RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

16 janvier 2023

Table des matières

Introduction Générale

Une définition possible de la recherche opérationnelle pourrait être la suivante : il s'agit d'un ensemble de méthodes d'analyse scientifique (Mathématiques et Informatique) des phénomènes d'organisation qui traite de la maximisation d'un profit, d'une performance, d'un rendement ou bien de la minimisation d'un coût, d'une dépense.
La recherche opérationnelle est avant tout un outil d'aide à la décision.
Le schéma général suivi par ces méthodes est :

Problème concret (de type R.O.) → Modélisation → Résolution par une méthode R.0. → Interprétation des résultats → Prise de décision.

Chapitre 1

Programmation linéaire : méthode graphique

1.1 Introduction

La programmation mathématique recouvre un ensemble de techniques d'optimisation sous contraintes qui permettent de déterminer dans quelles conditions on peut rendre maximum ou minimum une fonction objectif $Z(X_j)$ de n variables X_j liées par m relations ou contraintes $H_i(X_j) \leq 0$.
De nombreux problèmes de l'entreprise peuvent s'exprimer en termes d'optimisation contrainte, aussi rencontre t-on de multiples applications de la programmation mathématique et ceci dans pratiquement tous les domaines de la **gestion**.
La gestion de production est le domaine où ces applications sont plus nombreuses :

— l'élaboration de plans de production et de stockage
— le choix de technique de production
— l'affectation des moyens de production
— la détermination de la composition des produits

Les applications sont également nombreuses dans le domaine du **Marketing** :

— le choix des plans-média
— la détermination de politiques de prix
— la répartition des efforts de la force de vente
— la sélection des caractéristiques de produit

On citera encore des applications en matière **financière** (choix des programmes d'investissement) en matière **logistique** (gestion des transports) et en matière de **gestion des ressources humaine** (affectation de personnel).
Si les applications de la programmation mathématique sont aussi nombreuses, on doit l'attribuer en grande partie à la souplesse de ses techniques en ce qui concerne leur formulation mais aussi à la relative simplicité des méthodes de résolution utilisables dans les cas les plus courants et pour lesquelles existent des programmes informatiques largement répandus.
Parmi les techniques de programmation mathématique, **la programmation linéaire** est la plus classique.

1.2 Modélisation d'un programme linéaire

Le procédé par lequel nous utilisons des expressions mathématiques pour décrire une situation quantitative réelle s'appelle la **modélisation**.
La formalisation d'un programme est une tâche délicate mais essentielle car elle conditionne la découverte ultérieure de la bonne solution. Elle comporte les mêmes phases quelles que soient les techniques requises ultérieurement pour le traitement :

1. **La détection du problème et l'identification des variables**. Ces variables doivent correspondre exactement aux préoccupations du responsable de la décision. En programmation mathématique, les variables sont des variables décisionnelles.
2. **La formulation de la fonction économique (ou fonction objectif)** traduisant les préférences du décideur exprimées sous la forme d'une fonction des variables identifiées.
3. **La formulation des contraintes**. Il est bien rare qu'un responsable dispose de toute liberté d'action. Le plus souvent il existe des limites à ne pas dépasser qui revêtent la forme d'équations ou d'inéquations mathématiques.

Le responsable d'une décision ne dispose que de sa compétence pour réaliser une formalisation correcte du problème posé car il n'existe pas de méthode en la matière. Un moyen d'acquérir cette compétence est l'apprentissage comme proposé dans les exemples suivants :

Exemple 1.2.1 *:*
Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2 à l'aide de trois matières premières M_1, M_2 et M_3 dont on dispose en quantité limité. Il faut 1 unité de M_1, 1 unité de M_2 et 2 unités de M_3 pour fabriquer 1 unité du produit P_1. Pour fabriquer 1 unité du produit P_2, il faut 3 unités de M_1, 1 unité de M_2 et 1 unité de M_3. La disponibilité en matières premières est de 18 unités de M_1, 8 unités de M_2 et 14 unités de M_3. Le bénéfice unitaire est de 300F pour P_1 et de 450F pour P_2.
Déterminer le programme de fabrication tel que les contraintes de ressources en matières premières soient respectées et que le bénéfice réalisé par la vente de la production soit maximum. (Problème d'utilisation optimale de stock)

Solution :
Soient x le nombre d'unités de P_1 fabriquées et y le nombre d'unités de P_2 fabriquées.

	P_1	P_2	Disponibilités
M_1	1	3	18
M_2	1	1	8
M_3	2	1	14
Marge de profit	300	450	

On obtient le programme suivant :

$$\begin{cases} maxZ = 300x + 450y \\ x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 14 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 1.2.2 *:*
L'intendant d'un lycée doit composer un menu qui doit contenir un minimum d'éléments nutritifs et qui doit être le moins couteux possible. On se limite à une situation simple, deux denrées alimentaires principales D_1, D_2 et trois éléments nutritifs les vitamines V, les calories C et les protéines P. Pour composer D_1 il faut 1 unité de V, 1 unité de C et 3 unités de P ; et pour D_2 on a besoin de 5 unités de V, 2 unités de C et 2 unités de P. Le menu doit comporter au minimum 5 unités de V, 4 unités de C et 6 unités de P. Les coûts unitaires sont 20F pour D_1 et 25F pour D_2.
Déterminer le programme de composition de sorte à respecter les contraintes d'éléments nutritifs et à minimiser le coût.

Solution :
Soient x le nombre d'unités de D_1 et y le nombre d'unités de D_2.

	D_1	D_2	Contraintes
V	1	5	5
C	1	2	4
P	3	2	6
Coût	20	25	

On obtient le programme suivant :

$$\begin{cases} minZ = 20x + 25y \\ x + 5y \geq 5 \\ x + 2y \geq 4 \\ 3x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Formule générale d'un programme linéaire (P.L.)

De façon générale, un problème de programmation mathématique met en jeu quatre catégories d'éléments :
- des variables ou activités
- des coefficients économiques
- des ressources
- des coefficients techniques

Les activités sont les variables de décision du problème étudié. Il s'agit pour l'entreprise de sélectionner le meilleur programme d'activités $X = (x_1, ..., x_n)$, c'est à dire le plus conforme à ses objectifs.
Les coefficients économiques mesurent le degré de réalisation de l'objectif de l'entreprise, associé à une valeur unitaire de chacune des variables. A chaque variable x_j est ainsi associé un coefficient économique c_j.
Les ressources sont les éléments qui limitent le calcul économique de l'entreprise : des capacités de productions limitées, des normes à respecter, des potentiels de ventes. On note $B = (b_1, ..., b_n)$ le vecteur de ressources.

Par coefficients techniques on désignera le degré de consommation par une activité. A la ressource i et à l'activité j correspondra le coefficient technique a_{ij}.

Forme canonique

$$\begin{cases} Z(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq ou \geq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq ou \geq 0 \\ \vdots \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq ou \geq 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre le P.L. consiste à déterminer les n-uplets $(x_1,...,x_n)$ qui optimisent Z ou à montrer que de tels n-uplets n'existent pas.
On donne les définitions suivantes :

Définition 1.2.1 *:*

1. *On appelle* ***solution réalisable*** *tout n-uplet* $(x_1,...,x_n)$ *vérifiant le système d'inéquations précédent.*
2. *On appelle* ***solution optimale*** *toute solution réalisable qui optimise* Z.
3. *On appelle* ***fonction objectif*** *la forme linéaire* $Z(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
4. *L'ensemble des solutions réalisables du P.L. est appelé* ***domaine des solutions réalisables****. Lorsque ce domaine est non vide, on dit que PL est réalisable*

Il existe diverses techniques de résolution d'un PL parmi lesquelles la méthode graphique se montre à l'évidence la plus rapide et la plus simple mais aussi la plus limitée, car dès lors que le nombre de variables dépasse deux, elle devient impraticable.

1.3 Méthode graphique

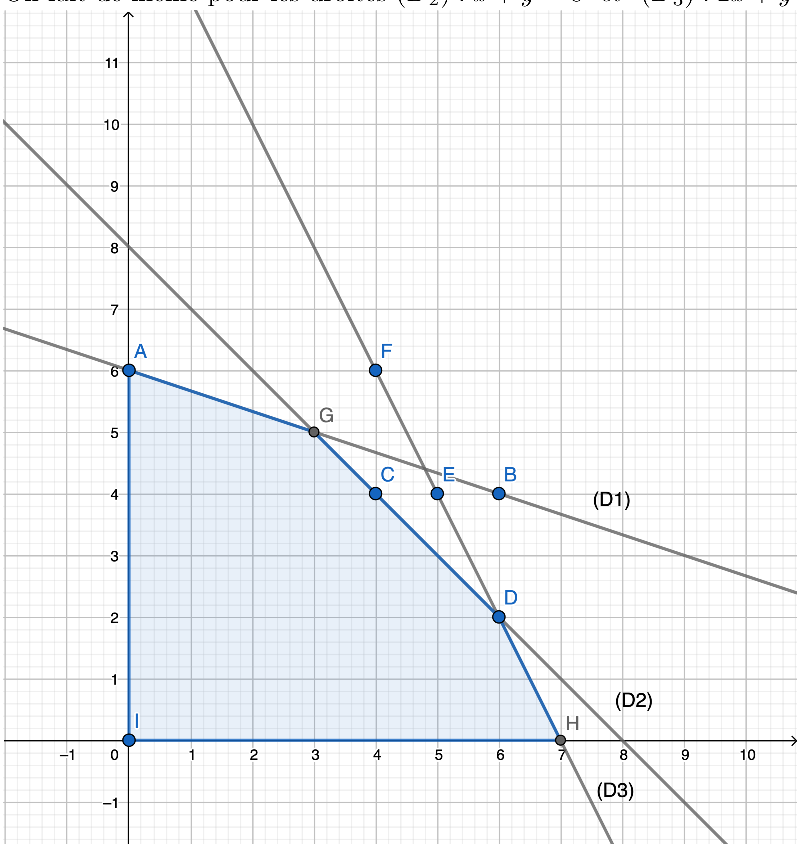
Exemple 1.3.1 *:*
Résoudre graphiquement le programme linéaire ci-dessous :

$$\begin{cases} maxZ = 300x + 450y \\ x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 14 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solution

Soient les droites suivantes :
$(D_1) : x + 3y = 18, \quad (D_2) : x + y = 8 \quad et \quad (D_3) : 2x + y = 14$
On trace la droite $(D_1) : x + 3y = 18$.

Comment déterminer le demi-plan qui convient ? Il suffit de prendre un point quelconque du plan et d'observer si ses coordonnées vérifient l'inéquation. Si c'est le cas, le point se situe dans le bon demi-plan. Considérons par exemple l'origine, $x + 3y = 0 + 3 \times 0 = 0 < 18$ **c'est vrai** ; donc l'origine est solution et tous les points situés dans le demi-plan contenant l'origine sont solutions.
On fait de même pour les droites $(D_2) : x + y = 8$ *et* $(D_3) : 2x + y = 14$



Considérons les différents sommets du polygone régulier (ensemble des solutions réalisables) et déterminons la valeur de Z en ces points :

Sommets	x	y	Z
O	0	0	0
A	0	6	2700
G	3	5	3150
D	6	2	2700
H	7	0	2100

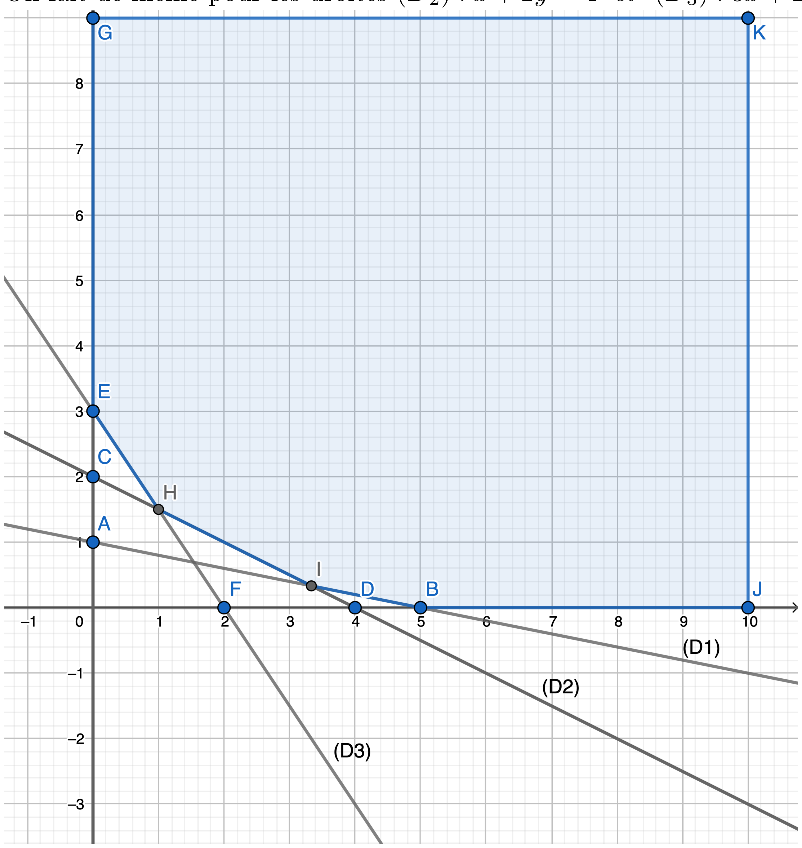
Ainsi on a : $maxZ = 3150$ pour $x = 3$ et $y = 5$.

Exemple 1.3.2 *:*
Résoudre graphiquement le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} minZ = 20x + 25y \\ x + 5y \geq 5 \\ x + 2y \geq 4 \\ 3x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solution

Soient les droites suivantes :
$(D_1) : x + 5y = 5, \quad (D_2) : x + 2y = 4 \quad et \quad (D_3) : 3x + 2y = 6$
On trace la droite $(D_1) : x + 5y = 5$.
Comment déterminer le demi-plan qui convient ? Il suffit de prendre un point quelconque du plan et d'observer si ses coordonnées vérifient l'inéquation. Si c'est le cas, le point se situe dans le bon demi-plan. Considérons par exemple l'origine, $x + 5y = 0 + 5 \times 0 = 0 \geq 5$ **c'est faux** ; donc l'origine n'est pas solution et tous les points situés dans le demi-plan contenant l'origine ne sont pas solutions.
On fait de même pour les droites $(D_2) : x + 2y = 4 \quad et \quad (D_3) : 3x + 2y = 6$



Considérons les différents sommets du polygone régulier (ensemble des solutions réalisables) et déterminons la valeur de Z en ces points :

Sommets	x	y	Z
E	0	3	75
H	1	1,5	57,5
I	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	75
B	5	0	100

Ainsi on a : $minZ = 57,5$ pour $x = 1$ et $y = 1,5$.

Exercices

Exercice 1.3.1 *:*
Un fabricant produit des tables et des bureaux. Chaque table nécessite 2h30mn pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 1h pour la mise en caisse. Chaque bureau exige 1h pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 2h pour la mise en caisse. L'entreprise dispose, chaque semaine, de 20h pour l'assemblage, 30h pour le polissage et 16h pour la mise en caisse. Sa marge de profit est de 3 000 F par table et de 4 000 F par bureau.

1. *Ecrire le programme linéaire correspondant*
2. *Résoudre graphiquement ce PL*

Exercice 1.3.2 *Une entreprise fabrique des tables et des chaises à l'aide de deux machines A et B disponibles respectivement pendant 70 heures et 40 heures. Une table fait trois heures dans A et une heure dans B et rapporte 5 000 F de bénéfice alors qu'une chaise fait une heure dans A et deux heures dans B et rapporte 3 500 F de bénéfice.*

1. *Ecrire le programme de production qui donne le bénéfice maximal.*
2. *Déterminer le bénéfice maximal et les nombres de tables et de chaises à fabriquer*

Exercice 1.3.3 *Résoudre graphiquement les programmes suivants :*

$$1) \begin{cases} maxZ = 270x + 140y \\ 3x + y \leq 9 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} maxZ = -x + y \\ -2x + y \leq 1 \\ x + 3y \leq 10 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} maxZ = x + 3y \\ x + y \leq 14 \\ -2x + 3y \leq 12 \\ 2x - y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \qquad 4) \begin{cases} minZ = 9x + 8y \\ 3x + y \geq 270 \\ x + 2y \geq 140 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$