CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
14 GENNAIO 2021

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

[**E=16/15; P=0**]

2) Determinare se il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = 4x[n] + x[n-2]$$

sia lineare, tempo-invariante, stabile e causale.

[**Il sistema soddisfa tutte e quattro le proprietà**]

3) Calcolare la DTFT della sequenza:

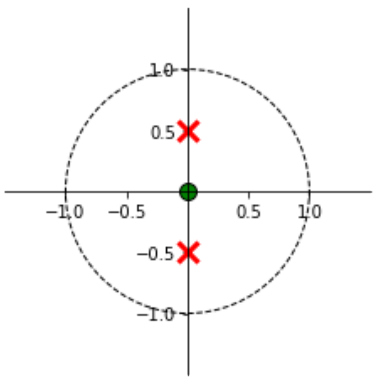
$$x[n] = \delta[n+3] - \delta[n-3]$$

[$\boldsymbol{X(e^{j\omega}) = 2\ j\ sin(3\omega)}$]

4) Si consideri un sistema causale a tempo discreto con funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

a) Disegnare il diagramma poli-zeri verificando la stabilità del circuito;



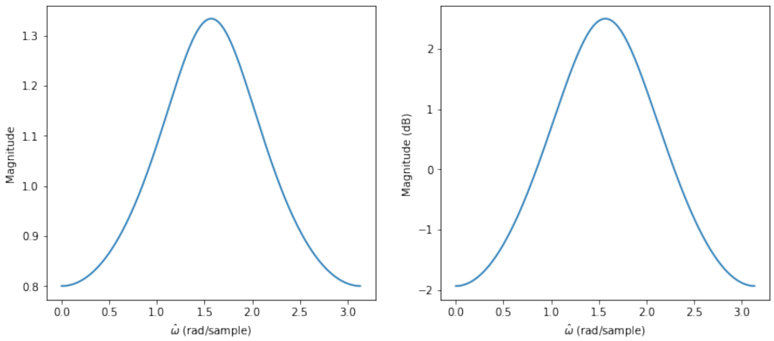
b) indicare la ROC;

[$\mathbf{ROC:}\ \boldsymbol{|\,z\,| > 0.5}$]

c) si ricavi, se possibile, la risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$;

$$[\boldsymbol{H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}}\ ]$$

d) tramite grafico qualitativo si descriva la risposta in ampiezza.



1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\rho)^n = \frac{1}{1-\rho} \iff -1 < \rho < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N} \rho^n = \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] \right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{4}\right)^n \right|^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$$

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left| \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \right|^2 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} \left| \left(\frac{1}{4}\right)^n \right|^2 \overset{N \to +\infty}{=} 0$$

2) Determinare se il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = 4x[n] + x[n-2]$$

sia lineare, tempo-invariante, stabile e causale.

$$y_1[n] + y_2[n] = w[n]$$

$$y[n] = 4(x_1[n] + x_2[n]) + x_1[n-2] + x_2[n-2] - y_1[n] + y_2[n]$$

$$y[n] = w[n] \Rightarrow \text{LINEARE}$$

SI SOTTRAE OVUNQUE n_0 A n

$$y[n-n_0] = 4x[n-n_0] + x[n-2-n_0]$$

SI SOSTITUISCE n CON $n-n_0$ NELLE SEQ.

$$y_d[n] = 4x[n-n_0] + x[n-n_0-2]$$

$$y[n-n_0] = y_d[n] \Rightarrow \text{TEMPO INV.}$$

$$\lim_{n \to +\infty} y[n] \text{ È FINITO} \Rightarrow \text{STABILE BIBO}$$

LA SEQUENZA NON UTILIZZA CAMPIONI FUTURI => CAUSALE

3) Calcolare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \delta[n+3] - \delta[n-3]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\delta[n+3] - \delta[n-3]) e^{-j\omega n} = e^{3j\omega} - e^{-3j\omega} = 2j \sin(3\omega)$$

4) Si consideri un sistema causale a tempo discreto con funzione di trasferimento:

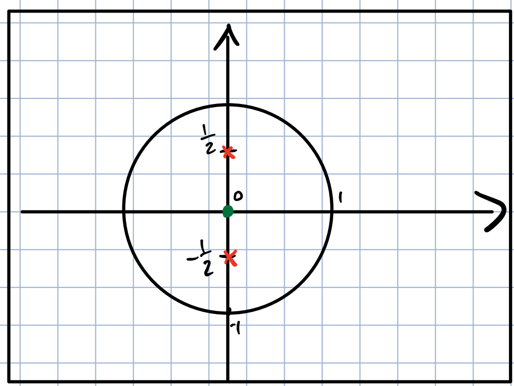
$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

a) Disegnare il diagramma poli-zeri verificando la stabilità del circuito;

$$\frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{z}{z^2+\frac{1}{4}} = \frac{z}{z^2+\frac{1}{4}} =$$

ZERI $z=0$

POLI = $z = \pm\frac{1}{2}i$



b) indicare la ROC;

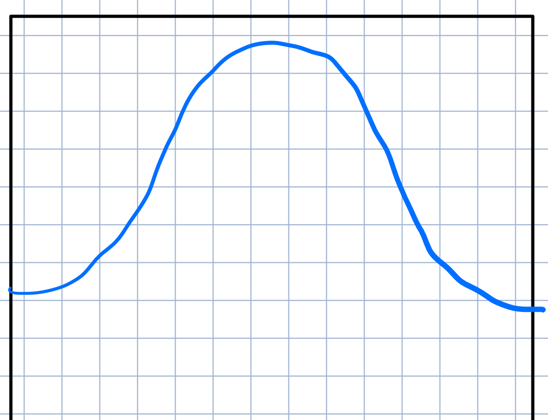
I POLI NON DEVONO ESSERE CONTENUTI NEL ROC:

$$|z| > \frac{1}{2}$$

c) si ricavi, se possibile, la risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$;

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{e^{j\omega}} = \frac{e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}$$

d) tramite grafico qualitativo si descriva la risposta in ampiezza.



(DAL ROC)

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
04 FEBBRAIO 2021

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = u[n] - u[n-5]$$

La sequenza equivale a:

$$x[n] = \begin{cases} 1; & 0 \leq n \leq 4 \\ 0; & n < 0, n > 4 \end{cases}$$

[**E=5; P=0**]

2) Eseguire, col metodo grafico, la convoluzione $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ delle seguenti sequenze (in entrambi i casi il primo campione è nell'origine):

$$x_1[n] = \{1, 0, -1\}$$
$$x_2[n] = \{2, 2, 1\}$$

Verificare con il metodo tabellare il risultato.
[$\boldsymbol{y[n] = \{2, 2, -1, -2, -1\}}$]

3) Il segnale analogico:

$$x(t) = 10 \; cos(500 \; \pi \; t)$$

deve essere campionato e ricostruito esattamente dai suoi campioni. Si determini:

a) Il valore minimo della frequenza di campionamento f_s
[$\boldsymbol{f_s > 500Hz}$]

b) Supponendo che il segnale venga campionato a frequenza f_s=200 Hz e venga ricostruito con un filtro passa basso ideale con frequenza di taglio f_c=100 Hz, quali saranno le frequenze presenti nello spettro del segnale ricostruito?
[$\boldsymbol{f_{rec} = \pm 50 \; Hz}$]

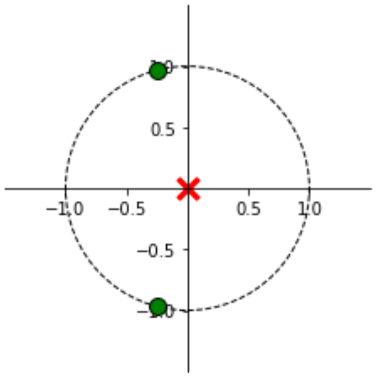
4) I primi due elementi della risposta impulsiva di un filtro FIR a fase lineare sono dati da:

$$h[n] = \{1, 0.5, \cdots\}$$

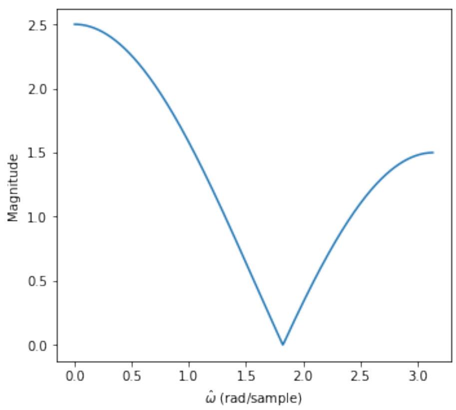
a) Completare $h[n]$ in modo da avere un filtro (di lunghezza minima) di tipo 1
[$\boldsymbol{h[n] = \{1, 0.5, 1\}}$]

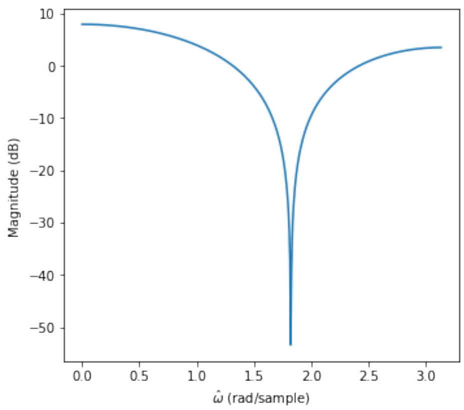
b) Determinare la funzione di trasferimento del filtro $H(z)$
[$\boldsymbol{H(z) = 1 + 0.5z^{-1} + z^{-2}}$]

c) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro



d) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza





1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = u[n] - u[n-5]$$

La sequenza equivale a:

$$x[n] = \begin{cases} 1; & 0 \leq n \leq 4 \\ 0; & n < 0, n > 4 \end{cases}$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| u[n] - u[n-5] \right|^2 = (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 = 5$$

ESSENDO FINITA L'ENERGIA LA POTENZA È 0.

2) Eseguire, col metodo grafico, la convoluzione $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ delle seguenti sequenze (in entrambi i casi il primo campione è nell'origine):

$$x_1[n] = \{1, 0, -1\}$$
$$x_2[n] = \{2, 2, 1\}$$

Verificare con il metodo tabellare il risultato.

1 0 -1

2 2 1

	1	0	-1
2	2	0	-2
2	2	0	-2
1	1	0	-1

$\{2, 2, -1, -2, -1\}$

3) Il segnale analogico:

$$x(t) = 10\, cos(500\, \pi\, t)$$

deve essere campionato e ricostruito esattamente dai suoi campioni. Si determini:

a) Il valore minimo della frequenza di campionamento f_s

(TEORIA NON AFFRONTATA)

b) Supponendo che il segnale venga campionato a frequenza f_s=200 Hz e venga ricostruito con un filtro passa basso ideale con frequenza di taglio f_c=100 Hz, quali saranno le frequenze presenti nello spettro del segnale ricostruito?

(TEORIA NON AFFRONTATA)

4) I primi due elementi della risposta impulsiva di un filtro FIR a fase lineare son dati da:

$$h[n] = \{1, 0.5, \cdots\}$$

a) Completare $h[n]$ in modo da avere un filtro (di lunghezza minima) di tipo 1

$\{1, 0.5, 1\}$

b) Determinare la funzione di trasferimento del filtro $H(z)$

$H(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} + z^{-2}$

c) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

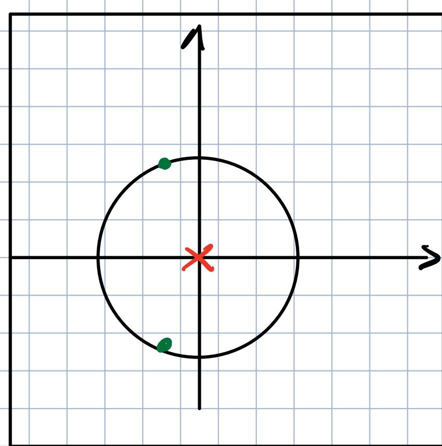
$1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{z^2} = \frac{2z^2 + z + 2}{z^2}$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{4} = -\frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{15}}{4}$

POLO $z = 0$

ZERI $z = -\frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\frac{\sqrt{15}}{4} \approx 1$



d) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
25 FEBBRAIO 2021

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n > 0 \\ (4)^n & n \leq 0 \end{cases}$$

[**E=143/120; P=0**]

2) Determinare le componenti pari e dispari della sequenza (il campione sottolineato è nell'origine):

$$x[n] = \{2, -2, \underline{4}, 1, -3\}$$

[$\boldsymbol{x_e[n] = \{-0.5, -0.5, \underline{4}, -0.5, -0.5\}\,; \quad x_o[n] = \{2.5, -1.5, \underline{0}, 1.5, -2.5\}}$]

3) Determinare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-4]$$

[$\boldsymbol{X(e^{j\omega}) = \dfrac{(3/4)^4\ e^{-j4\omega}}{1 - 3/4\ e^{-j\omega}}}$]

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{-3}{4}\right)^n u[n]$$

[$\boldsymbol{X(z) = \dfrac{2z}{z-1/2} + \dfrac{2z}{z+3/4}; \quad ROC: |z| > 3/4}$]

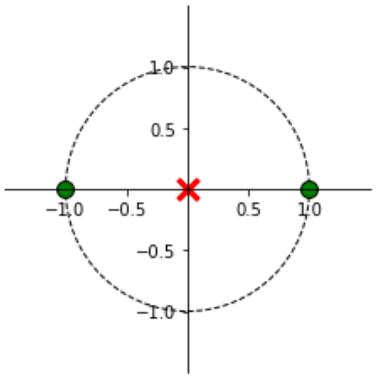
5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1})$$

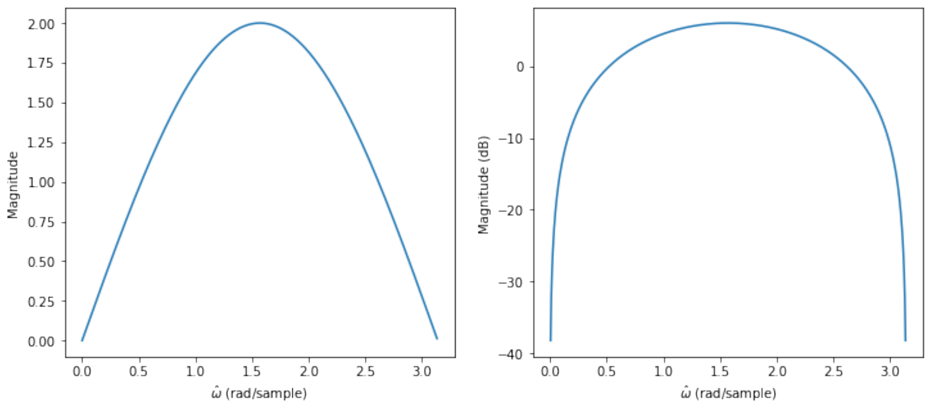
a) Si determini la risposta in frequenza

[$\boldsymbol{H(e^{j\omega}) = 2je^{-j\omega} sin(\omega)}$]

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza



1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n > 0 \\ (4)^n & n \leq 0 \end{cases}$$

$$E_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n\right|^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$$

$m = -n$

$$E_2 = \sum_{n=-\infty}^{0} |(4)^n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} |16|^n = \sum_{m=0}^{+\infty} \left|\frac{1}{16}\right|^m = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{8} + \frac{16}{15} = \frac{15+128}{120} = \frac{143}{120}$$

2) Determinare le componenti pari e dispari della sequenza (il campione sottolineatc è nell'origine):

$$x[n] = \{2, -2, \underline{4}, 1, -3\}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$
$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

$x_e[n]$

$-2: \frac{1}{2}(2-3) = -\frac{1}{2}$

$-1: \frac{1}{2}(-2+1) = -\frac{1}{2}$

$0: \frac{1}{2}(4+4) = 4$

$1: \frac{1}{2}(1+-2) = -\frac{1}{2}$

$2: \frac{1}{2}(-3+2) = -\frac{1}{2}$

$x_o[n]$

$-2: \frac{1}{2}(2+3) = \frac{5}{2}$

$-1: \frac{1}{2}(-2-1) = -\frac{3}{2}$

$0: \frac{1}{2}(4-4) = 0$

$1: \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$

$2: \frac{1}{2}(-3-2) = -\frac{5}{2}$

$$x_e[n] = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 4, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

$$x_o[n] = \left\{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$$

3) Determinare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-4]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-4]\right) e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}^n \cdot e^{-j\omega}} \cdot e^{-j4\omega}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{-3}{4}\right)^n u[n]$$

$$H(z) = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right) + 2\left(\frac{1}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}\right) = 2\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{3}{4}}\right)$$

$$\left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \qquad \left|\frac{3}{4z}\right| < 1$$

$$\left|\frac{1}{2}\right| < z \qquad \left|\frac{3}{4}\right| < z \quad \Rightarrow \quad z > \left|\frac{3}{4}\right|$$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1})$$

a) Si determini la risposta in frequenza

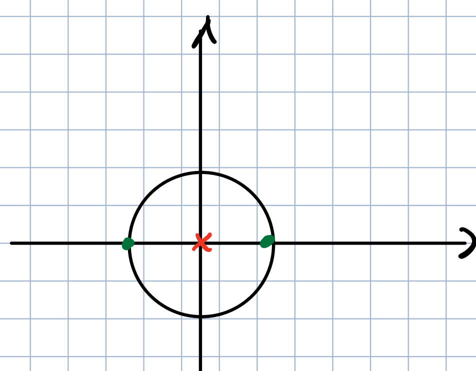
$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{e^{j\omega}} = \left(1 - (z^{-1})^2\right) = \left(1 - z^{-2}\right) = 1 - e^{-j2\omega} = e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) = e^{-j\omega} \cdot 2j\sin\omega$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

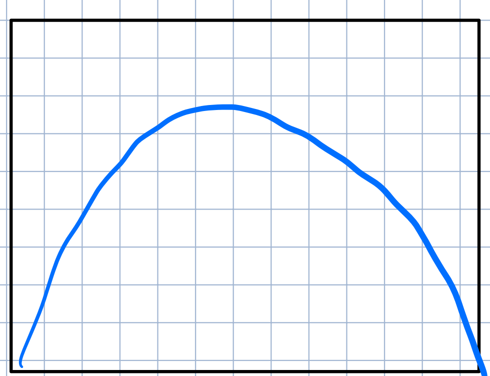
$$H(z) = \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = \left(\frac{z^2-1}{z^2}\right)$$

ZERI : $z = \pm 1$

POLO : $z = 0$



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza



CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
7 GIUGNO 2021

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = 2u[n-3]$$

E=∞; P=2

2) Eseguire, col metodo grafico, la convoluzione $y[n] = x[n] * h[n]$ delle seguenti sequenze (in entrambi i casi il primo campione è nell'origine):

$$x[n] = \{1, 1, 1\}$$
$$h[n] = \{0.5, 1\}$$

Verificare con il metodo tabellare il risultato.

$\boldsymbol{y[n] = \{0.5, 1.5, 1.5, 1\}}$

3) Determinare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-2]$$

$$\boldsymbol{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{9}\frac{1}{1-(1/3)e^{-j\omega}} \quad e^{-j2\omega}}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\boldsymbol{X(z) = \frac{7z}{z-1/3} + \frac{6z}{z-1/2}; \quad ROC : |z| > 1/2}$$

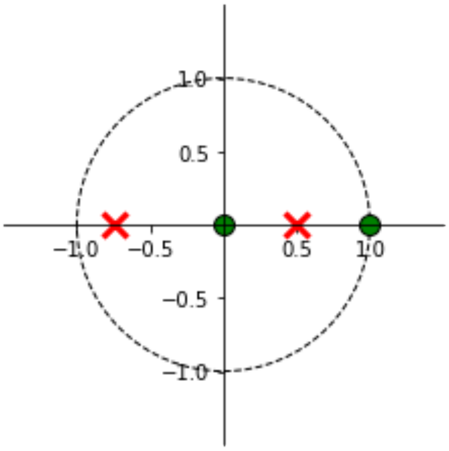
5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}}$$

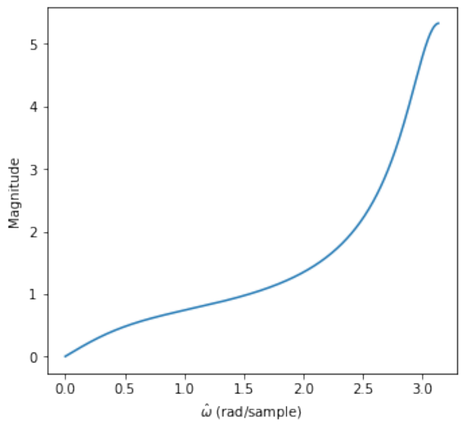
a) Si determini la risposta in frequenza

$$\boldsymbol{H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{3}{8}e^{-j2\omega}}}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro
Il filtro é stabile



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro
Filtro passa-alto



1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = 2u[n-3]$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|2u[n-3]\right|^2 = +\infty$$

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=-N}^{N} \left|2u[n-3]\right|^2 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=3}^{N} \left|2u[n-3]\right|^2 =$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=3}^{N} \left|2u[n-3]\right|^2 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \left(2 \cdot (N-3)\right)^2 = \lim_{N \to +\infty} \frac{2N-6}{2N+1} = 1$$

2) Eseguire, col metodo grafico, la convoluzione $y[n] = x[n] * h[n]$ delle seguen sequenze (in entrambi i casi il primo campione è nell'origine):

$$x[n] = \{1, 1, 1\}$$
$$h[n] = \{0.5, 1\}$$

Verificare con il metodo tabellare il risultato.

	0.5	1
1	0.5	1
1	0.5	1
1	0.5	1

$$\{0.5,\ 1.5,\ 1.5,\ 1\}$$

3) Determinare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-2]$$

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n-2] \cdot e^{-jwn} = \frac{1}{9} e^{-2jw} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3} \cdot e^{-jw}}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$H(z) = 7\left(z^{-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3} \cdot z^{-1}}\right) - 6\left(z^{-1} \frac{1}{1-\frac{1}{2} \cdot z^{-1}}\right) = \frac{7z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{6z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\left|\frac{1}{3z}\right| < 1 \qquad \left|\frac{1}{2z}\right| < 1$$

$$\left|\frac{1}{3}\right| < z \qquad \left|\frac{1}{2}\right| < z \implies \left|\frac{1}{2}\right| < z$$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

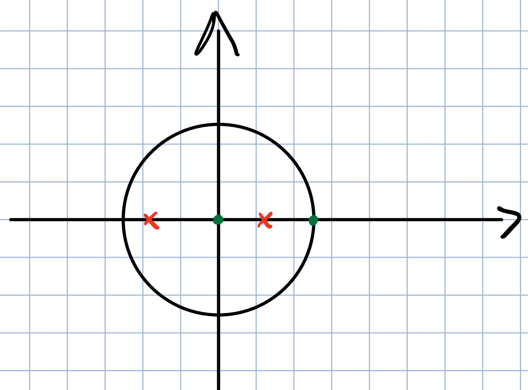
$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{e^{j\omega}} = \frac{e^{2j\omega} - e^{j\omega}}{e^{2j\omega} + \frac{1}{4}e^{j\omega} - \frac{3}{8}} = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{3}{8}e^{-2j\omega}}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

ZERI: $z^2 - z = 0 \qquad z(z-1) = \qquad z=0,\ z=1$

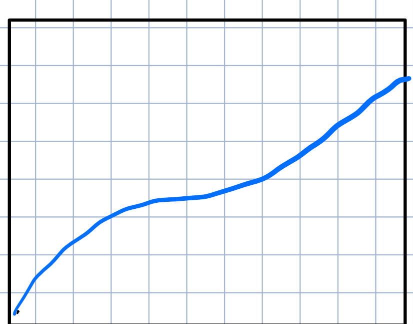
POLI: $z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{3}{8} = \quad 8z^2 + 2z - 3$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{16} \begin{cases} -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4} \\ \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



IL FILTRO E' STABILE IN QUANTO I POLI SONO INTERNI ALLA CIRCONFERENZA

c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro



PASSA-ALTO

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
17 GENNAIO 2022

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n u[-n]$$

E=9/5; P=0

2) Determinare se il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n u[n]$$

sia lineare, tempo-invariante, stabile e causale.
Lineare: sì, tempo-invariante: no, stabile: no, causale: sì

3) Un sistema LTI é definito dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = \frac{1}{L+1} \sum_{\ell=0}^{L} x[n-\ell]$$

Si determini la risposta in frequenza del sistema.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1} \quad \frac{1-e^{-j\omega(L+1)}}{1-e^{-j\omega}}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[n]$$

$$X(z) = \frac{4-5z^{-1}}{2(1-1/2z^{-1})(1-2z^{-1})}; \quad ROC: |z| > 2$$

?

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{L+1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{L} x[n-\ell] \right) \cdot e^{-j\omega n}}{X(e^{j\omega})\, e^{-j\omega \ell}}$$

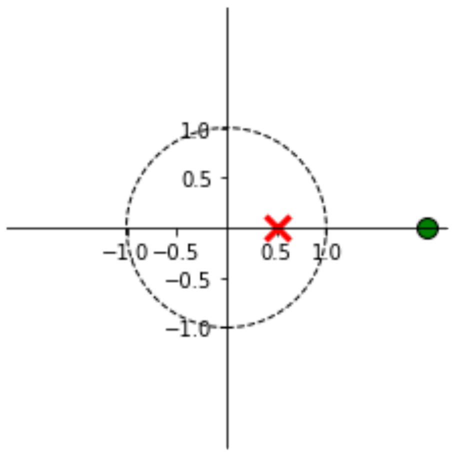
5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1} - 2}$$

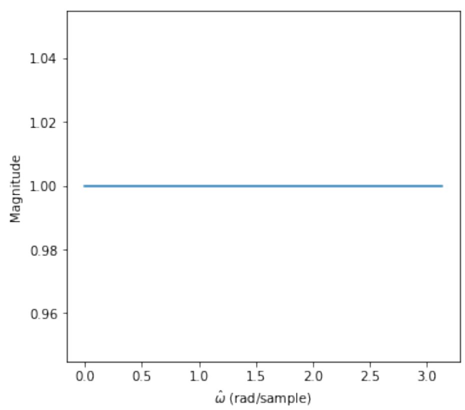
a) Si determini la risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 2e^{-j\omega}}{e^{-j\omega} - 2}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro
Il filtro è stabile



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro
Filtro passa-tutto



1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n]$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n] \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} \left| \left(\frac{3}{2}\right)^n \right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{4}{9} \right|^n = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$

$n = -n$

$$P = 0$$

2) Determinare se il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

sia lineare, tempo-invariante, stabile e causale.

$$y[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$y[n] = w[n] \Rightarrow$ LINEARE

$$y[n-n_0] = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-n_0} \cdot u[n-n_0] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n_0} \cdot u[n-n_0]$$

$$y_d[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot u[n-n_0]$$

$y_d[n] \neq y[n-n_0] \Rightarrow$ NO TEMPO INV.

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot u[n] = +\infty$ NO STABILE

E' CAUSALE.

3) Un sistema LTI é definito dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = \frac{1}{L+1} \sum_{\ell=0}^{L} x[n-\ell]$$

Si determini la risposta in frequenza del sistema.

$$\sum_{n=0}^{N} p^n = \frac{1-p^{N+1}}{1-p}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{L} u[n-\ell]\, e^{-j\omega n}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[n]$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-2 \cdot z^{-1}} = \frac{1-2z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-1}+1}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1})} = \frac{4-5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1})}$$

$$\left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \qquad \left|\frac{2}{z}\right| < 1$$

$$\left|\frac{1}{2}\right| < z \qquad \boxed{|2| < z}$$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

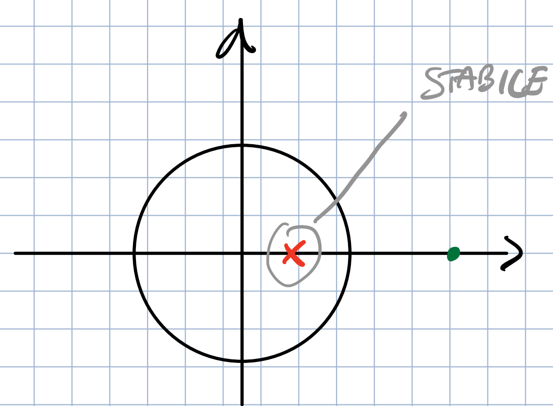
$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{z^{-1}-2}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

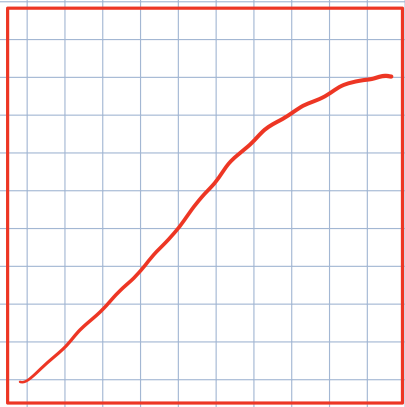
$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{e^{j\omega}} = \frac{1-2e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-2}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

$$\frac{z-2}{1-2z} = \quad \text{ZERI}: \ z=2 \qquad \text{POLI}: \ z=\frac{1}{2}$$



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro



CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
31 GENNAIO 2022

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

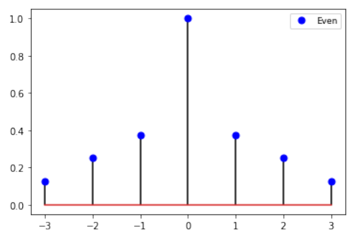
$$x[n] = 8^n u[-n-1]$$

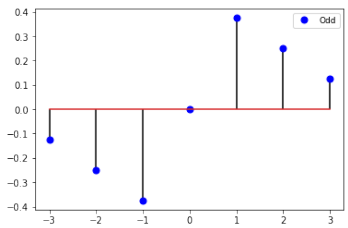
E=1/63; P=0

2) Determinare le componenti pari e dispari della sequenza (il campione sottolineato è nell'origine):

$$x[n] = \{\underline{1}, 3/4, 1/2, 1/4\}$$

$x_e[n] = \{0.125, 0.25, 0.375, \underline{1}, 0.375, 0.25, 0.125\}$;
$x_o[n] = \{-0.125, -0.25, -0.375, \underline{0}, 0.375, 0.25, 0.125\}$





3) Calcolare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+3]$$

$$X(e^{j\omega}) = 8\ e^{j3\omega} \frac{1}{1 - 1/2\ e^{-j\omega}}$$

4) Utilizzare la trasformata Z per calcolare la convoluzione $y[n] = x[n] * h[n]$ delle due sequenze:

$$x[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$$

$$h[n] = \delta[n] - \frac{4}{5}\delta[n-1]$$

$y[n] = \delta[n]$

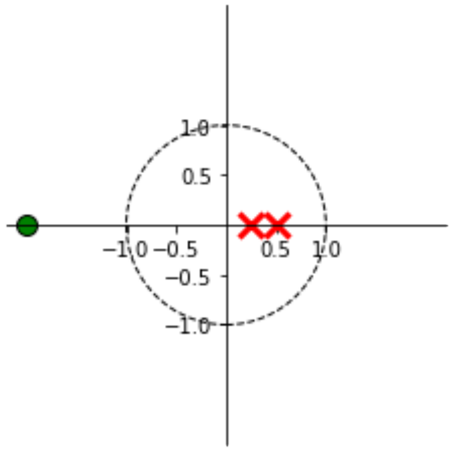
5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 3/4z^{-1} + 1/8z^{-2}}$$

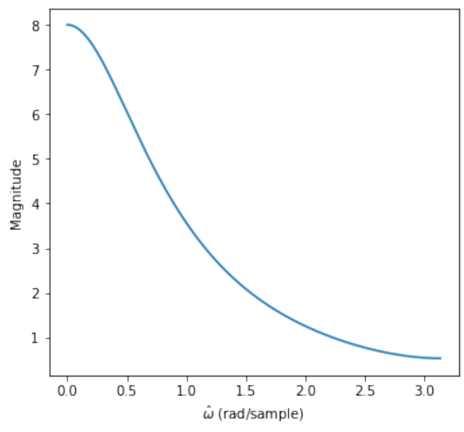
a) Si determini la risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-j\omega}}{1 - 3/4e^{-j\omega} + 1/8e^{-2j\omega}}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro
Il filtro è stabile



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro
Filtro passa-basso



d) Si discuta l'implementazione a fase minima di questo filtro

$$H(z) = \frac{1 + 1/2z^{-1}}{1 - 3/4z^{-1} + 1/8z^{-2}}$$

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = 8^n u[-n-1]$$

$n = -m$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| 8^n \cdot u[-n-1] \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |64|^n = \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{64} \right|^m = \frac{1}{1-\frac{1}{64}} - 1 = \frac{64}{63} - 1 = \frac{1}{63}$$

$$P = 0$$

2) Determinare le componenti pari e dispari della sequenza (il campione sottolineato è nell'origine):

$$x[n] = \{\underline{1}, 3/4, 1/2, 1/4\}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$$

-3 $\frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

-2 $\frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

-1 : $\frac{1}{2}\left(0 + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$

0 : $\frac{1}{2}\left(1 + 1\right) = 1$

1 : $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + 0\right) = \frac{3}{8}$

2 : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{4}$

3 : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 0\right) = \frac{1}{8}$

$$\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \underline{1}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

-3 : $\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

-2 : $\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

-1 : $\frac{1}{2}\left(0 - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{8}$

0 : $\frac{1}{2}\left(1 - 1\right) = 0$

1 : $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - 0\right) = \frac{3}{8}$

2 : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}$

3 : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{8}$

$$\left\{-\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, 0, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$$

3) Calcolare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+3]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n+3]\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-3}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot e^{j\omega 3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot e^{j\omega 2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot e^{j\omega} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} = 8e^{j\omega 3} + 4e^{j\omega 2} + 2e^{j\omega} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 3/4z^{-1} + 1/8z^{-2}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{e^{j\omega}} = \frac{1 + 2e^{-j\omega}}{1 - 3/4\, e^{-j\omega} + 1/8\, e^{-2j\omega}}$$

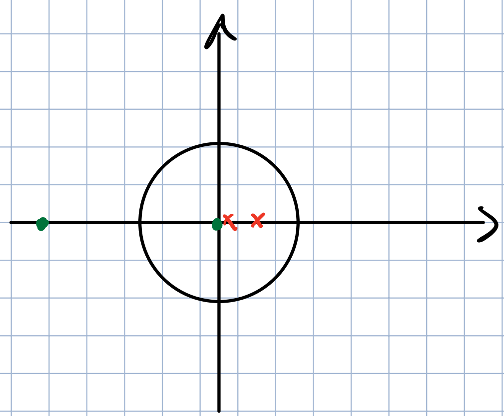
b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

$$\frac{z^2 + 2z}{z^2 - 3/4\, z + 1/8} =$$

ZERI: $z(z+2) = 0 \quad z = 0, -2$

POLI: $8z^2 - 6z + 1 = 0$

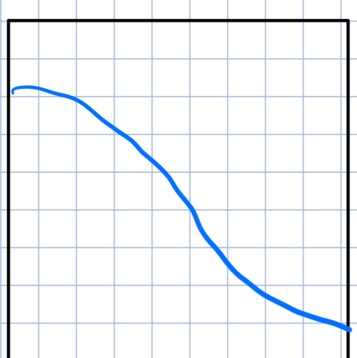
$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{16} \quad \begin{cases} \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \\ \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \end{cases}$$



POLI NELLA CIRCONFERENZA

=> STABILE

c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro



LOW-PASS

d) Si discuta l'implementazione a fase minima di questo filtro

GLI ZERI DEVONO ESSERE STABILI (MODULO MINORE DI 1)

DUNQUE INVERTIAMO 2 => $\frac{1}{2}$

4) Utilizzare la trasformata Z per calcolare la convoluzione $y[n] = x[n] * h[n]$ delle due sequenze:

$$x[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$$

$$h[n] = \delta[n] - \frac{4}{5}\delta[n-1]$$

$$x[n] * h[n] = X(z) \cdot H(z) = \frac{1}{1 - \frac{4}{5} \cdot z^{-1}} \cdot 1 - \frac{4}{5} \cdot z^{-1} = IZT\{1\} = \delta[n]$$

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
10 FEBBRAIO 2022

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{5}{9}\right)^n u[n]$$

E=81/56; P=0

2) Determinare le componenti pari e dispari della sequenza:

$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{4}n}$$

$x_e[n] = cos(\frac{\pi}{4}n); x_o[n] = jsin(\frac{\pi}{4}n)$

3) Calcolare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n; & n = 0, 2, 4, \cdots \\ 0; & altrimenti \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 1/4e^{-2j\omega}}$$

4) I prime tre elementi della risposta impulsiva di un filtro FIR a fase lineare sono:

$$h[n] = \{1, 3, -2, \cdots\}$$

Completare $h[n]$ (lunghezza minima) in modo da avere un filtro di tipo 1 o di tipo 3.

FIR tipo 1: $h[n] = \{1, 3, -2, 3, 1\}$
FIR tipo 3: $h[n] = \{1, 3, -2, 0, 2, -3, -1\}$

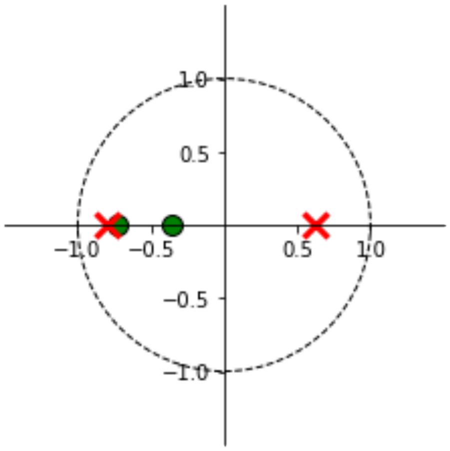
5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{23 + 25z^{-1} + 6z^{-2}}{6 + z^{-1} - 3z^{-2}}$$

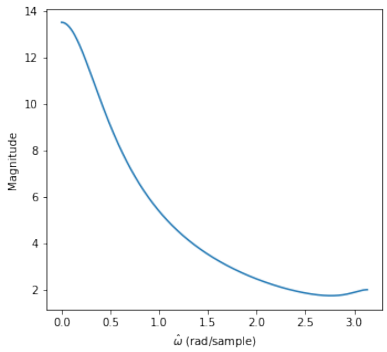
a) Si determini la risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) = \frac{23 + 25e^{-j\omega} + 6e^{-2j\omega}}{6 + e^{-j\omega} - 3e^{-2j\omega}}$$

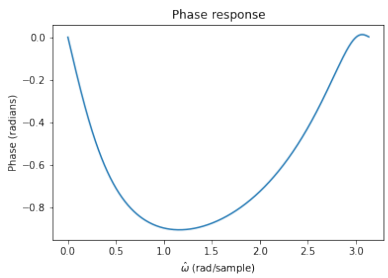
b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro
Il filtro è stabile



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro
Filtro passa-basso



d) Si determini se il filtro ha fase lineare



1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{5}{9}\right)^n u[n]$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{5}{9}\right)^n u[n] \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{25}{81} \right|^n = \frac{1}{1-\frac{25}{81}} = \frac{81}{56}$$

$$P = 0$$

2) Determinare le componenti pari e dispari della sequenza:

$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{4}n}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right) \qquad x_o[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right)$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)}_{x_e[n]} + \underbrace{j\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}_{x_o[n]}$$

3) Calcolare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n; & n = 0, 2, 4, \cdots \\ 0; & altrimenti \end{cases}$$

$m = \frac{n}{2}$ $\qquad$ $2m = n$

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-jwn} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-jw2m} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-2jw}}$$

4) I prime tre elementi della risposta impulsiva di un filtro FIR a fase lineare sono:

$$h[n] = \{1, 3, -2, \cdots\}$$

Completare $h[n]$ (lunghezza minima) in modo da avere un filtro di tipo 1 o di tipo 3.

TIPO 1	TIPO 3
$h[n] = \{1, 3, -2, 3, 1\}$	$h(n) = \{1, 3, -2, 0, 2, -3, -1\}$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{23 + 25z^{-1} + 6z^{-2}}{6 + z^{-1} - 3z^{-2}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

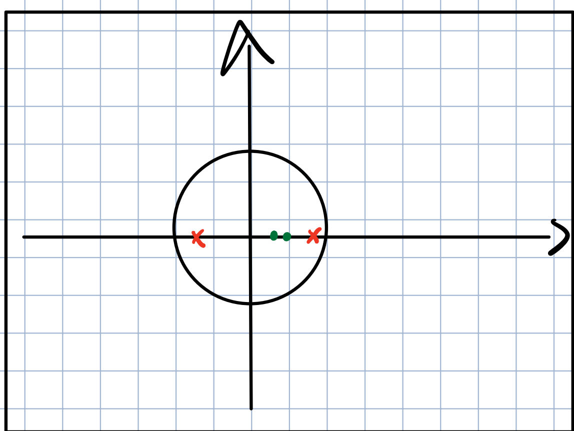
$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{e^{j\omega}} = \frac{23 + 25\,e^{-j\omega} + 6\,e^{-2j\omega}}{6 + e^{-j\omega} - 3z\,e^{-2j\omega}}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

$$\frac{23z^2 + 25z + 6}{6z^2 + z - 3}$$

ZERI $\quad \dfrac{-25 \pm \sqrt{73}}{46} \;<\; \begin{matrix} 0{,}28 \\ 0{,}35 \end{matrix}$

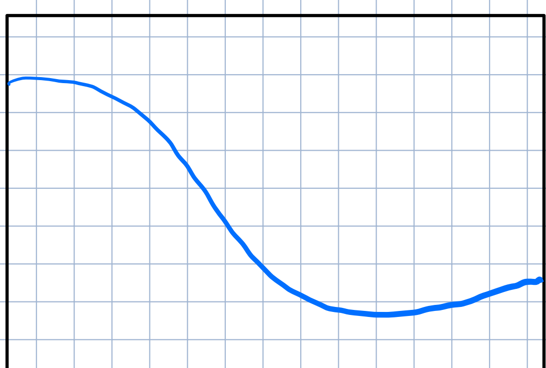
POLI $\quad \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 18\cdot 4}}{12} \;<\; \begin{matrix} -0{,}62 \\ 0{,}79 \end{matrix}$



POLI NELLA CIRCONFERENZA

=> STABILE

c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro



d) Si determini se il filtro ha fase lineare

?

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
14 GIUGNO 2022

1) Determinare le componenti pari e dispari della sequenza:

$$x[n] = u[n+2] - u[n-2] + \delta[n-2]$$

La sequenza è pari: $x_e[n] = x[n]; x_o[n] = 0$

2) Determinare se il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

sia lineare, tempo-invariante, stabile e causale.
Il sistema soddisfa tutte e quattro le proprietà

3) Si determini la risposta in frequenza del sistema LTI definito dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = x[n-2]$$

$H(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

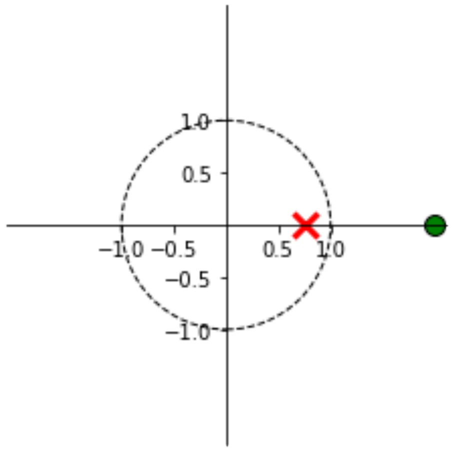
$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] + 3^n u[-n-1]$$

$X(z) = \dfrac{4z^2}{1-1/2z^{-1}} + \dfrac{z}{3-z}; \quad ROC : 1/2 < |z| < 3$

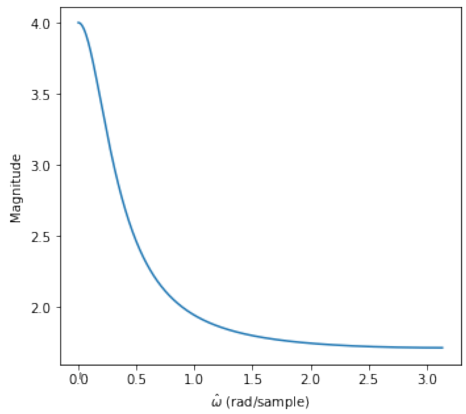
5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 3/4z^{-1}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza
b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro
Il filtro è stabile



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro
Filtro passa-basso

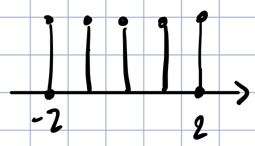


d) Si determini se il filtro ha fase lineare

1) Determinare le componenti pari e dispari della sequenza:

$$x[n] = u[n+2] - u[n-2] + \delta[n-2]$$

LA SEQUENZA E' COMPLETAMENTE POSITIVA $\Rightarrow$ PARI



2) Determinare se il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

sia lineare, tempo-invariante, stabile e causale.

E' LINEARE, STABILE, CAUSALE, TEMPO INV.

3) Si determini la risposta in frequenza del sistema LTI definito dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = x[n-2]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = e^{-j2\omega}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] + 3^n u[-n-1]$$

$m = -n$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] \cdot z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 3^n \cdot u[-(n+1)] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u[n+2] \cdot z^{-n} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot u[m-1] \cdot z^m$$

$$= 4z^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + 3 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} \cdot u[m-1] \cdot z^m = 4z^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3z}{1-\frac{z}{3}} = \frac{4z^2}{2z-1} + \frac{3z}{3-z}$$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 3/4z^{-1}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

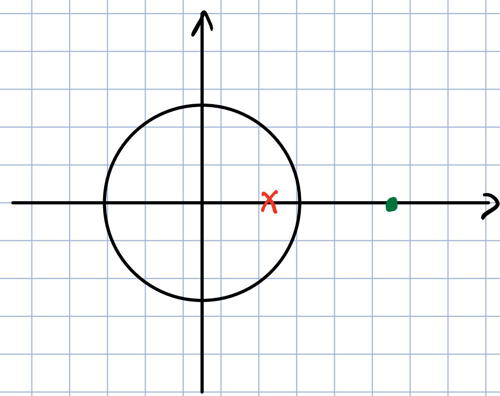
$$H(e^{jw}) = H(z)\Big|_{z=e^{jw}} = \frac{1 - 2e^{-jw}}{1 - \frac{3}{4}e^{-jw}}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

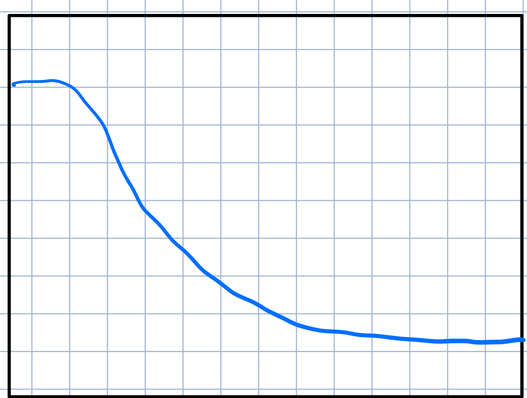
$$\frac{z-2}{z-3/4} =$$

ZERI: $z = 2$

POLI: $z = \frac{3}{4}$



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro



LOW-PASS

d) Si determini se il filtro ha fase lineare

IIR → NON LINEARE

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n-2]$$

$m = n-2$

$n = m+2$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-2]\, e^{-jwn} = \frac{1}{9}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2]\, e^{-jwn} = \frac{1}{9}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot u[m] \cdot e^{-jw(m+2)} =$$

$$= \frac{1}{9}e^{-jw2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot u[m] \cdot e^{-jwm} = \frac{1}{9}e^{-jw2}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot e^{-jw}\right)^m = \frac{1}{9}\frac{e^{-jw2}}{1 - \frac{1}{3}e^{-jw}}$$

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
12 LUGLIO 2022

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] - 7\ (3)^n u[-n-1]$$

E=1247/120; P=0

2) Eseguire, col metodo grafico, la convoluzione $y[n] = x[n] * h[n]$ delle seguenti sequenze (in entrambi i casi il primo campione è nell'origine):

$$x[n] = \{1, -1, 2\}$$
$$h[n] = \{1, 3\}$$

Verificare con il metodo tabellare il risultato.

$y[n] = \{1, 2, -1, 6\}$

3) Calcolare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\tfrac{1}{8}\right)^{n/2}; & n = 0, 2, 4, \cdots \\ 0; & altrimenti \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 1/8e^{-2j\omega}}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n-2]$$

$$X(z) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 z^{-2} \frac{1}{1 - 1/3z}; \quad ROC : |z| > 1/3$$

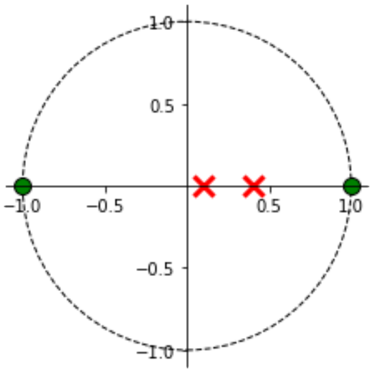
5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^{-2} - 1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.04z^{-2}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

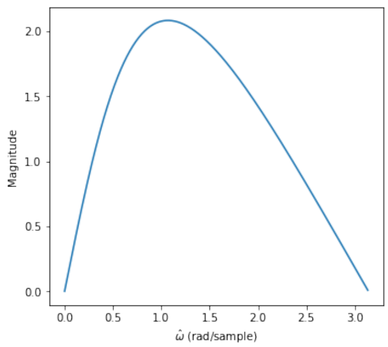
b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

Il filtro è stabile

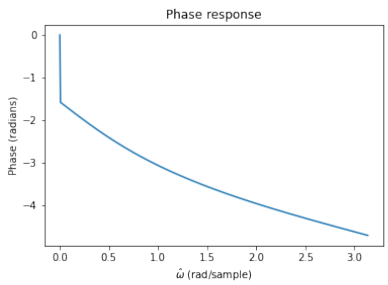


c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro

Filtro passa-banda



d) Si determini se il filtro ha fase lineare



1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$x[n] = 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] - 7\,(3)^n u[-n-1]$$

$m = -n$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] - 7(3)^n \cdot u[-(n+1)] \right|^2 = 4\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{16}\right)^n\right) + 49\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}(9)^n\right) = 4\,\frac{1}{1-\frac{1}{16}} + 49\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{9}\right)^m - 1\right) =$$

$$= 4\,\frac{1}{1-\frac{1}{16}} + 49\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1\right) = \frac{4}{\frac{15}{16}} + 49\left(\frac{9}{8} - 1\right) = \frac{16\cdot 4}{15} + \frac{49}{8} = \frac{64\cdot 8 + 49\cdot 15}{120}$$

$$= \frac{512 + 735}{120} = \frac{1247}{120}$$

$P = 0$

2) Eseguire, col metodo grafico, la convoluzione $y[n] = x[n] * h[n]$ delle seguenti sequenze (in entrambi i casi il primo campione è nell'origine):

$$x[n] = \{1, -1, 2\}$$
$$h[n] = \{1, 3\}$$

Verificare con il metodo tabellare il risultato.

	1	3
1	1	3
-1	-1	-3
2	2	6

$$y[n] = \{1, 2, -1, 6\}$$

3) Calcolare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{8}\right)^{n/2}; & n = 0, 2, 4, \cdots \\ 0; & altrimenti \end{cases}$$

$m = \frac{n}{2}$

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{8}\right)^{n/2} \cdot e^{-jwn} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{8}\right)^m \cdot e^{-jw2m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}e^{-jw2}}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n-2]$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+2} u[n-2] \cdot z^{-n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+2} \cdot z^{-n} = ?$$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^{-2} - 1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.04z^{-2}}$$

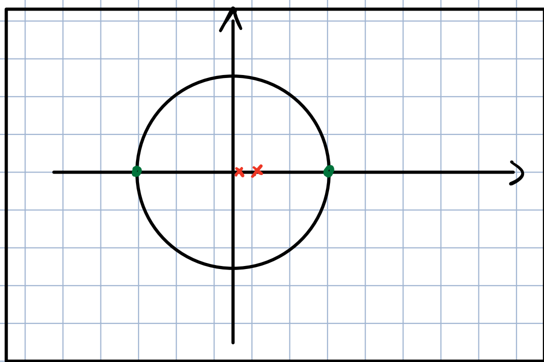
a) Si determini la risposta in frequenza

$$\frac{1 - z^2}{z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{2}{50}}$$

ZERI : $z = \pm 1$

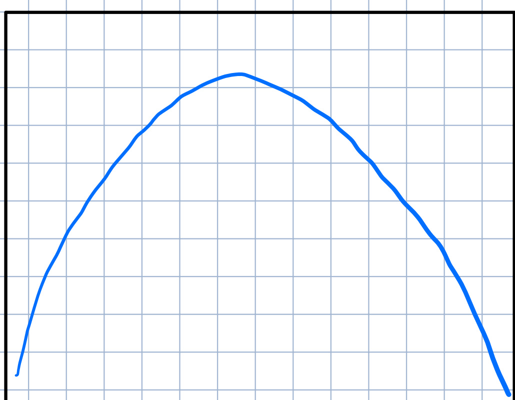
$50z^2 - 25z + 2 = 0$

POLI $z = \frac{2}{5}, \frac{1}{10}$



STABILE

c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro



PASSA-BANDA

d) Si determini se il filtro ha fase lineare

IIR → NON LINEARE

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
05 SETTEMBRE 2022

1) Un sistema a tempo discreto è descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = 0.5\ x[2n] + 0.5\ x[2n-1]$$

Determinare la risposta del sistema al segnale di ingresso (il primo termine è nell'origine): $x[n] = \{2, 3, 2, 1\}$

$y[n] = \{1, 2, 5, 0.5\}$

È UN PUNTO

2) Determinare se il sistema definito al punto precedente sia lineare, tempo-invariante, stabile e causale.

Lineare: sì, tempo-invariante: no, stabile: sì, causale: no

3) Calcolare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{-n} u[-n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 1/4e^{j\omega}}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 7(3)^n\ u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{2}{1 - 1/(4z)} - \frac{7z}{3-z}; \quad ROC: 1/4 < |z| < 3$$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

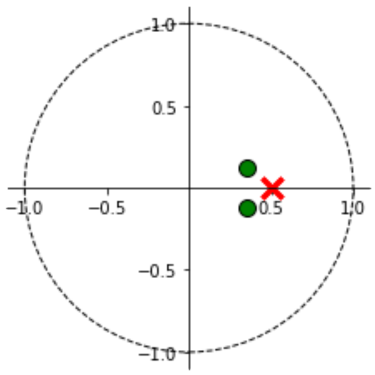
$$H(z) = \frac{7 - 5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 3/2z^{-1} + 3/4z^{-2} - 1/8z^{-3}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) = \frac{7 - 5e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{\left(1 - 1/2e^{-j\omega}\right)^3}$$

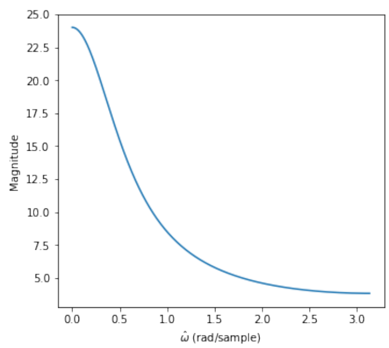
b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

Il filtro è stabile

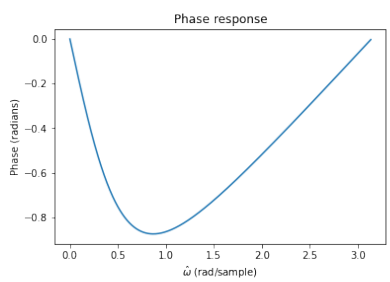


c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro

Filtro passa-basso



d) Si determini se il filtro ha fase lineare



1) Un sistema a tempo discreto è descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = 0.5\ x[2n] + 0.5\ x[2n-1]$$

Determinare la risposta del sistema al segnale di ingresso (il primo termine è nell'origine): $x[n] = \{2, 3, 2, 1\}$

$$y[n] = \frac{1}{2} x[2n] + \frac{1}{2} x[2n-1]$$

$$y[0] = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$$

$$y[1] = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} 3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y[2] = \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\left\{1, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$$

2) Determinare se il sistema definito al punto precedente sia lineare, tempo-invariante, stabile e causale.

LINEARE, STABILE, NON CAUSALE, NO TEMPO INV

3) Calcolare la DTFT della sequenza:

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{-n} u[-n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n] \cdot e^{-j\omega n} \overset{m=-n}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \cdot e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\omega}}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 7(3)^n\ u[-n-1]$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 7(3)^n u[-n-1]\right) z^{-1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot z^{-n} - 7 \sum_{n=-\infty}^{-1} (3)^n \cdot z^{-n} =$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - 7\left(\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot z^m\right) \overset{m=-n}{=} \frac{2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - 7\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^m - \frac{z}{3}\right) = \frac{2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{7}{1-\frac{z}{3}} + \frac{z}{3} \ ?$$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{7 - 5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 3/2z^{-1} + 3/4z^{-2} - 1/8z^{-3}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{e^{j\omega}} = \frac{7 - 5 \cdot e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-2j\omega} - \frac{1}{8}e^{-3j\omega}}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

$$\frac{7z^3 - 5z^2 + z}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{8}} =$$

ZERI : $z(7z^2 - 5z + 1) = 0$

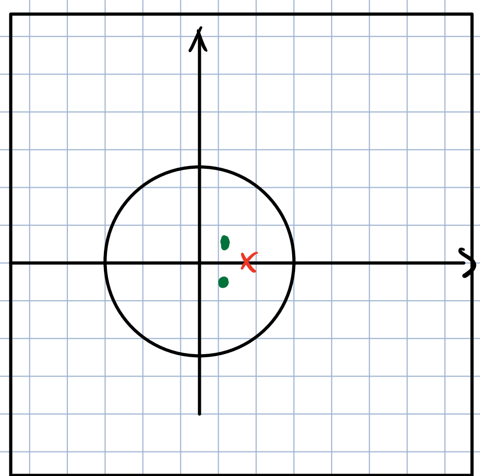
$$\frac{5 \pm \sqrt{25-28}}{14}$$

$$\frac{5 \pm i\sqrt{3}}{14}$$

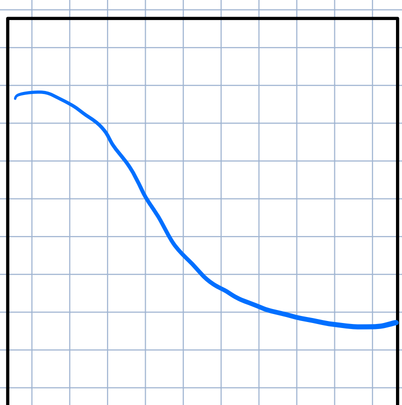
$$\frac{5}{14} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{14}$$

0,3 0,1

POLI : $z = \frac{1}{2}$



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro



LOW-PASS

d) Si determini se il filtro ha fase lineare

IIR $\rightarrow$ NON LINEARE

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA
PROVA SCRITTA DI ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI
20 SETTEMBRE 2022

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$h[n] = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

E=4/3; P=0

2) Supponendo che il segnale $h[n]$ del problema precedente sia la risposta impulsiva di un sistema LTI, si determini se il sistema sia BIBO stabile.

Si può verificare che $h[n]$ è assolutamente sommabile, il sistema è stabile

3) Date le due sequenze (in entrambi i casi il primo campione è nell'origine):

$$x_1[n] = \{0, -1, 2\}$$
$$x_2[n] = \{1, 3\}$$

Calcolare la loro convoluzione $y[n]$ usando la DTFT

$y[n] = -\delta[n-1] - \delta[n-2] + 6\delta[n-3]$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} u[n-3]$$

$X(z) = \dfrac{z^{-3}}{1 - 1/(4z)}; \quad ROC : z \neq 0; |z| > 1/3$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

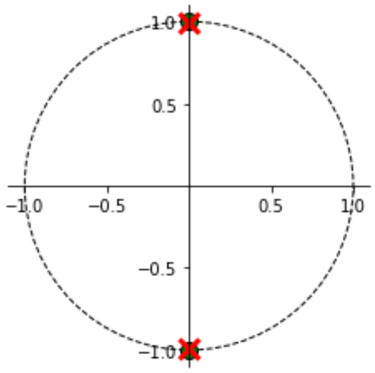
$$H(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 + 0.98z^{-2}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

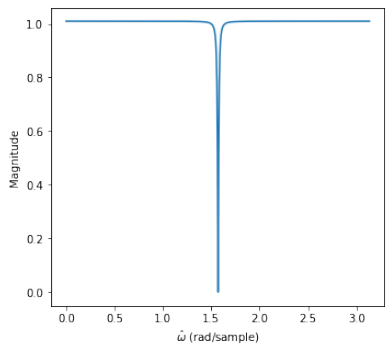
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-2j\omega}}{1 + 0.98e^{-2j\omega}}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

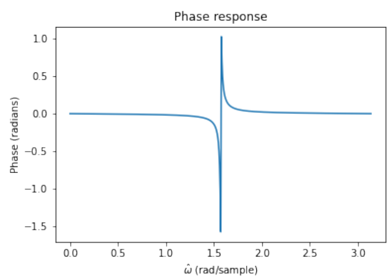
Il filtro è stabile



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro (Filtro notch)



d) Si determini se il filtro ha fase lineare



e) Supponendo che il filtro venga usato su un segnale campionato a 1000 S/s, si descriva l'effetto del filtro sul segnale.

$\hat{\omega} = \frac{2\pi \cdot f}{f_s}$ $\quad f = \frac{\hat{\omega} f_s}{2\pi}$ $\quad f = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 1000}{2\pi} = 250\ Hz$

1) Calcolare l'energia e la potenza media della sequenza:

$$h[n] = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$P = 0$$

2) Supponendo che il segnale $h[n]$ del problema precedente sia la risposta impulsiva di un sistema LTI, si determini se il sistema sia BIBO stabile.

ESSENDO ASSOLUTAMENTE SOMMABILE È STABILE

3) Date le due sequenze (in entrambi i casi il primo campione è nell'origine):

$$x_1[n] = \{0, -1, 2\}$$
$$x_2[n] = \{1, 3\}$$

Calcolare la loro convoluzione $y[n]$ usando la DTFT

$$X_1(e^{jw}) = -e^{-jw} + 2e^{-2jw}$$
$$X_2(e^{jw}) = 1 + 3e^{-jw}$$

$$X_1(e^{jw}) \cdot X_2(e^{jw}) = \left(-e^{-jw} + 2e^{-2jw}\right)\left(1 + 3e^{-jw}\right) = -3e^{-2jw} - e^{-jw} + 2e^{-2jw} + 6e^{-3jw} =$$
$$= -e^{-jw} - e^{-2jw} + 6e^{-3jw}$$

4) Determinare la trasformata Z della sequenza:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} u[n-3]$$

$m = n-3 \qquad n = m+3$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} u[n-3] \cdot z^{-n} = z^{-3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4z}\right) = \frac{z^{-3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\left|\frac{1}{4z}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{4}\right| < z$$

5) Un filtro digitale ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 + 0.98z^{-2}}$$

a) Si determini la risposta in frequenza

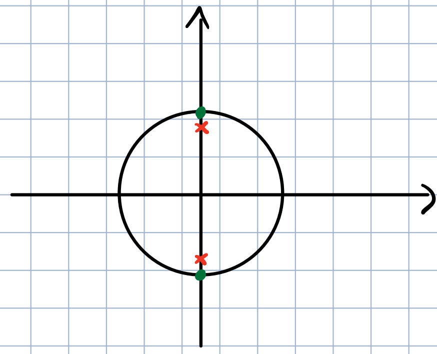
$$H(e^{jw}) = H(z)\big|_{e^{jw}} = \frac{1 + e^{-2jw}}{1 + \frac{98}{100} \cdot e^{-2jw}}$$

b) Disegnare il diagramma poli–zeri verificando la stabilità del filtro

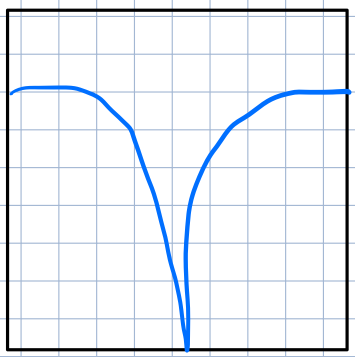
$$\frac{z^2+1}{z^2+\frac{98}{100}}$$

ZERI : $z = \pm i$

POLI : $z = \pm i\sqrt{\frac{98}{100}}$



c) Tramite grafico qualitativo descrivere la risposta in ampiezza e determinare la tipologia del filtro



d) Si determini se il filtro ha fase lineare

IIR → NON LINEARE

e) Supponendo che il filtro venga usato su un segnale campionato a 1000 S/s, si descriva l'effetto del filtro sul segnale.

$$\hat{\omega} = \frac{2\pi \cdot f}{f_s} \qquad f = \frac{\hat{\omega} f_s}{2\pi} \qquad f = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot 1000}{2\pi} = 250\ Hz$$