Se $\nabla f(x_0) = 0$, allora si ha che

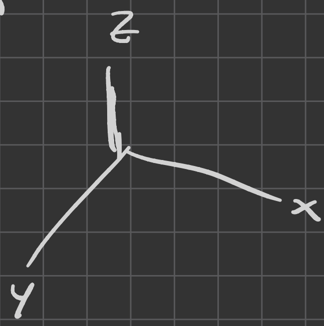
$$\frac{df}{dv} = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad |v| = 1$$

Quindi $\frac{df}{dv}(x_0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \ |v| = 1$

ORTOGONALITÀ DEL GRADIENTE ALLE CURVE DI LIVELLO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile

$f(x,y) = c \qquad c \in \mathbb{R}$ curva di livello di f



Supponiamo che tale curva sia REGOLARE

Significa $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$$

$\varphi \in C^1(I)$ e $\varphi'(t) \neq (0,0) \quad \forall t \in \mathring{I}$

Sia $g: I \to \mathbb{R}$

$$t \longmapsto f(\varphi(t)) = f(x(t), y(t))$$

Dal teorema di derivazione della funzione composta si ha che g è derivabile in I e

$g'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \to$ REGOLA DELLA CATENA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA A PIÙ VARIABILI ①

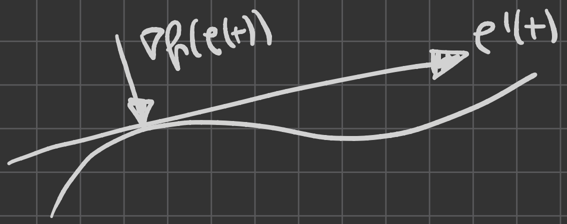
Inoltre

$$g(t) = f(\varphi(t)) = f(x(t), y(t)) = c \quad \forall t \in I$$

g è derivabile in I e $g'(t) = 0 \quad \forall t \in I$ ②

Da ① e ② si ha che

$\langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = g'(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \nabla f(\varphi(t)) \perp \varphi'(t) \quad \forall t \in I$



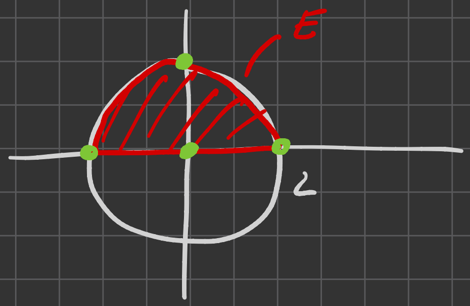
Esercizi

1) $f(x,y) = 3x^2 - y^2$

$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4 ,\ y \geq 0 \}$ E chiuso e limitato

$\exists$ max e min ass di f

$f \in C(\mathbb{R}^2)$



$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$\nabla f(x,y) = (6x, -2y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0) \notin \mathring{E}$

$\Rightarrow \nexists$ punti critici di f in $\mathring{E}$

$\partial E = \rho \cup C$, dove

$\rho : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$

$C : \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$

$C : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{4-t^2} \end{cases} \quad t \in [-2,2]$

$f|_\rho (x,y) = f(t,0) = 3t^2 = h(t)$

h derivabile in $(-2,2)$

$h'(t) = 6t = 0 \iff t = 0 \rightsquigarrow (0,0)$

$f|_C(x,y) = f(t, \sqrt{4-t^2}) = 3t^2 - 4 + t^2 = 4t^2 - 4 = h(t)$

h derivabile in $(-2,2)$ e

$h'(t) = 8t = t = 0 \rightsquigarrow (0,2)$

$f(-2,0) = 12 \to$ max ass di f in E

$f(2,0) = -4 \to$ min ass di f in E

$f(0,0) = 0$

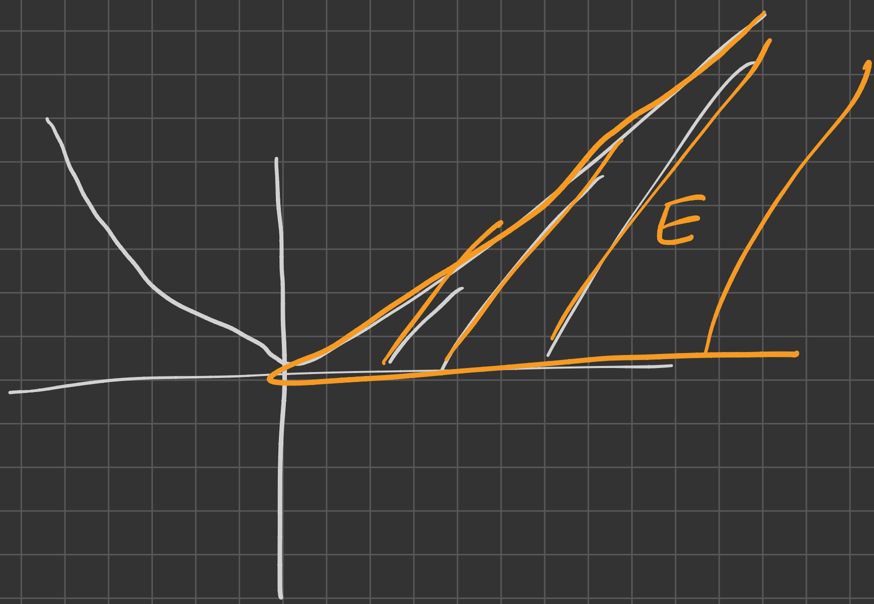
$f(0,2) = 12 \to$ max ass di f in E

$f(x,y) = x^2 + xy - 1$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$

max e min ass di f in E

$f \in C(\mathbb{R}^2)$



$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\nabla f(x,y) = (2x + y, x) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0) \notin \mathring{E}$

$\Rightarrow \nexists$ punti critici di f in $\mathring{E}$

$\partial E = R \cup P$, dove

$\mathbb{R} : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, +\infty)$

$P : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [0, +\infty)$

$f|_R (x,y) = f(t,0) = t^2 - 1 = h(t)$

h derivabile in $(0, +\infty)$ e $h'(t) = 2t = 0 \iff t = 0$ $(0,+\infty)$ non acc.

$f|_P (x,y) = f(t, t^2) = t^2 + t^3 - 1 = h(t)$

h é derivabile in $(0, +\infty)$ e $h'(t) = 2t + 3t^2 = 0$

$t(2+3t) = \quad t = 0 \notin (0,+\infty)$

$\quad t = -\frac{2}{3} \notin (0,+\infty)$

L'unico punto candidato max/min assoluto

per f in E è $(0,0)$

$f(x,y) \geq f(0,0) = -1 \quad \forall (x,y) \in E$

$x^2 + xy - 1 \geq -1$

$x^2 + xy \geq 0$

$x(x+y) \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{array} \right.$

06/11/2023

MASSIMI E MNIMI VINCOLATI (alla base del machine learning)

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$V = \{x \in B \mid g(x) = 0\}$, V si dice VINCOLO

dove $g: B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$

Trovare se esistono i massimi e minimi locali e globali di f rispetto al vincolo V

$x_0 \in V \cap A$ si dice MASSIMO MINIMO GLOBALE VINCOLATO per f rispetto al vincolo V
LOCALE

↑ IMPORTANTE

INTORNO $\cap V$

$f(x) \overset{\geq}{\leq} f(x_0) \quad \forall x \in A \cap V$

Come troviamo i MASSIMI e MINIMI vincolati per f rispetto a V?

Studiando la funzione $f|_V$ e determinando i suoi massimi e minimi liberi

Esempi

①

$f(x,y) = x^3 + y^2 - 2$

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 0\} \to y = -x^2 \qquad \begin{cases} x = t \\ y = -t^2 \end{cases}$

Trova il massimo e minimi vincolati di f rispetto al vincolo V

$f|_{V(x,y)} = f(x, -x^2) = x^3 - x^4 - 2 = h(x) \leftarrow$ max e min

h derivabile in tutto $\mathbb{R}$ con $h'(x) = 3x^2 - 4x^3 = 0 \iff x^2(3+4x) = 0$ $\quad x=0$, $x = -\frac{3}{4}$

$h'(x) \geq 0 \quad x^2(3+4x) \geq 0 \quad 3+4x \geq 0 \iff x \geq -\frac{3}{4}$

$-3/4$

$\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)$ minimo locale vincolato per f rispetto a V

x y

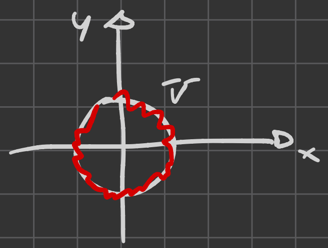
ESEMPIO

2

$f(x,y) = x+y$

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ → parametrizzo

Trovare, se esistono i massimi e minimi assoluti vincolati di f rispetto a V



$$\begin{cases} x = x(t) = \cos t \\ y = y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

$$f|_V(x,y) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t \quad t \in [0,2\pi] = h(t)$$

CHIUSO → CONTIENE LA SUA FRONTIERA
→ IL SUO COMPLEMENTARE É APERTO
→ I SUOI ZERI $x^2+y^2=1=0$

h é derivabile in $(0,2\pi)$ e

$h'(t) = -\sin(t) + \cos t = 0 \iff \cos t = \sin t \iff t = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$

$f(x,y) = \left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right) \quad h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt2$ → MASSIMO ASS. PER WEIERSTRASS

$f(x,y) = \left(-\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}\right) \quad h\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt2$ → MINIMO ASS. " "

$h(0) = 2\pi = 1$

TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(A)$

$V = \{(x,y) \in V \mid g(x,y) = 0\}$, dove $g: B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ $g \in C^1(B)$

$(x_0,y_0) \in V \cap \mathring{A}$ massimo o minimo locale vincolato di f rispetto a V

tale che $\nabla g(x_0,y_0) \neq (0,0)$

Allora $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \nabla f(x_0,y_0) - \lambda \nabla g(x_0,y_0) = 0$

$\downarrow$

λ si chiama moltiplicatore di Lagrange

Nota : Sia

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$$

L si chiama FUNZIONE LAGRANGIANA il teo dei moltiplicatori di Lagrange afferma che condizione necessaria affinché un punto sia max / min locale vincolato sia punto critico per L.

$$\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$$

Dove cercare i massimi e minimi locali vincolati per f rispetto a V?

a) $\{(x,y) \in \mathring{A} \cap V \mid f \in C^1(A), g \in C^1(B), \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = (0,0), \nabla g(x,y) \neq (0,0)\}$

b) $\{(x,y) \in \mathring{A} \cap V \mid f \in C^1(A) \text{ o } g \in C^1(B)\}$

c) $\partial A \cap V$

d) $\{(x,y) \in \mathring{A} \cap V \mid f \in C^1(A), g \in C^1(B), \nabla g(x,y) = (0,0)\}$

Esempi

1) $f(x,y) = xy$

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 - 1 = 0\}$

Stabilire se esistono max e min assoluti vincolati per f rispetto a V e, in caso affermativo, determinarli

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

V è chiuso perché g continua

Limitato ? $\rightarrow$ Si poiché è un ellisse

$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$(x^2)\quad 2x\,\frac{1}{2}y$

$$\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2-\frac{1}{4}y^2+y^2-1 \quad = \left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=1$$

$$X^2+\frac{3}{4}Y^2=1 \quad \text{ellisse limitata}$$

Esistono max e min ass. limitati vincolati di f rispetto a V

$g\in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\nabla g(x,y)=(2x-y,\,-x+2y)=(0,0)$$

$$\begin{aligned} &2x-y=0 &&y=2x &&y=0\\ &-x+2y=0 &&-x-4x=0 \Rightarrow &&x=0 \end{aligned}$$

$(0,0)\notin V \Rightarrow$ l'insieme è vuoto

e) $\exists$

$$\nabla f(x,y)-\lambda\nabla g(x,y)=(0,0)$$

$$\begin{cases} y-\lambda(2x-y)=0 \xrightarrow{\cdot x} & xy-\lambda(2x^2-xy)=0\\ x-\lambda(-x+2y)=0 \xrightarrow{\cdot y} & xy-\lambda(-xy+2y^2)=0\\ x^2-xy+y^2-1=0 \end{cases} \Big\}\ -\lambda(2x^2-2y^2)=0$$

$$\begin{cases} -\lambda(x^2-y^2)=0\\ x-\lambda(-x+2y)=0\\ x^2-xy+y^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm y\\ x-\lambda(-x+2y)=0\\ x^2-xy+y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y\\ x-\lambda(-x+2y)=0 \ (*)\\ \cancel{y^2}-\cancel{y^2}+y^2-1=0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x=-y\\ x-\lambda(-x+2y)=0 \ (*)\\ y^2+y^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$y^2-1=0 \qquad\qquad 3y^2=1$$

$$y=\pm 1$$

$(1,1)$ $(-1,-1)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

si sostituiscono nella seconda equazione con tutti i punti trovati

$$x - \lambda(-x + 2y) = 0$$

$\lambda = 1$ $\qquad$ $\lambda = 1$ $\qquad$ $\lambda = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\lambda = -\frac{1}{3}$

$f(1,1) = f(-1,-1) = 1 \longrightarrow$ MAX ASSOLUTO $\longrightarrow$ per Weierstrass

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{3} \longrightarrow$ MIN ASSOLUTO $\longrightarrow$ per Weierstrass

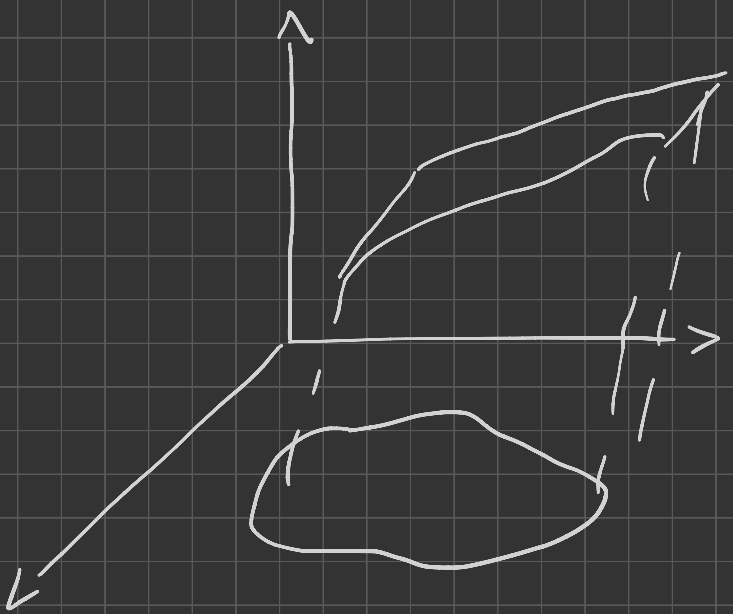
07/11/2023

INTEGRALI DOPPI

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

f continua $f \geq 0$ in D

Calcolare se ha senso il volume della parte di spazio compreso tra il piano xy e il grafico di f e delimitata dal cilindro parallelo all'asse z e delimitato dal bordo di D



$f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua e non negativa

$P = \{ R_i$ rettangoli, partizione di $[a,b] \times [c,d] \}$

$$\bigcup_i R_i = [a,b]\times[c,d]$$

$$\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_k = \emptyset \quad \forall i,k \quad i\neq k$$

$$Vol(P_i) = Q(R_i)\cdot \underbrace{f(x_i,y_i)}_{\geq 0} \qquad \sum_{i=1}^{m} Vol(P_i) = Q(R_i)\, f(x_i,y_i)$$

se esiste finito ed è indipendente dalla scelta dei punti (x_i,y_i)

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ \max Q(R_i)\to 0\\ i=1,\dots,m}} \sum_{i=1}^{m} Q(R_i)\, f(x_i,y_i) = L = Vol(S)$$

$f: [a,b]\times[c,d]$ LIMITATA

f è integrabile in $[a,b]\times[c,d]$ e si pone:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{m\to+\infty\\ \max Q(R_i)\to 0\\ i=1,\dots,m}} \sum_{i=1}^{m} Q(R_i)\, f(x_i,y_i)$$

Esempi di FUNZIONE NON INTEGRABILE

$f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\in \mathbb{I} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \dots = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \to \text{LIMITE NON ESISTE}$$

TEOREMA

$f: [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow$ f integrabile in $[a,b]\times[c,d]$

$f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua

a) $f \geq 0$ in $[a,b] \times [c,d]$

$$\Rightarrow \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy$$

b) $f \leq 0$ in $[a,b] \times [c,d]$

$$\mathrm{Vol}(S) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \overbrace{-f(x,y)}^{\geq 0}\, dx\, dy$$

$$= - \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy$$

linearità di f

L'INTEGRALE DOPPIO È UN VOLUME? NO

$$\mathrm{Vol}(S) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d A_y\, dy$$

$$\int_a^b f(x,y)\, dx \quad \forall y\ [c,d]$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

e $$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

FORMULE DI RIDUZIONE SUI RETTANGOLI

Esercizio $\rightarrow$ INTEGRABILE PERCHÉ CONTINUE

1) $$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x e^{xy}\,dx\,dy$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 x e^{xy}\,dx\right)dy \qquad\qquad \int_0^1\left(\int_0^1 x e^{xy}\,dy\right)dx$$

Proprietà di linearità

Teorema: $f: R \to \mathbb{R}$, R rettangolo in $\mathbb{R}^2$

f integrabile in R

Allora

1) $$\iint_R [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,dx\,dy = \alpha \iint_R f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_R g(x,y)\,dx\,dy \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

2) $f(x,y) \le g(x,y) \quad \forall (x,y) \in R$

$$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_R g(x,y)\,dx\,dy$$ MONOTONIA

3) $|f|$ integrabile in R

$$\left|\iint_R f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint_R |f(x,y)|\,dx\,dy$$

13/11/2023

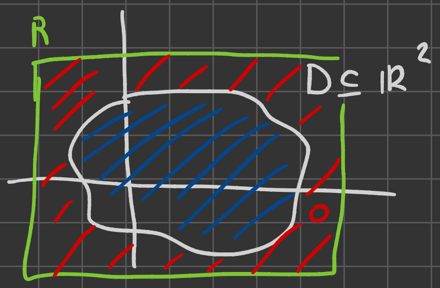
$f: R \to \mathbb{R}$ limitata

R ↓ rettangolo in $\mathbb{R}^2$

$f: D \to \mathbb{R}$ limitata, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato

Problema: come si definisce l'integrabilità di f in D e, di conseguenza,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \ ?$$



poiché D è limitato $\exists\, R$ rettangolo in $\mathbb{R}^2$ tale che $D \subseteq R$

$\tilde{f}: R \to \mathbb{R}$ la funzione così definita

R ↓ rettangolo

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

→ la CONTINUITÀ DI f non implica $\tilde{f}$ integrabile

Si dice che f è INTEGRABILE in D se $\tilde{f}$ è integrabile in R e si pone

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

Nota: si prova che tale definizione non dipende dalla scelta del rettangolo R, quindi la definizione data è ben posta.

Esempi

1) $D = \{ (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid x \in \mathbb{Q} \}$

$f: D \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = 1$

f é integrabile in D?

Sia R rettangolo tale che $D \subseteq R$ e sia

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = 1 & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Possiamo scegliere $R = [0,1] \times [0,1]$

Allora

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Q} \end{cases}$$

con $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$

$\tilde{f}$ non integrabile in $[0,1] \times [0,1]$ e quindi f non é integrabile in D

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato

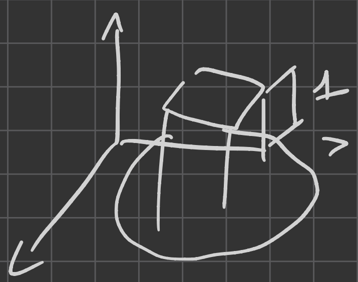
Si definisce FUNZIONE CARATTERISTICA di D la funzione χ_D definita da

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Si dice che D é misurabile secondo PEANO JORDAN se la sua funzione caratteristica χ_D é integrabile in D. In tal caso si chiama MISURA o AREA di D e si indica con

$|D|$ o $\mathcal{L}(D)$ la quantità

$$|D| = \mathcal{L}(D) = \iint_D \chi_D(x,y)\, dx\, dy$$



Esempi

1) $R = [a,b] \times [c,d]$ é misurabile e

$$\mathcal{L}(R) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} 1\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d 1\, dy \right) dx$$

3) poligoni in $\mathbb{R}^2$ (della geometria elementare) sono misurabili

Esempio di un insieme non misurabile : l'insieme 1)!!

Def:

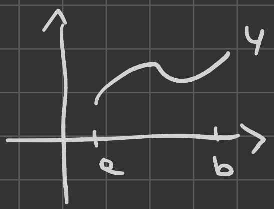
$D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, misurabile

Si dice che D ha misura nulla se

$$|D| = a(D) = 0$$

$$\iint_D \chi_D(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad \iint_D 1\,dx\,dy = 0$$

Esempi di insiemi di misura nulla in $\mathbb{R}^2$

1) un segmento in $\mathbb{R}^2$
2) un insieme costituito da un numero finito di punti
3) un sottoinsieme di un insieme di misura nulla
4) l'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla
5) Il bordo dei poligoni di m in $\mathbb{R}^2$
6) 

$y = g(x)$

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$

g continua oppure g integrabile e limitata

Il grafico di g ha misura

Caratterizzazione degli insiemi misurabili secondo Peano - Jordan

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato

D è misurabile secondo Peano - Jordan
se e solo se ∂D è misurabile e $|\partial D| = 0$

TEOREMA ①: $f: R \to \mathbb{R}$, $R \subseteq \mathbb{R}^2$ rettangolo, f limitata

Se l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla, allora f è integrabile in $\mathbb{R}$

TEOREMA ②: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

1) D sia limitato e misurabile

2) f limitata e continua in D

$\Rightarrow$ f è integrabile in D

Dim: Poiché D è limitato $\exists R$ rettangolo in $\mathbb{R}^2$ tale che $D \subseteq R$

Sia

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Dobbiamo provare che $\tilde{f}$ è integrabile in $\mathbb{R}$

Gli eventuali punti di discontinuità di $\tilde{f}$ costituiscono un sottoinsieme di ∂D poiché R è continua in D:

Poiché D è misurabile, allora ∂D è misurabile con $|\partial D| = 0$

Quindi l'insieme dei punti di discontinuità ha misura nulla. Dal TH 1 $\tilde{f}$ integrabile in $\mathbb{R}$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DOPPIO:

$f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato

f, g limitate e integrabili in D

1) linearità

2) monotonia rispetto alla funzione integranda

3) Disuguaglianza triangolare

4) monotonia rispetto al dominio di integrazione: se $D' \subset D$ misurabile, allora f è integrabile in D'

Inoltre se $f \geq 0$ in D, allora $\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy$

Nota su 4) L'ipotesi che D' sia misurabile non si può rimuovere

Infatti se $D = [0,1] \times [0,1]$, $f \equiv 1$ in D

e $D' = \{(x,y) \in D \mid x \in \mathbb{Q}\}$, si ha che

f è integrabile in D perché f è continua nel rettangolo D

f non è integrabile in D' (già visto Riclé)

$\downarrow$

non misurabile (DIRICHLET)

5) additività rispetto al dominio di integrazione $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ limitati e misurabili

tali che $|D_1 \cap D_2| = 0$

f integrabile in D_1, D_2

$\Rightarrow$ f integrabile $D_1 \cup D_2$

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy$$

6) proprietà di annullamento

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile con $|D| = 0$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = 0$$

7) proprietà di annullamento per funzioni continue

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, misurabile, $|D| > 0$

$f: D \to \mathbb{R}$ limitata, continua e non negativa

Allora $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ in D

Esempi: 7)

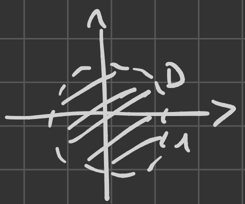
In generale non vale se f non è continua

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{in } D - \{0,0\} \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

f limitata, $f \geq 0$ in D
f non è continua in D

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ aperto
limitato
misurabile
$|D| > 0$



$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

ma $f \not\equiv 0$ in D

14 | 11 | 2023

Come calcoliamo $\rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$?

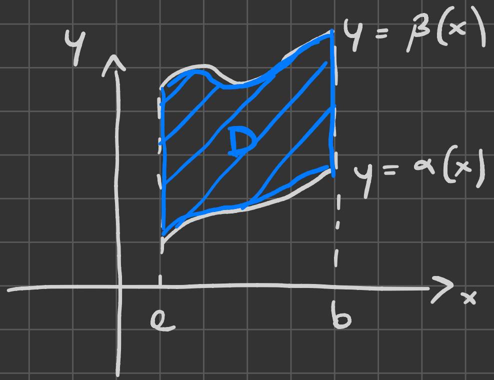
DOMINI SEMPLICI IN $\mathbb{R}^2$

$\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~continue~~ $\alpha, \beta \in C^1[a,b]$

tali che $\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$

Sia D il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ dato da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$



D si chiama DOMINIO ~~SEMPLICE~~ NORMALI O REGOLARE rispetto all'asse x

Nota:
D è limitato
D è misurabile

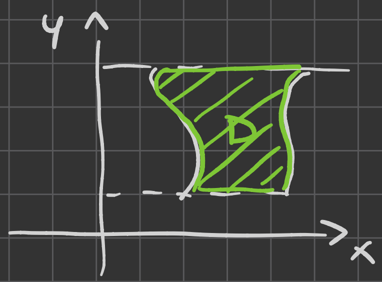
perché il bordo di D è misurabile e $|\partial D| = 0$

$\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue

tali che $\gamma(y) \leq \delta(y) \quad \forall y \in [c,d]$

Si definisce DOMINIO SEMPLICE rispetto all'asse y l'insieme

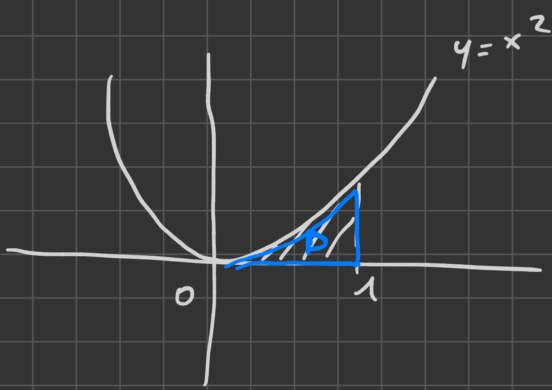
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \,,\, y \in [c,d] \}$$



$$A(D) = \int_a^b \beta(x)\,dx - \int_a^b \alpha(x)\,dx$$

Esempi

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1] \quad 0 \leq y \leq x^2\}$



semplice rispetto ad x

$$A(D) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

TEOREMA FORMULA DI RIDUZIONE SUI DOMINI SEMPLICI

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ DOMINIO SEMPLICE

f continua in D

$\Rightarrow f$ integrabile in D e si ha

a) se $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \,, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$ con $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e $\alpha(x) \leq \beta(x)$ in $[a,b]$

Allora

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

b se $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[c,d],\ \gamma(y)\le x\le\delta(y)\}$

con $\gamma,\delta:[c,d]\to\mathbb{R}$ continue e $\gamma(y)\le\delta(y)$ in $[c,d]$

Allora

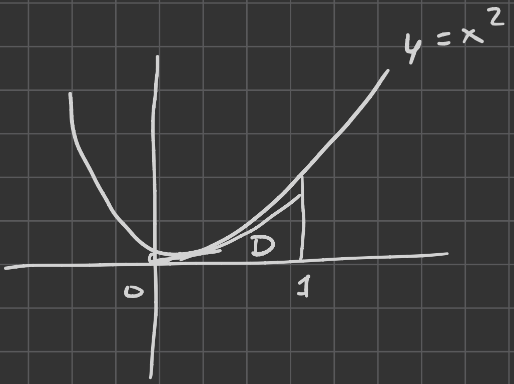
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

NON SI POSSONO SCAMBIARE GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE

$$\cancel{\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx} \quad \text{NO}$$

ESERCIZI

$\iint_D xy\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1],\ 0\le y\le x^2\}$



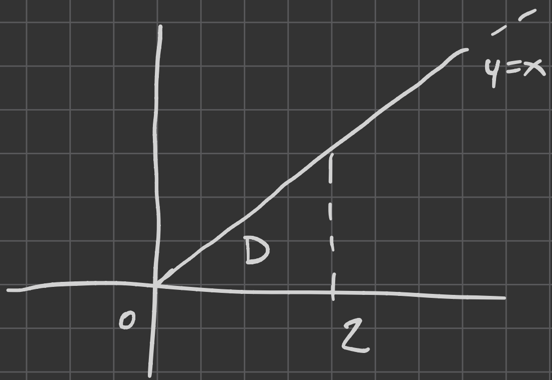
f è integrabile in D

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^{x^2} xy\,dy\right]dx \quad \text{da e)}$$

$$\int_0^1 x\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2}dx = \int_0^1 x\cdot\frac{x^4}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 = \frac{1}{2}\,\frac{x^6}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

2) $\iint_D (x-y)\,dx\,dy$ dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,2],\ 0\le y\le x\}$

Dominio semplice rispetto ad x



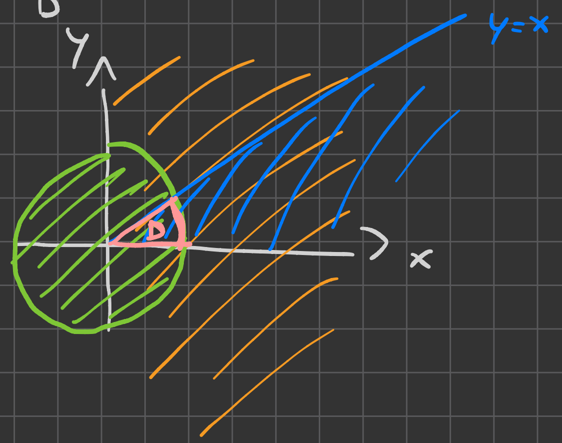
f integrabile in D, perché continua in D

$$\iint_D (x-y)\, dx\, dy = \int_0^2 \left[\int_0^x (x-y)\, dy \right] dx = \int_0^2 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^2 x^2 - \frac{x^2}{2}\, dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

3) $\iint_D x\, dx\, dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \quad x+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$



$$\iint_D x\, dx\, dy =$$

20/11/2023

CAMBIAMENTO DI VARIABILI IN $\mathbb{R}^2$

Un cambiamento di variabile in $\mathbb{R}^2$ é una funzione:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = (u,v)$$

Tale che φ é invertibile in $\mathbb{R}^2$

$$\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y),\ \varphi_2(x,y))$$

Scrivere $\varphi(x,y) = (u,v)$ significa

$$\begin{cases} u = \varphi_1(x,y) \\ v = \varphi_2(x,y) \end{cases}$$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\varphi(D) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u = \varphi_1(x,y), v = \varphi_2(x,y),\ (x,y) \in D\}$$

$$= \{\varphi(x,y) \mid (x,y) \in D\}$$

$\downarrow$

immagine di D mediante φ

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)) = (u,v)$

$$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1^u}{dx}(x,y) & \frac{d\varphi_1^u}{dy}(x,y) \\ \frac{d\varphi_2^v}{dx}(x,y) & \frac{d\varphi_2^v}{dy}(x,y) \end{pmatrix}$$

MATRICE JACOBIANA di φ

$\frac{d(u,v)}{d(x,y)}$

φ è invertibile in $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se

$$\text{Det } D\varphi(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in D$$

In questo caso (ie φ invertibile in D) si ha che

$\exists \varphi^{-1} : \varphi(D) \to D$

$(u,v) \longmapsto \varphi^{-1}(u,v) = (x,y)$

Inoltre $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(D))$ e

$$D\varphi^{-1}(u,v) = [D\varphi(\varphi^{-1}(u,v))]^{-1}$$

MATRICE JACOBIANA di φ^{-1}

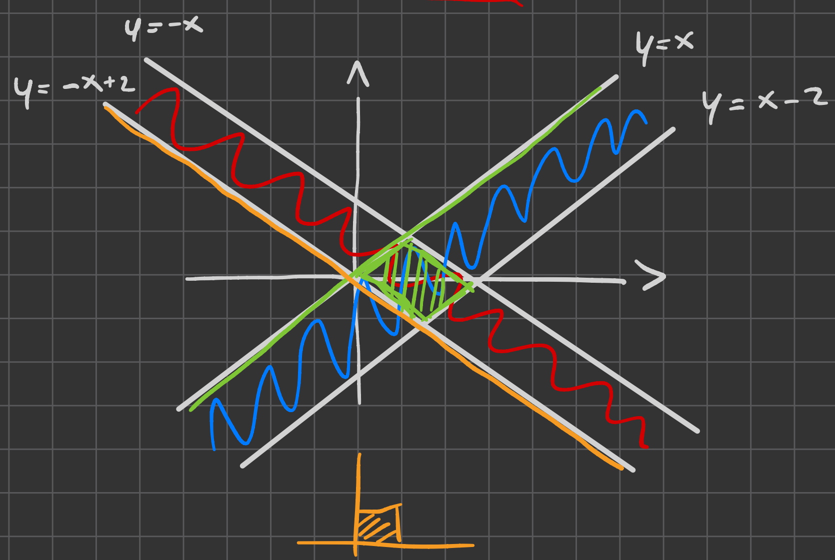
ie. $D\varphi^{-1}$ è la matrice inversa di $D\varphi$

Allora

$$\text{Det } D\varphi^{-1}(u,v) = \frac{1}{\det D\varphi(\varphi^{-1}(u,v))} \quad \forall (u,v) \in \varphi(D)$$

ESEMPI

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{-y \leq x \leq 2-y}, \underline{x-2 \leq y \leq x}\}$$



$0 \leq x+y \leq 2$

$\Downarrow u$

$-2 \leq y-x \leq 0$

$\Downarrow v$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = (u,v)$

$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$\det D\varphi = 2 \neq 0$ quindi

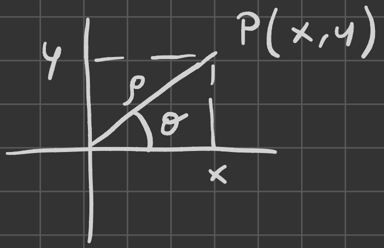
φ è invertibile

$\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$

e $\det D\varphi^{-1}(u,v) = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases} \to \begin{matrix} u-v = 2x = x = \frac{u-v}{2} \\ u+v = 2y = y = \frac{u+v}{2} \end{matrix}$$

2) COORDINATE POLARI



φ^{-1}

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \in \big([0,+\infty) \times \mathbb{R}\big)$$

$$D\varphi^{-1}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \det(D\varphi^{-1}) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta$$

$= \rho \neq 0$

$$\frac{d(x,y)}{d(\theta,\rho)}$$

FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILI PER GLI INTEGRALI DOPPI

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile

$f: D \to \mathbb{R}$ limitata e continua in D

$\varphi: D \to \mathbb{R}^2$, $\varphi \in C^1(D)$ $\text{Det}\,\varphi \neq 0$ in D

$(x,y) \mapsto (u,v) = \varphi(x,y)$

$\Rightarrow$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\varphi(D)} f\left(\varphi^{-1}(u,v)\right) \overbrace{\left|\det D\varphi^{-1}(u,v)\right|}^{\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|}\,du\,dv$$

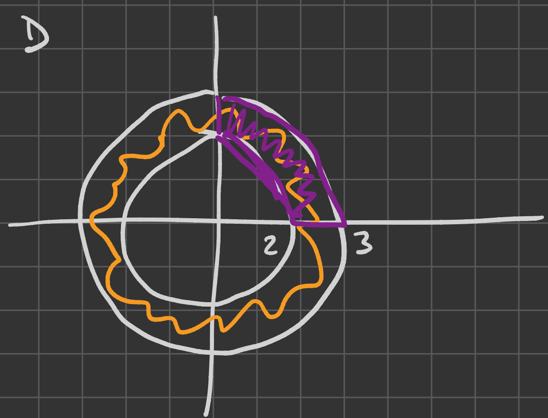
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$a = g(c)$
$b = g(d)$

ESEMPIO

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ x \geq 0, y \geq 0\}$$



D limitato e misurabile e chiuso

f continua in D e limitata

$$D \to \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \in [2,3], \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\}$$

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{[2,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta^2}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} \cdot \rho\,d\rho\,d\theta = \iint_{[2,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \rho^2 \cos\theta \sin^2\theta\,d\rho\,d\theta$$

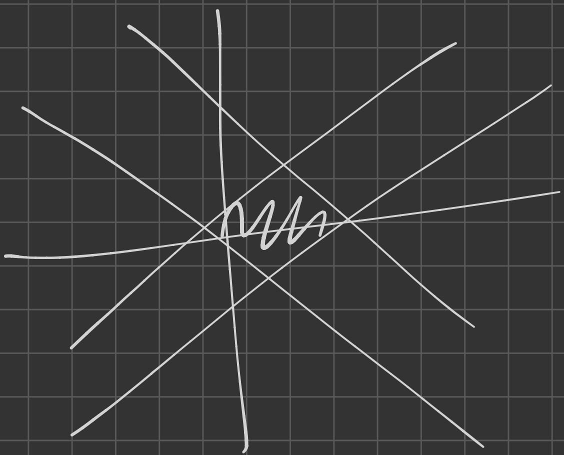
$$= \int_2^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho^2 \cos\theta \sin^2\theta)\,d\theta\right) d\rho = \int_2^3 \rho^2 \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin^2\theta\,d\theta\right) d\rho$$

$$= \int_2^3 \rho^2 \, d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta = \frac{\rho^3}{3} \Big|_2^3 \cdot \frac{\sin^3\theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \left(9 - \frac{8}{3}\right) \frac{1}{3} = \frac{19}{9}$$

2) $\iint_D x \, dx\, dy$

Dove dominio e piano



$$\psi \begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases} \qquad \begin{matrix} u \in [0,2] \\ v \in [-2,0] \end{matrix} \qquad \psi^{-1} \begin{cases} x = \frac{u-v}{2} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}$$

$$\iint_D x \, dx\, dy = \iint_{[0,2]\times[-2,0]} \frac{u-v}{2} \, \frac{1}{2} \, du\, dv = \frac{1}{4} \int_0^2 \left(\int_{-2}^0 u - v \, dv \right) du$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 uv - \frac{v^2}{2} \Big|_{-2}^0 \, du$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 -\left(-2u - 2\right) du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 u + 1 \, du$$

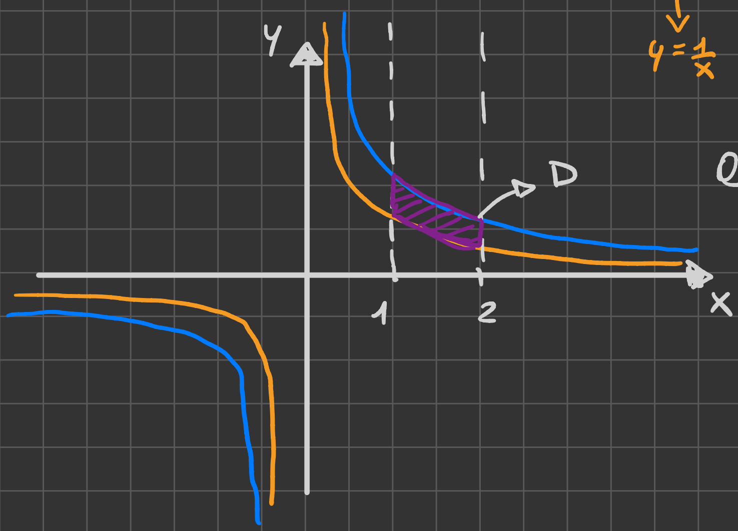
$$= \frac{1}{2} \, \frac{u^2}{2} + u \Big|_0^2 = \frac{1}{2} + (2+2) = 2$$

21 | 11 | 2023

ESERCIZI

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 ,\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x} \}$

$y = \frac{1}{x}$ $\quad$ $y = \frac{2}{x}$



$\mathcal{Q}(D) = \iint_D 1 \, dx\, dy$ D misurabile $|\delta D| = 0$

$= \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} 1 \, dy \right) dx$

$= \int_1^2 [y]_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} \, dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$

$= \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \log x \Big|_1^2$

$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 \le 9 ,\ 0 \le z \le 2 \}$

$Vol(E) = \iint_D 2 \, dx\, dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2 \le 9\}$

$\qquad = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] , -\sqrt{9-4x^2} \le y \le \sqrt{9-4x^2} \}$

$= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\int_{-\sqrt{9-4x^2}}^{\sqrt{9-4x^2}} 2 \, dy \right) dx$

$= 2 \int_{-3/2}^{3/2} \left(\sqrt{9-4x^2} + \sqrt{9-4x^2} \right) dx = 4 \int_{-3/2}^{3/2} \sqrt{9-4x^2} \, dx$

$\downarrow$ SOSTITUZIONE

$$x = \frac{3}{2}\cos\theta \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{3}{2} = \frac{3}{2}\cos\theta = \theta = \pi$$

$$dx = -\frac{3}{2}\sin\theta \, d\theta \qquad \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\cos\theta = \theta = 0$$

$[0, \pi]$

$$= 4\int_{\pi}^{0} \sqrt{9 - 4\left(\frac{3}{2}\cos\theta\right)^2} \; -\frac{3}{2}\sin\theta \, d\theta$$

$$\downarrow$$

$$9(1-\cos^2\theta)$$

$$= -18\int_{\pi}^{0} \underbrace{\sqrt{\sin^2\theta}}_{=} \sin\theta \, d\theta$$

$$= 18\int_{0}^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

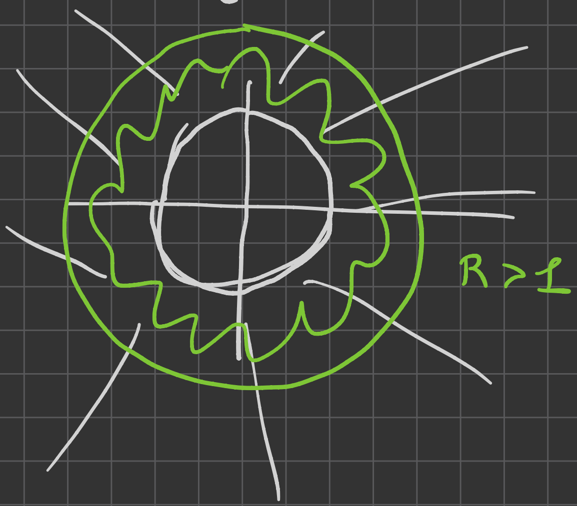
$$= \overset{9}{\cancel{18}}\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{\cancel{2}} \, d\theta \qquad \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= 9\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 9\pi$$

INTEGRALI IMPROPRI

1) $\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\, dx\, dy$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$



$R > 1$

$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq \mathbb{R}^2\}$

$$\lim_{R \to +\infty} \iint_{D_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\, dx\, dy = \lim_{R \to +\infty} \iint_{[1,R]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\rho^{\cancel{3}\,2}} \cancel{\rho}\, d\rho\, d\theta$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \in [1, \mathbb{R}],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_1^{\mathbb{R}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2}\, d\theta \right) d\rho$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_1^{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho^2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho = \lim_{R \to +\infty} \int_1^{R} \frac{1}{\rho^2}\, d\rho = 2\pi \lim_{R \to +\infty} \left[-\frac{1}{\rho} \right]_1^{\mathbb{R}}$$

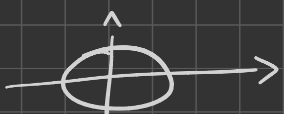
$$= 2\pi$$

3) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$

$$= \lim_{R \to +\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \pi$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \quad \rho \in [0, R]$$

dove $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq \mathbb{R}^2\}$



27 | 11 | 2023

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Un'equazione differenziale ordinaria di ordine n è un'equazione differenziale del tipo

$$F(\underbrace{x}_{1} + \underbrace{y(x)}_{1} + \underbrace{y'(x), \dots, y^{n}(x)}_{n}) = 0 \quad (1)$$

$$F : A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \text{ aperto}$$

(1) In alcuni casi si può scrivere $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ — derivata ennesima

dove $f : B \to \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

ESEMPI

1) STABILIRE L'ORDINE
2) LINEARE, NON LINEARE
3) OMOGENEA, O NO
4) COEFF. COSTANTI, O NO

1) $y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$ eq diff ordinaria 2° ordine lineare, OMOGENEA, coeff. costanti

$y''(x) = y'(x) - y(x)$

2) $y'(x) - y^2 = 0$ primo ordine, non lineare, omogenea, coeff. costanti

3) $y'' - xy = 0$ secondo ordine, lineare, omogenea, coeff. variabili

4) $x^2 (y'')^2 + 3xy' - y = 0$ II ordine, non lineare, omogenea, variabili

5) $y'' - 3y' + y - x^2 = 0$ II ordine, lineare, costanti, non omogenea

Risolvere l'equazione differenziale ordinaria (1) significa trovare tutte le funzioni

$\bar{y} : I \to \mathbb{R}, \ I \subseteq \mathbb{R}$

tali che

a) $\bar{y}$ è derivabile fino all'ordine n in I

b) $F(x, \bar{y}(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad (2)$$

dove $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

L'unione delle soluzioni si chiama INTEGRALE GENERALE DI (2)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE A VARIABILI SEPARABILI (IN FORMA NORMALE)

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y),$$

dove f e g sono funzioni continue nel loro dominio

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad \text{se } g(y) \neq 0$$

Integrando si ottiene

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

$$\boxed{G(y) = F(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}} \longrightarrow \text{INTEGRALE GENERALE di (3)}$$

dove G è una primitiva di $\frac{1}{g}$ e F è una primitiva di f (che esistono poiché f, g sono continue e quindi lo è anche $\frac{1}{g}$)

se $g(y) = 0$ $\quad \exists\, y_0 \in \mathbb{R} \mid g(y_0) = 0$

se $\boxed{y(x) = y_0}$, allora $g(y) = 0$ $\longrightarrow$ INTEGRALE SINGOLARE di (3)

$$\Downarrow$$

$$y'(x) = 0$$

$\Rightarrow y(x) = y_0$ è soluzione di (3)

Esempi

1) $y' = x y^3$ $\quad$ I ordine, non lineare, omogenea, coeff variabili
in forma normale
variabili a variabili separabili

Se $y^3 = 0$
allora $y = 0$:
soluzione : $y(x) = 0$ integrale singolare

Sia $y^3 \neq 0$ $(y \neq 0)$. Allora l'equazione diventa

$$\frac{dy}{y^3} = x\,dx \qquad \int \frac{1}{y^3}\,dy = \int x\,dx \qquad = -\frac{1}{2y^2} = \frac{x^2}{2} + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Integrale generale IN FORMA IMPLICITA

Come si scrive l'integrale generale in forma esplicita

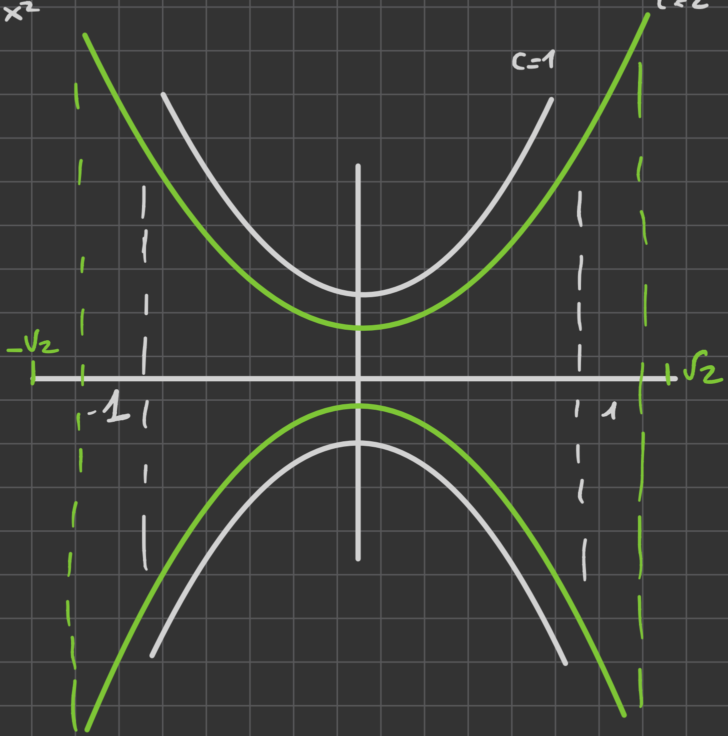
$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^2+2c}{2}$$

$$y^2 = \frac{1}{\underbrace{-2c}_{\tilde{c}} - x^2} \geq 0 \text{ perché } y^2 \geq 0$$

$$y^2 = \frac{1}{\tilde{c} - x^2} \quad \text{con } x^2 \leq \tilde{c}$$

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\tilde{c} - x^2}}$$ integrale generale in forma esplicita $\tilde{c} \in \mathbb{R}$

$x^2 \leq \tilde{c}$
↑
DOMINIO



2) $y' = \dfrac{y e^{2x}}{1+e^{2x}}$ I ordine, in forma normale, lineare, omogenea, variabili A variabili separabili

$y = 0$ integrale singolare di 2) PARTICOLARE

Sia $y \neq 0$. Allora l'equazione si scrive come

$$\frac{dy}{y} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx = \log|y(x)| = \frac{1}{2}\log\left(1+e^{2x}\right) + c\ , \quad c \in \mathbb{R}$$

Integrale generale di 2)
In forma esplicita

$$\log|y(x)| = \frac{1}{2}$$

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{2}\log\left(1+e^{2x}\right)} \cdot e^{c} \to k > 0$$

$$|y(x)| = e^{\log\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$|y(x)| = k \cdot \sqrt{1+e^{2x}} \qquad k>0$$

$$y(x) = \tilde{c}\sqrt{1+e^{2x}}\ , \quad \tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \cancel{\{0\}}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL I° ORDINE (IN FORMA NORMALE)

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x) \qquad (4)$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, $a, b \in C(I)$

lineare del I ordine

$$a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) + g(x) = 0$$

$$a_1(x) \neq 0$$

Allora dividendo per $a_1(x)$ si ha:

$$y'(x) + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\, y(x) + \frac{g(x)}{a_1(x)} = 0$$

$$y'(x) = \underbrace{-\frac{a_0(x)}{a_1(x)}}_{a}\, y(x) \underbrace{-\frac{g(x)}{a_1(x)}}_{b}$$

Nota se $b(x) = 0$, la (4) è a variabili separabili $y=0$ soluzione

se $y \neq 0$

$$\frac{dy}{y} = a(x)\, dx \qquad \log|y(x)| = \int a(x)\, dx + c\ , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|y(x)| = e^{\int a(x)\, dx + c} = \tilde{c}\, e^{\int a(x)\, dx} \qquad \tilde{c} > 0$$

$$y(x) = \pm\, \tilde{c}\, e^{\int a(x)\, dx}\ , \quad \tilde{c} > 0$$

$$y(x) = k\, e^{\int a(x)\, dx}\ , \quad k \in \mathbb{R}$$

Cosa succede se $b(x) \neq 0$ L'integrale di 4) è dato da

$$y(x) = e^{\int a(x)\,dx}\left[\int b(x)\, e^{-\int a(x)\,dx}\,dx + c\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

Dim: Basta moltiplicare entrambi i membri di 4) $e^{-\int a(x)\,dx}$ (>0)

Esempi

2) $y' = \underbrace{2}_{a(x)}y + \underbrace{3e^{4x}}_{b(x)}$ I ordine lineare

L'integrale generale di 2) è dato da

$$y(x) = e^{\int 2\,dx}\left[\left(3e^{4x}\, e^{-\int 2\,dx}\,dx + c\right)\right]$$

$$= e^{2x}\left[\int 3e^{4x}e^{-2x}\,dx + c\right]$$

$$= e^{2x}\left[\int 3e^{2x} + c\right] = e^{2x}\left[\frac{3}{2}e^{2x} + c\right]$$

$$= \frac{3}{2}e^{4x} + c\,e^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

28/11/2023

EQUAZIONI DIFF. ORDINARIE DI ORDINE n LINEARI

Un'equazione differenziale ordinaria di ordine n LINEAREE é un'equazione differenziale del tipo

$$a_n(x)\,y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x)+\dots+a_0(x)\,y(x)=g(x),\quad(1)$$

dove $\underbrace{a_n, a_{n-1}, \dots, a_0}_{\substack{\text{Coefficienti di}\\ y^{n},\dots,y}}, \underbrace{g}_{\substack{\text{Termine}\\ \text{noto}}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $a_n \neq 0$ in $[a,b]$

Perché (1) é lineare?

Sia $L: C^n([a,b]) \to C([a,b])$

$$u \longmapsto L(u) = a_n(x)\,u^{(n)}(x)+\dots+a_0(x)\,u(x)$$

L'equazione (1) in termini dell'operatore L si può scrivere come:

$$L(y)=g(x)\qquad(1')$$

L'equazione omogenea associata a $(1')$ é data da $L(y)=0 \quad (2)$

L'equazione $(1')$ é lineare perché l'operatore L é lineare

ie

$L(\alpha u+\beta v)=\alpha L(u)+\beta L(v)$

$\forall u,v \in C^n([a,b]),\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE 1

Siano u e v soluzioni dell'equazione differenziale LINEARE OMOGENEA (2) allora:

$\alpha u+\beta v$ é soluzione di (2)

Dim: Poiché u e v sono sol di (2) si ha

$L(u)=0=L(v)$

Consideriamo

$$\underbrace{L(u+v)=}_{\text{poiché } L \text{ é LINEARE}}\alpha L(u)+\beta L(v)=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

$\Rightarrow \alpha u+\beta v$ sol di (2)

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE 2

Siano u soluzione dell'equazione LINEARE NON OMOGENEA (1) e v soluzione dell'equazione OMOGENEA associata a (1)
Allora $u + \beta v$ è soluzione di (1)

Dim: Per ipotesi si ha che

$$L(u) = g(x) \quad e \quad L(v) = 0$$

Consideriamo

$$L(u+\beta v) \underset{\text{poiché lineare}}{=} L(u) + \beta L(v) = g(x) + \beta \cdot 0 = g(x)$$

$\Rightarrow u + \beta v$ è sol di (1)

Siano

$$f_1, \dots, f_m : [a,b] \to \mathbb{R}$$

m funzioni

Si dice che $f_1, \dots, f_m$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI se

$$\exists c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, \quad (c_1, \dots, c_m) \neq (0, \dots, 0) \text{ tali che}$$

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_m f_m(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

Si dice che $f_1, \dots, f_m$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se

$$c_1 f_1(x), \dots, c_m f_m(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \iff c_1 = \dots = c_m = 0$$

Sia $y_1, \dots, y_m$ m SOLUZIONI dell'equazioni differenziale (2) LINEARE OMOGENEA di ordine m

Si definisce DETERMINANTE WRONSKIANO il determinante della matrice data da

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} \quad m \times m$$

TEOREMA DEL WRONSKIANO:

Siano $y_1, \dots, y_m$ m soluzioni dell'equazione diff (2) lineare omogenea di ordine m in $[a,b]$

Allora

1) $\exists\, x_0 \in [a,b] \mid W(x_0) \neq 0$ se e solo se $y_1, \dots, y_m$ sono linearmente indipendenti

2) $\exists\, x_0 \in [a,b] \mid W(x_1) = 0$ se e solo se $y_1, \dots, y_m$ sono linearmente dipendenti

TEOREMA 1: Data l'equazione differenziale ordinaria di ordine m lineare omogenea (2) si ha:

1) $\exists\, y_1, \dots, y_m$ ovvero m integrali/ integrali particolari di (2) linearmente indipendenti

2) l'integrale generale di (2) è dato da:

$$y(x, c_1, \dots, c_m) = c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x), \quad c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$$

Nota: Il Teorema 1 ci dice che la totalità delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione m la cui base è data da $\{y_1, \dots, y_m\}$

TEOREMA 2: Data l'equazione differenziale ordinaria di ordine m lineare NON OMOGENEA (1)

allora il suo integrale generale è dato da

$$y(x, c_1, \dots, c_m) = c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x) + y_0 \quad c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$$

dove y_1, y_m sono integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione (2) omogenea associata ad (1) e y_0 è un integrale particolare di (1)

EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA DI ORDINE m LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

$$a_m y^{(m)}(x) + \dots + a_0 y(x) = g(x),$$

dove $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, $a_m \neq 0$

Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria di ordine m lineare omogenea e a coeff costanti.

$$a_m y^{(m)}(x) + \dots + a_0 y(x) = 0 \quad (3)$$

$a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, $a_m \neq 0$

Proposizione Sia $\lambda \in \mathbb{C}$

La funzione $y(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione di (3) se e solo se λ è soluzione dell'equazione caratteristica

$$P(\lambda) = 0$$

dove $P(\lambda)$ è il polinomio dato da

$$P(\lambda) = a_m \lambda^m + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

detto POLINOMIO CARATTERISTICO associato a (3)

Sia : $\lambda \in \mathbb{C}$ e $y(x) = e^{\lambda x}$

Se $y(x)$ è soluzione di (3) allora

y è derivabile fino all'ordine m

Derivando si ha

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\vdots$$

$$y^{m}(x) = \lambda^m e^{\lambda x}$$

Sostituendo nell'equazione (3) si ha che

$$a_m \lambda^m e^{\lambda x} + \dots + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (a_m \lambda^m + \dots + a_0) = 0$$

$$a_m \lambda^m + \dots + a_0 = 0$$

PROPOSIZIONE : Sia $P(\lambda)$ il polinomio caratteristico associato a (3) all'equazione diff. ordinaria di ordine m (3) lineare a coeff. costante

1) $P(\lambda) = 0$ ammette m radici distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ allora le funzioni $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_m(x) = e^{\lambda_m x}$ sono m integrali particolari di (3) linearmente indipendenti

2) Se $P(\lambda)=0$ ammette $p<m$ radici distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ con molteplicità pari a $r_1, \dots, r_p$ $\left(\sum_{i=1}^{m} r_i = m\right)$, allora le funzioni

$$\left.\begin{matrix} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_p x}, & x e^{\lambda_p x}, & \dots, & x^{r_1-1} e^{\lambda_p x} \end{matrix}\right\} \text{SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI PER (3)}$$

sono m integrali particolari di (3) linearmente indipendenti

Nota: Sia $\lambda = \alpha + i\beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\beta \neq 0$ soluzione di $P(\lambda)=0$

$$x \longmapsto y(x) = e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

Poiché $P(\lambda)$ a coeff. reali, anche $\bar{\lambda} \mid P(\bar{\lambda}) = 0$

$$\alpha - i\beta$$

$$x \longmapsto y(x) = e^{\lambda x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha} e^{-i\beta}$$

Formule di eulero

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2}$$

$$\longrightarrow \left.\begin{matrix} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{matrix}\right\} \text{soluzioni di (3)}$$

Esempi

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ II ordine, lineare, omogenea, coeff cost

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2 e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ EQ. CARATTERISTICA di 1)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{2x}$

Sono integrali particolari di 1) linearmente indipendenti

Allora l'integrale generale di 1) è dato da

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$ $\qquad y(x) = e^{\lambda x} \quad \lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda+3)^2 = 0 \qquad \lambda = -3 \quad \text{con } r = 2$$

$e^{-3x}, \; x e^{-3x}$ integrali particolari (2) linearmente indipendenti

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3) $y'' + 2y' + 5y = 0$ $\qquad$ II ordine, lineare, omogenea, coeff. cost.

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i \quad \begin{matrix} e^{(-1+2i)x} \\ e^{(-1-2i)x} \end{matrix} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} e^{-x} \sin(2x) \\ e^{-x} \cos(2x) \end{matrix}}$$

L'integrale generale di (3)

$$y(x, c_1, c_2) = e^{-x}\left(c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)\right)$$

METODO DI SOMIGLIANZA

4) $y'' - 3y' + 2y = x$ $\qquad$ II ordine, lineare, coeff. cost, non omogenea,

$y'' - 3y' + 2y = 0$ $\quad$ eq. omogenea associata ad 4)

$\lambda = 1 \quad \lambda = 2$

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ora dobbiamo determinare UN integrale particolare di 4)

Cerchiamo un integrale particolare della forma del termine noto:

$$y_0(x) = Ax + B \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

se y_0 fosse soluzione di 4)

$$y_0'(x) = A$$

$$y_0''(x) = 0$$

Sostituiamo nell'equazione 4) si ha che

$$-3A + 2(Ax + B) = x$$

$$2Ax - 3A + 2B = x \quad \rightarrow \text{ eguagliamo i coeff. dei termini corrispondenti}$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow A = \frac{1}{2} \\ \rightarrow B = \frac{3}{4} \end{matrix}$$

$$y_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

Integrale particolare di 4)

Integrale generale di 4) è dato da

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

5) $y'' + y' = 3x - 1$ II ordine, non omog., coeff. cost., lineare

$$\downarrow$$

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = -1$$

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 + c_2 e^{-x} \qquad c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y_0(x) = (Ax + B) \cdot x \overset{!}{=} Ax^2 + Bx$$

$y_0'(x) = 2Ax + B$

$y_0''(x) = 2A$

Sostituendo in 5) si ha:

$2A + 2Ax + B = 3x - 1$

$2A = 3 \quad \to \quad A = \frac{3}{2}$
$2A + B = -1 \quad \to \quad B = -4$

$y_0(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$

Integrale generale

$y(x, c_1, c_2) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 4x$

6) $y'' + y = e^{2x}$

$\lambda^2 + 1$

$\lambda = \pm i$

l'integrale particolare dell'eq omogenea

$y(x, c_1, c_2) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad + \frac{1}{2} e^{2x}$

$y_0(x) = Ae^{2x}$

$y_0'(x) = 2A e^{2x}$

$y_0''(x) = 4A e^{2x}$

$4Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x}$

$A = \frac{1}{5} \qquad y_0(x) = \frac{1}{5} e^{2x}$

$y'' - y = e^x \qquad \boxed{\lambda = 1} \longrightarrow y_0(x) = A \cdot e^x \cdot x^r$

r = molteplicità di $\lambda = 1$ come soluzione dell'equazione caratteristica

$y_0(x) = A x e^x$

sost e facendo derivate y_0'', y_0'

$A = \frac{1}{2}$

Esempi

$$y'(x) = e^{3y(x)}$$

ANALISI QUALITATIVA

$y'(x) = e^{3y} \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y = y(x)$ è crescente

$y' = e^{3y} \Rightarrow y'' = 3e^{3y}\, y' \Rightarrow y = y(x)$ è convessa

$\downarrow$

$\exists\ y''$ perché y è derivabile (essendo sol. di $(*)$)

29 | 11 | 2023

06/12/2023

$$\begin{cases} e^{x+y}\, y' + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

→ per vedere se ammette soluzione bisogna mettere questa equazione in forma normale

$$y' = \frac{-x}{e^{x+y}} = f(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

dal teorema di Cauchy

$\exists!$ soluz di 1)

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-x}{e^{x+y}} & (A) \\ y' = \dfrac{-x}{e^x} \dfrac{1}{e^y} \end{cases}$$

$$e^y dy = \frac{-x}{e^x} dx$$

$$\int e^y dy = \int -\frac{x}{e^x} dx$$

$$e^y = x e^{-x} - \int e^{-x} dx$$

$$e^y = x e^{-x} + e^{-x} + c$$ Integrale generale di (A)

Imponiamo la condizione $y(0) = 0$

$$\underbrace{1 = 1 + c}_{} \Rightarrow c = 0 \quad e^y = x e^{-x} + e^{-x}$$

La soluzione in forma esplicita è

$$y(x) = \log(x e^{-x} + e^{-x}) = \log\left[e^{-x}(x+1)\right) = -x + \log(x+1)$$

$y'' + 4y = 0$ ammette

(A) solo soluzioni costanti

(B) nessuna soluzione

(C) solo soluzioni limitate

(D) solo soluzioni illimitate

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$c_1 \cdot e^{\cos(2x)} +$

$x \cdot e^{\cos(2x)} + c_1 \, 2(-\sin(2x)) \cdot e^{\cos(2x)} + x \, e^{\sin(2x)} + c_2 \cdot 2(\cos 2x) \cdot e^{\sin(2x)}$

3 la soluzione di

$\begin{cases} y' = x^2 e^y \\ y(1) = 0 \end{cases}$ > quando si studia la y' di y si ha direttamente la risposta

~~(A)~~ è crescente

(B) ∄

(C) è decrescente

(D) è strett. crescente

$y(x) = 0$ è soluzione di 3) NO

$0 = x^2$

$x = 0$

$\bar{y}$ è soluzione (locale) di (P) se $\exists \, I_{x_0}$ intorno di x_0

tale che 1) $I_x \to \mathbb{R}$

2) $\bar{y}$ è derivabile I_{x_0}

3) $\bar{y}'(x) = f(x, \bar{y}(x)) \ \forall x \in I_{x_0}$

4) $\bar{y}(x_0) = y_0$

Come risolviamo l'equaz diff. $y' = x^2 e^y$? → per parti

$\int e^{-y} \, dy = \int x^2 \, dx$

$-e^{-y} = \frac{x^3}{3} + c \quad \to \quad y(1) = 0 \quad -e^0 = \frac{1}{3} + c \quad = -\frac{4}{3}$

$$-e^{-y} = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}$$

$$-y = \log \frac{4-x^3}{3}$$

$$y(x) = \log \frac{3}{4-x^3}$$

$$4 - x^3 > 0$$

$$-e^{-y} = \frac{4-x^3}{3} > 0$$

$$-x^3 > -4$$

$$x \sqrt[3]{4}$$

4)

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

EQ. LIN. NON OMG. COEFF. COSTANTI

2 soluz + y

y_1 e y_2 sono due sol di 4)

A) $y_1 - 7y_2$ é sol

B) $3y_1 + y_2$ é sol

C) $y_1 - y_2$ é sol

D) $y_2 - y_1$ non é sol

12/12/2023

$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 \qquad D \in \mathbb{R}^2$

max (min) locali nel dominio

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\nabla f(x,y) = (3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3,\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2)$

TEOREMA DI FERMATH

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y^2(3-4x-3y) = 0 \\ x^3y(2-2x-3y) = 0 \end{cases}$$

$x=0$

$y=0$

$3-4x-3y=0$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^3y(2-2x-3y)=0 \end{cases} \Rightarrow (0,y)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x^3y(2-2x-3y)=0 \end{cases} \Rightarrow (x,0)$$

$$\begin{cases} 3-4x-3y=0 \\ x^3y(2-2x-3y)=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x+1 \\ x^3\left(-\frac{4}{3}x+1\right)\left(2-2x-3\left(-\frac{4}{3}x+1\right)\right) \end{cases}$$

$x=0 \quad (0,1)$

$x=\frac{3}{4} \quad \left(\frac{3}{4},0\right)$

$x=\frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

Punti critici $(x,0)$, $(0,y)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

$f(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix}$$

$$H(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^3-2x^4 \end{pmatrix} = \det(x,0) = 0$$

$$H(0,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det(0,y) = 0$$

$$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{72} - \frac{1}{144} > 0$$ MASSIMO LOCALE per f

STUDIAMO i punti $(x,0)$ e $(0,y)$ con la definizione di minimo e massimo locale

$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$

$$f(x,y) \geq 0 \qquad x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 \geq 0$$

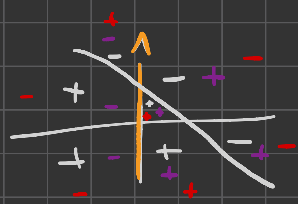
$$x^3y^2(1-x-y) \geq 0$$

$$x(1-x-y) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x-y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y \leq 1-x$$

non max e min: $\forall$ intorno preso la disuguaglianza non è rispettata

max e min: $\exists$ intorno dove la disuguaglianza è rispettata



$(x,0)$ → max locale se $x<0$ $x>1$

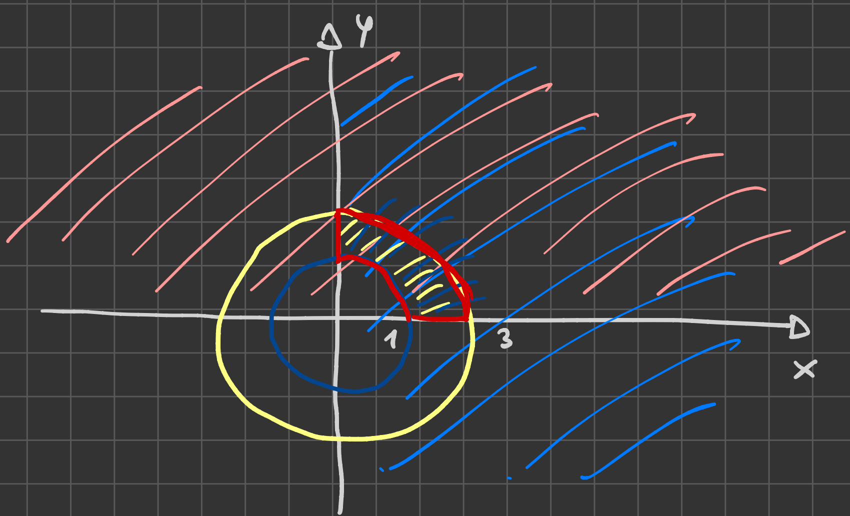
→ min locale $1<x<0$

→ $x=0$ $x=1$ nessun minimo e massimo

$(0,y)$ → nessun minimo e massimo

$$\iint_D x \, dx \, dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$



$f(x,y) \in C(\mathbb{R}^2)$

D limitato e misurabile

=> integrabile in D

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \in [1,3] \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

FORMULA RID RETT

$$\iint_{[1,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \rho\cos\theta\,\rho\, d\theta\, d\rho = \int_1^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\theta\, d\theta \right) d\rho$$

$$\sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho}{3}\Big|_1^3 = 1\cdot\left(\frac{3^3-1}{3}\right) = \frac{26}{3}$$

3) $y' = \frac{64}{x} - 12x^3 e^{x^2} y^{2/3}$ NON LINEARE

con $\alpha = \frac{2}{3}$

equazione di bernoulli $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$

$$z(x) = [y(x)]^{1-\alpha} = [y(x)]^{1-\frac{2}{3}} = [y(x)]^{1/3} = \sqrt[3]{y(x)}$$

$$z(x) = z(x)^3$$

$$y'(x) = 3z(x)^2 - z'(x)$$

si ha che

$$3z^2z' = \frac{6}{x}z^3 - 12x^3e^{x^2}z^2$$

se $z \neq 0$ allora

$$z' = \frac{2}{x}z - 4x^3e^{x^2} \quad \text{equazione } 1^\circ \text{ ORDINE LINEARE}$$

$$z(x) = e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int -4x^3e^{x^2}\cdot e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx + c\right] = e^{2\log x}\left[\int -4x^3e^{x^2}\cdot e^{-2\log x}dx + c\right]$$

$$= x^2\left[\int -\frac{4x^3e^{x^2}}{x^2}dx + c\right]$$

$$= x^2\left[\int -4x\,e^{x^2}dx + c\right]$$

$$= x^2\left[-2e^{x^2}+c\right]$$

$$= -x^2\left(2e^{x^2}-c\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \left(z(x)\right)^3 = \left[-x^2\left(2e^{x^2}-c\right)\right]^3 \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= -x^6\left(2e^{x^2}-c\right)^3 \quad c \in \mathbb{R}$$

INTEGRALE GENERALE

$y(x) = 0$ É SOLUZIONE PERÒ PARTICOLARE

Risolvere

$$\begin{cases} y' = \dfrac{64}{x} - 12x^3 e^{x^2} y^{2/3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

→ come si comporta → perché se è continua → quindi → cauchie continua ipotesi → sodisfatto con C^1 → con 1 soluzione

↓

$y(x) = 0$ soluzione perché banale

per trovare tutte le soluzioni $-x^6\left(2e^{x^2}-c\right)^3$

ad x positivo

(1)