
APPUNTI DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI

CORSO TENUTO DA MICHELE VELTRI

CREATO DA
STEFANO ZIZZI

*Università degli Studi di Urbino
Informatica Applicata*



MATRICOLA: 312793
GENNAIO 2023

Indice

1 Introduzione alla Elaborazione dei Segnali	5
1.1 Caratterizzazione e Classificazione dei Segnali	5
1.1.1 Schema Elaborazione Numerica dei Segnali (DSP)	7
1.1.2 Analisi nel Dominio della Frequenza	7
1.2 Vantaggi e Svantaggi della Elaborazione Numerica dei Segnali	8
2 Segnali a Tempo Discreto nel Dominio del Tempo	9
2.1 Rappresentazione dei Segnali nel Dominio del Tempo.	9
2.2 Operazioni sulle Sequenze	10
2.2.1 Somma e Sottrazione	10
2.2.2 Moltiplicazione per una Costante(Amplificazione)	10
2.2.3 Prodotto (Modulazione)	10
2.2.4 Time Shift	11
2.2.5 Time Reversal (Time Flip)	11
2.2.6 Downsampling	11
2.2.7 Upscaling	12
2.3 Classificazione delle Sequenze	13
2.3.1 Durata	13
2.3.2 Causalità	13
2.3.3 Parità	14
2.3.4 Assoluta Sommabilità	14
2.3.5 Sommabilità Quadratica	14
2.4 Energia e Potenza Media di Segnali a Tempo Discreto	14
2.4.1 Energia	14
2.4.2 Potenza Media	14
2.5 Sequenze Elementari	15
2.5.1 Impulso Unitario	15
2.5.2 Gradino Unitario	15
2.5.3 Gradino Unitario	16
2.5.4 Sequenza Esponenziale	16
2.5.5 Sequenza Sinc	16
2.6 Sequenze Complesse e Sinusoidi a Tempo Discreto	17
2.6.1 Sinusoide Reale	17
2.6.2 Sequenze Esponenziali Complesse	17
3 Sistemi a Tempo Discreto	20
3.0.1 Sistema a TD	20
3.1 Proprietà dei Sistemi a Tempo Discreto	20
3.1.1 Lineritá	20
3.1.2 Invarianza Temporale	20
3.1.3 Causalitá	21
3.1.4 Stabilitá BIBO	21
3.2 Esempi di Semplici Sistemi	21
3.2.1 Accumulatore	21
3.2.2 Filtro a Media Mobile	23

3.2.3	Interpolatore Lineare	24
3.3	Sistemi LTI	25
3.4	Risposta Impulsiva e Somma di Convoluzione	25
3.4.1	Somma di Convoluzione	25
3.4.2	Risposta Impulsiva	28
3.5	Connessioni tra Sistemi LTI	28
3.6	Equazioni alle Differenze	29
3.6.1	Metodo Diretto	29
3.6.2	Sistemi non Ricorsivi	30
4	Segnali a Tempo Discreto nel Dominio della Frequenza	31
4.1	Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)	31
4.1.1	Relazione Trasformata - Antitrasformata	33
4.1.2	Condizioni Esistenza DTFT	33
4.2	DTFT notevoli	34
4.3	Proprietà della DTFT	34
4.4	Teorema della Convoluzione	36
4.5	Teorema di Parseval	36
4.6	Risposta in Frequenza dei Sistemi LTI	37
4.7	Ritardo di Fase e di Gruppo	37
5	Campionamento e Quantizzazione	38
5.1	Campionamento Ideale dei Segnali a Tempo Continuo	38
5.1.1	Pettine di Dirac nel Domino del Tempo	39
5.2	Il Teorema del Campionamento	40
5.3	Fenomeno dell'Aliasing	40
5.4	Ricostruzione del Segnale	41
5.5	Quantizzazione ed Errore di Quantizzazione	41
6	Trasformata di Fourier discreta	42
6.1	Definizione della Trasformata di Fourier Discreta (DFT)	42
6.1.1	Forme Alternative	43
6.2	Relazione tra DTFT e DFT	43
6.3	Valutazione della DTFT su Frequenze Discrete Tramite la DFT	43
6.3.1	Zero Padding	44
6.4	Proprietà della Trasformata DFT	45
6.4.1	Time Shift Circolare	46
6.4.2	Time reversal circolare	46
6.5	Convoluzione Lineare e Convoluzione Circolare	46
6.5.1	Convoluzione Circolare	46
6.5.2	Convoluzione Lineare	47
6.5.3	Teorema della Convoluzione	47
6.5.4	Teorema di Parseval	47
6.6	Analisi di sistemi LTI mediante DFT	48
6.6.1	Sovrapposizione e Somma	48
6.6.2	Sovrapposizione ed Estrazione	48
6.7	Fast Fourier Transform (FFT)	49
6.7.1	Algortimo FFT con declinazione nel tempo(RADIX-2)	49
6.7.2	Complessità Computazionale	51

7 Trasformata Z	52
7.1 Definizione della Trasformata Z	52
7.2 Relazione tra DTFT e Trasformata Z	52
7.3 Analisi della Regione di Convergenza	52
7.3.1 Caratteristiche del ROC	53
7.3.2 Regione di Convergenza di Sequenze Illimitate	53
7.4 Diagramma Poli-Zeri	54
7.5 Effetto della Presenza di un Polo/Zero sul Modulo della Trasformata Z	55
7.6 Proprietà della Trasformata Z	55
7.7 Trasformata Z Inversa	56
7.8 Analisi dei Sistemi LTI Mediante Trasformata Z	56
7.8.1 Funzione di Trasferimento	56
7.8.2 Stabilità	56
7.8.3 Causalità	57
8 Sistemi LTI a Tempo Discreto nel Dominio Della Frequenza	58
8.1 Filtri Ideali	58
8.1.1 Filtro ideale passa-basso	58
8.2 Caratteristiche dei Filtri Reali	59
8.3 Filtri FIR	59
8.4 Esempi di Semplici Filtri FIR	59
8.4.1 Filtro simmetrico a due parametri	59
8.5 Filtri FIR a Fase Lineare	60
8.6 Filtri a Fase Zero	61
8.7 Progettazione di Filtri FIR Tramite il Metodo delle Finestre	62
8.7.1 Finestra rettangolare	62
8.7.2 Procedura per la Realizzazione del Filtro	64
8.7.3 Finestra di Kaiser	64
8.8 Finestra di Kaiser:	65
8.9 Maschera di tolleranza	65
8.10 Progettazione di Filtri IIR Tramite Collocamento Diretto di Poli e Zeri	66
8.11 Filtri IIR	66
8.11.1 Stabilità Filtri IIR	66
8.12 Esempi di Filtri IIR	67
8.12.1 Passa-basso	67
8.12.2 Passa-alto	67
8.12.3 Passa-banda	68
8.12.4 Elimina-banda	68
8.12.5 Passa-tutto	69
8.13 Filtri a Pettine	69
8.13.1 FeedForward	70
8.13.2 FeedBack	70
8.14 Funzioni di Trasferimento a Fase Minima e Fase Massima	70
9 Formulario e Metodi Risolutivi	72
9.1 Formule Utili	72
9.2 Metodi per Esame	72
9.2.1 Potenza ed Energia	72

9.2.2	Caratterizzazione Sistema	72
9.2.3	Convoluzione	73
9.2.4	Risposta Impulsiva	73
9.2.5	Componenti Pari e Dispari	74
9.2.6	Trasformate	74
9.2.7	Funzione di Trasferimento	76

1 Introduzione alla Elaborazione dei Segnali

Segnale Una variazione nel tempo di una grandezza fisica alla quale è associata un'informazione.

Esempi di segnale:

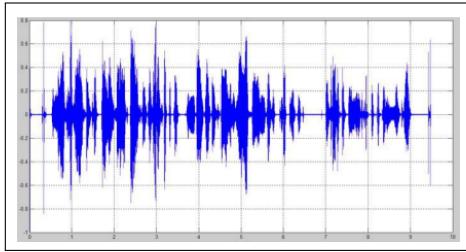


Figura 1: Segnale di Voce

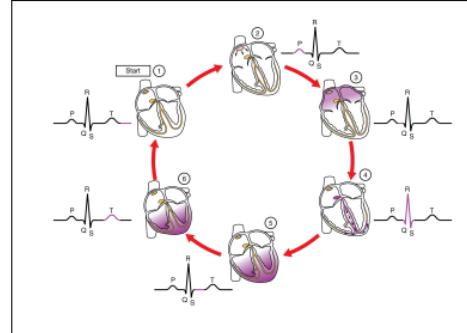


Figura 3: ECG



Figura 2: Elettrocardiogramma

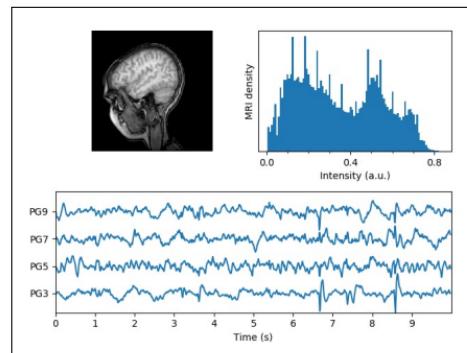


Figura 4: EEG

1.1 Caratterizzazione e Classificazione dei Segnali

La maggior parte dei segnali che incontriamo è di origine naturale ma esistono anche segnali artificiali.

Criteri di Classificazione:

- **Aampiezza:** Valore di un segnale ad uno specifico istante di tempo;
- **Forma d'onda:** Variazione di ampiezza in funzione di tempo.

Tipi di segnale:

- **Segnali deterministici:** Possono essere predetti in maniera esatta, senza incertezza sul loro valore, tramite espressioni matematiche, tabelle, regole note di qualunque tipo;
- **Segnali casuali:** Sono affetti da incertezze intrinseche, causate dal fenomeno fisico sottostante, che impediscono la predizione del valore ad un determinato istante(Rumore);

- **Segnali periodici:** Si ripetono uguali a se stessi con periodo T nel dominio del tempo. Possono essere completamente specificati usando un singolo periodo;
- **Segnali aperiodici:** Segnali non periodici;
- **Segnali reali:** Segnali in cui i valori sono numeri reali;

Classificazione in base al tempo:

- **Tempo Continuo:** La variabile tempo è continua $t \in \mathbb{R}$. Per i segnali a tempo continuo la notazione è $x(t)$;

Modello matematico del segnale \Rightarrow Funzione continua del tempo

- **Tempo Discreto:** Il tempo può assumere valori discreti: $-\infty < n < \infty$; $n \in \mathbb{Z}$. Per i segnali a tempo discreto la notazione è $x[n]$.

Modello matematico del segnale \Rightarrow Sequenza

I segnali possono avere ampiezza continua o discreta:

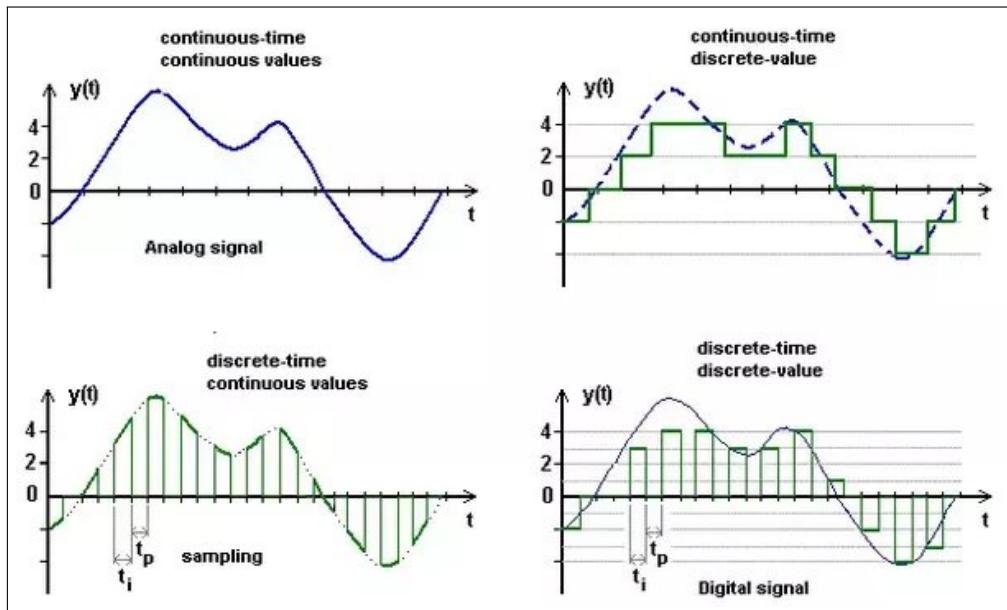


Figura 5: Segnali Continui e Discreti

Nel corso si farà principalmente riferimenti a segnali a tempo discreto.

1.1.1 Schema Elaborazione Numerica dei Segnali (DSP)

1. **ADC** Analog Filter
2. **ADC** Analog to Digital Converter
3. **DS Processor** Digital Signal Processor
4. **DAC** Digital to Analog Converter
5. **Reconstruction Filter**

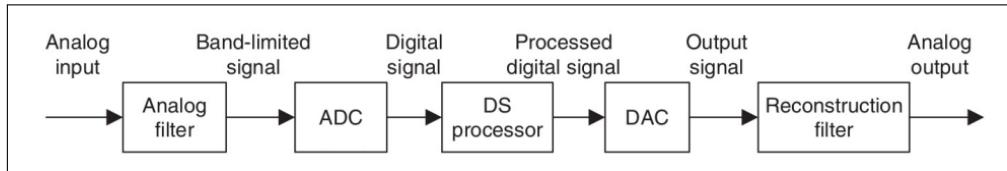


Figura 6: Schema

Le prime fasi dell'elaborazione di un segnale sono:

1. **Campionamento:** Si acquisisce il segnale da intervalli di tempo uguali $n \cdot T_s$; $n \in \mathbb{N}$, T_s è il periodo di campionamento. La frequenza di campionamento cioè il numero di campioni che si acquisiscono al secondo è indicata con $f_s = \frac{1}{T_s}$.
2. **Quantizzazione:** mappatura di valori di ingresso da un insieme grande (spesso continuo) a valori di uscita in un insieme più piccolo (numerabile).

L'elaborazione dei segnali tratta essenzialmente la manipolazione del segnale per:

- Estrarre informazioni;
- Determinare relazione tra segnali;
- Produzione di una rappresentazione del segnale in un dominio diverso dal tempo;
- Modificare il segnale rimuovendo componenti non volute(filtraggio del rumore);
- Modellazione\Trasformazione del segnale.

1.1.2 Analisi nel Dominio della Frequenza

Per passare ad una rappresentazione del segnale dal dominio del tempo a quello della frequenza si utilizza la **Trasformata di Fourier**. L'analisi in frequenza è molto più efficiente dal punto di vista computazionale rispetto a quella nel tempo.

Nelle ultime due fasi avviene l'Interpolazione, dunque il segnale viene riportato in forma analogica.

1.2 Vantaggi e Svantaggi della Elaborazione Numerica dei Segnali

Vantaggi

- Funzionamento indipendente dalla temperatura;
- No taratura - Integrazione VLSI;
- Elaborazioni non ammissibili dal mondo analogico;
- Riproducibilità a basso rumore;
- Implementazione software.

Svantaggi

- Minore velocità;
- Scarsa gestione della potenza.

2 Segnali a Tempo Discreto nel Dominio del Tempo

2.1 Rappresentazione dei Segnali nel Dominio del Tempo.

I segnali a tempo discreto sono dette **sequenze**.

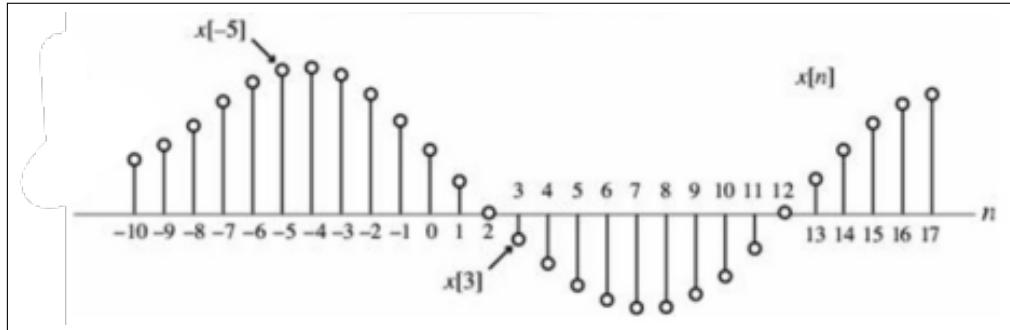


Figura 7: Sequenza

La sequenza si indica con una legge matematica del tipo:

$$X[n] = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases}$$

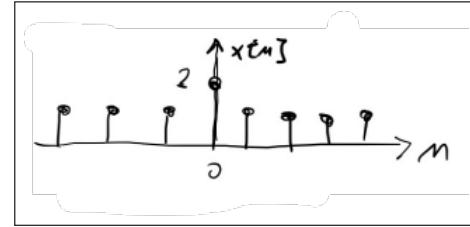


Figura 8: Sequenza

o elencando direttamente i valori del segnale. La freccia in alto rappresenta n la posizione dell'origine temporale, cioè il punto in cui $n = 0$. Una sequenza è una specie di istantanea del segnale nel suo complessivo sviluppo temporale dal passato al futuro passando per l'istante attuale in cui $n = 0$.

Le sequenze sono spesso generate campionando un segnale analogico, continuo nel tempo $x(t)$, ad intervalli di tempo uniformi T_s :

$$x[n] = x(nT_s) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

T_s è il **periodo di campionamento**, quindi il tempo che intercorre tra due campioni(si misura in secondi).

ρ_s è uguale a $\frac{1}{T_s}$ ed è **detta frequenza di campionamento**, quindi il numero di campioni per secondo(si misura in Hz o in Samples per Second).

2.2 Operazioni sulle Sequenze

Nelle operazioni sulle sequenze si seguono le regole dell'algebra e si effettuano tra coppie di campioni osservate nei medesimi istanti di tempo.

2.2.1 Somma e Sottrazione

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

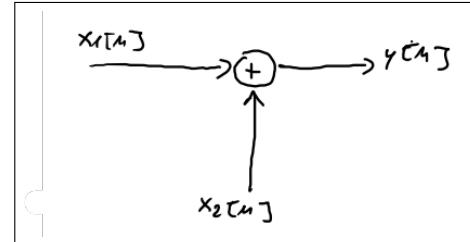


Figura 9: Somma

Cambiando segno a tutti i campioni di $x_2[n]$ si ottiene la differenza.

2.2.2 Moltiplicazione per una Costante (Amplificazione)

$$y[n] = A \times x[n]$$

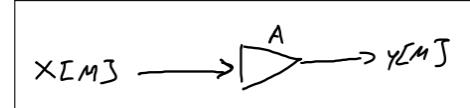


Figura 10: Amplificazione

Ogni elemento di $x[n]$ viene moltiplicato per A .

2.2.3 Prodotto (Modulazione)

$$y[n] = x_1[n] \times x_2[n]$$

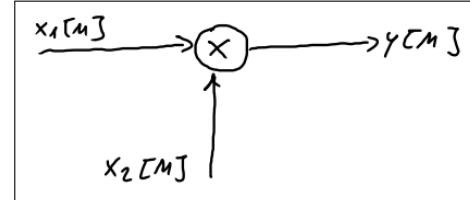


Figura 11: Modulazione

2.2.4 Time Shift

Il time shift può essere di due tipi diversi:

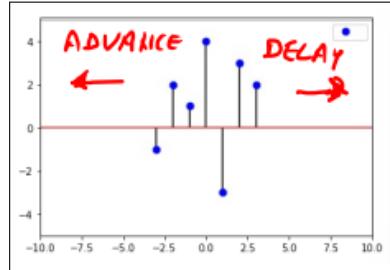


Figura 12: Sequenza originale

- **Delay (Ritardo):**

$$y[n] = x[n - N]$$

La sequenza viene ritardata di N campioni. Il segnale $y[n]$ inizia N unità di tempo dopo $x[n]$.

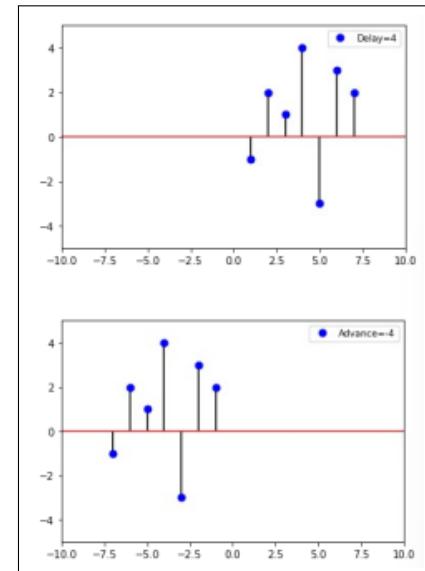


Figura 13: Delay e Advance

2.2.5 Time Reversal (Time Flip)

$$y[n] = x[-n]$$

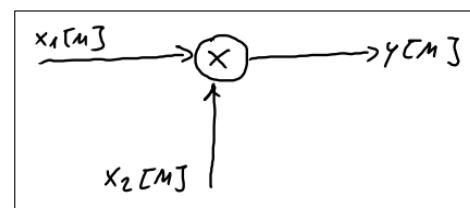


Figura 14: Ribaltamento

La sequenza viene "ribaltata" sull'asse n ruotandola rigidamente attorno all'asse delle ordinate.

2.2.6 Downsampling

$$y[n] = x[Mn] \quad M \in \mathbb{N}$$

Con questa operazione partendo dalla sequenza $x[n]$ si costruisce la sequenza $y[n]$ prendendo ogni M della sequenza originale. Con un segnale campionato questa operazione

altera la frequenza di campionamento originale:

$$\begin{cases} \rho'_s &= \frac{\rho_s}{M} \\ T'_s &= MT_s \end{cases}$$

Un'esempio di applicazione è la compressione della velocità di trasmissione dei dati(Attenzione a rispettare il teorema di Shannon-Nyquist).

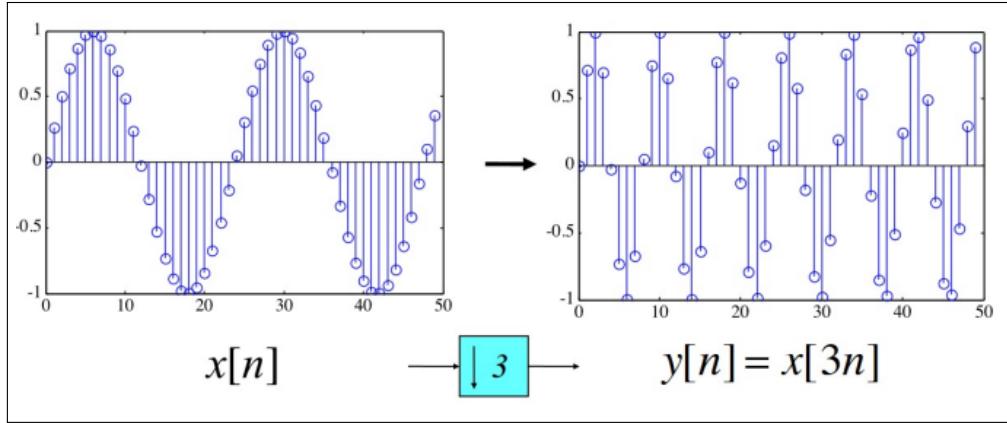


Figura 15: Downsampling

Applicato ad un brano musicale equivarrebbe a riprodurlo a velocità tripla.

2.2.7 Upscaling

$$\begin{cases} x[\frac{n}{L}] & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & Altrimenti \end{cases}$$

La sequenza originale $x[n]$ viene modificata inserendo $L - 1$ zeri tra ogni coppia di valori. Equivale a produrre una approssimazione della sequenza che si sarebbe ottenuta campionando il segnale ad una frequenza maggiore(Utilizzare filtro interpolatore per l'espansione di una segnale compresso).

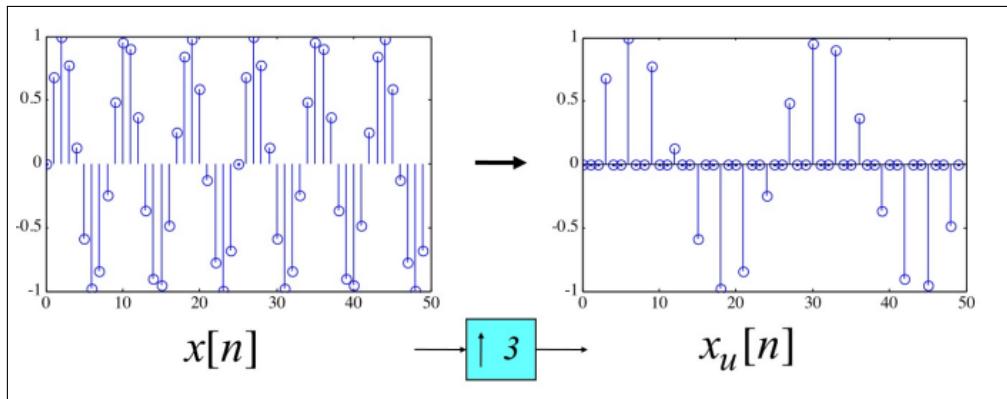


Figura 16: Upsampling

Applicato ad un brano musicale equivarrebbe a riprodurlo a velocità tre volte più lenta.

Combinazione Operazioni su Sequenza

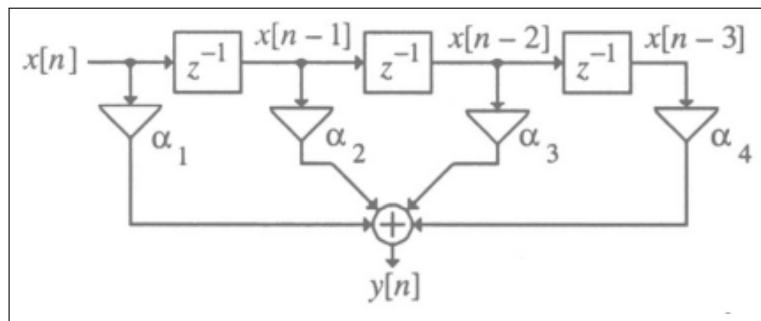


Figura 17: operazioni combinate

$$y[n] = \alpha_1 x[n] + \alpha_2 x[n-1] + \alpha_3 x[n-2] + \alpha_4 x[n-3]$$

Attenzione: Lo operazioni di time shift, flip e scalamento dipendono dall'ordine in cui vengono condotte.

1. Flip e Delay di 1 sample della sequenza $x[n]$:
 $y_1[n] = x[-n] ; y_2[n] = y_1[-n-1] \Rightarrow y_2[n] = x[-n+1]$
2. Eseguendo le operazioni con ordine invertito non si ottiene lo stesso risultato:
 $z_1[n] = x[n-1] ; z_2[-n] = z_1[-n] \Rightarrow z_2[n] = x[-n-1]$

2.3 Classificazione delle Sequenze

I segnali a tempo discreto possono essere classificati in base a svariate proprietà. Di seguito ne vediamo di alcuni tipi.

2.3.1 Durata

Durata finita una sequenza nulla all'esterno di un'intervalle di tempo:

$$n_1 \leq n \leq n_2 \quad \text{con} \quad -\infty < n_1 \leq n_2 < \infty$$

Il numero di campioni è dato da

$$N = n_2 - n_1 + 1$$

Durata infinita è definita in un intervallo di tempo del tipo:

$$[n_0, \infty) \quad (-\infty, n_0] \quad (-\infty, \infty)$$

2.3.2 Causalità

Sequenza causale è nulla per valori di $n < 0$

Sequenza anticausale è nulla per valori di $n > 0$

Sequenza bilatera è non nulla per ogni valore.

2.3.3 Parità

Pari Se $x[n] = x[-n]$

Dispari Se $x[n] = -x[-n]$ Verifichiamo che $x_e[n]$ é pari e $x_o[n]$ é dispari:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

$$x_e[-n] = \frac{1}{2}(x[-n] + x[n]) = x_e[n] \Rightarrow Pari$$

$$x_o[-n] = \frac{1}{2}(x[-n] - x[n]) = -x_o[n] \Rightarrow Dispari$$

Ogni segnale reale può essere scomposto nella somma di un segnale pari ed uno dispari:

$$x_e[n] + x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) + \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) = \frac{1}{2}(2x[n]) = x[n]$$

2.3.4 Assoluta Sommabilità

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

2.3.5 Sommabilità Quadratica

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]^2| < \infty$$

2.4 Energia e Potenza Media di Segnali a Tempo Discreto

2.4.1 Energia

L'energia di un segnale é definita come:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Solo una sequenza finita può avere energia finita.

2.4.2 Potenza Media

La potenza media é definita come

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

Un segnale può essere:

- **Segnale di energia:** energia finita, potenza media nulla;
- **Segnale di potenza:** potenza media finita, energia finita.

2.5 Sequenze Elementari

2.5.1 Impulso Unitario

La sequenza ha ampiezza unitaria nell'origine e zero negli altri istanti:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

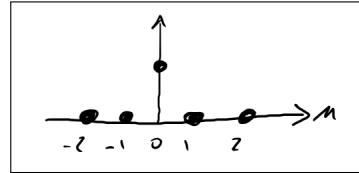


Figura 18: Sequenza impulso unitario

Si possono generare impulsi unitari ad altri valori nel tempo usando il **time shift**:

$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

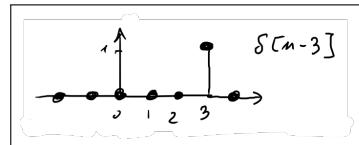


Figura 19: Impulso unitario shiftato

Una proprietà dell'impulso è che una qualunque sequenza può essere espressa come la somma di infiniti impulsi traslati nel tempo e opportunamente scalati in ampiezza.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

2.5.2 Gradino Unitario

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

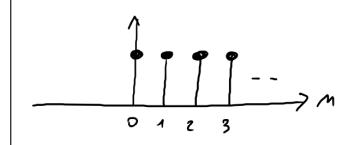


Figura 20: Sequenza gradino unitario

Il gradino unitario si può essere descritto tramite l'impulso unitario:

$$u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n - m]$$

Allo stesso modo l'impulso unitario può essere descritto come:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$

2.5.3 Gradino Unitario

$$u[n] = nu[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & \geq 0 \end{cases}$$

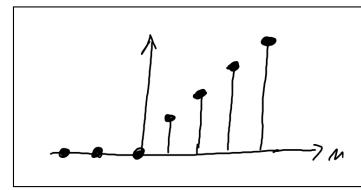


Figura 21: Sequenza gradino unitario

2.5.4 Sequenza Esponenziale

$$x[n] = A\alpha^n$$

dove $A, \alpha \in \mathbb{R}$. α è detta ragione dell'esponenziale.

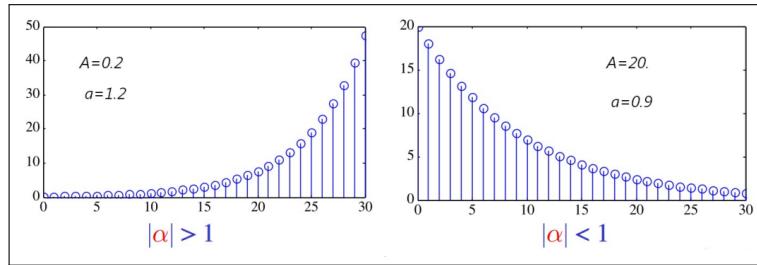


Figura 22: Sequenza esponenziale

2.5.5 Sequenza Sinc

$$\text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{n}{N}\right)}{\pi \frac{n}{N}}$$

con N intero positivo. La sequenza sinc soddisfa la relazione $\text{sinc}(0) = 1$. Inoltre, $\text{sinc}(n/N)$ si annulla per ogni $\text{sinc}(n/N) = 0$ per ogni $n = kN$, con k intero. Infine, nel tempo discreto si verifica $\text{sinc}(n) = \delta(n)$.

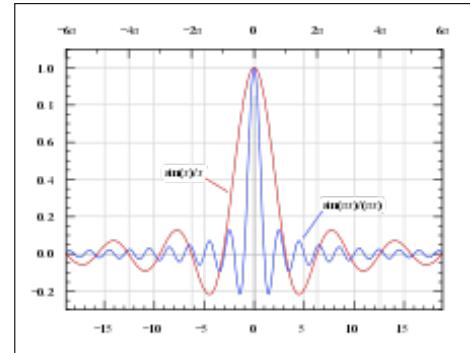


Figura 23: Sequenza sinc

2.6 Sequenze Complesse e Sinusoidi a Tempo Discreto

2.6.1 Sinusoide Reale

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi), \quad \forall n$$

dove:

- A : ampiezza reale
- ω_0 : pulsazione ($\omega_0 = 2\pi f_0$)
- ϕ : fase iniziale

Le Sinusoidi che differiscono di un qualsiasi numero intero di angoli giro 2π sono indistinguibili nel dominio del tempo discreto.

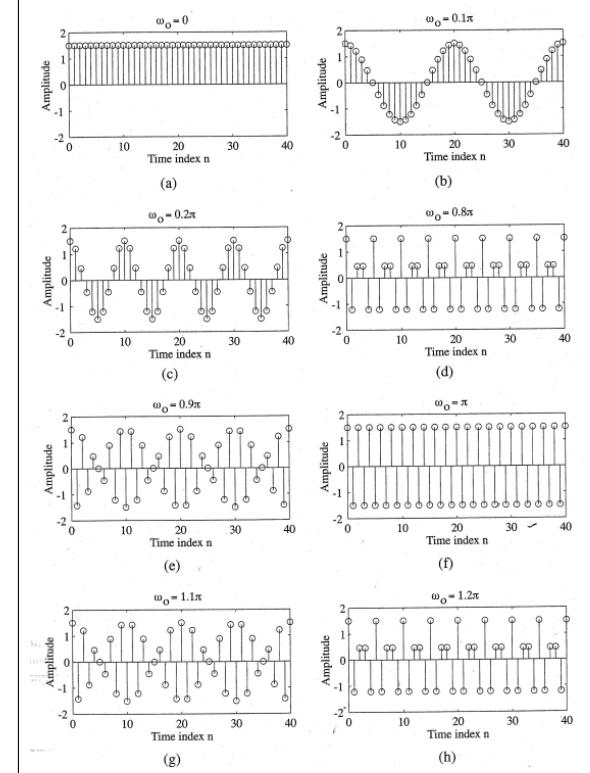


Figura 24: Sinusoide al variare di ω

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} A \cos(2\pi(f_0 + k)n + \phi) &= A \cos(2\pi f_0 n + 2\pi kn + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 n + \phi) = x[n] \end{aligned}$$

dove $2\pi kn, \forall k, n$ corrisponde ad una rotazione di fase di 2π dopo la quale il cos riassume gli stessi valori. Quindi, nell'analisi dei segnali sinusoidali è sufficiente considerare un intervallo di frequenza di supporto unitario, posto in genere pari all'intervallo

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

ovvero l'intervallo delle pulsazioni

$$(-\pi, \pi] \quad \text{o} \quad (0, 2\pi]$$

A TD le oscillazioni della sinusoide non crescono al crescere di ω_0/f_0 . L'oscillazione massima della sinusoida si ha con $\omega_0 = \pi$ e $\rho_0 = 1/2$.

2.6.2 Sequenze Esponenziali Complesse

$$x[n] = A\alpha^n$$

dove sia A che α sono numeri complessi:

- $A = |A|e^{j\phi}$

- $\alpha = e^{(\sigma+j\omega_0)}$

La sequenza equivale a

$$\begin{aligned} x[n] &= |A|e^{j\phi}e^{(\sigma+j\omega_0)} \\ &= |A|e^{\sigma n}e^{j(\omega_0 n + \phi)} \end{aligned}$$

dove:

- $|A|$ è il fattore di scala
- $e^{\sigma n}$ è la variazione di ampiezza
- $e^{j(\omega_0 n + \phi)}$ è la variazione di fase

Applicando la formula di Eulero, l'espressione diventa

$$x[n] = |A|e^{\sigma n} [\cos(\omega_0 n + \phi) + j \sin(\omega_0 n + \phi)]$$

E' possibile esplicitare parte reale ed immaginaria:

$$\begin{aligned} x_{re}[n] &= Ae^{\sigma n} \cos(\omega_0 n + \phi) \\ x_{im}[n] &= Ae^{\sigma n} \sin(\omega_0 n + \phi) \end{aligned}$$

In queste formule, $Ae^{\sigma n}$ rappresenta l'ampiezza dei due segnali sinusoidali che formano parte reale ed immaginaria della sequenza complessa. In generale, vale che:

- $\sigma = 0$: ampiezza costante
- $\sigma > 0$: ampiezza crescente
- $\sigma < 0$: ampiezza decrescente

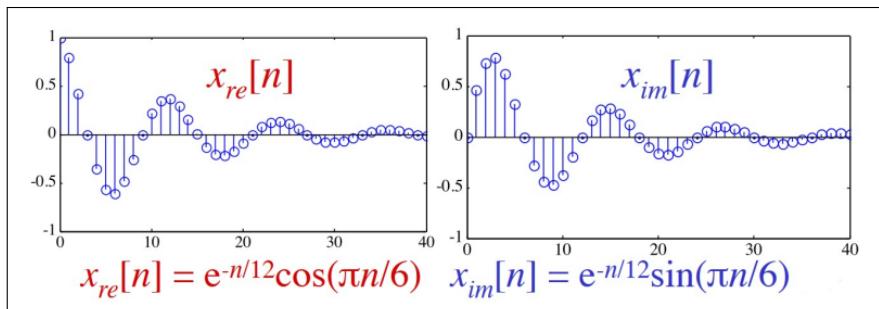


Figura 25: Parte reale e immaginaria della sequenza complessa

Dall'esempio sopra si ha che

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{6} \implies T_0 = 12$$

ossia ci vogliono 12 campioni per fare un giro completo. Fasore a TD: Un fasore è un numero complesso rappresentabile sul piano complesso come un vettore rotante con

velocità angolare ω_0 (rad/s) o frequenza f_0 (giri/s). Ogni 2π radianti riprende la sua fase iniziale.

Una sequenza esponenziale complessa con ampiezza costante nel tempo ($\sigma = 0$) rappresenta un fasore a TD:

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n + \phi}$$

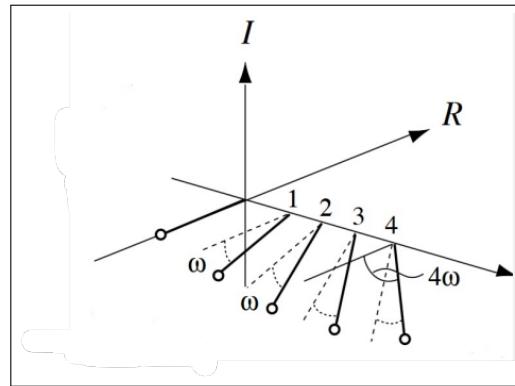


Figura 26: Fasore a TD mediante sequenza esponenziale complessa ad ampiezza costante

3 Sistemi a Tempo Discreto

3.0.1 Sistema a TD

Un sistema é un dispositivo implementato su un processore che ad un segnale di ingresso associa un segnale in uscita. Dal punto di vista matematico i sistemi TD sono caratterizzati da un operatore $H()$ che trasforma la sequenza di ingresso in un' altra sequenza in uscita dal sistema:

$$y[n] = H(x[n])$$

3.1 Proprietà dei Sistemi a Tempo Discreto

3.1.1 Linearità

Un sistema é detto lineare se vale il principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero se l'ingresso consiste di una somma pesata di diversi segnali, la risposta del sistema lineare sarà la somma pesata delle risposte del sistema ai singoli sengali di ingresso.

$$H(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$$

Verifica:

- Un sistema dunque é lineare quando $w[n] = y[n]$

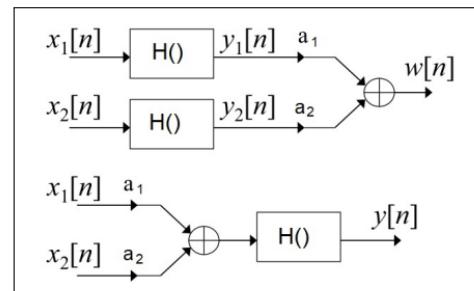


Figura 27: Verifica linearitá

3.1.2 Invarianza Temporale

Un sistema é a detto a Tempo Invariante se non cambia nel tempo il modo in cui processa il segnale di ingresso, in pratica ad un segnale di input ritardato o anticipato nel tempo corrisponde il medesimo output ritardato o anticipato nel tempo.

$$H(x[nn_0]) = y[n - n_0]$$

Verifica:

- Ritardo il segnale di output ($y[n - n_0]$);
- Ritardo il segnale di input ($y_d[n]$).

Se i 2 output del sistema sono identici, allora vale l'invarianza temporale.

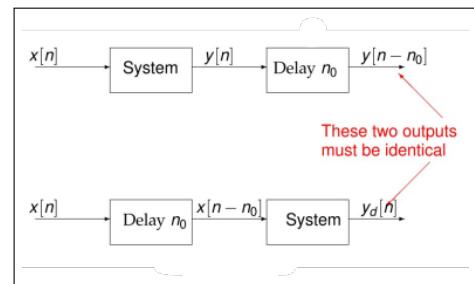


Figura 28: Verifica invarianza temporale

3.1.3 Causalità

Un sistema é causale se per determinare il valore del segnale di uscita al tempo n vengono utilizzati solo i campioni presenti e passati(indice temporale $\leq n$) del segnale di ingresso. In pratica l'output $y[n]$ deve dipendere solo da input di tipo:

$$x[n], x[n-1], x[n-2], \dots$$

ma non dipendere dai campioni nel futuro del segnale di ingresso come

$$x[n+1], x[n+2], x[n+3], \dots$$

. I sistemi che operano in real time sono infatti causali.

3.1.4 Stabilità BIBO

Il sistema si dice stabile BIBO (bounded input bounded output) se ad ingressi limitati in ampiezza corrispondono output anch'essi limitati in ampiezza, ossia se vale

$$|x[n]| < B_x \quad \forall n \implies |y[n]| < B_y \quad \forall n$$

con B_x, B_y costanti positive.

Il sistema si dice stabile se al crescere di n all'infinito, il segnale di uscita rimane finito. Non è quindi stabile se

$$n \rightarrow \infty \implies y[n] \rightarrow \infty$$

Un sistema non è stabile se l'output cresce al crescere di n .

3.2 Esempi di Semplici Sistemi

3.2.1 Accumulatore

Un accumulatore é un sistema LTI in cui ad ogni istante n l'input é definito come la somma di tutti gli ingressi passati e di quello attuale.

$$y[n] = \sum_{l=-\infty}^n x[l]$$

Un'implementazione piú efficiente dal punto di vista computazionale utilizza la formula ricorsiva:

$$y[n] = \sum_{l=-\infty}^n x[l] = \sum_{l=-\infty}^{n-1} x[l] + x[n] = y[n-1] + x[n]$$

Considerando che la risposta di un sistema a TD alla $\delta[n]$ (detta risposta impulsiva) ci permette di analizzarne il dominio, studiamo l'accumulatore:

Segnale di ingresso: $x[n] = \delta[n]$

Segnale di uscita: $x[n] = u[n]$

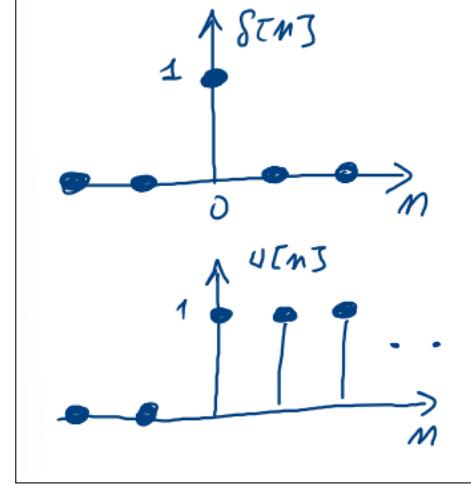


Figura 29: Risposta Impulsiva Accumulatore

Verifichiamo le proprietà dell'accumulatore.

Linearità:

$$y_1[n] + y_2[n] = w[n]$$

$$y[n] = \sum_{l=-\infty}^n x_1[l] + x_2[l] + \sum_{l=-\infty}^n x_1[l] + \sum_{l=-\infty}^n x_2[l] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$y[n] = w[n] \implies \text{Lineare.}$$

Invarianza Temporale:

Ritardo output:

$$y[n - n_0] = \sum_{l=-\infty}^{n-n_0} x[l]$$

Ritardo input:

$$y_d[n] = \sum_{l=-\infty}^n x[l - n_0]$$

Essendo $y[n - n_0] = y_d[n] \implies$ l'accumulatore è a tempo invariante.

Causalità:

Il sistema dipende solo dagli input passati \implies L'accumulatore è causale.

Stabilità:

Si considera come segnale di input il gradino unitario:

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

L'output dell'accumulatore è dato da:

$$y[n] = \sum_{l=-\infty}^n u[l] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n + 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

Non esiste $\forall n$ una costante $(n + 1) < B_y < \infty \Rightarrow$ l'accumulatore non è stabile BIBO.

3.2.2 Filtro a Media Mobile

L'output è la media degli ultimi M campioni del segnale di ingresso.

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} x[n - l]$$

Il filtro a media mobile viene usato per la riduzione del rumore, detto *smoothing*. Se consideriamo $s[n]$ un segnale e $d[n]$ il rumore:

$$x[n] = s[n] + d[n]$$

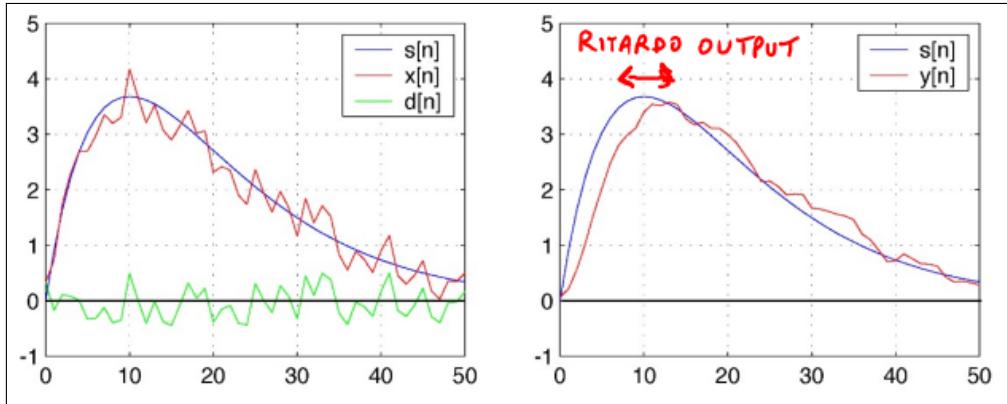


Figura 30: Riduzione del rumore

Verifichiamo le proprietà del filtro.

Linearità:

$$y_1[n] + y_2[n] = w[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} x[n - l] + x_2[n - l] = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} x_1[n - l] + \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} x_2[n - l] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$y[n] = w[n] \Rightarrow \text{Lineare.}$$

Invarianza Temporale:

Ritardo output:

$$y[n - n_0] = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} x[n - n_0 - l]$$

Ritardo input:

$$y_d[n] = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} x[n - n_0 - l]$$

Essendo $y[n - n_0] = y_d[n] \Rightarrow$ il filtro é a tempo invariante.

Causalità:

Il sistema dipende solo dagli input passati \Rightarrow L'accumulatore é causale.

Stabilità:

Il sistema é stabile poiché somma finita di termini limitati.

3.2.3 Interpolatore Lineare

Sistema utilizzato per stimare campioni tra coppie di campioni adiacenti in una sequenza a tempo discreto.

1. Si passa dapprima la sequenza in un up-sampler che riempie di zeri gli "spazi" tra gli elementi della sequenza originale;
2. Si trasformano poi gli zeri nei valori ottenuti interpolando linearmente le coppie di valori che circondano gli zeri.

Interpolatore a 3 fattori:

$$y[n] = x_u[n] + \frac{1}{3}(x_u[n-1] + x_u[n+2]) + \frac{2}{3}(x_u[n-2] + x_u[n+1])$$

In un filtro interpolatore di ordine 3 viene aggiunto uno zero tra ciascuna tripla di campioni del segnale di ingresso. Gli zeri vengono poi sostituiti con il valore medio dei tre campioni della sequenza di input.

Linearità:

$$\begin{aligned} y_1[n] + y_2[n] &= w[n] \\ y[n] &= \\ &= x_{u1}[n] + \frac{1}{3}(x_{u1}[n-1] + x_{u1}[n+2]) + \frac{2}{3}(x_{u1}[n-2] + x_{u1}[n+1]) \\ &+ x_{u2}[n] + \frac{1}{3}(x_{u2}[n-1] + x_{u2}[n+2]) + \frac{2}{3}(x_{u2}[n-2] + x_{u2}[n+1]) \\ &= y_1[n] + y_2[n] \\ y[n] = w[n] &\Rightarrow \text{Lineare.} \end{aligned}$$

Causalità:

Il sistema utilizza campioni "futuri" di tipo $x[n+1] \Rightarrow$ Il sistema non é causale.

Invarianze Temporale:

La fase di upsampling dell'interpolatore non è invariante temporalmente infatti:

$$y[n] = \begin{cases} X[\frac{n}{L}] & n = mL; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ritardo input:

$$y_d[n] = \begin{cases} X[\frac{n}{L} - n_0] & \\ 0 & \end{cases}$$

Ritardo output:

$$y[n - n_0] = \begin{cases} X[\frac{n-n_0}{L}] & n = n_0, n_0 \pm L, n_0 \pm 2L \\ 0 & \end{cases}$$

Essendo $y[n - n_0] \neq y_d[n]$ \Rightarrow il sistema non è a tempo invariante.

Stabilità:

Il sistema è stabile poiché somma di campioni ritardati/avanzati nel tempo.

3.3 Sistemi LTI

I sistemi LTI sono una particolare classe di sistemi a TD molto impiegata per cui valgono le proprietà di linearità e tempo invarianza. Essi sono completamente caratterizzati dalla loro risposta impulsiva, in termini di stabilità, causalità e output. Con risposta impulsiva si intende la risposta del sistema al segnale impulso unitario $\delta[n]$.

$$\delta[n] \rightarrow LTI \rightarrow h[n]$$

Ricordiamo che una sequenza può essere espressa come la somma di infiniti impulsi traslati nel tempo e scalati in ampiezza

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[m - n]$$

3.4 Risposta Impulsiva e Somma di Convoluzione

3.4.1 Somma di Convoluzione

Data la risposta impulsiva del sistema $h[n]$:

$$\delta[n] \rightarrow LTI \rightarrow h[n]$$

Applicando l'invarianza temporale del sistema LTI fornendo in input una δ ritardata, ottengo:

$$\delta[n - m] \rightarrow LTI \rightarrow h[n - m]$$

Applico ora la linearità del sistema (Proprietá della moltiplicazione):

$$\begin{aligned} x[m]\delta[n-m] &\rightarrow LTI \rightarrow x[m]h[n-m] \\ m & \text{ costante} \end{aligned}$$

Infine applicando la linearità del sistema (Proprietá della somma):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[m-n] \rightarrow LTI \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[m-n]$$

Dove la seconda sommatoria é l'operazione di **convoluzione** tra due sequenze, infatti in un sistema LTI l'output puó essere calcolato a partire dalla sequenza di input e dalla risposta impulsiva tramite l'operazione di convoluzione.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[m-n] = x[n] * h[n]$$

Calcolo convoluzione:

Metodo grafico:

Date due sequenze: $x[n]$ e $h[n]$

1. Faccio il ribaltamento temporale per ottenere $h[-m]$
2. Faccio lo shift su $h[-m]$ di n posizioni a destra se $n > 0$ o a sinistra se $n < 0$, formando $h[n-m]$
3. Calcolo il prodotto $x[m]h[n-m]$
4. Sommo tutti i prodotti dei campioni sovrapposti per trovare l'elemento n-esimo della convoluzione.
5. Si continua fino a quando non ci sono più sovrapposizioni.

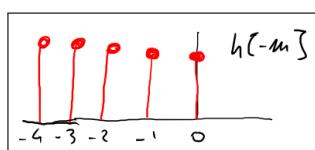
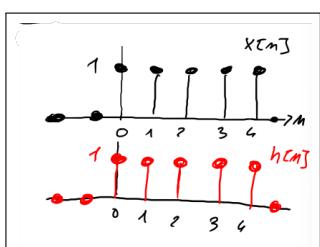


Figura 33: 1

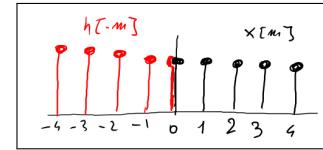


Figura 35: 2

Figura 31: Sequenze iniziali

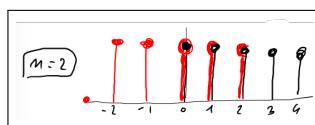
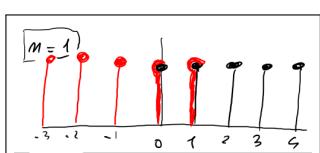


Figura 34: 4

Figura 32: 3

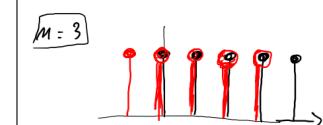


Figura 36: 4

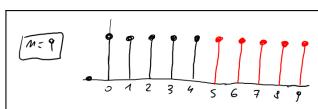


Figura 37: 5

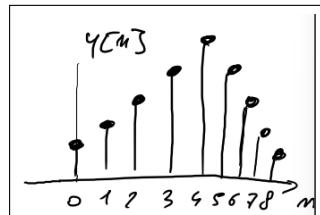


Figura 38: Risultato

Metodo tabellare:Date due sequenze: $x[n]$ e $h[n]$

1. Si costruisce la tabella inserendo gli elementi della prima sequenza su una riga e quelli della seconda su una colonna.
2. Si moltiplicano gli elementi riga per colonna, riportando i risultati nella tabella.
3. Si effettuano le somme lungo le diagonali evidenziate.
4. Lo zero della sequenza risultante si trova nell'elemento corrispondente al prodotto degli zeri delle due sequenze.

Il numero di elementi nella sequenza risultante dalla convoluzione è pari a:

$$L = N + M - 1$$

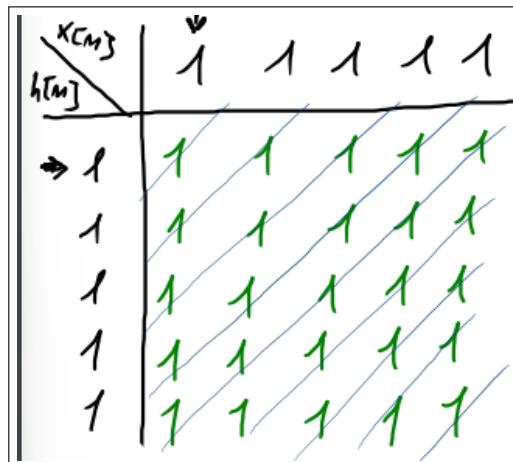


Figura 39: Metodo Tabellare

Proprietà della convoluzione:

P1	commutativa	$x(\cdot) * h(\cdot) = h(\cdot) * x(\cdot)$
P2	associativa	$x(\cdot) * [h_1(\cdot) * h_2(\cdot)]$ $= [x(\cdot) * h_1(\cdot)] * h_2(\cdot) = x(\cdot) * h_1(\cdot) * h_2(\cdot)$
P3	distributiva	$x(\cdot) * [h_1(\cdot) + h_2(\cdot)] = x(\cdot) * h_1(\cdot) + x(\cdot) * h_2(\cdot)$
P4	cambiamento di scala	$[ax(\cdot)] * h(\cdot) = x(\cdot) * [ah(\cdot)] = a[x(\cdot) * h(\cdot)]$
P5	invarianza temporale	$x(n - L) * h(n - N) = [x * h](n - L - N)$ $x(t - T) * h(t - \Delta) = [x * h](t - T - \Delta)$
P6	esistenza dell'unità	$x(\cdot) * \delta(\cdot) = \delta(\cdot) * x(\cdot) = x(\cdot)$

3.4.2 Risposta Impulsiva

Dalla risposta impulsiva infatti da essa possiamo derivare output, stabilità, causalità e risposta in frequenza del sistema LTI:

Stabilità di un Sistema LTI: Un sistema LTI é stabile in senso BIBO se e solo se la sua $h[n]$ é assolutamente sommabile:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Causalità di un Sistema LTI: Un sistema LTI é causale se e solo se la $h[n]$ é causale ovvero: $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$ In questo caso:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[m-n] = \sum_{m=-\infty}^{-1} x[m]h[m-n] + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[m-n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[m]h[m-n]$$

I sistemi a TD possono essere classificati in base alla loro risposta impulsiva:

- Risposta impulsiva finita:
Finite Impulse Response (FIR)

$$h[n] = 0 \quad \forall n < N_1 \quad o \quad n > N_2$$

$h[n]$ ha solo $N_2 - N_1 + 1$ termini.

- Risposta impulsiva infinita:
Infinite Impulse Response (IIR)

3.5 Connessioni tra Sistemi LTI

Connessione in cascata:

La risposta impulsiva di due sistemi connessi in cascata é la convoluzione delle risposte impulsive dei due sistemi:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

Connessione in parallelo:

La risposta impulsiva di due sistemi connessi in parallelo é la somma delle risposte impulsive dei due sistemi.

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

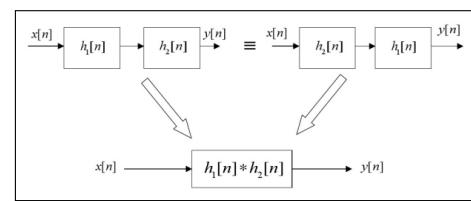


Figura 40: Connessione a Cascata

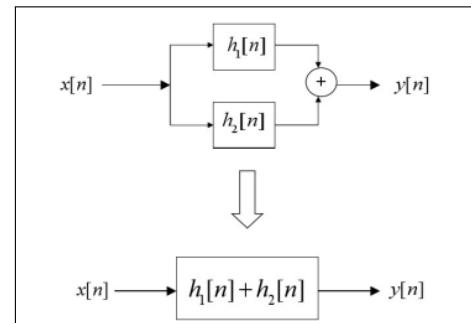


Figura 41: Connessione in Parallelo

3.6 Equazioni alle Differenze

Possiamo descrivere un sistema LTI tramite una equazione alle differenze finite a coefficienti costanti che esprime l'output all'istante corrente n come combinazione lineare degli ingressi agli istanti passati, quello corrente e degli output del sistema agli istanti passati. Nella forma più generale l'equazione alle differenze si scrive:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad \forall n \geq 0$$

Senza perdere di generalità possiamo porre $a_0 = 1$ affinché l'equazione diventi:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

I sistemi che ammettono descrizione tramite equazione alle differenze sono tutti i sistemi LTI causali a risposta impulsiva finita(FIR) e un sottoinsieme dei sistemi LTI causali a risposta impulsiva infinita(IIR) rappresentabili in modo ricorsivo.

Sistemi ricorsivi: $y[n]$ dipende dagli output passati e uno o più termini dove $a_k \neq 0$.

Per questi sistemi è necessario specificare le condizioni iniziali dell'output: $y[-1], y[-2] \dots y[-N]$. Quando tali valori sono nulli il sistema si dice *scarico* o *inizialmente a riposo*.

Sistemi con memoria: L'output $y[n]$ dipende dai valori passati dell'input.

Ci sono 2 metodi per la risoluzione di queste equazioni (che sono l'analogo a TD delle equazioni differenziali a TC):

1. Trasformata Z;
2. Metodo Diretto.

3.6.1 Metodo Diretto

In analogia con le equazioni differenziali la soluzione si ottiene come somma di due parti:

$$y[n] = y_h + y_p[n]$$

y_h : Detta *soluzione omogenea*, si ottiene ponendo l'ingresso a zero e rappresenta la risposta del sistema alle condizioni iniziali.

y_p : Detta *soluzione particolare*, è la risposta del sistema ad un particolare input, assumendo condizioni iniziali nulle.

3.6.2 Sistemi non Ricorsivi

I sistemi non ricorsivi sono rappresentati dalla equazione della differenza:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

e la loro risposta impulsiva é data dalla relazione:

$$h[n] = \sum_{m=0}^M b_m \delta[n-m] = b_0, b_1, \dots b_M$$

avendo $h[n]$ lunghezza finita ($M + 1$) si parla di sistemi FIR.

Considerando che la risposta impulsiva di questi sistemi é data dagli $M + 1$ coefficienti della equazione delle differenze che definisce il filtro, la somma di tali coefficienti é di conseguenza limitata, e la $h[n]$ assolutamente sommabile. Il filtro é dunque stabile.

4 Segnali a Tempo Discreto nel Dominio della Frequenza

4.1 Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)

La **DTFT** permette di rappresentare un segnale a tempo discreto $x[n]$ nel dominio della frequenza. La DTFT di una sequenza aperiodica $x[n]$ (anche detta spettro di $x[n]$) è data da:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

In generale, $X(e^{j\omega})$ è una funzione complessa della variabile reale ω che rappresenta la decomposizione di $x[n]$ nelle sue componenti in frequenza $e^{-j\omega n}$, con $\omega = 2\pi f_0 = 2\pi/T$. Possiamo esprimere in forma cartesiana o polare:

- **Forma cartesiana/rettangolare:**

$$X(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{j\omega}) + jX_{im}(e^{j\omega})$$

- **Forma polare:**

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\vartheta(\omega)}$$

Possiamo quindi considerare $X(e^{j\omega})$ come un vettore nello **spazio di Hilbert**, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$ il peso scalare nella direzione i-esima, mentre $e^{-j\omega n}$ il vettore i-esimo della base ortogonale.

Ricordiamo che l'insieme dei segnali periodici di periodo T è uno spazio di Hilbert in cui il prodotto scalare tra due generici vettori $f(x)$ e $g(x)$ (funzioni continue di generica variabile x), viene descritto come:

$$\langle f(x), g(z) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g^*(z) dx$$

Tramite questa definizione possiamo esprimere i "pesi" $x[n]$ che compaiono nella definizione della DTFT. Gli $x[n]$ sono dunque le proiezioni del vettore $X(e^{j\omega})$ nella direzione dei vettori della base ortogonale.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Questa è l'espressione della antitrasformata di Fourier a tempo discreto(IDTFT). Analogamente a quanto visto in precedenza, in segnale nel dominio del tempo è un vettore dato dalla combinazione lineare dei vettori della base ortogonale pesati con le proiezioni del segnale nelle direzioni della base.

Sistema delle Funzioni Esponenziali Proviamo che il sistema delle funzioni esponenziali

$$\left\{ \frac{e^{jn\omega}}{2\pi} \right\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots n \in \mathbb{Z}$$

é una base ortogonale in uno spazio di Hilbert.

Le funzioni di questo sistema sono combinazioni lineari delle funzioni trigonometriche

$$e^{\pm jn\omega} = \cos(n\omega) \pm j \cdot \sin(n\omega)$$

Il prodotto scalare tra due generici elementi con indice n e m dello spazio vettoriale si esprime come:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} \cdot e^{-j\omega m} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega(n-m)) + j \cdot \sin(\omega(n-m)) d\omega$$

A questo punto si presentano due casi:

- $n = m$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega(0)) + j \cdot \sin(\omega(0)) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

- $n \neq m$:

Essendo il seno una funzione dispari, nel periodo $[-\pi, \pi]$ la sua media è nulla. L'integrale quindi si riduce a:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega(n-m)) d\omega = \left[\frac{\sin(\omega(n-m))}{n-m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

In definitiva quindi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \delta_{mn}$$

$\{e^{jn\omega}\}$ é una base ortonormale.

Periodicità della DTFT La DTFT é una funzione continua di frequenza reale ω periodica 2π , possiamo dunque descriverla nell'intervallo $-\pi \leq \omega \leq \pi$, anche se in realtà ω é la pulsazione normalizzata alla frequenza di campionamento: $\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_s}$ però per comodità si indicherá ω intendendo $\hat{\omega}$.

Verifica:

$$X(e^{jw+2\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(w+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jwn} e^{-j2\pi n} = X(e^{jw})$$

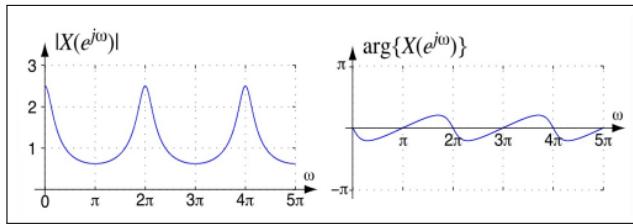


Figura 42: Grafico DTFT

4.1.1 Relazione Trasformata - Antitrasformata

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{j\omega m} \cdot e^{-j\omega m} d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \right) (\delta_{mn}) 2\pi =$$

$$x[n]$$

Abbiamo così verificato che le relazioni Trasformata-AntiTrasformata sono uno l'inverso dell'altra.

4.1.2 Condizioni Esistenza DTFT

La sequenza $x[n]$ deve essere:

- Assolutamente sommabile:** la serie converge in modo uniforme ad una soluzione se l'argomento è assolutamente sommabile, cioè se il segnale $x[n]$ da trasformare soddisfa la diseguaglianza:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- Quadraticamente sommabile:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Se la sequenza è sommabile in modulo allora è sommabile quadraticamente, ma non è vero il contrario. In genere, se la DTFT esiste ma non converge in modo uniforme, vengono prodotte oscillazioni nei punti di discontinuità (Fenomeno di Gibbs).

Fenomeno di Gibbs Nelle applicazioni pratiche si utilizzano un numero finito di armoniche troncando la DTFT che contiene infiniti termini, ciò comporta la presenza di oscillazioni nella trasformata in corrispondenza delle frequenze $\omega = \pm\omega_c$. Quando $N \rightarrow \infty$ le oscillazioni convergono ai punti di discontinuità ma la loro ampiezza non si annulla, assestandosi attorno ad un valore costante di circa il 9% dell'altezza del punto di discontinuità.

Al crescere di N le oscillazioni (ripple) diventano più rapide addossandosi sempre di più a; punto di discontinuità $\pm\omega_c$, senza però subire uno smorzamento dell'ampiezza.

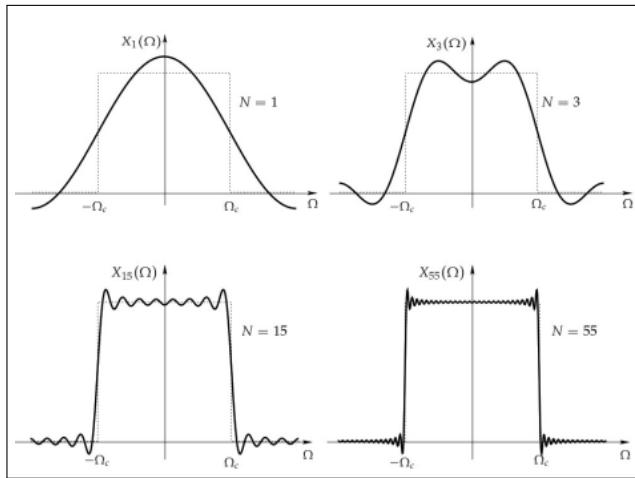


Figura 43: Fenomeno di Gibbs

4.2 DTFT notevoli

Sequenza	Trasformata di Fourier
$\delta[n]$	1
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi)$
$\sin(w_0 n)$	$j\pi[\delta(\omega + w_0) - \delta(\omega - w_0)]$
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$
$h_{lp} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n)$	$\begin{cases} 1 & 0 < \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
$\text{rect}[n] = \begin{cases} 1 & n < M \\ 0 & n > M \end{cases}$	$\frac{\sin(\frac{\omega}{2}(2M+1))}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

4.3 Proprietà della DTFT

- Coniugato simmetrico:

$$x[n] \in \mathbb{R} \implies X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

Verifica:

$$X^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(-\omega)n} = X(e^{-j\omega})$$

ciò è possibile solo se la sequenza è reale, in quanto vale $x[n] = x^*[n]$, cioè il coniugato di un numero reale è uguale al numero stesso.

- **Linearità:**

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega})$$

- **Time Reversal:**

un'operazione di inversione temporale del segnale corrisponde ad una inversione della frequenza ω

$$x[-n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{-j\omega})$$

- **Time Shift:**

una traslazione temporale della sequenza corrisponde a moltiplicare la sua DTFT per un esponenziale complesso che ne modifica la fase

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] e^{-j\omega n}$$

- **Traslazione in Frequenza:**

questa è l'analogia in frequenza dell'operazione di time shift nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} x[n]e^{j\omega_0 n} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j(\omega-\omega_0)n} \\ x[n]e^{j\omega_0 n} &\xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \end{aligned}$$

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_R(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_I(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
<i>The following properties apply only when $x[n]$ is real:</i>	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

4.4 Teorema della Convoluzione

Il teorema delle convoluzioni asserisce che la DTFT di un segnale di uscita $y[n]$ è pari al prodotto delle DTFT del segnale d'ingresso e della risposta all'impulso del sistema LTI

$$y[n] = x[n] * h[n] \implies Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Questo teorema implica che la convoluzione di due sequenze può essere implementata in modo spesso più efficiente, calcolando dapprima la loro DTFT, formando il loro prodotto e calcolando infine l'antitrasformata del prodotto.

La funzione $H(e^{j\omega})$ viene detta risposta in frequenza del sistema LTI, e può essere definita in questo modo :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

la quale è una funzione complessa della variabile ω . Dimostrazione Scriviamo la DTFT del segnale $y[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n}$$

Sostituisco a $y[n]$ la relazione di convoluzione lineare tra $x[n]$ e $h[n]$:

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right) e^{-j\omega n}$$

Effettuo il seguente cambio di variabile nella seconda sommatoria $m = n - k$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[m] \right) e^{-j\omega(m+k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-j\omega m} \right) e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

Il termine tra parentesi è la $DTFT\{h[n]\}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k} H(\omega)$$

che in definitiva diventa:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

4.5 Teorema di Parseval

Stabilisce anche nel caso della DFT, l'equivalenza energetica nei due domini duali tempo \iff frequenza:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) d\omega$$

Verifica:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h^*[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} H^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega \right) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^*(e^{j\omega}) &\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^*(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) d\omega \end{aligned}$$

Se calcoliamo l'energia del segnale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

applichiamo il teorema di Parseval:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

4.6 Risposta in Frequenza dei Sistemi LTI

$h[n]$ é la risposta impulsiva di un sistema LTI, , la risposta $y[n]$ del sistema é data dalla convoluzione di $h[n]$ con il segnale di ingresso.

Il sistema LTI non modifica la frequenza del segnale di ingresso, il suo effetto é quello di riscalare l'ampiezza del segnale di $|H(e^{j\omega})|$ e variarne la fase di $\arg\{H(e^{j\omega})\} = \theta(\omega)$. Riprendendo la relazione ottenuta in precedenza e scrivendo in forma polare la risposta in frequenza si ha:

$$y[n] = H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} = |H(e^{j\omega_0})| e^{j\theta(\omega_0)} e^{j\omega_0 n} = |H(e^{j\omega_0})| e^{j\omega_0(n + \frac{\theta}{\omega_0})}$$

4.7 Ritardo di Fase e di Gruppo

Dalla relazione sottolineata precedentemente possiamo notare che nel passaggio in un sistema LTI ogni componente a diversa frequenza del segnale viene riscalata in ampiezza, in piú il valore della frequenza subisce un ritardo(o distorsione), dipendente da ω pari a $\frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0}$, questo ritardo é detto **ritardo di fase**.

Per valutare il ritardo introdotto dal sistema si utilizza il **ritardo di gruppo** pari a

$$-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

Per sistemi non distorcenti in fase la $\theta(\omega)$ dipende linearmente da ω , dunque $\theta(\omega) = \omega$. Otteniamo quindi:

$$-\frac{d(-k\omega)}{d\omega} = k$$

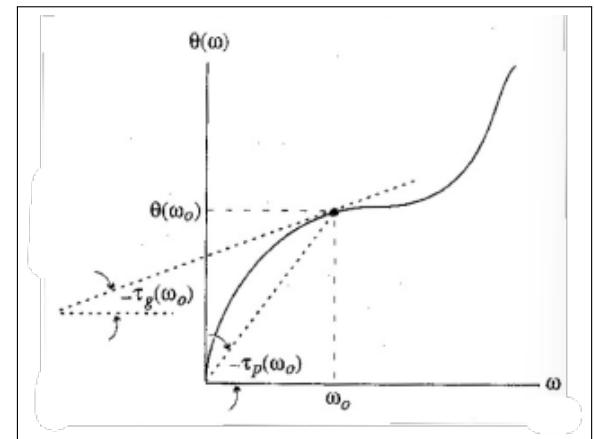


Figura 44: Ritardo di Gruppo

5 Campionamento e Quantizzazione

La maggior parte dei segnali che incontriamo nel mondo reale sono analogici a tempo continuo. Affinchè si possa procedere ad una elaborazione numerica del segnale si deve innanzitutto campionare e poi quantizzare il segnale analogico. Il campionamento discretizza l'asse dei tempi, mentre la quantizzazione discretizza l'asse delle ampiezze.

5.1 Campionamento Ideale dei Segnali a Tempo Continuo

Applichiamo un modello matematico che descrive l'operazione di campionamento, ovvero l'operazione che ci permette di passare dal segnale analogico alla sequenza campionata:

$$x[n] = x(nT_s)$$

con n numero intero.

Un segnale campionato può essere descritto come la combinazione lineare pesata di impulsi posizionati negli istanti di campionamento nT_s , dove i pesi sono le ampiezze del segnale analogico in quegli istanti di campionamento. Secondo questo modello di campionamento ideale, l'estrazione di una sequenza di campioni $x(nT_s)$ avviene moltiplicando il segnale analogico per un treno di delta di Dirac (o pettine di Dirac), definito come:

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

La trasformata di Fourier della funzione $d(t)$ vale

$$D(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

dove ω è la frequenza angolare analogica. La trasformata di Fourier di un pettine di Dirac, rimane ancora un pettine di Dirac in frequenza, con spaziatura diversa.

5.1.1 Pettine di Dirac nel Domino del Tempo

Il segnale campionato è quindi dato da

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t) \cdot d(t) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \end{aligned}$$

dove ogni moltiplicazione nella sommatoria fa sì che la rispettiva delta di Dirac si trovi centrata nell'istante generico nT_s , con coefficiente moltiplicativo pari al valore della funzione $x(t)$ in quell'istante di tempo nT_s .

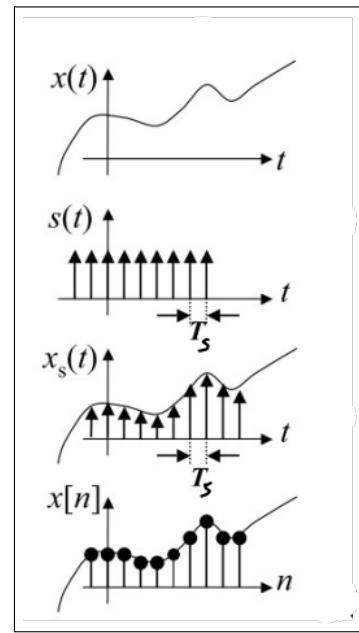


Figura 45: Pettine di Dirac

Ricordando che la moltiplicazione nel tempo equivale alla convoluzione nel dominio della frequenza diviso 2π (proprietà TF), la trasformata della sequenza campionata è data da:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} (X(\omega) * D(\omega))$$

che diventa

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[X(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] \\ &= \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

Applico questa proprietà della convoluzione

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

ed ottengo:

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} [X(\omega) + X(\omega - \omega_s) + X(\omega + \omega_s) + X(\omega - 2\omega_s) + \dots] \end{aligned}$$

Questa equazione afferma che lo spettro del segnale campionato è costituito da una ripetizione periodica dello spettro elementare del segnale analogico $x(t)$, con le copie centrate su multipli della frequenza di campionamento ω_s .

A seconda del valore della frequenza di campionamento si possono avere 3 situazioni:

- **Sovracampionamento:**
frequenza di campionamento > doppio frequenza segnale ($\omega_s > 2\omega_B$)
- **Campionamento critico:**
frequenza campionamento = doppio frequenza segnale ($\omega_s = 2\omega_B$)
- **Sottocampionamento:**
frequenza campionamento < doppio frequenza segnale ($\omega_s < 2\omega_B$)

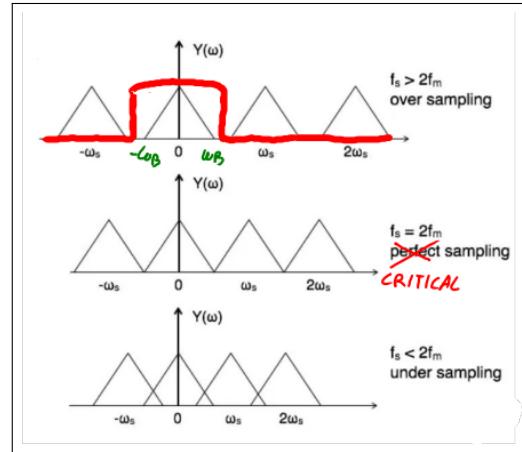


Figura 46: Tipi di campionamento

Solo nel primo caso è possibile separare il segnale dalle sue copie, mediante l'applicazione di un filtro passa-basso di ricostruzione, come affermato nel teorema del campionamento. Nel terzo caso si ha un fenomeno detto **aliasing**.

5.2 Il Teorema del Campionamento

Il teorema fornisce un criterio per poter ricostruire correttamente il segnale originario dal segnale campionato senza distorsioni. Il teorema afferma che un segnale limitato in banda, con frequenza massima ω_B , può essere perfettamente campionato senza perdita di informazioni (e quindi ricostruito senza distorsioni) se la frequenza di campionamento ω_s soddisfa la seguente relazione:

$$\omega_s > 2\omega_B$$

Un segnale limitato in banda è un segnale il cui spettro in frequenza $X(\omega)$ è definitivamente nullo al di fuori dell'intervallo $[-B_x, B_x]$.

5.3 Fenomeno dell'Aliasing

L'Aliasing è un fenomeno che avviene quando la condizione imposta dal teorema del campionamento non viene rispettata. In tal caso le repliche dello spettro elementare dovute al campionamento si sovrapporrebbero tra di loro, e non sarebbe più possibile recuperare perfettamente il segnale originale.

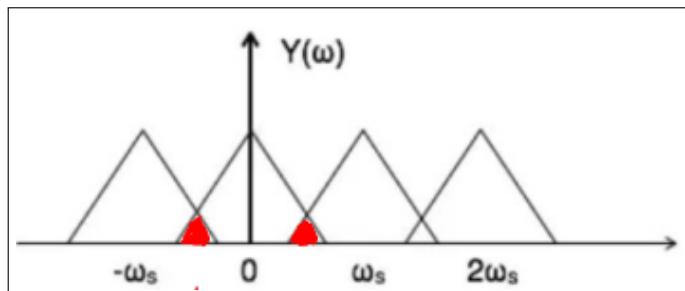


Figura 47: Aliasing

5.4 Ricostruzione del Segnale

Il processo di ricostruzione del segnale utilizza un filtro passa basso ideale che elimina le copie del segnale presenti nel dominio della frequenza

$$X_r(\omega) = X_s(\omega)H_r(\omega) \xleftrightarrow{T\mathcal{F}} x_r(t) = x_s(t) * h_r(t)$$

La lunghezza del filtro può essere a piacere purché non tagli il segnale o le sue copie.

5.5 Quantizzazione ed Errore di Quantizzazione

La quantizzazione è un procedimento necessario per poter elaborare i segnali in modo numerico dopo la fase di campionamento. Mentre la fase di campionamento va a discretizzare il tempo, la quantizzazione discretizza l'ampiezza continua del segnale campionato, esprimendo il valore associato ad ogni campione con un numero finito di bit. Inoltre, la quantizzazione è un'operazione irreversibile. Non è possibile ricostruire l'esatto valore del segnale campionato a partire da quello quantizzato.

L'operazione prevede che l'escursione del segnale $x[n]$ venga suddivisa in un numero di sotto-intervalli L uguale a 2^n , dove n è la risoluzione (num di bit) dei campioni estratti dal segnale. In altri termini, la dinamica del segnale, compresa nell'intervallo $[-V, +V]$ viene suddivisa in 2^n intervalli, ognuno dei quali ha lunghezza data da:

$$\Delta = \frac{2V}{L} \quad \text{con } L = 2^n \text{ bit}$$

Gli L intervalli così individuati sono determinati dalla seguente relazione:

$$I_i = (-V + i\Delta, -V + (i + 1)\Delta), \quad \forall j \in [0, L - 1]$$

mentre i livelli quantizzati, nel caso della quantizzazione uniforme, sono i punti centrali di ogni intervallo in cui ricade il valore campionato:

$$x_q[n] = \frac{d_{i-1} + d_i}{2} \quad \text{se } x[n] \in [d_{i-1}, d_i]$$

A ogni punto centrale $x_q[n]$ viene associato un numero binario su n bit, la risoluzione del quantizzatore.

6 Trasformata di Fourier discreta

Per la rappresentazione nel dominio della frequenza abbiamo utilizzato la DTFT ma è una funzione periodica e continua nella variabile ω e l'antitrasformata è espressa da un'integrale, dunque è difficile da implementare numericamente.

6.1 Definizione della Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

Per le implementazioni numeriche si usa un'altra trasformata appartenente alla famiglia delle trasformate di Fourier, la DFT. La DFT opera su sequenze periodiche (e anche su sequenze di durata finita se periodiche). Sia la trasformata che l'antitrasformata richiedono solo somme di numeri complessi e possono essere implementate in modo efficiente utilizzando gli algoritmi di FFT.

Data una sequenza $x[n]$ periodica di periodo N :

$$x[n] = x[n + N]$$

allora la sua DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

dove:

- k : è l'indice di frequenza discreta
- n : è l'indice di tempo discreto

Questa è una funzione complessa e periodica di periodo N , come possiamo verificare

$$X[k + N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} e^{j\frac{2\pi}{N}N} = X[k]$$

L'ultima uguaglianza deriva dal fatto che il secondo termine esponenziale è uguale a 1. L'operazione inversa è l'antitrasformata discreta

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Anche la IDFT è periodica di periodo N , è possibile fare la stessa verifica della DFT, partendo da $x[n + N]$.

Nelle applicazioni pratiche di solito ci troviamo ad operare con sequenze di durata finita mentre la DFT opera con sequenze periodiche quindi bisogna estendere in modo periodico la sequenza.

Possiamo costruire:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[n - pN]$$

Chiaramente se dovessimo fare l'antitrasformata di un segnale reso periodico per poter ottenere il segnale originale dovremo considerare i campioni nell'intervallo $[0, N - 1]$.

6.1.1 Forme Alternative

Forma Compatta

Utilizzando le radici N -esime dell'unità(ovvero le soluzioni dell'equazione $W^N = 1$)

$$W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$$

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$ é detto Twiddle Factor. Possiamo esprimere le relazioni che definiscono la DFT e la sua inversa in forma piú compatta.

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad DFT$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N \quad IDFT$$

Forma Matriciale

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Figura 48: Forma matriciale DFT

$$\mathbf{D}_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & W_N^{-3} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & W_N^{-6} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & W_N^{-3(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Figura 49: Forma matriciale IDFT

6.2 Relazione tra DTFT e DFT

DTFT: frequenza ω continua, $x[n]$ infinita, $X(e^{j\omega})$ periodica $[-\pi, \pi]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

DFT: frequenza k discreta, dove $k = N \frac{\omega}{2\pi}$, $x[n]$ finita

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Dunque la DFT é la DTFT calcolata in $\omega = \frac{2\pi}{N}k$

$$X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

6.3 Valutazione della DTFT su Frequenze Discrete Tramite la DFT

Data una sequenza di durata finita N possiamo valutare lo spettro $X(e^{j\omega})$ con maggiore dettaglio utilizzando una DFT con $M > N$ campioni. Nel seguito da una sequenza $x[n]$ calcoliamo la sua DTFT e la sua DFT verificando che il valore della DTFT calcolata per $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ coincide con quello della DFT.

Modifichiamo poi la sequenza originale aggiungendo zeri e ricalcoliamo la DFT verificando nuovamente l'uguaglianza , questa volta però disponiamo di piú punti dunque

l'approssimazione migliora.

Esempio:

$$x[n] = 1 \quad 0 \leq n \leq 7$$

Calcoliamo la DTFT:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega n}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^7 x[n]e^{-jn\omega} = \\ &= \frac{1 - (e^{-j8\omega})}{1 - (e^{-j\omega})} = \frac{e^{-j\frac{8\omega}{2}}(e^{j\frac{8\omega}{2}} - e^{-j\frac{8\omega}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})} = \\ &= \frac{2je^{-j4\omega} \sin(4\omega)}{2je^{-j\frac{\omega}{2}} \sin(\frac{\omega}{2})} = \\ &= e^{-j\frac{7\omega}{2}} \frac{\sin(4\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})} \end{aligned}$$

Calcoliamo la DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^7 x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{8}n} = \begin{cases} 8 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Il campionamento in frequenza della DTFT operato con la DFT riproduce correttamente il valore di piccola della DTFT e le intersezioni con l'asse, ma non è una buona approssimazione. Una soluzione è il zero padding.

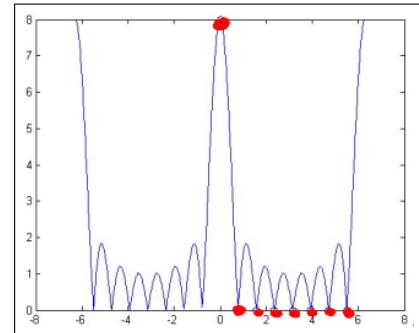


Figura 50: Campionamento DFT

6.3.1 Zero Padding

$$x_e[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & 8 \leq n \leq 15 \end{cases}$$

Calcoliamo la DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{15} x_e[n]e^{-jk\frac{2\pi}{16}n} = \sum_{n=0}^7 x_e[n]e^{-jk\frac{2\pi}{16}n} = \frac{1 - e^{jk\frac{2\pi}{16}8}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{16}}}$$

seguendo gli stessi calcoli fatti precedentemente otteniamo:

$$= e^{-jk\frac{7}{16}\pi} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{16}k)}$$

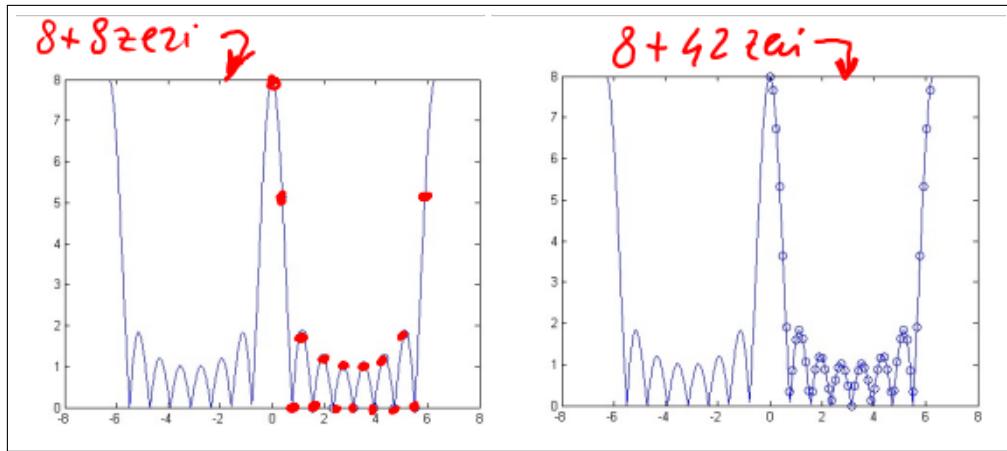


Figura 51: Risultato del zero padding

Dunque il zero padding ha migliorato l'approssimazione.

6.4 Proprietà della Trasformata DFT

Length- N Sequence	N -point DFT	Length- N Sequence	N -point DFT
$x[n] = x_{\text{re}}[n] + jx_{\text{im}}[n]$	$X[k] = X_{\text{re}}[k] + jX_{\text{im}}[k]$	$x_{\text{ev}}[n] = x_{\text{re}}[n] + x_{\text{od}}[n]$	$X[k] = X_{\text{re}}[k] + jX_{\text{im}}[k]$
$x^*[n]$	$X^*[-k]$	$x_{\text{od}}[n]$	$X_{\text{re}}[k]$
$x^*[-n]$	$X^*[n]$	$x_{\text{re}}[n]$	$jX_{\text{im}}[k]$
$x_{\text{re}}[n]$	$X_{\text{cs}}[k] = \frac{1}{2}\{X[k] + X^*[-k]\}$		$X[k] = X^*[-k]$
$jx_{\text{im}}[n]$	$X_{\text{ca}}[k] = \frac{1}{2}\{X[k] - X^*[-k]\}$		$X_{\text{re}}[k] = X_{\text{re}}[-k]$
$x_{\text{cs}}[n]$	$X_{\text{re}}[k]$		$X_{\text{im}}[k] = -X_{\text{im}}[-k]$
$x_{\text{ca}}[n]$	$jX_{\text{im}}[k]$		$ X[k] = X[-k] $
			$\arg X[k] = -\arg X[-k]$

Figura 52: Proprietá DFT

Theorem	Length- N Sequence	N -point DFT
	$g[n]$	$G[k]$
	$h[n]$	$H[k]$
Linearity	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G[k] + \beta H[k]$
Circular time-shifting	$g[(n - n_o)_N]$	$W_N^{kn_o} G[k]$
Circular frequency-shifting	$W_N^{-k_o n} g[n]$	$G[(k - k_o)_N]$
Duality	$G[n]$	$N g[-k]$
N -point circular convolution	$\sum_{m=0}^{N-1} g[m]h[(n - m)_N]$	$G[k]H[k]$
Modulation	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} G[m]H[(k - m)_N]$
Parseval's theorem	$\sum_{n=0}^{N-1} g[n] ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G[k] ^2$

6.4.1 Time Shift Circolare

Data una sequenza di lunghezza N e definita in: $0 \leq n \leq N - 1$. Nello shift circolare la sequenza si riavvolge su se stessa

$$x[< n - n_0 >_N] = \begin{cases} x[n - n_0] & n_0 \leq n \leq N - 1 \\ x[N + n - n_0] & 0 \leq n \leq n_0 \end{cases}$$

Uno shift circolare a destra di n_0 posizioni è equivalente ad uno shift a sinistra di $N - n_0$ posizioni.

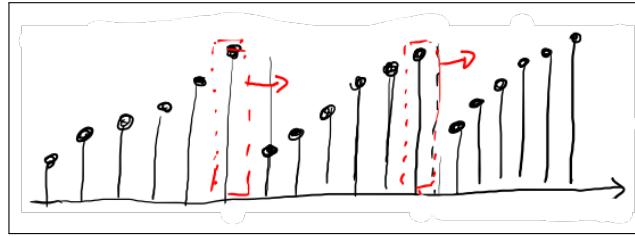


Figura 53: Time shift circolare

6.4.2 Time reversal circolare

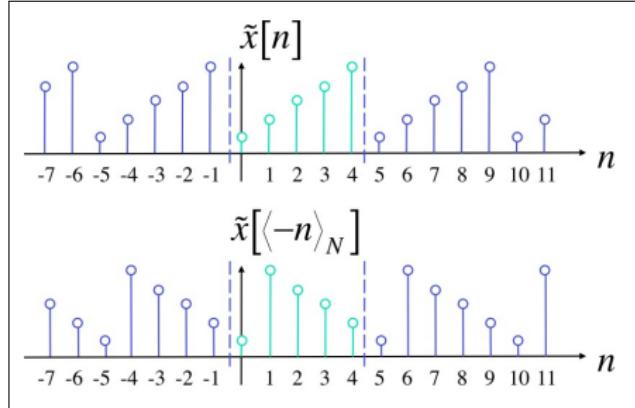


Figura 54: Time reversal circolare

6.5 Convoluzione Lineare e Convoluzione Circolare

6.5.1 Convoluzione Circolare

La convoluzione circolare è analoga all'operazione di convoluzione lineare, con la differenza che la sequenza risultante possiede N campioni tra $n = 0$ ed $n = N - 1$ e coinvolge due sequenze, entrambe periodiche di periodo N . Date due sequenze periodiche di periodo N , lo shift circolare si definisce in questo modo:

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]h[\langle n - i \rangle_N]$$

La sequenza risultante possiede solo N campioni nell'intervallo $n \in [0, N - 1]$. Inoltre, si ripete periodicamente con periodo N . La convoluzione circolare è:

- periodica di periodo N ;

- commutativa;
- distributiva.

6.5.2 Convoluzione Lineare

Si può avere un'implementazione efficiente della convoluzione lineare tramite la DFT. La convoluzione circolare diventa uguale alla convoluzione lineare se si estendono le sequenze con degli zeri sino ad ottenere lunghezza $L = N + M - 1$

$$y[n] = x[n] * h[n] = x_e[n] \circledast h_e[n]$$

La convoluzione lineare può essere calcolata in modo efficiente tramite DFT seguendo i seguenti passaggi:

1. Si estendono le due sequenze con $M - 1$ zeri;
2. Si fa la DFT delle due sequenze estese e se ne calcola il prodotto;
3. Si fa la trasformata inversa del prodotto.

6.5.3 Teorema della Convoluzione

Teorema analogo a quello della DTFT, ma usando l'operazione di convoluzione circolare al posto di quella lineare. La convoluzione circolare tra due sequenze nel dominio del tempo è analogo al prodotto delle DFT nel dominio della frequenza:

$$x[n] \circledast h[n] \xrightleftharpoons{DFT} X[k]H[k]$$

Ciò ci dice che l'uscita di un sistema LTI data dalla convoluzione circolare può essere implementata in modo efficiente facendo prima la DFT delle due sequenze, moltiplicandole assieme e calcolando poi la DFT inversa.

6.5.4 Teorema di Parseval

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 &= \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\bar{x}[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j k \frac{2\pi}{N} n} \right) x^*[n] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left(\sum_{n=0}^{N-1} X^*[n] e^{-j k \frac{2\pi}{N} n} \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]X^*[k] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \end{aligned}$$

6.6 Analisi di sistemi LTI mediante DFT

Per effettuare la convoluzione veloce di una sequenza molto lunga bisogna suddividere la sequenza lunga in tante sezioni di lunghezza minore e predefinita. Per ciascuna sezione si calcola la convoluzione lineare con la DFT applicando la tecnica dello zero-padding ed in seguito si connettono tra loro i risultati delle varie sezioni. Si utilizzando due metodi:

1. Sovrapposizione e somma;
2. Sovrapposizione ed estrazione.

6.6.1 Sovrapposizione e Somma

1. La sequenza viene suddivisa in blocchi contigui di lunghezza L ;
2. Ad ogni blocco si aggiungono $M - 1$ zeri (M è la lunghezza del filtro FIR da applicare in modo da avere $N = L + M - 1$ campioni);
3. Al filtro si aggiungono $L - 1$ zeri in modo che anche questa sequenza abbia lunghezza N ;
4. Si eseguono le due DFT a N punti e la loro moltiplicazione;
5. Si esegue la IDFT;
6. Gli ultimi $M - 1$ punti di ciascun blocco vengono sovrapposti e sommati agli $M - 1$ punti del blocco successivo.

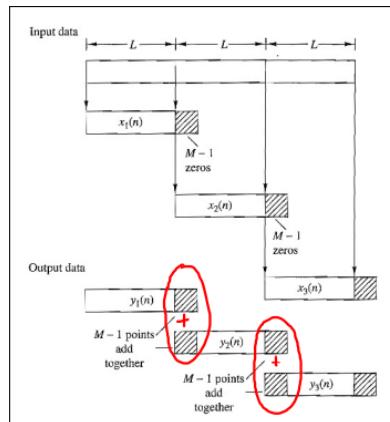


Figura 55: Overlap and add

6.6.2 Sovrapposizione ed Estrazione

1. La sequenza viene suddivisa in $N = L + M - 1$, i primi $M - 1$ campioni coincidono con gli ultimi $M - 1$ campioni della sequenza precedente;
2. Si appendono $L - 1$ zeri agli M campioni del filtro affinché abbia lunghezza N ;
3. Si eseguono due DFT a N punti e la loro moltiplicazione;
4. Si esegue la IDFT;

5. I primi $M - 1$ punti sono corrotti dall'aliasing e si eliminano. I rimanenti L punti coincidono con quelli ottenibili dalla convoluzione lineare e vengono "salvati".

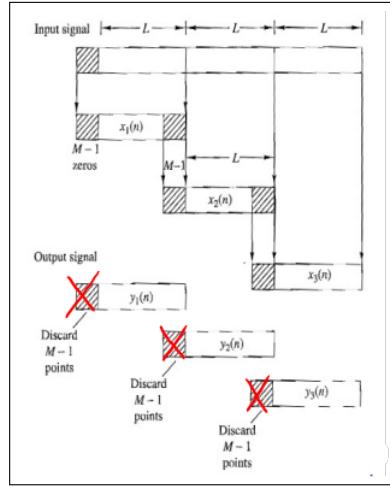


Figura 56: Overlap and save

6.7 Fast Fourier Transform (FFT)

È il nome con il quale si indica una molteplicità di algoritmi per il calcolo efficiente della DFT.

Quello "storico" e più diffuso è l'**algoritmo di Cooley-Tukey**(1965) nel suo approccio di suddividere ricorsivamente una DFT di dimensione N in due parti di dimensione $\frac{N}{2}$ ad ogni passo (N deve essere una potenza di 2).

Secondo il **lemma di Danielson-Lanczos** una DFT di lunghezza N può essere riscritta come la somma di due DFT di lunghezza $\frac{N}{2}$, una formata dai termini di indici pari e una formata dai termini di indici dispari(Dopo $\log_2 N$ suddivisioni si dovranno calcolare N sotto-trasformate ciascuna contenente solo 2 campioni).

6.7.1 Algoritmo FFT con declinazione nel tempo(RADIX-2)

L'idea è di dividere la sequenza di partenza in tante sotto-seguenze sempre più corte alle quali applicare DFT di complessità decrescente. Partendo dalla espressione della DFT in termini di W_N^k :

$$W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$$

posso definire la DFT nel seguente modo

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$$

separando i termini di indice pari da quelli di indice dispari:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[2n]W_N^{2nK} + x[2n+1]W_N^{(2n+1)k} \right)$$

otteniamo

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n]W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1]W_{N/2}^{2nk}$$

dove:

- il primo termine è la DFT, calcolata su $N/2$ punti e campioni con indice pari
- W_N^k : è il twiddle factor
- l'ultimo termine è la DFT, calcolata su $N/2$ punti e campioni con indice dispari

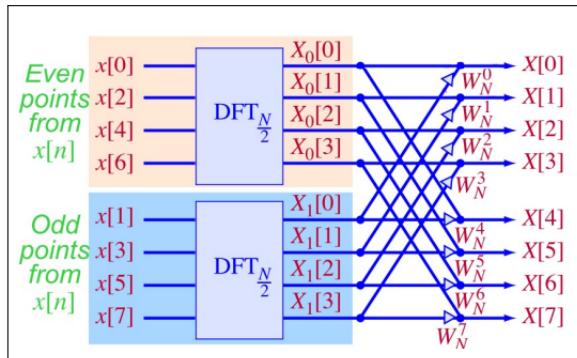


Figura 57: FFT prima fase

In generale si ripete l'operazione $\log_2 N$ volte fino ad ottenere DFT di lunghezza 2 da combinare assieme.

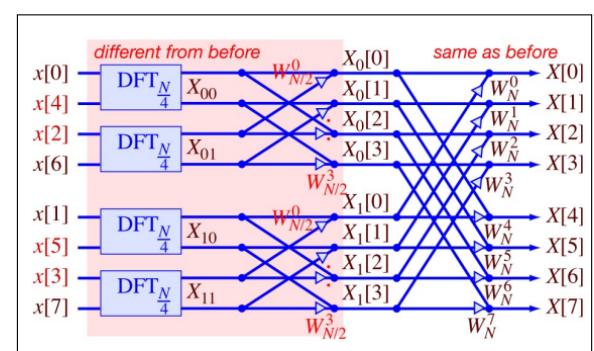


Figura 58: FFT seconda fase

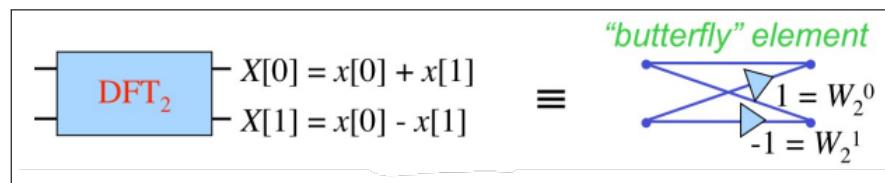


Figura 59: Butterfly element

Il Butterfly element l'elemento costitutivo molte delle implementazioni della FFT. Nel diagramma a farfalla:

- La freccia verso l'alto indica una somma;
- La freccia verso il basso indica una sottrazione;
- Il D indica che il termine nella corrispondente linea deve essere moltiplicato il fattore di Twiddle prima la somma/sottrazione.

La forma generale di ciascuna struttura é del tipo:

$$W_N^{r+\frac{N}{2}} = W_N^r W_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}r} e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = -W_n^r$$

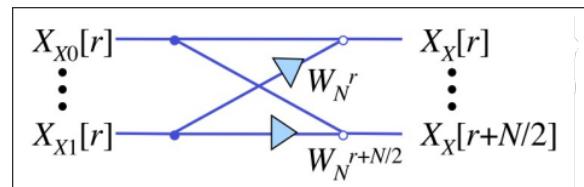


Figura 60: Forma generale

Possiamo ulteriormente semplificare il diagramma fattorizzando il termine di Twiddle, ciò comporta la moltiplicazione del solo secondo termine per il twiddle factor. Dunque la forma generale risulta:

$$\begin{aligned} X_x[r] &= X_{x_0}[r] + W_N^r X_{x_1}[r] \\ X_x[r + \frac{N}{2}] &= X_{x_0}[r] - W_N^r X_{x_1}[r] \end{aligned}$$

6.7.2 Complessitá Computazionale

La DFT ha una complessitá pari a N^2 operazioni complesse infatti per ogni indice $k = 0, 1, \dots, N - 1$ bisogna eseguire N prodotti e $N - 1$ addizioni tra numeri complessi.

Con l'utilizzo della FFT sono possibili $\log_2 N$ stadi successivi ciascuno dei quali richiede N addizioni e moltiplicazioni complesse. Il costo computazionale é pertanto $N \log_2 N$.

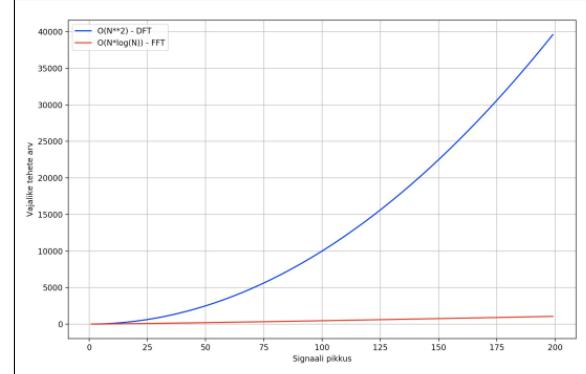


Figura 61: Gradico Complessitá

7 Trasformata Z

7.1 Definizione della Trasformata Z

La trasformata z è una funzione della variabile complessa z che connette il dominio del tempo discreto n al dominio z . Permette inoltre di studiare stabilità e causalità dei sistemi LTI. La trasformata è definita in questo modo:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Essendo z un numero complesso, esso può essere rappresentato con modulo e fase

$$z = \rho e^{j2\pi f} = \rho e^{j\omega}$$

7.2 Relazione tra DTFT e Trasformata Z

Ponendo $z = re^{j\omega}$ si nota che la trasformata zeta di una sequenza $x[n]$ corrisponde alla DTFT della nuova sequenza $x[n]r^{-n}$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n}) e^{-j\omega n}$$

Ricordando che la DTFT della sequenza $x[n]r^{-n}$ esiste solo se la sequenza è assolutamente sommabile:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty$$

7.3 Analisi della Regione di Convergenza

L'insieme dei valori per i quali la sommatoria converge è il ROC. Si noti che la regione di convergenza della sommatoria dipende solo dal modulo r del numero complesso z e non dalla fase. Questo comporta che, in generale, le ROC nel piano complesso z siano delimitate da circonferenze. Nel caso in cui la ROC della trasformata $X(z)$ includa la circonferenza di raggio unitario esiste la DTFT della sequenza e ponendo $z = e^{j\omega}$ si ottiene la DTFT della sequenza $x[n]$:

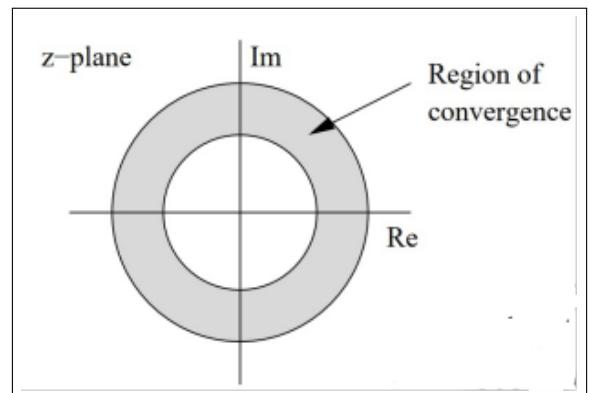


Figura 62: ROC

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

Il luogo dei punti $z = e^{j\omega}$ corrisponde alla circonferenza di raggio unitario $|z| = 1$. Si ottiene cioè che la DTFT è equivalente alla ZT calcolata sui punti del piano complesso

appartenenti alla circonferenza centrata nell'origine e di raggio unitario. La periodicità 2π della DTFT equivale a un giro sulla circonferenza unitaria. La pulsazione nulla $\omega = 0$ corrisponde al punto $z = 1$ nel piano complesso. Al crescere di ω per valori positivi, ci si muove sulla circonferenza $|z = 1|$ in senso antiorario. Per valori negativi, in senso orario.

7.3.1 Caratteristiche del ROC

- Nel ROC la $X(z)$ è una funzione analitica.
- Il ROC non contiene poli.
- Esiste la DTFT della sequenza se e solo se il ROC della trasformata zeta contiene la circonferenza unitaria.

7.3.2 Regione di Convergenza di Sequenze Illimitate

Separiamo la parte causale e anticausale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x[n]z^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]z^{-n}|$$

Sostituendo $m = -n$ nella prima

$$= \sum_{m=1}^{\infty} |x[m]z^m| + \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right|$$

La prima parte è anticausale. Se esiste un valore $z = z_1$ per cui la serie converge, allora convergerà per tutti i valori $|z| \leq |z_1|$, perché per tali valori ogni termine della sommatoria è più piccolo. La seconda parte è causale. Se esiste $z = z_2$ per cui la serie converge lo sarà anche per valori $|z| \geq |z_2|$.

Le sequenze con lunghezza finita ammettono sempre una trasformata zeta esprimibile come un polinomio composto da un numero finito di monomi del tipo z^{-k} . La trasformata $X(z)$ converge per qualunque z nel piano complesso, con l'eccezione possibile di $z = 0$ e $z = \infty$. Si hanno tre casi:

- Il ROC non include $z = \infty$ se la sequenza è anticausale, ossia contiene termini del tipo z^n .
- Il ROC non include $z = 0$ se la sequenza è causale, ossia se esistono termini del tipo z^{-n} .
- Nelle sequenze bilaterali il ROC non contiene né $z = 0$ né $z = \infty$, ossia $0 < |z| < \infty$.

Dipendentemente dal tipo di sequenza (finita(F) o infinita(INF)) il ROC è definito in modo diverso:

- **Causale:**

$$(F) \mathbb{C} - \{0\}$$

$$(INF) |z| > r^2$$

- **Anticausale:**

$$(F) \mathbb{C}$$

$$(INF) |z| < r^1$$

- **Bilaterale:**

$$(F) \mathbb{C} - \{0, \infty\}$$

$$(INF) r^2 < |z| < r^1$$

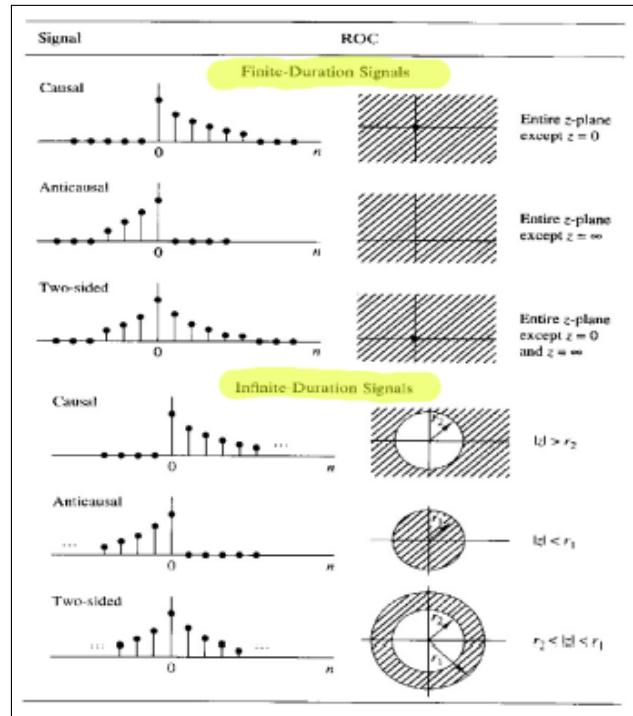


Figura 63: Finite or Infinite Sequence ROC

7.4 Diagramma Poli-Zeri

Nelle applicazioni generalmente si utilizzano segnali le cui TZ sono delle funzioni razionali, ovvero esprimibili come polinomi:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Il numero di radici è dato dal grado del polinomio. Gli zeri del numeratore (i valori che annullano l'equazione) sono gli zeri della trasformata. Mentre gli zeri del denominatore sono i poli della trasformata. In particolare, dove il numeratore tende a 0, la trasformata si annulla. Invece, nei punti in cui il denominatore raggiunge zero, la trasformata tende ad infinito:

$$\begin{cases} N(z) = 0 \implies X(z) = 0 \\ D(z) = 0 \implies X(z) = \infty \end{cases}$$

7.5 Effetto della Presenza di un Polo/Zero sul Modulo della Trasformata Z

Visualmente possiamo immaginare di srotolare il filo blu sulla circonferenza unitaria per ottenere la distribuzione di ampiezza della DTFT.

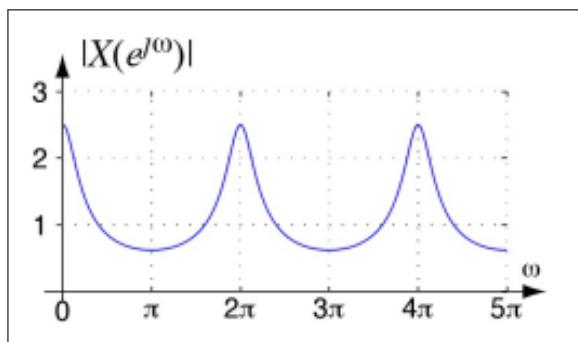


Figura 64: DTFT

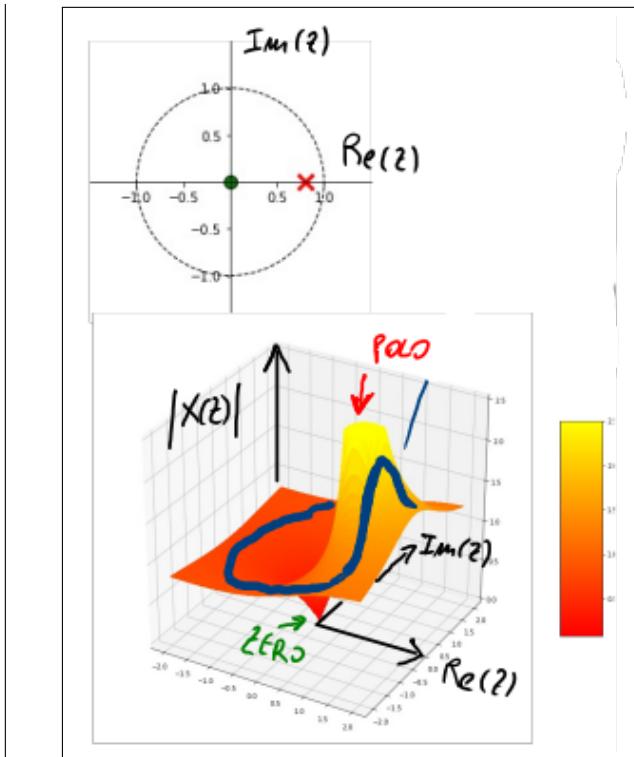


Figura 65: Trasformata Z

7.6 Proprietà della Trasformata Z

Property	$h[n]$	$H(\omega)$	ROC
Linearity	$ah_1[n] + bh_2[n]$	$aH_1(z) + bH_2(z)$	$ROC_{H_1} \cap ROC_{H_2}$
Time-shifting	$h[n - n_d]$	$z^{-n_d} H(z)$	That of $H(z)$, except $z = 0$ if $n_d > 0$ and $z = \infty$ if $n_d < 0$
Scaling in the z-domain	$a^n h[n]$	$H\left(\frac{z}{a}\right)$	$ a ROC_{H(z)}$
Time-reversal	$h[-n]$	$H(z^{-1})$	$ROC_{H(z)}^{-1}$
Differentiation	$nh[n]$	$-z \left(\frac{dH(z)}{dz} \right)$	$ROC_{H(z)}$
Conjugation	$h^*[n]$	$H^*[z^*]$	$ROC_{H(z)}$
Convolution	$h_1[n] * h_2[n]$	$H_1(z)H_2(z)$	$ROC_{H_1} \cap ROC_{H_2}$
Initial value theorem	If $h[n]$ causal	$h[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z)$	-

Figura 66: Proprietà trasformata z

7.7 Trasformata Z Inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

Si fa l'integrale perche z è una funzione continua. Questo è un integrale di linea sul piano complesso. Di solito conviene usare metodi alternativi che non richiedano l'integrazione.

7.8 Analisi dei Sistemi LTI Mediante Trasformata Z

Tramite calcoli algebrici si possono riportare le sequenze ad alcune sequenze notevoli di cui fare la trasformata o antitrasformata tramite le tabelle:

Sequence	Transform	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 or ∞
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1-\cos(\omega_0) z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0) z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1-r\cos(\omega_0) z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0) z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

Figura 67: TZ notevoli

7.8.1 Funzione di Trasferimento

La trasformata Z della risposta impulsiva $h[n]$ di un sistema LTI è detta funzione di trasferimento del sistema. Come già visto, per un sistema LTI vale la relazione:

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

Utilizzando le proprietà delle ZT

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

7.8.2 Stabilità

Il sistema LTI è stabile se e solo se:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Nell'ipotesi che il sistema sia causale, la condizione si traduce nell'imporre che la funzione di trasferimento $H(z)$ abbia poli contenuti nel cerchio di raggio unitario nel piano complesso. Quando $|z| = 1$ si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}|$$

Se il sistema è stabile, la $H(z)$ converge per $|z| = 1$, cioè nel caso in cui il ROC contenga la circonferenza unitaria. Quindi possiamo fare il ragionamento inverso e dedurre che un sistema LTI è stabile se il ROC di $H(z)$ contiene la circonferenza unitaria. Inoltre, un sistema LTI è stabile se e solo se tutti i poli della $H(z)$ cadono all'interno della circonferenza unitaria.

7.8.3 Causalità

Sappiamo che un sistema LTI è causale se e solo se:

$$h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

La causalità del sistema si traduce per la f.di trasferimento:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Sappiamo che il ROC della funzione di trasferimento di un sistema LTI causale è la regione esterna al cerchio centrato nell'origine la cui circonferenza passa per il polo più lontano dall'origine.

8 Sistemi LTI a Tempo Discreto nel Dominio Della Frequenza

I filtri che studiamo sono sistemi LTI che effettuano una discriminazione tra le varie componenti in frequenza al loro ingresso:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

In pratica ogni sistema LTI può essere visto come un filtro.

8.1 Filtri Ideali

Filtro ideale: un filtro si dice ideale se:

- C'è un guadagno costante nella banda passante
- C'è una rimozione completa del segnale nella banda proibita
- La fase è lineare

Ecco alcuni esempi di sistemi LTI, in cui si mostra il l'espressione dei moduli delle loro risposte in frequenza:

8.1.1 Filtro ideale passa-basso

Lascia passare inalterate le componenti di bassa frequenza ed elimina quelle in alta frequenza:

Facendo l'antitrasformata della risposta in frequenza del filtro ideale passa-basso si ottiene:

$$\begin{aligned} h_{LP}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{LP}(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{jn\omega}}{jn} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}(\omega_c n) \end{aligned}$$

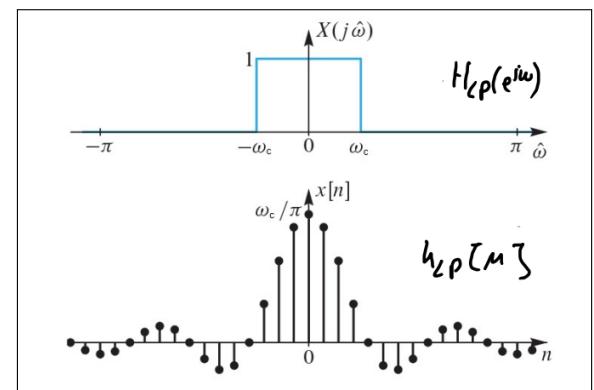


Figura 68: Lowpass ideale

Il filtro ideale passa-basso è praticamente irrealizzabile perché la risposta all'impulso:

- Non è causale;
- E' instabile, in quanto $h[n]$ non è assolutamente sommabile;
- $h_{LP}[n]$ è doppiamente infinito.

Per risolvere le criticità incontrate possiamo troncare il sinc selezionando una parte simmetrica rispetto all'origine tramite moltiplicazione con una finestra rettangolare che si estende da $-\frac{M}{2}$ a $\frac{M}{2}$ e poi applicare un ritardo. Trasformando la DTFT in:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \frac{\text{sinc}(\omega_c k)}{\omega_c k} e^{-j\omega k}$$

La risposta in frequenza della $h_{LP}[n]$ troncata con la finestra mostra le tipiche oscillazioni dovute al fenomeno di Gibbs. L'elevato livello di banda proibita e il fatto che la ampiezza decade molto lentamente rende questo filtro non accettabile per la maggior parte degli impegni.

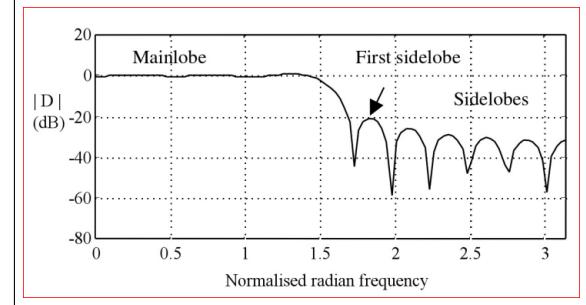


Figura 69: Fenomeno di Gibbs

8.2 Caratteristiche dei Filtri Reali

Per ottenere filtri stabili e fisicamente realizzabili si devono considerare caratteristiche meno stringenti rispetto ai filtri ideali:

- banda di transizione;
- variazione, entro certi limiti, del guadagno nella banda passante e di arresto.

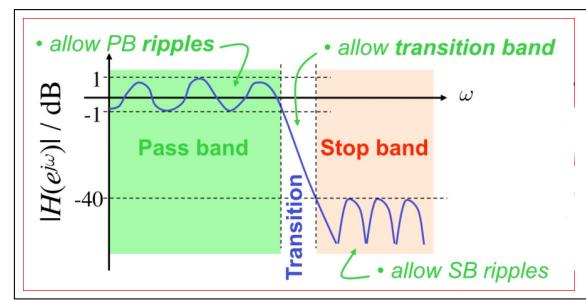


Figura 70: Fenomeno di Gibbs

Frequenza di Taglio I filtri sono caratterizzati dalla loro frequenza di Taglio

8.3 Filtri FIR

I filtri FIR sono a risposta impulsiva finita, le principali proprietà sono:

- sono sempre causali e stabili:
Solo gli zeri determinano la forma della risposta in frequenza;
- possono avere fare lineare:
No distorsioni;
- Il ROC della funzione di trasferimento coincide con il piano complesso(ad eccezione di $z = 0$ o $z = \infty$).

8.4 Esempi di Semplici Filtri FIR

8.4.1 Filtro simmetrico a due parametri

Supponiamo di avere un segnale contaminato da un rumore, costruiamo un semplice filtro a due parametri per eliminare la frequenza indesiderata. La risposta impulsiva del filtro

è del tipo:

$$h[n] = \{\alpha, \beta, \alpha\}$$

Si tratta ora di impostare opportune condizioni alla risposta in frequenza per determinare i valori numerici di α e β .

La risposta impulsiva del filtro risulta:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega}(\beta + 2\alpha \cos \omega)$$

Se ω_1 è il segnale e ω_2 il rumore, imponiamo:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \omega = \omega_1 \\ 0 & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori di *omega* nel sistema otteniamo i valori di α e β .

8.5 Filtri FIR a Fase Lineare

La linearità di fase è spesso un requisito di progetto di sistemi LTI non distorcenti. Una condizione necessaria e sufficiente per i sistemi LTI affinché la risposta in frequenza abbia fase lineare, è che la risposta all'impulso $h[n]$ presenti un centro di simmetria, ovvero che la risposta impulsiva di un filtro FIR sia simmetrica

$$h[n] = h[M - n]$$

o antisimmetrica

$$h[n] = -h[M - n]$$

In entrambi questi casi, il filtro FIR ha fase lineare. D'altra parte, i filtri IIR causali non hanno fase lineare. Essi hanno una risposta all'impulso di durata illimitata e, come tale, non è possibile determinare un istante di tempo finito che funga da centro di simmetria per la risposta impulsiva.

I filtri FIR a fase lineare possono essere classificati in base alla lunghezza del filtro e alle condizioni di simmetria:

- **Tipo 1:** risposta all'impulso di lunghezza dispari e simmetria pari. La simmetria ha una conseguenza sulla posizione degli zeri, facendo sì che siano uno il reciproco dell'altro. Se lo zero si trova sulla circonferenza unitaria, lo zero coincide con il complesso coniugato. Funzione di trasferimento:

$$H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} \left(h \left[\frac{M}{2} \right] + 2h \left[\frac{M}{2} - n \right] \cos(\omega n) \right)$$

- **Tipo 2:** lunghezza pari e simmetria pari. Presentano sempre uno zero in 1 e -1 . Funzione di trasferimento: stessa del tipo 1

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \left(h \left[\frac{N}{2} - n \right] \cos(\omega(n - \frac{1}{2})) \right)$$

- **Tipo 3:** lunghezza dispari e simmetria dispari. Presentano sempre uno zero in 1. Funzione di trasferimento:

$$H(z) = -z^{-M} H\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = j e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} \left(h\left[\frac{N}{2} - n\right] \sin(\omega n) \right)$$

- **Tipo 4** lunghezza pari e simmetria dispari. Presentano sempre uno zero in 1. Funzione di trasferimento: stessa del tipo 3

$$H(e^{j\omega}) = j e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} \left(h\left[\frac{M+1}{2} - n\right] \sin(\omega(n - \frac{1}{2})) \right)$$

In tutti questi filtri la fase è lineare, ossia si ha una fase costante a tratti. In base al tipo di filtro a fase lineare, si possono creare diversi tipi di filtri:

- Passa-basso: indicati i tipi 1 e 2
- Passa-alto: indicati i tipi 1 e 4
- Passa-banda: indicati i tipi 1,2 e 3

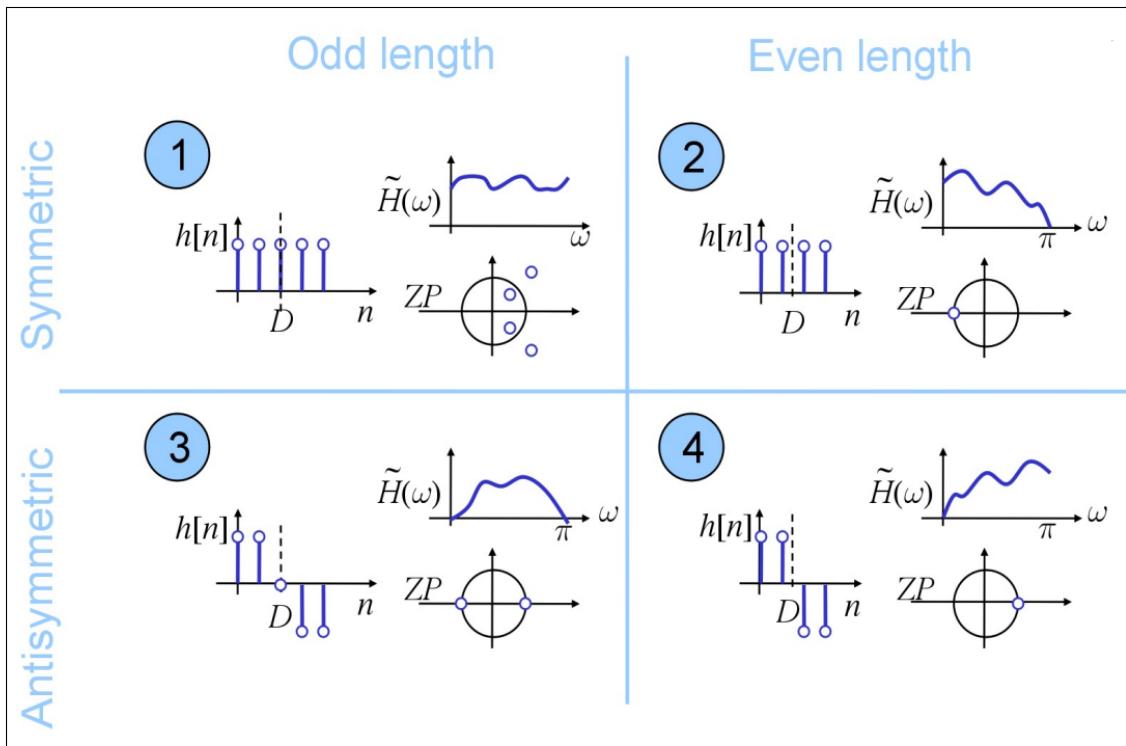


Figura 71: Tipi di filtri a fase lineare

8.6 Filtri a Fase Zero

In molte applicazioni è necessario progettare filtri digitali in modo da non introdurre alcuna distorsione di fase. Un modo è quello di realizzare un filtro a fase zero ovvero un filtro con risposta in frequenza reale positiva. Consideriamo filtri con risposta impulsiva $h[n]$ a coefficienti reali, un filtro a fase lineare prevede le seguenti fasi:

1. filtraggio: $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
2. inversione temporale: $X(e^{-j\omega})H(e^{-j\omega})$
3. filtraggio: $X(e^{-j\omega})H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega})$
4. inversione temporale: $X(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2$

La risposta in frequenza è puramente reale e pertanto il filtro a fase zero non introduce ritardi o distorsioni. Una complicazione è il filtro è anticausale dunque non adatto alle applicazioni a tempo reale.

Questo sistema è particolarmente indicato per i filtri IIR quando è necessario non avere distorsioni di fase.

I filtri FIR possono essere costruiti a fase lineare oppure si può utilizzare un filtro con

$$h'[n] = h[n] * h[n]$$

8.7 Progettazione di Filtri FIR Tramite il Metodo delle Finestre

Il metodo della finestra si basa sulla approssimazione del filtro ideale ottenuta azzerando i campioni di $h[n]$ al di fuori di una finestra di ampiezza $N = M + 1$. Uno shift di $\frac{M}{2}$ campioni rende il filtro causale:

$$h_N[n] = W_N[n] + h_{LP}[n]$$

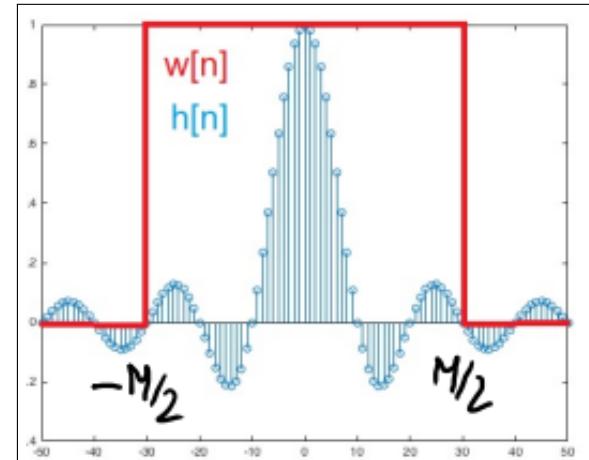


Figura 72: Finestra

8.7.1 Finestra rettangolare

Si può ottenere il troncamento applicando una finestra rettangolare, ossia moltiplicando la risposta impulsiva $h[n]$ per la funzione $w_N[n]$ (funzione porta)

$$h_N[n] = w_N[n]h[n]$$

che ha la seguente forma

$$w_N[n] = \begin{cases} 1 & |n| < M/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Effettuando una moltiplicazione nel dominio del tempo ci porta ad avere una convoluzione nella frequenza con questo risultato:

La parte verde identifica l'area sottesa dai sidelobes dunque il ripple in banda passante.

La parte rossa identifica la larghezza del mainlobe dunque ampiezza della banda di transizione.

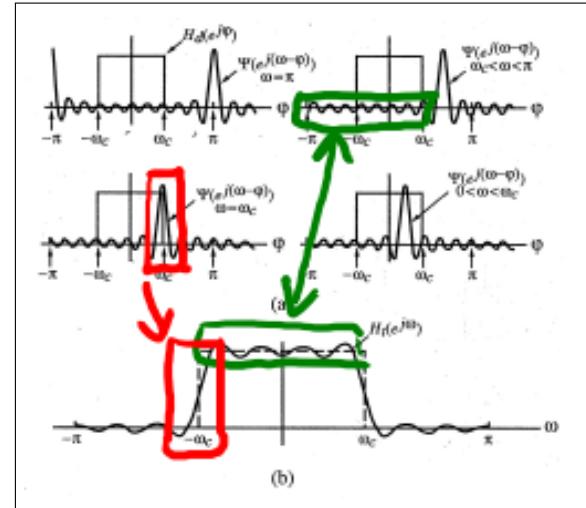


Figura 73: Effetto convoluzione

Il problema della finestra rettangolare è il brusco troncamento della $h_{LP}[n]$ in corrispondenza della frequenza di taglio, è dunque necessario usare una finestra che presenti una gradiale riduzione di ampiezza per ottenere oscillazioni più piccole e soddisfare contemporaneamente le due esigenze:

- Risposte in frequenza con ripple limitato;
- Risposta in frequenza con banda di transizione ridotta.

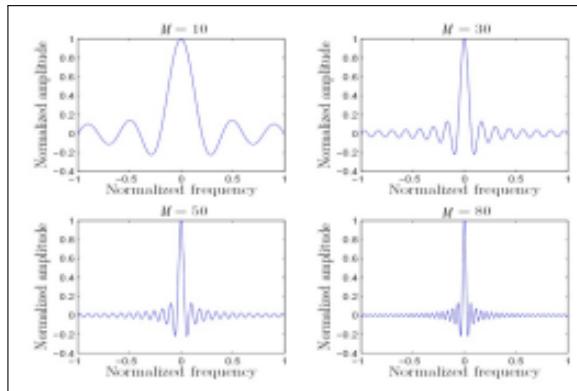


Figura 74: Riduzione banda transizione

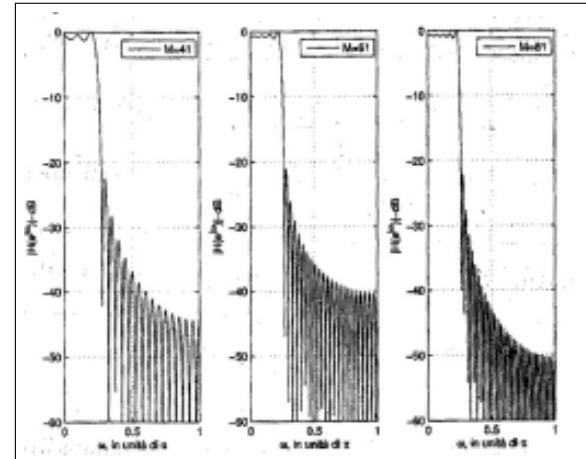


Figura 75: Area lobi costante

Volendo si può ridurre la banda di transizione agendo sulla larghezza del lobo principale che decresce al crescere della lunghezza del filtro. L'area dei lobi secondari rimane però costante al crescere della lunghezza del filtro, ciò rende praticamente inutilizzabile la finestra rettangolare.

Per quanto visto in precedenza la riduzione del ripple in banda passante della risposta in frequenza del filtro può essere ottenuta esclusivamente cambiando il tipo di finestra e non la lunghezza.

Le seguenti finestre, a differenza da quella rettangolare, presentano una maggiore ampiezza nella regione di transizione, che comporta una maggiore attenuazione in banda proibita.

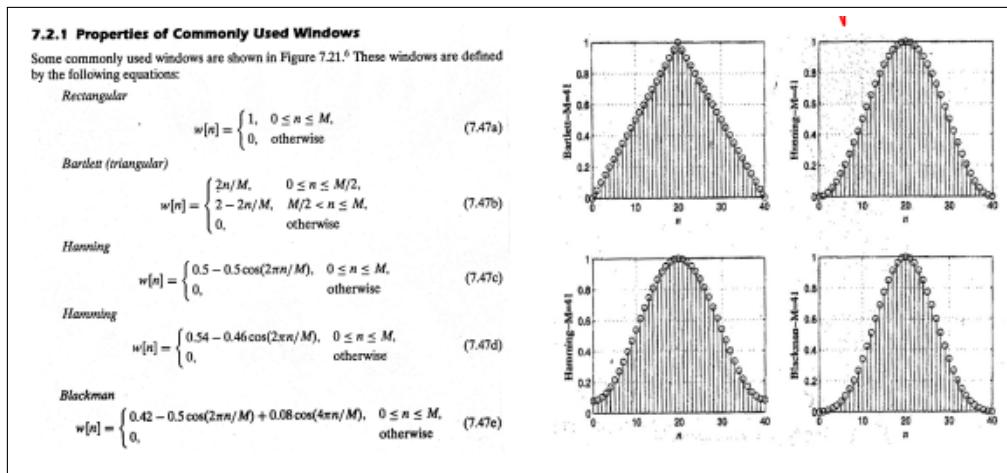


Figura 76: Finestre

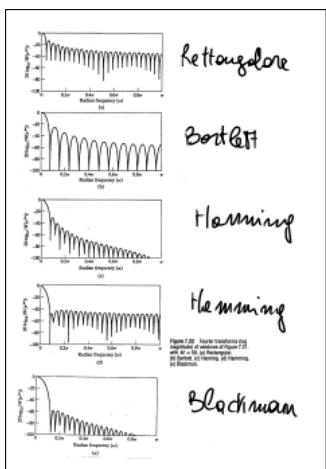


Figura 77: Segnali

Name of window function	Transition width/ sample frequency $\hat{\omega}/2\pi$	Passband ripple (dB)	Main lobe relative to largest side lobe (dB)	Maximum stopband attenuation (dB)
Rectangular	0.9/N	0.75	13	21
Hann(ing)	3.1/N	0.055	31	44
Hamming	3.3/N	0.019	41	53
Blackman	5.5/N	0.0017	57	74
Kaiser ($\beta=4.54$)	2.93/N	0.0274		50
Kaiser ($\beta=8.96$)	5.71/N	0.000275		90

Figura 78: Tabella finestre

8.7.2 Procedura per la Realizzazione del Filtro

1. Specifiche progetto(Maschera di Tolleranza);
2. Scelta tipo finestra;
3. Determinare lunghezza filtro da tabelle;
4. Determinare coefficienti del filtro ideale e applicare la finestra di troncamento;
5. Valutare la risposta in frequenza del filtro così ottenuto per vedere se soddisfa le specifiche di progetto;
6. In caso negativo ripetere passaggi 2-5.

8.7.3 Finestra di Kaiser

La procedura di ottimizzazione per approssimazioni successive della tecnica a finestre può risultare poco efficiente (approccio iterativo). Per risolvere questo problema sono state introdotte finestre, regolate da uno o più parametri, che forniscono la scelta ottimale di compromesso delle seguenti caratteristiche nella risposta in frequenza del filtro progettato:

- ripple in banda passante e proibita (ampiezza lobo principale e area lobi laterali)
- banda di transizione

8.8 Finestra di Kaiser:

- Regolata dai parametri β ed M (che è l'ordine del filtro).
- La riduzione dei sidelobes comporta un aumento del mainlobe
- A β costante l'aumento della lunghezza del filtro produce una riduzione dei lobi laterali senza modificare l'ampiezza del lobo principale.
- Esistono formule empiriche che permettono di determinare M e β in funzione dell'attenuazione richiesta in banda passante.
- Non è possibile differenziare tra δ_p e δ_s , perciò si utilizza il più piccolo tra i due:

$$A = -20 \log_{10} [\min(\delta_p, \delta_s)]$$

8.9 Maschera di tolleranza

Il punto di partenza per il progetto di un filtro è definire i requisiti di progetto. Si stabiliscono le specifiche del filtro attraverso una maschera di tolleranza che definisce:

- i valori accettabili della banda di transizione (ω_s e ω_p);
- l'attenuazione in banda proibita;
- l'oscillazione in banda passante.

Nel filtro passa basso reale sono presenti delle oscillazioni dovute al fenomeno di Gibbs. Le oscillazioni avvengono sia nella banda di passaggio che nella banda proibita. Nel filtro reale abbiamo a che fare con i seguenti parametri, che possono essere modificati per creare il filtro reale desiderato:

- δ_p : è l'ampiezza dell'oscillazione massima che la funzione di trasferimento del filtro deve presentare in banda passante.
- δ_s : è l'ampiezza dell'oscillazione massima che la funzione di trasferimento del filtro progettato deve presentare nella banda attenuata.
- ω_p : è la pulsazione più elevata nella banda passante oltre la quale inizia la banda di transizione
- ω_s : è la pulsazione dalla quale ha inizio la banda attenuata
- $\omega_s - \omega_p$: è un intervallo chiamato banda di transizione, cioè l'intervallo di frequenza in cui l'andamento della funzione di trasferimento transita tra i valori 1 e 0 .
- ω_c : è la pulsazione di taglio

Idealmente si vorrebbe che la banda di transizione fosse nulla, così come le ampiezze delle oscillazioni, in modo da avvicinarsi il più possibile a un filtro passa-basso ideale. Per calcolare l'oscillazione massima in banda passante e banda proibita (ripples) si possono usare le seguenti formule che danno un risultato in dB :

- Ripple banda passante:

$$20 \log_{10} (1 + \delta_P) dB \text{ o } -20 \log_{10} (1 - \delta_P) dB$$

- Ripple banda proibita:

$$-20 \log_{10} (1 + \delta_s) dB$$

Decibel (dB): unità di misura con la quale una grandezza fisica viene paragonata a un valore di riferimento su scala logaritmica. Viene usato per esprimere il rapporto tra due grandezze omogenee e si calcola in questo modo:

$$L_{bel} = \log_{10} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)$$

Un decibel (dB) equivale a $0.1B$

8.10 Progettazione di Filtri IIR Tramite Collocamento Diretto di Poli e Zeri

8.11 Filtri IIR

Sono descritti da un equazione del tipo:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

Possiamo ricavare la funzione di trasferimento effettuando la trasformata z della equazione, e utilizzando le proprietà di linearità e timeshift otteniamo:

poniamo $a_0 = 1$ senza perdere di generalità:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^M z^{-k} b_k X(z) = \sum_{k=0}^M z^{-k} a_k Y(z) \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M z^{-k} b_k}{\sum_{k=0}^N z^{-k} a_k} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \end{aligned}$$

esprimendolo in funzione di $H(z)$:

$$H(z) = z^{M-N} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}$$

8.11.1 Stabilità Filtri IIR

A differenza dei filtri FIR che sono sempre stabili, i filtri IIR possono essere instabili. Ricordiamo che la stabilità in senso BIBO di un filtro è garantita se e solo se la sua

risposta impulsiva è assolutamente sommabile.

Ciò equivale a richiedere che il ROC di $H(z)$ contenga la circonferenza unitaria:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n](re^{j\omega})^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

8.12 Esempi di Filtri IIR

8.12.1 Passa-basso

Scriviamo la relazione I/O:

$$\begin{aligned} y[n] &= kx[n] + kx[n-1] + \alpha y[n-1] \\ y[n] - \alpha y[n-1] &= kx[n] + kx[n-1] \end{aligned}$$

Passando alla trasformata:

$$Y(z)(1 - \alpha z^{-1}) = X(z)k(1 + z^{-1}) \quad H(z) = k \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})}$$

La costante k "regala" il guadagno del filtro in $\omega = 0$. Supponendo di avere guadagno unitario:

$$H(1) = k \frac{1 + 1}{1 - \alpha} = 1 \Rightarrow k = \frac{1 - \alpha}{2}$$

Da cui si ottiene:

$$H(z) = \frac{1 - \alpha}{2} \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})}$$

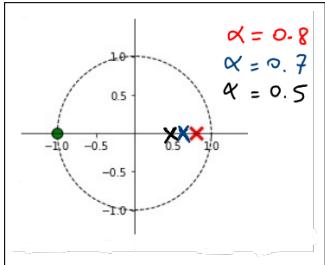


Figura 79: Poli Zeri

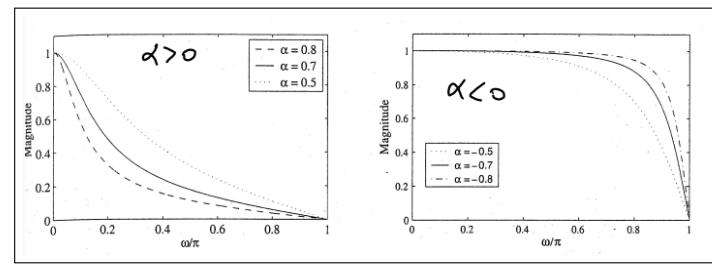


Figura 80: Ampiezza al variare di α

8.12.2 Passa-alto

Se modifichiamo la funzione di trasferimento ottenuta in precedenza spostando lo zero a bassa frequenza.

$$\begin{aligned} H(z) &= k \frac{1 + z^{-1}}{(1 + \alpha z^{-1})} \\ H(1) &= k \frac{1 + 1}{1 + \alpha} = 1 \Rightarrow k = \frac{1 - \alpha}{2} \\ H(z) &= \frac{1 + \alpha}{2} \frac{1 + z^{-1}}{(1 + \alpha z^{-1})} \end{aligned}$$

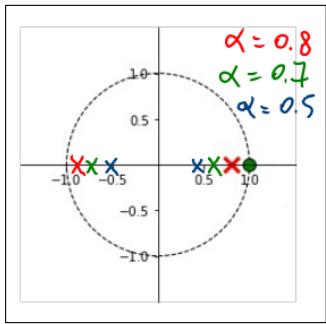
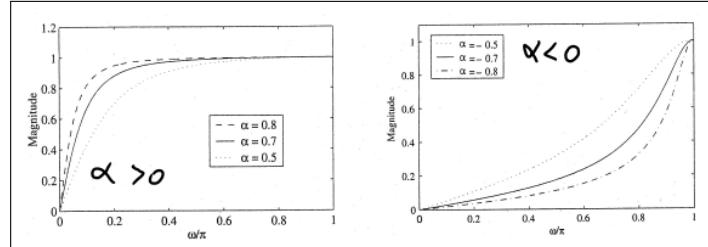


Figura 81: Poli Zeri

Figura 82: Ampiezza al variare di α

8.12.3 Passa-banda

$$H(z) = \frac{1-\alpha}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1} + \alpha z^{-2}} \quad |\alpha| < 1$$

Dove:

- β è la a frequenza centro banda:
 $\omega_0 = \cos^{-1}(\beta)$
- α è la larghezza banda a 3dB:
 $B_W = \cos^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right) = \omega_{c1} - \omega_{c2}$

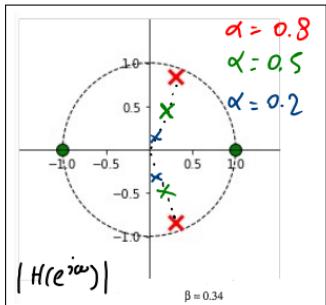
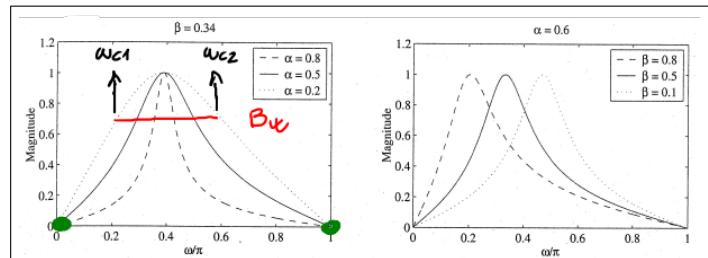


Figura 83: Poli Zeri

Figura 84: Ampiezza al variare di α

8.12.4 Elimina-banda

$$H(z) = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1-1\beta z^{-1} + z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1} + \alpha z^{-2}}$$

Dove:

- β è la a frequenza di notch:
 $\omega_0 = \cos^{-1}(\beta)$
- α è la larghezza banda a 3dB:
 $B_W = \cos^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)$

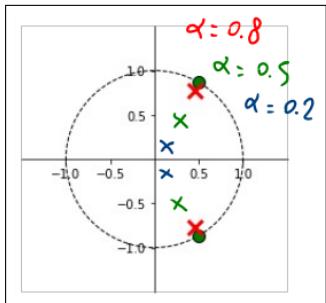
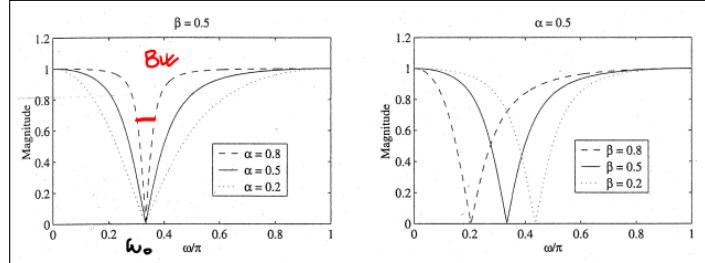


Figura 85: Poli Zeri

Figura 86: Ampiezza al variare di α

8.12.5 Passa-tutto

I filtri passa-tutto forniscono un semplice modo di migliorare la risposta in fase di un filtro IIR senza alterarne la distribuzione di ampiezza che risulta unitaria per ogni valore della frequenza.

I filtri passa-tutto modificano pertanto solo la fase del segnale e possono essere usati come equalizzatori di fase. La sua funzione di trasferimento è dotata di coefficienti che presentano una simmetria:

$$A_M(z) = \pm \frac{d_M + d_{M-1}z^{-1} + \dots + d_1z^{-M+1} + d_0z^{-M}}{d_0 + d_1z^{-1} + \dots + d_{M-1}z^{-M+1} + d_Mz^{-M}}$$

Posto $D_M(z) = d_0 + d_1z^{-1} + \dots + d_{M-1}z^{-M+1} + d_Mz^{-M}$ e sostituendo nella espressione per $A_M(z)$ si ottiene:

$$A_M(z) = \pm z^{-M} \frac{D_M(z^{-1})}{D_M(z)}$$

$A_M(z)$ presenta una simmetria caratteristica nella struttura dei poli e degli zeri:

Se $re^{j\theta}$ è un polo di $A_M(z)$ allora $z = \frac{1}{r}e^{-j\theta}$ è uno zero di $A_M(z)$.

Verifichiamo che la risposta in ampiezza di $A_M(z)$ è unitaria a tutte le frequenze:

$$A_M(z) = \pm z^{-M} \frac{D_M(z^{-1})}{D_M(z)} \Rightarrow A_M(z^{-1}) = \pm z^M \frac{D_M(z)}{D_M(z^{-1})}$$

Il prodotto dei due termini vale:

$$A_M(z)A_M(z^{-1}) = z^{-M} \frac{D_M(z^{-1})}{D_M(z)} z^M \frac{D_M(z)}{D_M(z^{-1})} = 1$$

Dunque per la risposta in ampiezza si ha:

$$|A_M(e^{j\omega})| = A_M(z)A_M(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} = 1$$

8.13 Filtri a Pettine

Il filtro comb (filtro pettine) è un particolare filtro che aggiunge al segnale al tempo presente una sua versione ritardata (delay) di un certo numero di passi. La risposta in frequenza di un filtro comb consiste in una serie di impulsi equispaziati che ricordano i singoli denti di un pettine. I filtri comb esistono in due differenti tipologie con **feedforward** o in retroazione (**feedback**).

8.13.1 FeedForward

Può essere descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n] = x[n] + \alpha x[n - K]$$

dove K è la lunghezza della linea di ritardi (delay line) misurata, essendo a tempo discreto, in numero di campioni. α è il fattore di scala applicato al segnale nella linea di ritardo. Attraverso la trasformata z dell'equazione precedente si ottiene:

$$Y(z) = (1 + \alpha z^{-K})X(z)$$

Con la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + \alpha z^{-K} = \frac{z^K + \alpha}{z^K}$$

che lega input ad output.

Possiamo notare che il numeratore assume valore zero quando $z^K = -\alpha$. Questo ha K soluzioni, equamente separate attorno ad un cerchio nel piano complesso. Questi sono gli zeri della funzione di trasferimento. Il denominatore è zero quando $z^K = 0$, ottenendo K poli per $z = 0$.

8.13.2 FeedBack

Può essere descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n] = x[n] + \alpha y[n - K]$$

Con la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-K}} = \frac{z^K}{z^K - \alpha}$$

Il numeratore, questa volta, vale zero per $z^K = 0$ ottenendo K zeri per $z = 0$. Il denominatore vale zero ogni volta che $z^K = \alpha$. Questo ha K soluzioni, equamente spaziate attorno ad un cerchio nel piano complesso, i poli della funzione di trasferimento.

8.14 Funzioni di Trasferimento a Fase Minima e Fase Massima

Le definizioni sono allora quelle a noi note:

- un filtro FIR si dice a **fase minima** quando gli zeri della sua $H(z)$ giacciono tutti all'interno del cerchio di raggio unitario: infatti, se consideriamo il prodotto che costituisce $H(\omega)$, quando tutti gli zeri sono all'interno del cerchio unitario, tutti i termini corrispondenti a zeri reali producono una variazione netta nulla della fase tra $\omega = 0$ e $\omega = p/T$, così come tutti i termini corrispondenti a coppie di zeri complessi coniugati.
- un filtro FIR si dice invece a **fase massima** quando gli zeri della sua $H(z)$ giacciono tutti all'esterno del cerchio di raggio unitario: in questo caso, ogni termine corrispondente ad uno zero reale impone una variazione di fase di p tra $\omega = 0$ e $\omega = p/T$, mentre invece ogni termine corrispondente ad una coppia di zeri complessi coniugati produce una variazione di fase di $2p$ tra $\omega = 0$ e $\omega = p$.

- Esiste evidentemente un caso misto, in cui $H(z)$ presenta zeri sia all'interno sia all'esterno del cerchio unitario: in questo caso, si parla di sistema a **fase mista**.

Analoghe definizioni si applicano anche ai filtri IIR aventi funzione di sistema $H(z)$ razionale:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Il filtro si dirà a **fase minima** se tutte le singolarità (poli e zeri) si trovano all'interno del cerchio unitario. Del resto, dato che a noi interessano solo filtri stabili, consideriamo filtri in cui tutti i poli si trovano sicuramente all'interno del cerchio unitario; di conseguenza, diventa ancora una volta discriminante la posizione degli zeri: se gli zeri si trovano tutti al di fuori del cerchio unitario, allora il filtro IIR si dirà a **fase massima**; se invece ci sono zeri sia all'interno sia all'esterno del cerchio unitario, allora si parla ancora una volta di filtro IIR a **fase mista**. Una conseguenza immediata di queste proprietà è la seguente: se consideriamo un filtro IIR $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ a fase minima (quindi anche stabile) e lo invertiamo, ricaviamo un filtro $H^{-1}(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$ ancora a fase minima.

9 Formulario e Metodi Risolutivi

9.1 Formule Utili

Serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (q)^n = \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1$$

se n parte da 1 allora è uguale a $\frac{q}{1-q}$.

$$\sum_{n=0}^{N-1} (q)^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad |q| < 1$$

9.2 Metodi per Esame

9.2.1 Potenza ed Energia

Esercizio 1. Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2$$

Se l'energia è finita allora la potenza sarà uguale a 0.

9.2.2 Caratterizzazione Sistema

Esercizio 2. Determinare se il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita sia lineare, tempo-invariante, stabile e causale.

Linearità:

$$y_1[n] + y_2[n] = w[n]$$

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$y[n] = w[n] \implies \text{Lineare.}$$

Invarianza Temporale:

- Ritardo output: $y[n - n_0] = x[n - n_0]$
(sottraggo n_0 a tutti gli n)

- Ritardo input: $y_d[n] = x[n - n_0]$
(sostituisco $n - n_0$ al posto di tutti gli n indici delle sequenze)

Se $y[n - n_0] = y_d[n] \Rightarrow$ il sistema é a tempo invariante.

Causalità:

Se il sistema non utilizza campioni futuri ($x[2n], x[n + 1], \dots$) allora é causale.

Stabilità BIBO:

Se il sistema é FIR allora é stabile. In caso non sia FIR si puó fare il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x[n]|$$

se il limite é finito allora il é stabile.

Anche l'assoluta sommabilitá della risposta impulsiva indica la stabilitá del filtro.

9.2.3 Convoluzione

Convoluzione tramite trasformata di Fourier:

Sfruttando la proprietá che la convoluzione nel tempo equivale al prodotto nell'frequenza possiamo effettuare la convoluzione nel seguente modo:

$$x[n] * h[n] = IDTFT\{X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})\}$$

Oppure con il metodo tabellare mostrato nella sezione 3.4.

9.2.4 Risposta Impulsiva

Esercizio 3. Dati i primi elementi della risposta impulsiva di un filtro FIR a fase lineare completarlo in modo da avere un filtro di tipo(1,2,3,4).

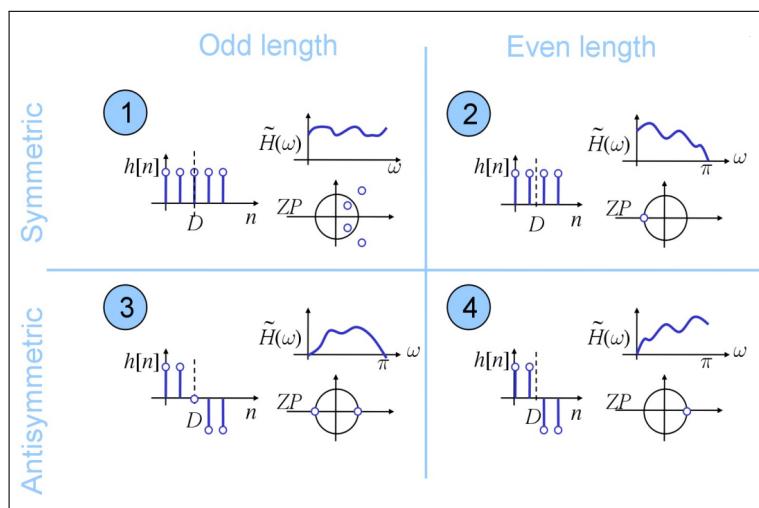


Figura 87: Tipi di filtri a fase lineare

9.2.5 Componenti Pari e Dispari

Esercizio 4. Determinare le componenti pari e dispari della sequenza (il campione sottolineato è nell'origine):

Ogni segnale reale può essere scomposto nella somma di un segnale pari ed uno dispari:

$$x_e[n] + x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) + \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) = \frac{1}{2}(2x[n]) = x[n]$$

9.2.6 Trasformate

DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Proprietà	Dominio temporale $x[n]$	Dominio della frequenza $X(\omega)$	Remarks
Linearità	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{i\omega}) + bY(e^{i\omega})$	
Traslazione temporale	$x[n - k]$	$X(e^{i\omega})e^{-i\omega k}$	k intero
Traslazione in frequenza	$x[n]e^{ian}$	$X(e^{i(\omega-a)})$	$a \in \mathbb{R}$
Inversione temporale	$x[-n]$	$X(e^{-i\omega})$	
Convoluzione	$x[n] * y[n]$	$X(e^{i\omega}) \cdot Y(e^{i\omega})$	
Moltiplicazione	$x[n] \cdot y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\vartheta}) \cdot Y(e^{i(\omega-\vartheta)}) d\vartheta$	Convoluzione periodica
Teorema di Parseval	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n]$	$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) \cdot Y^*(e^{i\omega}) d\omega$	

Figura 88: Proprietá

Proprietà	Dominio temporale $x[n]$	Dominio della frequenza $X(\omega)$	Remarks
Linearità	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{i\omega}) + bY(e^{i\omega})$	
Traslazione temporale	$x[n - k]$	$X(e^{i\omega})e^{-i\omega k}$	k intero
Traslazione in frequenza	$x[n]e^{ian}$	$X(e^{i(\omega-a)})$	$a \in \mathbb{R}$
Inversione temporale	$x[-n]$	$X(e^{-i\omega})$	
Coniugazione temporale	$x[n]^*$	$X(e^{-i\omega})^*$	
Inversione temporale e coniugazione	$x[-n]^*$	$X(e^{i\omega})^*$	
Derivata	$\frac{n}{i}x[n]$	$\frac{dX(e^{i\omega})}{d\omega}$	
Integrale	$\frac{i}{n}x[n]$	$\int_{-\pi}^{\omega} X(e^{i\vartheta})d\vartheta$	
Convoluzione	$x[n] * y[n]$	$X(e^{i\omega}) \cdot Y(e^{i\omega})$	
Moltiplicazione	$x[n] \cdot y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\vartheta}) \cdot Y(e^{i(\omega-\vartheta)}) d\vartheta$	Convoluzione periodica
Cross-correlazione	$\rho_{xy}[n] = x[-n]^* * y[n]$	$R_{xy}(\omega) = X(e^{i\omega})^* \cdot Y(e^{i\omega})$	
Teorema di Parseval	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n]$	$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) \cdot Y^*(e^{i\omega}) d\omega$	

Figura 89: DTFT notevoli

Trasformata z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

	Dominio del tempo	Dominio Z
Notazione	$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$
Linearità	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$
Espansione temporale	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ r intero	$X(z^k)$
Traslazione temporale	$x[n - k]$	$z^{-k} X(z)$
Segnali periodici	$x[n + m] = x[n]$	$X(z) = \frac{z^m}{z^m - 1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x[k]}{z^k}$
Scalatura nel dominio z	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$
Inversione temporale	$x[-n]$	$X(z^{-1})$
Coniugazione complessa	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$
Convoluzione	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$
Prima differenza	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$
Accumulazione	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$

Figura 90: Proprietá

Funzione, $x[n]$	Trasformata Z, $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	ogni z
$\delta[n - n_0]$	z^{-n_0}	$z \neq 0$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$e^{-\alpha n} u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-\alpha} z^{-1}}$	$ z > e^{-\alpha} $
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z > 1$
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z < 1$
$n^2 u[n]$	$\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$	$ z > 1$
$-n^2 u[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$	$ z < 1$
$n^3 u[n]$	$\frac{z^{-1}(1 + 4z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})^4}$	$ z > 1$
$-n^3 u[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}(1 + 4z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})^4}$	$ z < 1$

$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$n^2 a^n u[n]$	$\frac{az^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3}$	$ z > a $
$-n^2 a^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - z \cos(\omega_0)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0) + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z \sin(\omega_0)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0) + 1}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - az \cos(\omega_0)}{z^2 - 2az \cos(\omega_0) + a^2}$	$ z > a $
$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{az \sin(\omega_0)}{z^2 - 2az \cos(\omega_0) + a^2}$	$ z > a $

Figura 91: Trasformate notevoli

9.2.7 Funzione di Trasferimento

Esercizio 5. Determinare la risposta in frequenza:

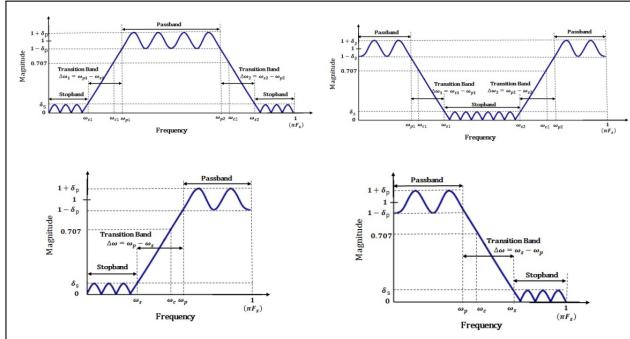
Basta sostituire $e^{j\omega}$ al posto di z nella funzione di trasferimento.

Esercizio 6. Disegnare il diagramma poli-zeri verificando la stabilità del filtro:

Per disegnare il diagramma poli zeri basta risolvere l'equazione a numeratore e denominatore della funzione di trasferimento (se presenti dei z^{-n} in genere raggruppare per il grado più basso), le soluzioni del numeratore saranno gli **zeri** del diagramma, le soluzioni del denominatore saranno i **poli**. Il filtro è stabile se i poli sono interni alla circonferenza unitaria.

Esercizio 7. Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro:

Dal poli zeri è semplice determinare che andamento abbia la risposta in ampiezza, basta guardare la posizione dei poli e degli zeri nella semicirconferenza superiore.



Esercizio 8. Si determini se il filtro ha fase lineare:

Se il filtro è FIR allora non ha fase lineare. In caso contrario bisogna controllare se sia di tipo(1,2,3,4) oppure studiare la risposta in frequenza sostituendo ad omega valori per cui seno e coseno sono noti e ricordando che:

$$\rho(A\cos\omega + B\sin\omega) = \rho e^{j\omega}$$

Il PDF è dotato di hyperlinking quindi è possibile cliccare sui nomi delle sezioni nell'indice per spostarsi tra le pagine, allo stesso modo, per tornare all'indice è sufficiente cliccare sul numero della pagina.