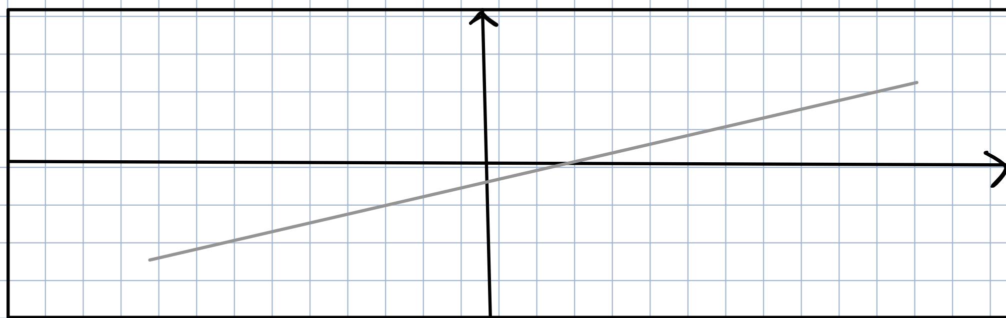
CURVE

RETTA

$ax + by + c = 0$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a,b) \neq (0,0)$

OPPURE

$$\begin{cases} y = mx + q \\ x = h \end{cases}$$



PARABOLA

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

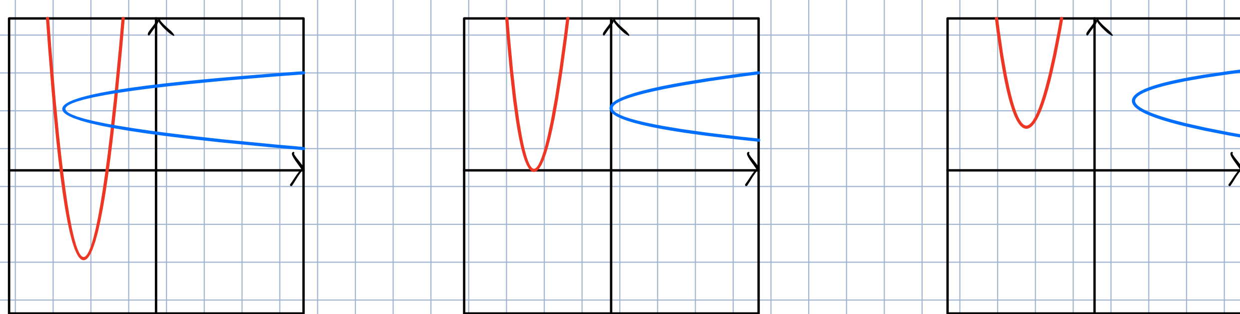
$\boxed{x = ay^2 + by + c}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

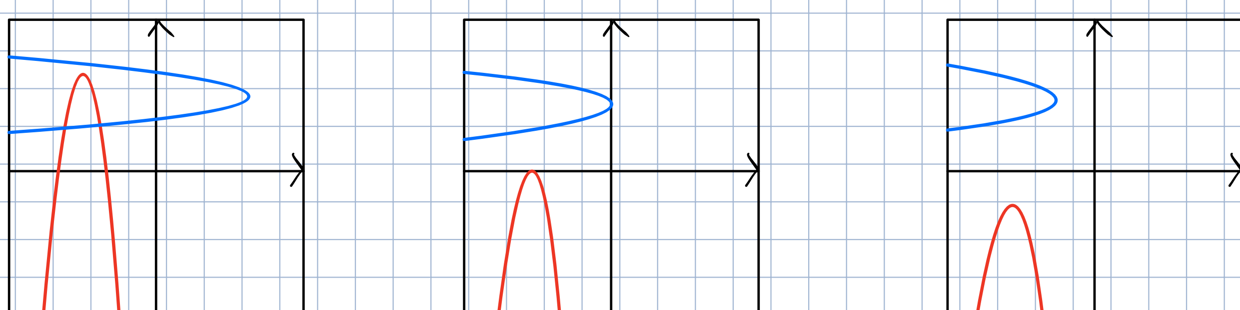
DOVE $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ $\qquad$ $\Delta = 0$ $\qquad$ $\Delta < 0$

$a > 0$



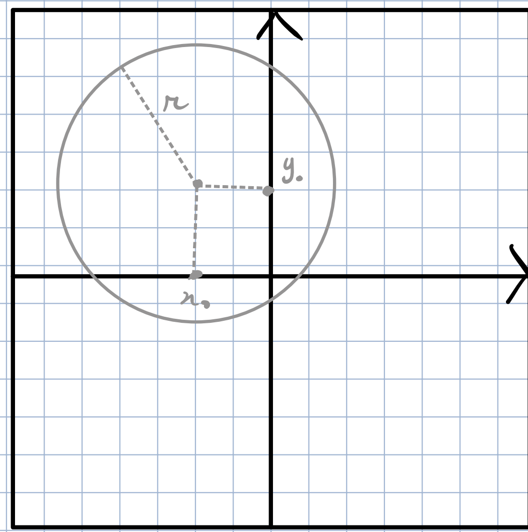
$a < 0$



CIRCONFERENZA

$$x^2+y^2=r^2$$

TRASLATA CON CENTRO (x_0,y_0): $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

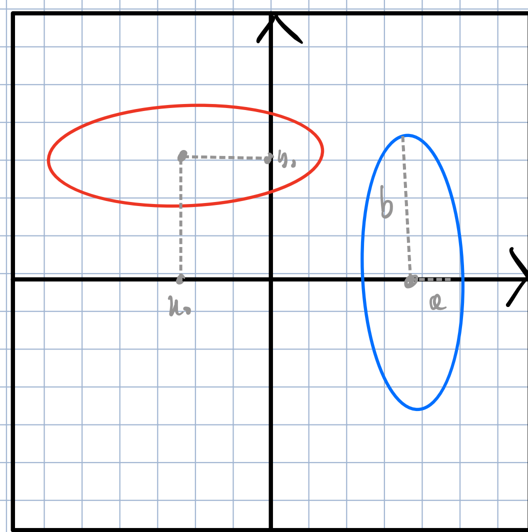


ELLISSE

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

TRASLATA CON CENTRO (x_0,y_0): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

$a>b$ $a<b$

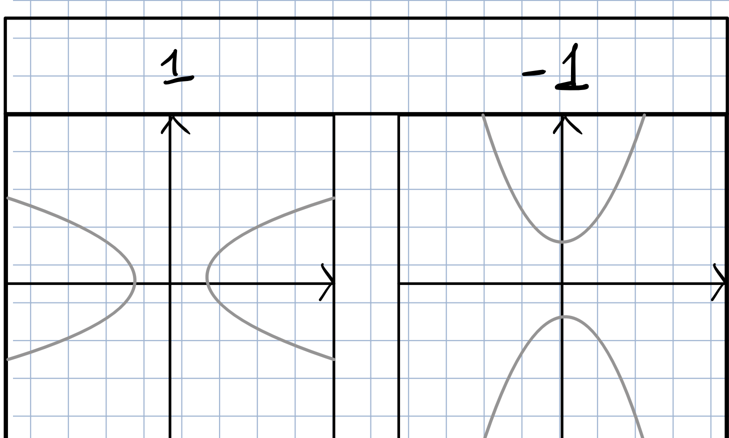


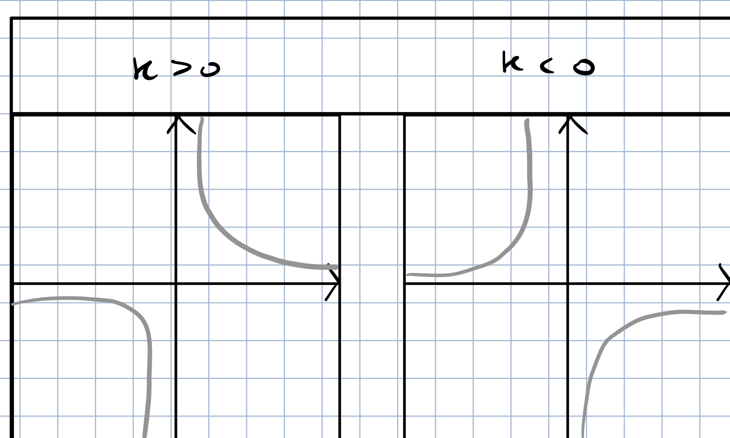
IPERBOLE

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=(1)(-1)$$

EQUILATERA

$xy=k$ $k\in\mathbb{R}$





STUDIO FUNZIONE

- DOMINIO

  (GUARDA CURVE)

- DIFFERENZIABILITA': (E DERIVABILITA')

  - DEFINIZIONE:

Una funzione $f(x,y)$, definita in un sottoinsieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, è differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$ **se e solo se**:

1. Esistono le derivate parziali prime nel punto (x_0, y_0) (attenzione, abbiamo detto **esistono**, non che le derivate parziali siano continue!)

2. $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

  - TEOREMA DIFFERENZIALE TOTALE:

Enunciato del teorema sul differenziale totale

Sia $f(x,y)$ una funzione derivabile in un intorno di (x_0, y_0) e siano le derivate parziali $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ continue in (x_0, y_0).

Allora $f(x,y)$ è una funzione differenziabile in (x_0, y_0).

- LIMITI:

  - SOSTITUZIONE: $y = \rho \sin\theta \quad x = \rho\cos\theta$

    CERCARE DI TROVARSI NELLA SITUAZIONE

    $\lim_{\rho \to 0} \quad 0 \le |f(x)| \le \rho$

    SE SI TROVA CHE IL LIMITE E' INDIPENDENTE DA ρ E DIPENDENTE DA θ $\Rightarrow$ LIM. $\nexists$

- **MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI:** (CONTROLLO TRAMITE WEISTRASS)

TRAMITE FERMAT:

- $\nabla f = 0$ PRIMI PUNTI CRITICI (AMMISSIBILI SOLO SE INTERNI AL DOMINIO)
- PUNTI DEL BORDO

TRAMITE PARAMETRIZZAZIONE DEL TIPO:

$$\overline{BC} = \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \end{cases} \quad t = [0,4] \implies$$ DERIVO E ANNULLO LA DERIVATA (FERMAT)

- PUNTI DI NON DERIVABILITA'

POI CALCOLO LA FUNZIONE NEI PUNTI CRITICI PRENDENDO VALORE MAX/MIN PER MAX/MIN ASSOLUTI.

- **MASSIMI E MINIMI LOCALI:**

$\nabla f = 0 \implies$ PUNTI CRITICI

CALCOLO LA MATRICE HESSIANA:

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

E CALCOLO IL DETERMINANTE INSERENDO CALCOLANDO LA MATRICE NEI PUNTI CRITICI.

$dH < 0$ PUNTO DI SELLA

$dH > 0$:

- $f_{xx} > 0$ MINIMO
- $f_{xx} < 0$ MASSIMO

$dH = 0$: TEST INCONCLUDENTE USARE LA DEFINIZIONE $(f(x,y) \geq f(x_0,y_0))$

DERIVATA DIREZIONALE :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Vogliamo calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x, y) = e^x y$ lungo il vettore $\mathbf{u} = (3, 4)$ nel punto $(2, 0)$.

Per prima cosa controlliamo che il vettore abbia norma unitaria, calcolandola sua norma $||u|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \neq 1$. Dato che non ha norma unitaria, dobbiamo normalizzarlo e considerarne il versore $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

a questo punto costruiamo il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\left(2 + \frac{3}{5}t, \frac{4}{5}t\right) - f(2, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{4}{5}e^{2+\frac{3}{5}t}t}{t} = \frac{4}{5}e^2$$

INTEGRALI DOPPI :

- **DOMINIO NORMALE** :

① SIA $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

DOVE $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE CON $\alpha \leq \beta$

ALLORA

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx}$$

② SIA $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], \ \delta(x) \leq x \leq \gamma(x)\}$

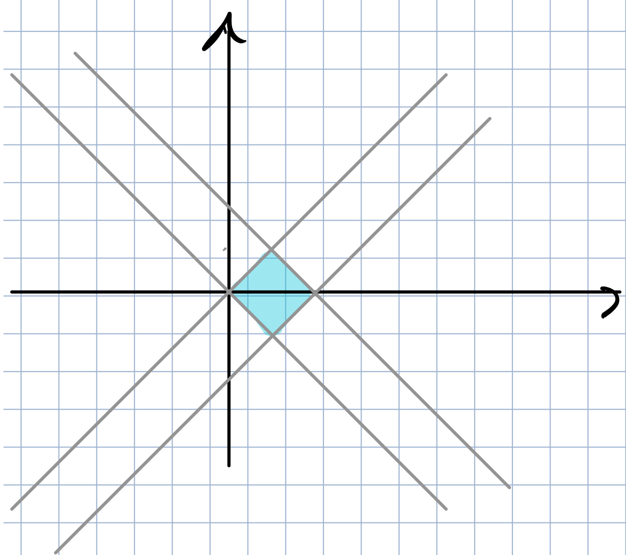
DOVE $\delta, \gamma : [c, d] \to \mathbb{R}$ CONTINUE CON $\delta \leq \gamma$

ALLORA

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\delta(x)}^{\gamma(x)} f(x,y)\,dx \right) dy}$$

- **DOMINIO NORMALIZZABILE :**

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; -y \le x \le 2-y \,,\; x-2 \le y \le x \}$$



VOGLIO GIRARE IL QUADRATO :

(SOMMO y) $\quad y-y \le x+y \le 2-y+y$

$0 \le x+y \le 2$

(SOTTRAGGO x) $\quad x-x-2 \le y-x \le x-x$

$-2 \le y-x \le 0$

OTTENGO LA SOSTITUZIONE :

$$\varphi = \begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases}$$

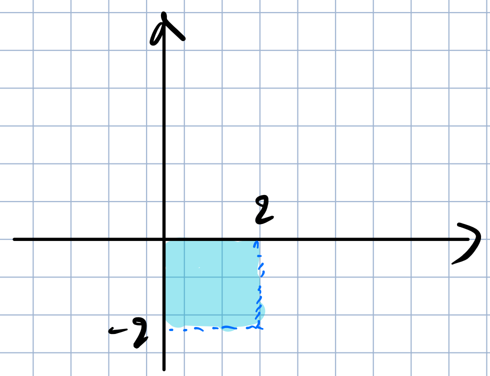
φ DEVE ESSERE CLASSE $C^1(D)$ E IL DETERMINANTE $\neq 0$:

$$\varphi \in C^1(D) \qquad \det D\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ φ E' INVERTIBILE

DUNQUE φ E' UN CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$\varphi(D) = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;/\; u \in [0,2] \,,\; v \in [-2,0] \}$$



IN PARTICOLARE IL det DI φ^{-1} È:

$$\det D\varphi^{-1}(u,v) = \frac{1}{2}$$

SOSTITUZIONE FUNZIONI GONIOMETRICHE:

QUANDO CI SI TROVA CON INTEGRALI CHE CONTENGONO FUNZIONI GONIOMETRICHE PUO' ESSERE UTILE UTILIZZARE IL SEGUENTE TEOREMA:

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO E MISURABILE

$f: D \to \mathbb{R}$ LIMITATA E CONTINUA IN D

$\varphi: D \to \mathbb{R}^2$, $\varphi^{-1} \in C^1(D)$, $\det D\varphi \neq 0$ in D

ALLORA:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\varphi(D)} f(\varphi^{-1}(u,v))\,|\det D\varphi^{-1}(u,v)|\,du\,dv$$

CON SOSTITUZIONE DEL TIPO:

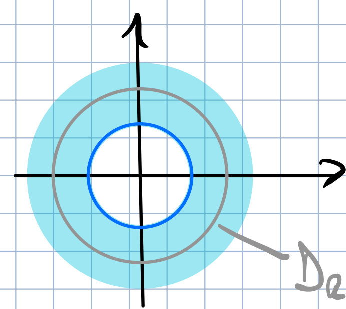
$$\begin{cases} y = \rho \sin\theta \\ x = \rho\cos\theta \end{cases}$$ DOVE $\det D\varphi^{-1}(u,v) = \rho$

INTEGRALI IMPROPRI:

PER GLI INTEGRALI IMPROPRI CI TROVIAMO PRINCIPALMENTE IN 2 CASI:

- **DOMINIO ILLIMITATO:**

$$\iint_D \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\,dx\,dy$$



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 \geq 1\}$$

D È ILLIMITATO $\Rightarrow$ INTEGRALE IMPROPRIO

RACCHIUDO IL DOMINIO IN UNA NUOVA RICONFERENZA IL CUI RAGGIO FACCIO TENDERE A $+\infty$.

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < R^2\}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{D_R} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\,dx\,dy = 2\pi$$

$$\iint_{D_R} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\,dx\,dy = \int_1^R\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^3}\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_1^R \frac{1}{\rho^2}\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta =$$

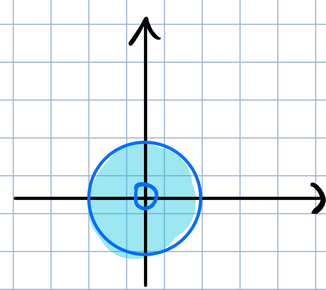
$$\rho \in [1, R] \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_1^R \frac{1}{\rho^2}\,d\rho \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\left(-\frac{1}{\rho}\right)\Big|_1^R = 2\pi\left(-\frac{1}{R}+1\right)$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{|x|^\alpha} \begin{cases} \alpha > 1 & \text{CONV.} \\ \alpha \leq 1 & \text{DIV.} \end{cases}}$$

- **f ILLIMITATA:**

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$



$$D : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty \qquad f \text{ È ILLIMITATA}$$

RACCHIUDO IL DOMINIO IN UNA NUOVA CIRCONFERENZA IL CUI RAGGIO TENDE A 0, (CON CENTRO IL PUNTO IN CUI LA FUNZIONE È ILLIMITATA).

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\lim_{r\to 0} \iint_{D_r} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_r^1\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2}\rho\,d\theta\,d\rho = \int_r^1\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho}\,d\theta\,d\rho =$$

$$= \log \rho \Big|_r^1 \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = -2\pi \log |r| \xrightarrow[r \to 0]{} +\infty$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

• VARIABILI SEPARABILI : $y' = f(x) \cdot g(y)$

• CASO $g(y) = 0$

• CASO $g(y) \neq 0$

$$\int \frac{1}{g(y)} \, dy = \int f(x) \, dx$$

• EQUAZIONE LINEARE DI ORDINE n :

– OMOGENEA

$$L[y] = 0$$

– NON OMOGENEA

$$L[y] = 0 \quad \cup \quad L[y] = g$$

(SOLUZIONE OMOGENEA + 1 PARTICOLARE)

– DI PRIMO ORDINE :

$$y' = a(x) \cdot y(y) + b(x)$$

$$y = e^{\int a(x)dx} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \, dx + c \right]$$

– A COEFF. COSTANTI DI ORDINE n :

* OMOGENEA :

$$y(x) = e^{\alpha x} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

ESEMPIO $\quad y'' + y' + y = 0$

$$e^{\alpha}(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \iff \alpha + \alpha + 1 = 0$$

* NON OMOGENEA:

① $\quad L[y] = x$

SOLUZIONE PARTICOLARE

$$y = Ax + B \quad (\text{FINO AL GRADO DI } x)$$

SE NELLE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA $\alpha = 0$, MOLTIPLICARE $Ax+B$ PER x m VOLTE QUANTE LA PERIODICITÀ DI α.

② $\quad L[y] = e^{ax}$

$$y = Ae^{ax}$$

SE NELLE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA $\alpha = a$, MOLTIPLICARE Ae^{x} PER x m VOLTE QUANTE LA PERIODICITÀ DI α.

③ $\quad L[y] = \sin bx$ o $\cos bx$

$$y = A\sin bx + B\cos bx$$

SE NELLE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA $\alpha = a + bi$, MOLTIPLICARE $A\sin bx + B\cos bx$ PER x m VOLTE QUANTE LA PERIODICITÀ DI α.

IN CASO CI SIA COMPOSIZIONE LINEARE DI QUESTI CASI

y È LA LORO COMPOSIZIONE LINEARE

- DI EULERO

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$$

$$y = z(\log x)$$

• NON LINEARE

- DI BERNULLI

$$y'(x) = a_x\, y(x) + b(x) \cdot y^{\alpha}(x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$z = [y(x)]^{1-\alpha}$$

IN QUESTO MODO L'EQUAZIONE DIVENTA LINEARE

• PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \text{EQUAZIONE DIFF. DI ORDINE } n \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

RISOLVI L'EQUAZIONE E POI TROVA VALORI DI $c_1, \ldots, c_n$ CHE SODDISFANO IL PROBLEMA

- TEOREMA

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x) = y_0 \end{cases}$$

• SE f È CONTINUA $\Rightarrow$ AMMETTE SOLUZIONE LOCALE

• SE f È $\in C^1(D)$ $\Rightarrow$ AMMETTE UNICA SOLUZIONE

IN GENERE CONTROLLA SE LE CONDIZIONI DI CAUCHY RISOLVONO GIA' IL PROBLEMA.

DOMANDE ESAME

- FUNZIONE DIFFERENZIABILE
- LEGAME CONTINUITÀ - DERIVABILE - DIFFERENZIABILE
- TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE (CON DIMOSTRAZIONE)
- LEGAME DIFFERENZIABILITÀ E DERIVATE DIREZIONALI (GRADIENTE)
  - ↳ PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETTORI

    $u = (u_1, u_2) \quad v = (v_1, v_2)$

    $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$

  - ↳ ESEMPIO DERIVABILE IN TUTTE LE DIREZIONI $\not\Rightarrow$ DIFFERENZIABILE

    $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y} \qquad v = (\cos\theta, \sin\theta)$

- CURVE IN $\mathbb{R}^3$

  $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA IN I

  - ↳ DIFFERENZA FUNZIONE - CURVA

- SIGNIFICATO GEOMETRICO INTEGRALE DOPPIO
  - ↳ INTEGRALE FUNZIONE NEGATIVA / PARZIALMENTE NEGATIVA
- FORMULA DI RIDUZIONE A SCELTA
- ESEMPIO FUNZIONE NON INTEGRABILE
  - ↳ REQUISITI INTEGRABILITÀ

- ESEMPIO EQ. DIFF. II° ORDINE NON LINEARE.
  - ↳ A PARTIRE DA QUESTA COSTRUIRE PROBLEMA DI CAUCHY
  - ↳ CONDIZIONI PROBLEMA DI CAUCHY
  - ↳ SOLUZIONE AL PROBLEMA DATO

- CLASSIFICAZIONE EQ. DIFF.
  - RISOLUZIONI

$$y'' + 3y' - 2 = x$$

$$\alpha^2 + 3\alpha = 0 \quad \alpha(\alpha+3) \quad \begin{matrix}\alpha=0\\ \alpha=-3\end{matrix} \quad y = C_1 + C_2 \cdot e^{-3x}$$

$$y = Ax^2 + Bx \quad y' = 2Ax + B \quad y'' = 2A$$

$$2A + 6Ax + 3B - 2 = x$$

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 2A + 3B - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = \frac{1}{6} \\ 3B = 2 - \frac{1}{3} \quad B = \frac{2-\frac{1}{3}}{3} \end{matrix}$$

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^{-3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{9}x$$

DEFINIZIONI

f È **DERIVABILE** IN $\mathbb{R}^2$ SE:

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A$ APERTO $\quad (x_0, y_0) \in A$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \exists \text{ FINITO}$$

E DEVE ESSERE DERIVABILE SIA RISPETTO AD x CHE AD y.

IN $\mathbb{R}^2$ LA DERIVABILITÀ NON IMPLICA LA CONTINUITÀ.

DERIV. $\not\Rightarrow$ CONTINUA

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x+y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$$

$f'_x = f'_y = 0$

SE $x = y$ $\quad \lim \neq 0$

$\Rightarrow$ NON CONTINUA

f È **DIFFERENZIABILE** IN $\mathbb{R}^2$ SE:

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A$ APERTO $\quad (x_0, y_0) \in A$

1. f È DERIVABILE IN (x_0, y_0)
2. $$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

IL PIANO È DEFINITO DALL'EQUAZIONE $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$

DIFFERENZIABILE IMPLICA CONTINUA.

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

Ip: $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A$ APERTO $\quad (x_0, y_0) \in A$

$f(x,y)$ DERIVABILE CON DERIVATE CONTINUE IN UN INTORNO DI (x_0, y_0)

Th: $\Rightarrow f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE IN (x_0, y_0)

DIM: PRENDIAMO LA DEFINIZIONE DI DIFFERENZIABILITÀ:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

SOMMIAMO E SOTTRAIAMO $f(x_0, y_0+k)$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

DATO CHE y_0+k È COSTANTE . DATO CHE x_0 È COSTANTE

POSSIAMO PENSARLI COME 2 FUNZIONI

$$x \to f(x_0, y_0+k) \qquad y \to f(x_0+h, y_0)$$

QUESTE FUNZIONI GODONO DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- DERIVABILE IN (x_0, x_0+h) IN QUANTO LA FUNZIONE DI PARTENZA ERA DERIVABILE
- CONTINUA IN $[x_0, x_0+h]$ IN QUANTO FUNZIONE DI UNA VARIABILE

POSSIAMO APPLICARE LAGRANGE:

$$\exists\, \bar{x} \in [x_0, x_0+h] : f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) = f_x(\bar{x}, y_0+k)\cdot h$$

(LO STESSO VALE PER y) PASSANDO AL MODULO CI RITROVIAMO CON:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_x(\bar{x}, y_0+k)h + f_y(x_0,\bar{y})k - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+h^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \boxed{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}} \left(f_x(\bar{x}, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)\right) + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(f_y(x_0,\bar{y}) - f_y(x_0,y_0)\right) =$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\leq 1 \qquad \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$$

$$\leq \; \Big| \underbrace{\big| f_x(\bar{x}, y_0+k) - f(x_0,y_0) \big|}_{\to 0} + \underbrace{\big| f_y(x_0,\bar{y}) - f_y(x_0,y_0) \big|}_{\to 0} \Big| \to 0$$

PER $(h,k) \to (0,0)$

DERIVATE DIREZIONALI

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad A$ APERTO $\quad x_0 \in A$

$r \in \mathbb{R}^n \quad |r| = 1$

SI DICE CHE f E' DERIVABILE NELLA DIREZIONE r SE:

$\exists$ IN $\mathbb{R}$ $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+hr) - f(x_0)}{h}$

FORMULA DEL GRADIENTE

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad A$ APERTO $\quad x_0 \in A$

f DIFFERENZIABILE IN x_0

$\Rightarrow$ f E' DERIVABILE IN OGNI DIREZIONE $r \in \mathbb{R}^n$, $|r| = 1$

E SI OTTIENE CHE:

$$\frac{df}{dr}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), r \rangle$$

NON VALE IL CONTRARIO, CONTROESEMPIO:

$f: \sqrt[3]{x^2 y}$ $\quad$ IN $(0,0)$ $\quad r = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h\cos\theta, 0+h\sin\theta) - f(0,0)}{h} = \sqrt[3]{\cos^2\theta \sin\theta}$$

MA SE f E' DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ $\quad \dfrac{df}{dr} = \langle \nabla f(\overset{(0,0)}{0}), r \rangle = 0$

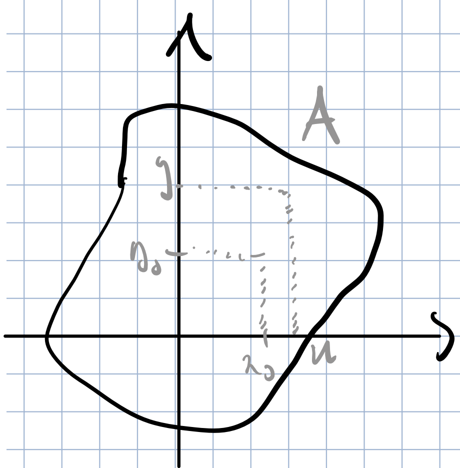
$0 \neq \sqrt[3]{\cos^2\theta \sin\theta}$ $\Rightarrow$ ASSURDO

TEOREMA DI SCHWARTZ

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, APERTO, $(x_0, y_0) \in A$, $f \in C^2(A)$

$\Rightarrow f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

DIM:



SIA $(x, y) \in A$ VICINO AD (x_0, y_0)

CON $(x, y) \neq (x_0, y_0)$

SIANO:

$F(x) = f(x, y) - f(x, y_0) \Rightarrow$ CONTINUA IN $[x_0, x]$, DERIVABILE IN (x_0, x)

$G(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$

PER LAGRANGE:

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (x_0, x) \mid F(x) - F(x_0) = F'(\bar{x})(x - x_0)$

$f_x(x,y)-f_x(x,y_0)$

$$\Rightarrow \quad F(x)-F(x_0)=\left[f_x(\bar{x},y)-f_x(\bar{x},y_0)\right](x-x_0)$$

$t \longmapsto f_x(\bar{x},t)$ DERIVABILE IN (y_0,y)
CONTINUA IN $[y_0,y]$

PER LAGRANGE:

$$\Rightarrow \exists \ \bar{y} \in (x_0,y) \mid f_x(\bar{x},y)-f_x(\bar{x},y_0)=f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(y-y_0)$$

$$F(x)-F(x_0)=\left[f_x(\bar{x},y)-f_x(\bar{x},y_0)\right](x-x_0)=f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(y-y_0)(x-x_0)$$

IN MODO ANALOGO SI PROVA CHE:

$\exists \ \tilde{x} \in (x_0,x)$ e $\tilde{y} \in (y_0,y)$

$$G(y)-G(y_0)=f_{yx}(\tilde{x},\tilde{y})(x-x_0)(y-y_0)$$

CONSIDERIAMO

$$F(x)-F(x_0)=f(x,y)-f(x,y_0)-\left(f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\right)$$
$$G(y)-G(y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)-\left(f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right)$$

QUINDI

$$f_{xy}(\bar{x},\bar{y})\cancel{(x-x_0)(y-y_0)} = f_{yx}(\tilde{x},\tilde{y})\cancel{(x-x_0)(y-y_0)}$$

$x \neq x_0$
$y \neq y_0$

$$f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = f_{yx}(\tilde{x},\tilde{y})$$

ESSENDO CONTINUE GRAZIE A $f \in C^2$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{yx}(\tilde{x},\tilde{y})$$

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$ ■

CURVE

$\varphi : I \to \mathbb{R}^2 \qquad I = [a,b]$

OGNI FUNZIONE E' UNA CURVA, MA NON TUTTE LE CURVE SONO FUNZIONI.

LA CURVA E' REGOLARE SE:

- $\varphi \in C^1(I)$
- $\varphi'(t) \neq (0,0) \quad \forall t \in (a,b)$

INTEGRALE

SE f E' LIMITATO E D E' LIMITATO E MISURABILE $\Rightarrow f$ INTEGRABILE IN D

f É INTEGRABILE IN $[a,b]\times[c,d]$ E

$$\boxed{\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} Q(R_i)\cdot f(x_i,y_i)}$$

$$\max_{i=1,\dots,m} a(R_i) \to 0$$

FORMULA DI RIDUZIONE SUI RETTANGOLI:

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$$\Rightarrow \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

FUNZIONE NON INTEGRABILE (DI DIRICHLET)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [a,b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$