DEFINIZIONI

f CONTINUA IN x_0 SE

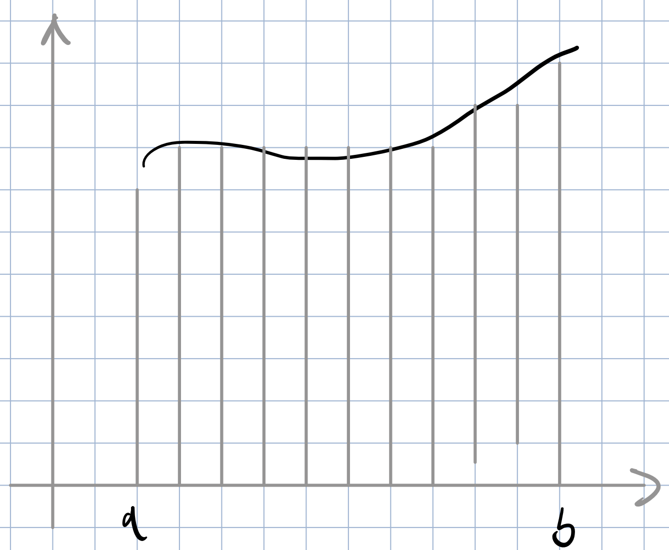
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

INTEGRALE DI RIEMANN:

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA NON NEGATIVA in $[a, b]$

$P = \{ x_0 = a < x_1 \ldots x_n = b \}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$

$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad i = 0 \ldots n-1$



COSTRUIAMO DEI RETTANGOLINI

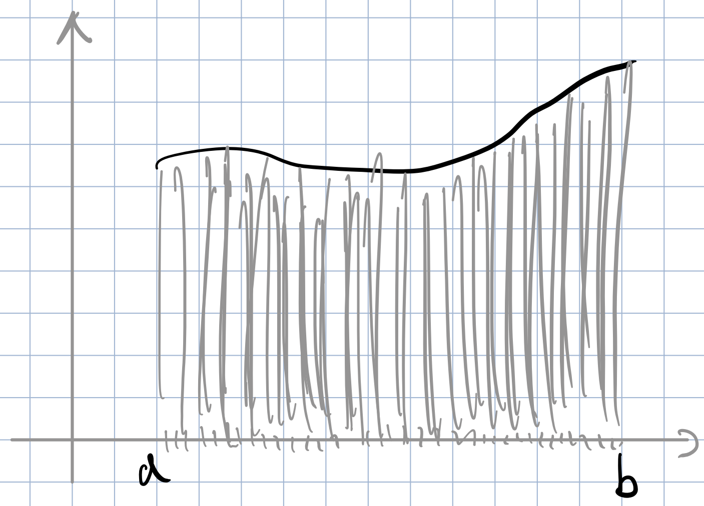
$$Q(R_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

SE SOMMIAMO TUTTE LE AREE DEI RETTANGOLINI È ABBIAMO UN'APPROSSIMAZIONE DELL'AREA DELLA FUNZIONE

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} Q(R_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

SOMMA DI CAUCHY-RIEMANN

PER MIGLIORARE L'APPROSSIMAZIONE FACCIAMO IL LIM $n \to +\infty$



SERVE ANCHE CHE GLI INTERVALLI SIANO PICCOLISSIMI :

$$\max_{n \to +\infty} (x_{i+1} - x_i) \to 0$$

ξ_i PERÒ DEVE ESSERE SCELTO CON UN CRITERIO QUINDI IL LIMITE DEVE ESSERE INDIPENDENTE DALLA SCELTA DI ξ_i.

A QUESTO PUNTO L'AREA DI R UGUALE AL LIMITE.

DERIVATA

$f : D \to \mathbb{R}$ CONTINUA $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = d \in \mathbb{R}$$

- TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE
- TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO
- TEOREMA DEI CARABINIERI
- TEOREMA DEGLI ZERI
- TEOREMA DI WEISTRASS
- TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI
- LEGAME TRA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ FUNZIONI
- ALGEBRA DELLE DERIVATE
- DERIVATA DEL PRODOTTO E DEL QUOZIENTE DI FUNZIONI
- DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA
- DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA
- TEOREMA DI FERMAT
- TEOREMA DI LAGRANGE
- TEOREMA DELLA MEDIA
- TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE
- INTEGRAZIONE PER PARTI
- CRITERI DI INTEGRABILITÀ: CONFRONTO E CONFRONTO ASINTOTICO
- CONDIZIONE NECESSARIA ALLA CONVERGENZA
- SERIE A TERMINI POSITIVI: CONFRONTO, CONFRONTO ASINTOTICO, RADICE E RAPPORTO
- FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Iph: $f(x): D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

Th: SE $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ ALLORA TALE LIMITE È UNICO

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO:

Iph: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$

DOVE $L_1 \neq L_2$ $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$

USANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE ABBIAMO CHE:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists d_1 = d_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < d_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists d_2 = d_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < d_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$

SIA $d = \min(d_1, d_2) > 0$

PERCHÉ $L_1 \neq L_2$ SOMMO E SOTTRAGGO $f(x)$

$$0 < |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2|$$

PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$|L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

$\forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < d$ (INTERSEZIONE DEI DUE INTORNI)

$|f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$ SONO ENTRAMBE QUANTITÀ PIÙ PICCOLE DI ε

$0 < |x - x_0| < d < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$ ALLORA ABBIAMO CHE

$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 < |L_1 - L_2| < 2\varepsilon \Rightarrow |L_1 - L_2| = 0$ $\quad L_1 = L_2$

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Iph: $f(x): D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad , \quad L \in \mathbb{R}$$

Th: SE $L > 0$ ALLORA ESISTE UN I_{x_0} TALE CHE:

$$\forall x \in D \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2}$$

IN PARTICOLARE f È POSITIVA IN I_{x_0}.

DIMOSTRAZIONE: DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE SI HA:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

SIA $\varepsilon = \frac{L}{2}$ POSSIAMO FARE QUESTA SCELTA PERCHÉ $L > 0$

$$L - \varepsilon < f(x) \Rightarrow f(x) > L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

Th: SE $L < 0$ ALLORA ESISTE UN I_{x_0} TALE CHE:

$$\forall x \in D \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2}$$

IN PARTICOLARE f È NEGATIVA IN I_{x_0}.

DIMOSTRAZIONE: DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE SI HA:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

SIA $\varepsilon = -\frac{L}{2}$ POSSIAMO FARE QUESTA SCELTA PERCHÉ $L < 0$

$f(x) < L + \varepsilon \Rightarrow f(x) < L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$

SE $L = 0$ IL TEOREMA NON VALE

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI

Ip: $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

$\exists I_{x_0} : \forall x_0 \in D \cap (I_{x_0} / \{x_0\}) \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Th: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

DIMOSTRAZIONE: DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE SI HA:

$\forall I_L \, \exists I'_{x_0} : \forall x_0 \in D \cap (I_{x_0} / \{x_0\}) \quad f(x) \in L, \, h(x) \in L$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists d = d(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < d \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists d = d(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < d \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$

$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

UNENDO I DUE INTORNI $\Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < L + \varepsilon$

DUNQUE OTTENIAMO CHE

$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \quad \forall x \in D \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

TEOREMA DEGLI ZERI

Ip: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

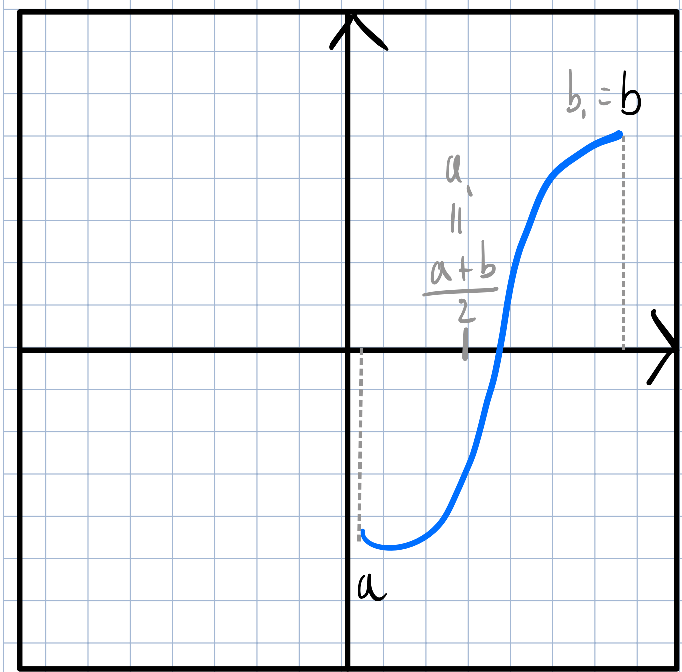
f continua in $[a,b]$

$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$

Th: $\exists\, x_0 \in (a,b) : f(x_0) = 0$

CONDIZIONI SUFFICIENTI DEL TEOREMA

DIMOSTRAZIONE:



L'ipotesi $f(a) \cdot f(b) < 0$ ci assicura che $f(a)$ ed $f(b)$ siano di segno opposto.

Dunque supponiamo che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

Possiamo dividere in due parti l'intervallo, prendendo il punto $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Abbiamo tre possibili casi:

SE $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{a+b}{2}$

SE $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ $\begin{cases} f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0 \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \end{cases}$

Consideriamo dei due nuovi intervalli, quello con estremi di segno opposto.

$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

In questo caso avendo l'intervallo a_1, b_1

CONTINUEREMO A DIVIDERE A METÀ FINO A TROVARE x_0.

CONSIDERATE DUE SUCCESSIONI a_n, b_n:

i. $a_n, b_n \in [a,b] \ \forall n \Rightarrow$ SONO LIMITATE $A, B \in \mathbb{R}$

ii. $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ SONO MONOTONE $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} b_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n$

iii. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \ \forall n \Rightarrow B - A = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

iv. $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) \leq 0$

POSSIBILE PERCHÉ f È CONTINUA — $f(\ell)\cdot f(\ell) \leq 0$

$$f(\ell) = 0$$

DATO CHE LE IPOTESI SONO CONDIZIONI SUFFICIENTI MA NON NECESSARIE, SE NON PRESENTI IL TEOREMA NON VALE, MA LA SUA TESI POTREBBE.

POSSIBILE APPLICAZIONE: ESISTENZA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO POSITIVO

TEOREMA DI WEISTRASS

$\boxed{\text{CONDIZIONI SUFFICIENTI}}$

Ipt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$

Th f AMMETTE MINIMO E MASSIMO ASSOLUTI IN $[a,b]$

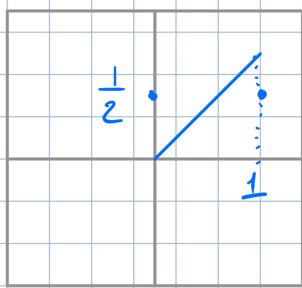
i.e. $\exists\ x_M, x_m \in [a,b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

ECCEZIONI :

1. SE f NON É CONTINUA IN GENERALE IL TEOREMA NON VALE

ESEMPIO:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{SE } x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{SE } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

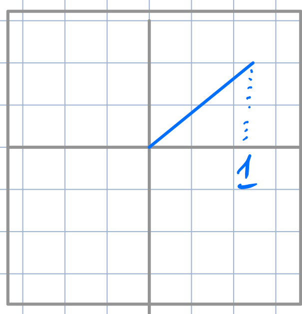


2. SE f NON É DEFINITA IN UN INTERVALLO CHIUSO IN GENERALE IL TEOREMA NON VALE

ESEMPIO:

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x$



TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Iph: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$

Th: $\forall \lambda \in [\min_{a,b} f(x), \max_{a,b} f(x)]$
$\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \lambda$

CONDIZIONI SUFFICIENTI

DIMOSTRAZIONE

DA WEISTRASS : $\exists x_m, x_M \in [a,b] : f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$

RESTA DA PROVARE PER $\lambda \in (m, M)$

SIA $g : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x) = f(x) - \lambda$

DOVE $\lambda \in (m, M)$
$\to m < \lambda < M$

SI HA CHE:

$$g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0$$
$$g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0$$

DAL TEOREMA DEGLI ZERI

g È CONTINUA IN $[a,b]$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (x_m, x_M) : g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \lambda$

NOTA:
SE f NON È CONTINUA IL TEOREMA IN GENERALE NON VALE

APPLICAZIONE: DIMOSTRAZIONE CHE UN POLINOMIO DI GRADO DISPARI AMMETTE UNO ZERO REALE.

TEOREMA LEGAME DERIVABILITÀ - CONTINUITÀ

Ip: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, f DERIVABILE IN x_0

Th: f È CONTINUA

DIMOSTRAZIONE:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f(x_0+h) - f(x_0) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h)$$
$$\parallel$$
$$\lim_{h \to 0} f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} = f(x_0)$$

DUNQUE:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \implies f \text{ CONTINUA}$$

ALGEBRA DELLE DERIVATE

REGOLE DI DERIVAZIONE: $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ APERTO

f e g DERIVABILI IN A.

ALLORA:

1. $f+g$ È DERIVABILE IN A $\quad (f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $f \cdot g$ È DERIVABILE IN A $\quad (f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$
3. f/g È DERIVABILE IN A $\quad (f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

DIMOSTRAZIONE:

1.
$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] = f'(x) + g'(x)$$

ANALOGAMENTE PER LA DIFFERENZA

2.
$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h} =$$

SOMMO E SOTTRAGGO E POSSO PERCHÉ È DEFINITA NEL PUNTO

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} =$$

$f(x)$ POICHÉ CONTINUA

$$= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] =$$

$$= f(x)\cdot g'(x) + g'(x)\,f(x)$$

3

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f/g)(x+h) - (f/g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)\cdot g(x) - g(x+h)\cdot f(x)}{g(x+h)g(x)}}{h} =$$

MCD

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)\cdot g(x) - g(x+h)\cdot f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x+h)\,g(x)}}{h} =$$

$\pm f(x)g(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)\left(f(x+h) - f(x)\right) - f(x)\left(g(x+h) - g(x)\right)}{g(x+h)\cdot g(x)}}{h} =$$

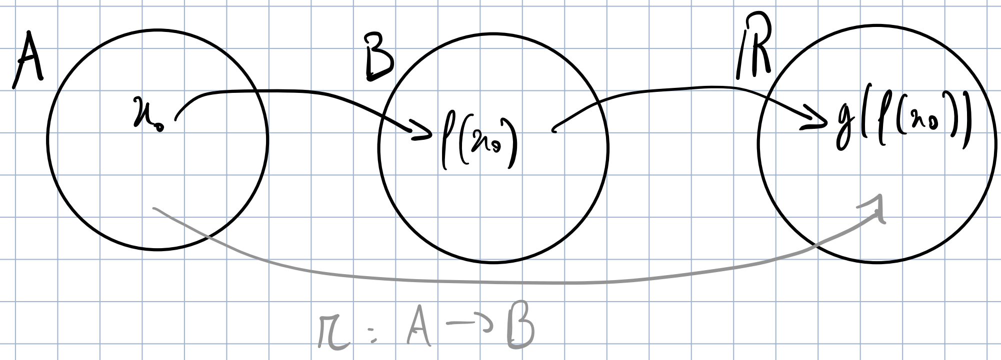
RAGGRUPPO

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x+h)\cdot g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

DERIVABILITÀ DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ APERTO $x_0 \in A$

$g: B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ APERTO



IPh: f DERIVABILE IN x_0

g DERIVABILE IN $f(x_0)$

Th: h DERIVABILE IN x_0 : $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \cdot \frac{f(x+h) - f(x_0)}{f(x+h) - f(x_0)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} \qquad f(x_0+h) - f(x_0) = k$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))}{k} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right]$$

PER $h \to 0$, $k \to 0$:

$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \implies h$ È DERIVABILE

DERIVABILITÀ FUNZIONE INVERSA

Ip: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f DERIVABILE E INVERTIBILE IN (a,b)

Th: SE $\exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ DERIVABILE IN $f(x_0)$

$$f^{-1'}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

DIMOSTRAZIONE

SIA $h \in \mathbb{R}$ E PONIAMO $f(x_0+h) = \eta$ E $f(x_0) = y_0$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_0+h = f^{-1}(\eta) \qquad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

$$\lim_{\eta \to y_0} \frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_0)}{\eta - y_0} = \frac{x_0 + h - x_0}{f(x+h) + f(x_0)} = \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

SE $\eta \to y_0 \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(\eta)}_{= x_0+h} \to \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{= x_0} \Rightarrow h \to 0$

HA SENSO POICHÈ CONTINUA ESSENDO IN UN' INTERVALLO

$$\lim_{\eta \to y_0} \frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_0)}{\eta - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

f^{-1} È CONTINUA $\Leftrightarrow$ f È DEFINITA IN UN INTERVALLO

TEOREMA DI FERMAT

CONDIZIONI NECESSARIE

Ip $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

f DERIVABILE IN (a,b) → APERTI PERCHÉ È NECESSARIO FARE LIMITE DESTRO E SINISTRO

$x_0 \in (a,b)$ max o min LOCALE PER f.

Th $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE

Ip: x_0 max LOCALE PER f.

ALLORA: $\exists\, d > 0 \mid \forall x \in (x_0 - d, x_0 + d) \quad f(x_0) \geq f(x)$

CONSIDERIAMO QUINDI $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

PRENDO h ABBASTANZA PICCOLO PERCHÉ RIENTRI NELL'INTORNO (x_0+d, x_0-d) IN MODO TALE CHE VALGA $f(x_0) \geq f(x)$; $f(x_0) \geq f(x_0+h)$

$h > 0 \quad \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) = f'_+(x_0) \leq 0$

$h < 0 \quad \displaystyle\lim_{h \to 0^-} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) = f'_-(x_0) \geq 0$

DATO CHE f È DERIVABILE IN x_0

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Longleftrightarrow f'(x_0) = 0$$

TEOREMA DI LAGRANGE (VALOR MEDIO)

Iph $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$

f DERIVABILE IN (a,b)

Th $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ROLLE:
DATA UNA FUNZIONE CONTINUA E DERIVABILE IN UN'INTERVALLO CHE ASSUME STESSI VALORI AGLI ESTREMI ESISTE ALMENO UN PUNTO IN CUI $f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE:

SIA $F(x) = f(x) - \lambda x$

CONTINUA PER IPH — CONTINUA PERCHÉ MONOMIO

PONIAMO $F(a) = F(b)$ — PER AVERE TUTTE LE IPH DEL TEOREMA DI ROLLE

$F(a) = f(a) - \lambda a \qquad F(b) = f(b) - \lambda b$

$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$ — DATO CHE CERCHIAMO UN VALORE DI λ PER CUI L'UGUAGLIANZA È VERA, RAGGRUPPIAMO

$\lambda(b-a) = f(b) - f(a)$

$\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — SOSTITUIAMO IN $F(x)$

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

CON QUESTA DEFINIZIONE LA FUNZIONE SODDISFA LE IPH DEL TEOREMA DI ROLLE

PER IL TEOREMA DI ROLLE:

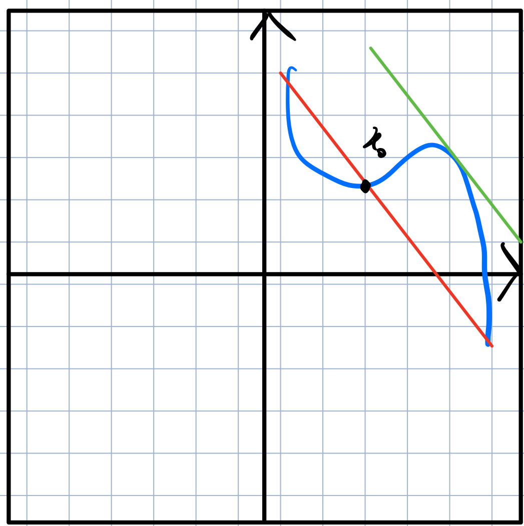
$\exists\, x_0 \in (a,b) : F'(x_0) = 0$ — CALCOLIAMO DUNQUE $F'(x)$

$$F'(x) = f'(x) - \lambda = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

CALCOLANDO LA DERIVATA NEL PUNTO x_0 ABBIAMO:

$$0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

GRAFICAMENTE IL TEOREMA CI DICE CHE ESISTE ALMENO UN PUNTO IN CUI LA RETTA SECANTE a, b È PARALLELA ALLA TANGENTE.



TEOREMA DELLA MEDIA

Ipt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

Th $\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\cdot(b-a)$

DIMOSTRAZIONE

DA WEIERSTRASS $\exists$ MAX E MIN ASS DI f IN $[a,b]$

QUINDI:

$$m = \min f(x) \le f(x) \le \max f(x) = M \quad \forall x \in [a,b]$$

DALLA MONOTONIA DELL'INTEGRALE SI HA CHE:

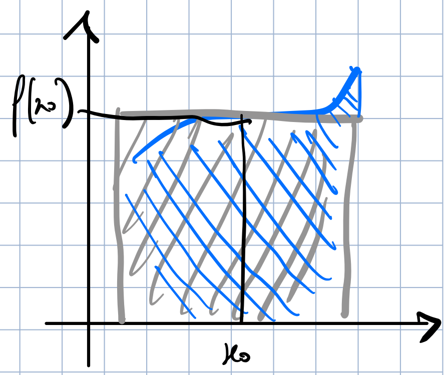
$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$\int_a M\,dx = M\int_a 1\,dx = M(b-a)$$

DIVIDENDO PER $b-a$ (>0) SI HA:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI $\Rightarrow$



$\exists\, x_0 \in [a,b]$ TALE CHE

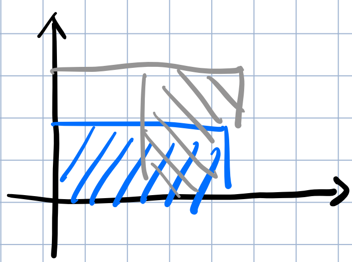
$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \Rightarrow \text{TESI}$$

ESISTE UN PUNTO x_0 TALE CHE IL RETTANGOLO $f(x_0)(b-a)$ EQUIVALE ALL'AREA TOTALE DELLA FUNZIONE IN $[a,b]$

NOTA:

SE NON È CONTINUA, IL TEOREMA IN GENERALE NON VALE:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,2] \end{cases}$$



TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Ip: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Th: F DERIVABILE IN $[a,b]$: $F'(x) = f(x)$

F È UNA PRIMITIVA DI f IN $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE

SIA $x_0 \in (a,b)$ CONSIDERIAMO

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}\right] =$$

DAL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

$\exists\, c \in (x_0, x_0+h)$:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = f(c) \cdot (x_0 + h - x_0) = f(c) \cdot h$$

$$\frac{1}{h} \cdot f(c) \cdot h = \lim_{h \to 0} f(c)$$

PER $h \to 0$
$x_0 + h \to x_0$
$c \in (x_0, x_0+h)$
$c \to x_0$

$$\lim_{h \to 0} f(c) = f(x_0)$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Ip f, g DERIVABILI CON DERIVATE CONTINUE

Th $$\int \underbrace{f(x)}_{\text{FATTORE FINITO}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{FATTORE DIFFERENZIALE}} dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$$

DIMOSTRAZIONE:

DALLA DIM. DERIVAZIONE DEL PRODOTTO:

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx + \int f'(x) g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x)$$

PER L'INTEGRALE DEFINITO:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int_a^b f'(x) g(x) \, dx$$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Ip: $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE IN $[a, x]$ $\forall x > a$

$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$

Th:

a) $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE

b) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ DIVERGE

DIMOSTRAZIONE:

DALLA MONOTONIA DELL' INTEGRALE SI HA:

$$0 \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx \quad \forall c > a$$

$\int_a^c f(x)\,dx$ È MONOTONA PERCHÉ $f \geq 0$

DUNQUE $\exists \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$

PASSANDO AL LIMITE PER $c \to +\infty$ IN

$$0 \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx \quad \forall c > a$$

OTTENGO:

$$0 \leq \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx \leq \lim_{c \to +\infty} \int_a^c g(x)\,dx$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Ipt $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, f, g CONTINUE $\forall x \in [a, b)$

$$f(x) \geq 0 \quad E \quad g(x) > 0$$

$$E \quad \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \notin (0, +\infty)$$

Th: $\int_a^b f(x)\,dx$ E $\int_0^b g(x)$ CONVERGONO O DIVERGONO ASSIEME

DIM

DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ d = d(\varepsilon) > 0 : \forall x \in [a, b) \quad 0 < x - a < d$

$\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

PRENDIAMO $\quad \varepsilon = \frac{L}{2} \quad$ OTTENENDO:

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2} L$$

DATO CHE $\quad g(x) > 0$

$$g(x)\frac{L}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2} L\, g(x)$$

DA QUI DERIVA LA TESI.

CONDIZIONE NECESSARIA CONVERGENZA SERIE:

Ipt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGENTE

Th: $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

DIMOSTRAZIONE: POICHÉ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

DALLA DEFINIZIONE DI $(S_n)_n$ SI HA CHE:

$$S_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \Longrightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

PASSANDO AL LIMITE PER $n \to +\infty$ SI HA CHE:

$$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(S_{n+1} - S_n \right) = 0$$

SE NON FOSSERO FINITI NON POTREI DIRE CON CERTEZZA IL VALORE DEL LIMITE

SERIE DI TAYLOR COL RESTO DI PEANO

IPH: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad x_0\in(a,b)$ $\quad f\in C^n(a,b)$ $\quad n\in\mathbb{N}$

TH:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)$$

DIM: (PER INDUZIONE)

BASE INDUZIONE : $n=1$

DATO CHE f È DERIVABILE IN x_0:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

E QUINDI CHE:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=0$$

PER DEFINIZIONE DI O PICCOLO:

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=o(x-x_0)$$

QUANDO $x\to x_0$

DUNQUE LA BASE È PROVATA

IPOTESI INDUTTIVA:

PER OGNI FUNZIONE $g \in C^{n-1}(a,b)$ VALE CHE

$$g(x) = P_{n-1,g}(x) + o\left((x-x_0)^{n-1}\right)$$

DOBBIAMO PROVARE CHE $f(x) = P_{n,f}(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$

PER $x \to x_0$

FACENDO IL LIMITE:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,f}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{0}{0}$$

PER $x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\downarrow\, 0} + \frac{f''(x_0)}{2!}\underbrace{(x-x_0)^2}_{\downarrow\, 0} \ldots}^{0}$$

APPLICHIAMO QUINDI DE L'HOPITAL:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P'_{n,f}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$P'_{n,f(x)} = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$= P_{n-1,\, f'(x)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P_{n-1,\, f'(x)}}{n(x-x_0)^{n-1}} = 0$$

QUINDI:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,f(x)}}{(x-x_0)^n} \overset{H}{=} 0$$