculs sont indiqués ci-dessous

L'essentiel

MPM

Sommets = tâches **Arcs** = relations d'antériorité

Longueur d'un arc (X, Y) = temps minimal qui doit s'écouler entre le début de la tâche X et le début de Y.

ORDONNER LE GRAPHE PAR NIVEAUX

$$\begin{array}{|c|c|}\hline T_X & T_X^* \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{X} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\quad t \quad} \begin{array}{|c|c|}\hline T_Y & T_Y^* \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{Y} \\ \hline \end{array}$$

	Définition	Mode de calcul
T_X	date de **début** au plus **tôt** de la tâche **X**	Longueur du chemin le plus long allant d'une tâche de niveau 0 à X
T_X^*	date de **début** au plus **tard** de la tâche **X**	Plus petit des nombres $T_Y^* - t$ sur l'ensemble des suivants de X. Pour la tâche « Fin » : $T = T^*$
Marge totale de X	voir page suivante	$T_X^* - T_X$
Marge libre de X	voir page suivante	Plus petit des nombres $T_Y - T_X - t$ sur l'ensemble des suivants Y de X

PERT

Sommets = étapes **Arcs** = tâches **Arcs en pointillés** = tâches fictives

Longueur d'un arc = durée de la tâche correspondante (notée d_X pour la tâche X)

$$\left(\begin{array}{c|c} t_i & t_i^* \\ \hline \multicolumn{2}{c}{S_i} \end{array}\right) \xrightarrow{\quad X(d_X) \quad} \left(\begin{array}{c|c} t_k & t_k^* \\ \hline \multicolumn{2}{c}{S_k} \end{array}\right)$$

	Définition	Mode de calcul
t_i	date de **début** au plus **tôt** de *toutes* les tâches *partant* du sommet S_i	Longueur du chemin le plus long allant du début des travaux au sommet S_i
t_i^*	date de **fin** au plus **tard** de *toutes* les tâches *aboutissant* au sommet S_i	Plus petit des nombres $t_k^* - d_X$ sur l'ensemble des tâches X partant de S_i
Marge totale de X	voir page suivante	
Marge libre de X	voir page suivante	$t_k - t_i - d_X$