21/02/22

INSIEMI

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\underbrace{(\mathbb{R}, +, \cdot)}$ CAMPO

$(\mathbb{R}, +)$ GRUPPO ABELIANO

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ GRUPPO ABELIANO

+ DISTRIBUTIVA

$\mathbb{R}$ È TOTALMENTE ORDINATO

VALORE ASSOLUTO

$a \in \mathbb{R}$

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ DEL MODULO

1) $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

2) $|a| = 0 \iff a = 0$

$\max\{0, 0\}$

$|a| = 0 \Rightarrow a = 0$

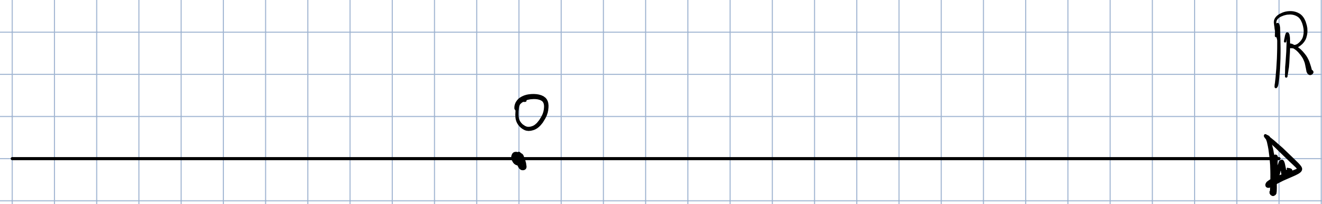
$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$
PER DEF.

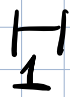
3) Sia $b \geq 0$

$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$

4) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a+b| \leq |a| + |b|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

5) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$



ABBIAMO NECESSITÀ DI UN'UNITÀ DI MISURA. 

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ NUMERI IRRAZIONALI

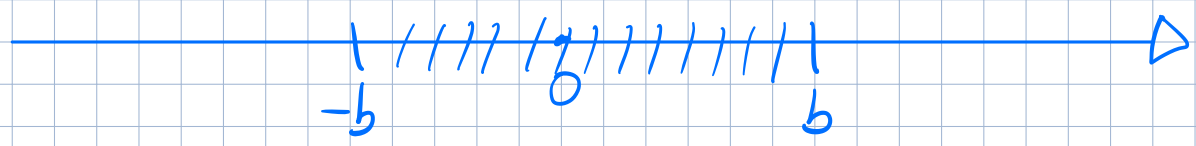
ABBIAMO UNA FUNZIONE BIUNIVOCA TRA PUNTI E NUMERI DI $\mathbb{R}$.

$|a|$ È LA DISTANZA TRA O E N.

$|a| = d(P, O)$, $P \equiv a$

DIMOSTRAZIONE DEL PUNTO 3

$|a| \le b$



$-b \le a \le b$

SE $B = 0$, $A = 0$.

SE $b > 0$

$|a| \ge b$ $a \le -b$, $a \ge b$

SE $b < 0$

$|a| \geq b \quad \forall a \in \mathbb{R}$

INTERVALLO IN $\mathbb{R}$

GLI INTERVALLI SONO INSIEMI CONNESSI.

INTERVALLI LIMITATI

$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ CHIUSO

$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$ CHIUSO IN A

$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ APERTO

CON $a, b \in \mathbb{R}$ ESTREMI $a < b$

SE $a = b$ $[a, b] = \{ a \}$ SINGOLETTO

INTERVALLI ILLIMITATI

$[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$ ILLIMITATO SUP.

$(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$ "

$(-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \}$ ILLIMITATO INF

$(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$E \subseteq \mathbb{R}$ É LIMITATO SE $\exists\, m, n \in \mathbb{R}$:

$m \leq x \leq n \quad \forall x \in E$

E É LIMITATO SUP. SE $\exists\, K \in \mathbb{R}$:

$x \leq K \quad \forall x \in E$

E è **LIMITATO INF.** SE $\exists\, k \in \mathbb{R}$:

$$x \geq k \quad \forall\, x \in E$$

MASSIMO E MINIMO

SI DICE <u>MASSIMO</u> $\bar{x}$ SE

1) $\bar{x} \geq x \quad \forall\, x \in E \subseteq \mathbb{R}$
2) $\bar{x} \in E$

SI DICE <u>MINIMO</u> $\bar{x}$ SE

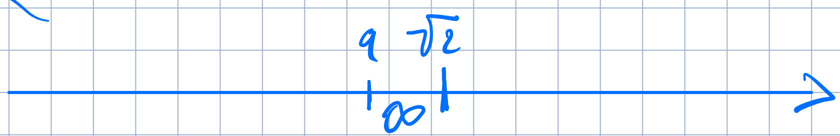
1) $\bar{x} \leq x \quad \forall\, x \in E \subseteq \mathbb{R}$
2) $\bar{x} \in E$

<u>ESEMPI</u>

$$E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0,\ x \leq \sqrt{2}\} \subset [0, \sqrt{2}]$$

$\min E = 0$

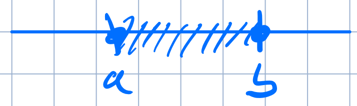
$\max \cancel{E} = \sqrt{2} \longrightarrow$ SBAGLIATO PERCHÉ $\sqrt{2} \notin E$



SE FOSSE STATO IN $\mathbb{N}$ (CHE NON È DENSO) ALLORA IL MASSIMO SAREBBE STATO 1.

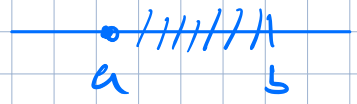
ESEMPI:

1) $E = [a, b]$



$\exists$ $\max_E = b$ $\quad \min_E = a$

2) $E = [a, b)$



$\exists$ $\min_E = a$ $\quad \nexists \max_E$

ESTREMO SUPERIORE:

- IL PIÚ PICCOLO DEI MAGGIORANTI $(\bar{x} \geq x \ \forall x \in E)$
- SE APPARTIENE ALL'INSIEME É MAX. $(x \notin E)$

ESTREMO SUPERIORE:

- IL PIÚ PICCOLO DEI MAGGIORANTI
- SE APPARTIENE ALL'INSIEME É MIN.

SUP E INF ESISTONO SEMPRE SE $E \neq \emptyset$.
SE $E = \emptyset$ $\quad$ SUP $= -\infty$ $\quad$ e $\quad$ INF $= +\infty$

SOMMATORIE

$1 + 2 + \ldots 10 = \sum_{n=1}^{10} n$ $\qquad$ $1 + 2 + \ldots 100 = \sum_{n=1}^{100} n$

$1 + 4 + 9 + \ldots + 9 = \sum^{9} n^2$

$$\sum_{m=m_0}^{\overline{m}} a_m$$

TERMINE GENERALE DELLA SOMMATORIA

INDICE DELLA SOMMATORIA

$m \in \mathbb{N}$

PROGRESSIONI GEOMETRICHE

SI DICE CHE

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

SONO IN PROGRESSIONE GEOMETRICA SE:

RAGIONE DELLA PROGRESSIONE

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$$a_k = q \cdot a_{k-1}$$
$$= q^k (q\, a_{k-2}) = q^2 a_{k-2} = \dots = q^k a_0$$

UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA È DEL TIPO

$a_0, q a_0, \dots, q^n a_0$ DOVE $a_0 \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0 = \begin{cases} a_0 \cdot (n+1) & \text{SE } q = 1 \\ a_0 \cdot \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q} & \text{SE } q \neq 1 \end{cases}$$

DIM.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k a_0$$

$q = 1$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_0 = \underbrace{a_0 + \dots + a_0}_{n+1} = (n+1)a_0$

$q \neq 1$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k . a_0 = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$(1-q) \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0 = a_0 \cdot \left(1 - q^{n+1}\right)$$

CONSIDERIAMO $\displaystyle(1-q) \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0 + \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} a_0$$

$= r \in \{1, \dots, n+1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0 \quad + \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} a_0$$

$=$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0 + \sum_{r=1}^{n} q^r \cdot a_0 = \sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0 + \sum_{r=1}^{n} q^{r=k} a_0 =$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0 + \sum_{r=1}^{n} q^{r=k} a_0 == \sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{n} q^k =$$

FACCIO USCIRE DALLA PRIMA IL PRIMO TERMINE

É DALL' ULTIMA L'ULTIMO

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{n} q^k \cdot a_0 =$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} q^k \cdot a_0 + \left(\sum_{k=1}^{n} q^k \cdot a_0\right) - q^{n+1} \cdot a_0 =$$

$$a_0 - q^{n+1} \cdot a_0 = a_0 \left(1 - q^{n+1}\right)$$

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

OTTENERE UNA DIMOSTRAZIONE NEGANDO LA TESI.

ESEMPIO

TH: $\sqrt{2}$ NON É RAZIONALE

ASSURDO : $\sqrt{2}$ É RAZIONALE

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ $\quad m, n \in \mathbb{N}$ $\quad (m, n) = 1$

PRIMI TRA LORO

$\sqrt{2}\, n = m$

$2 n^2 = m^2$ $\quad m^2$ É PARI $\Rightarrow$ m É PARI

$\Downarrow$

$m = 2 \cdot k \quad k \in \mathbb{N}$

$m^2 = 4 \cdot k^2$

$2 n^2 = 4 k^2$

$n^2 = 2 k^2$

m^2 È PARI $\Rightarrow$ m È PARI

DATO CHE $(m, n) = 1$, MA $\frac{n}{m}$ SONO PARI

È ASSURDO DUNQUE LA TESI È VERA

EX.

DIMOSTRARE CHE SE m^2 PARI $\Rightarrow$ m PARI

DIMOSTRARAZIONE PER INDUZIONE

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq \bar{n}$ LA PROPRIETÀ $P(n)$ VALE

$P(n) = 2n$ È PARI $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) <u>BASE DELL' INDUZIONE</u> : PROVARE CHE VALE $P(\bar{n})$

2) <u>PROCEDIMENTO INDUTTIVO</u> :

PROVARE CHE $\forall n \geq \bar{n}$ SE $P(n)$ VALE (IPOTESI INDUTTIVA)
$P(n+1)$ VALE (TESI)

PROVARE CHE $2^n \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>BASE</u> : $n = 1 \qquad 2 \geq 2$ VERA

<u>IPA. INDUTTIVA</u> :

$$2^n \geq 2n \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2(n+1)$$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = 2^n + 2^n \geq 2^n \geq 2n$$

$$2^n \geq 2$$

$$\Downarrow$$

$$2^n + 2^n \geq 2n+2$$

$$\shortparallel$$

$$2(n+1)$$

23/02/2022

FATTORIALE

$$n \in \mathbb{N} = n\,(n-1)\ldots 1$$

PROPRIETÀ : $(n+1)\,! = (n+1)\cdot n!$

SI PONE : $0! = 1$

COEFFICENTE BINOMIALE

SI INDICA CON IL SIMBOLO $\binom{n}{k}$ CHE SI LEGGE "N SU K".

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k!)} \qquad n, k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$$

ES

PROVARE CHE $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

DALLA DEFINIZIONE SI HA :

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\underbrace{(n-k+1)!}_{(n-k+1)(n-k)!}} + \frac{n!}{\underbrace{k!}_{k(k-1)!}(n-k)!} =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!} + \frac{n!}{k\,(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{k+n-k+1}{k(n-k+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)\,n!}{(k-1)!\,(n-k)!\,k\,(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

SIANO $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. ALLORA

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

1

DIM.

BASE INDUTTIVA: $n = 0$

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{-k}$$

$$\overset{\shortparallel}{1} \qquad \overset{\shortparallel}{\frac{0!}{0!\,0!}} \cdot a^0 \cdot b^0 = 1$$

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

COEFICENTI DELLE POTENZE DI BINOMIO

IPOTESI INDUTTIVA:

FISSATO $n \in \mathbb{N}$ SUPPONIAMO CHE SIA VERA

$$\underline{(a+b)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1+k}$$

$$(a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^{\overset{=r}{k+1}} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$k = r-1$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r-1} a^r b^{n-r-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n}{n} a^{n+1}}_{k=n+1} + \underbrace{\binom{n}{0} b^{n+1}}_{k=0} =$$

DATO CHE DOBBIAMO ARRIVARE A $\sum_{k=0}^{n+1}$ MANCANO 2 TERMINI : $\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}$

DUNQUE QUELLO CHE ABBIAMO OTTENUTO È :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+k+1}$$

ESERCIZI

PROVARE CHE IL PRODOTTO DI DUE NUMERI NATURALI CONSECUTIVI È PARI

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists k \in \mathbb{N} : n(n+1) = 2k$$

DIM

BASE INDUTTIVA : $n = 1$

$$1 \cdot 2 = 2 \qquad k = 1$$

IPOTESI INDUTTIVA : ...

$$(n+1)(n+2) = 2k$$

$$(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1)$$

$$= 2k + 2(m+1) = 2(\underbrace{k+m+1}_{\bar{k} \in \mathbb{N}}) = 2\bar{k}$$

DIM. CHE SE m^2 È PARI m È PARI

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \mid m = 2k+1$$

$$m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\overbrace{2k^2+2k}^{\tilde{k}}) + 1$$

$$= 2\tilde{k} + 1$$

$\Rightarrow m^2$ NON È PARI, ASSURDO

FUNZIONE

$D \subseteq \mathbb{R}$, SI DICE FUNZIONE UNA CORRISPONDENZA TRA DUE INSIEMI TALE CHE AD OGNI ELEMENTO DEL PRIMO INSIEME CORRISPONDE UN SOLO ELEMENTO DEL SECONDO INSIEME.

$f(x) \in \mathbb{R}$

SI DICE FUNZIONE REALE DI UNA VARIABILE REALE, UNA FUNZIONE,

$D \subseteq \mathbb{R}$

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

CIOÈ UNA CORRISPONDENZA TRA D e $\mathbb{R}$ TALE CHE:

$$\forall x \in D\ \exists!\, y \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

D = dominio di f

$f(D) = \{ f(x) \mid x \in D \}$ codominio di f (INSIEME DELLE IMMAGINI)

x = VARIABILE INDIPENDENTE

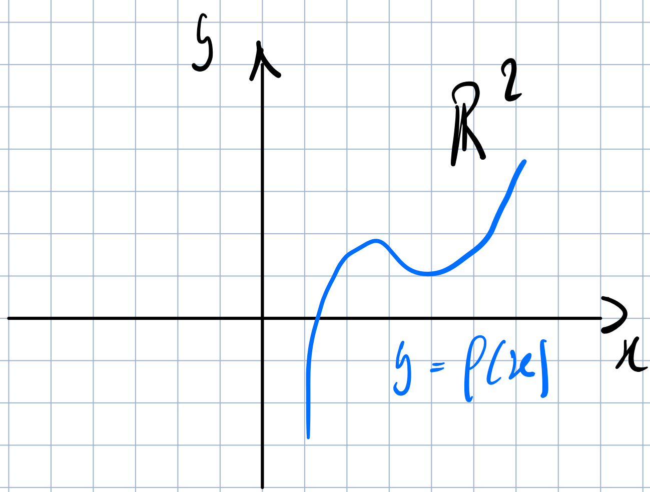
y = VARIABILE DIPENDENTE (DA x)

$f : D \to R \quad D \subseteq \mathbb{R}$

$x \to f(x)$

IL GRAFICO DI f È L'INSIEME :

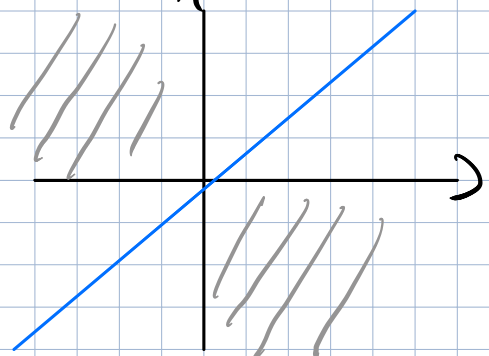
$$Graf(f) = \{ (x, f(x)) : x \in D \} \subseteq \mathbb{R}^2$$



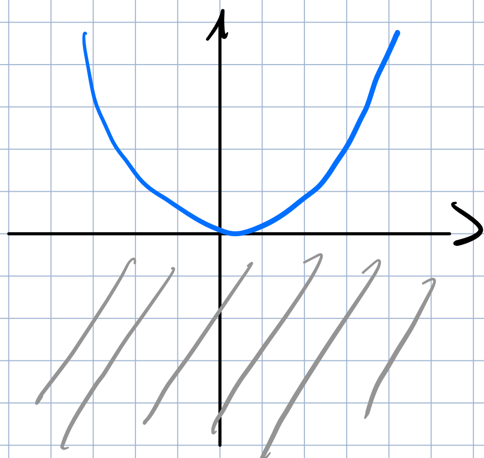
<u>Ex</u>

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad Gr(f) = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$

IDENTITÀ

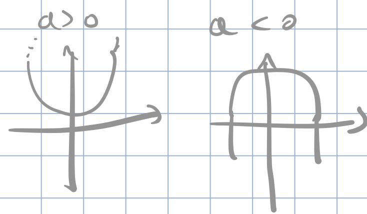


$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad y = x^2$

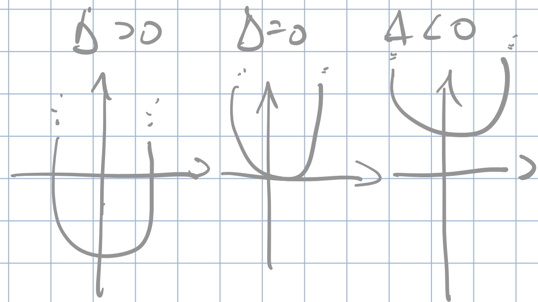


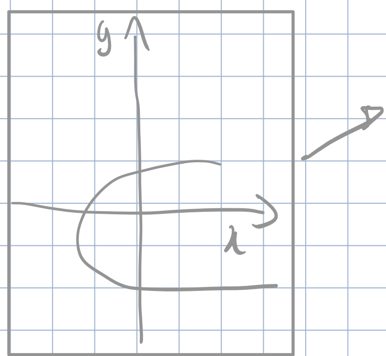
IN UNA PARABOLA

$y = ax^2 + bx + c$



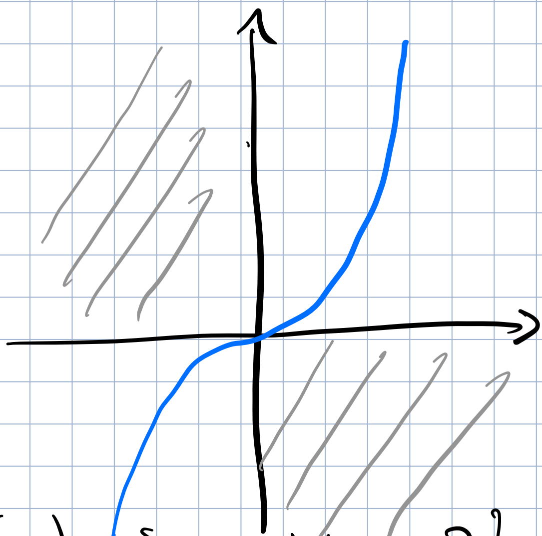
$\Delta = b^2 - 4ac$





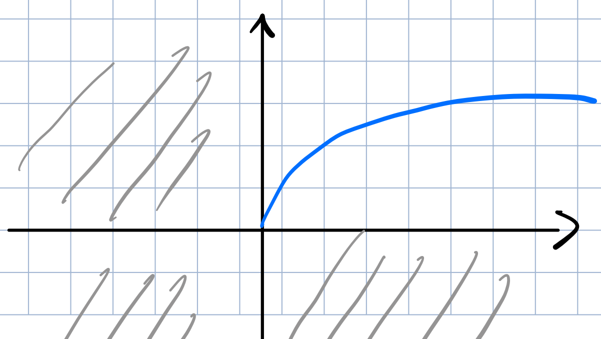
NON È UNA FUNZIONE

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad y = x^3$

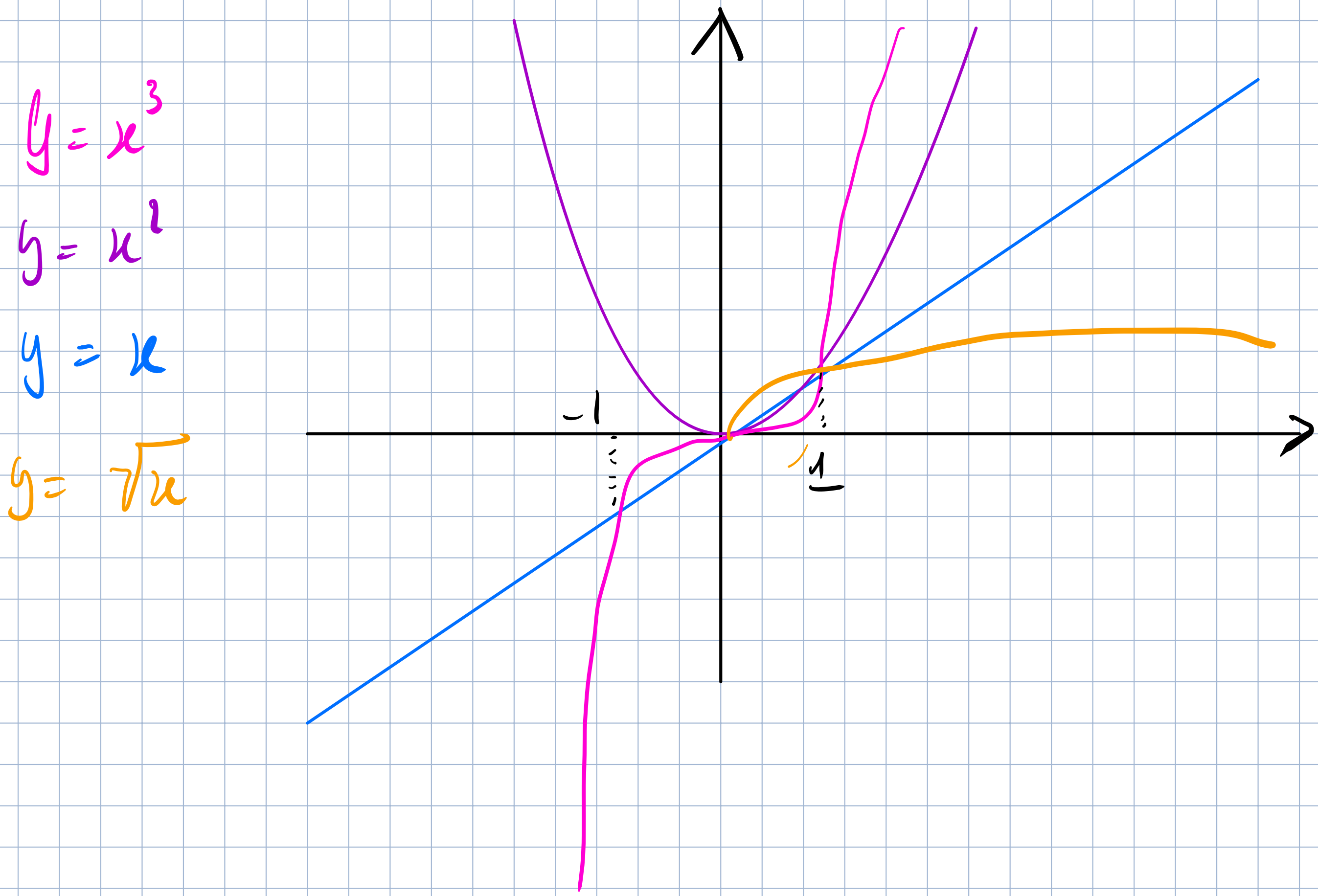


$Gr(f) = \{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ $\quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$ $\quad y = \sqrt{x}$



$Gr(f) = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$



$$f(x) = \sqrt{x^2-1}$$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$(x-1)(x+1) \geq 0$$

$x + 1 \geq 0$

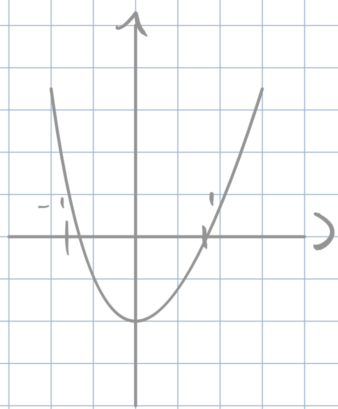
$x - 1 \geq 0$

	-1		1	
$-$		$+$		$+$
$-$		$-$		$+$
$+$		$-$		$+$

$x \leq -1$

$x \geq 1$

QUANDO SI TRATTA DI PARABOLE UN' ALTRO APPROCCIO È DISEGNARLE:



$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$x = \pm 1$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-5} \qquad D: x \neq 5$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} \qquad D: \mathbb{R}$$

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

f SI DICE INIETTIVA SE

$\forall\, x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

1) $y = x$	2) $y = x^2$
È INIETTIVA	NON INIETTIVA
È SURIETTIVA	NON SURIETTIVA

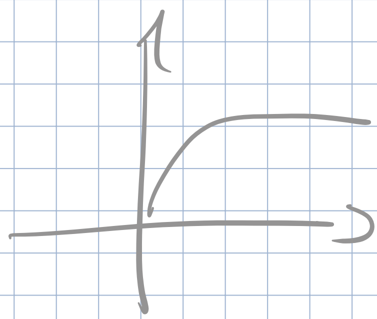
f SI DICE SURIETTIVA SE

$\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in D\ f(x) = y$

SI DICE BIETTIVA O BIUNIVOCA SE f È INIETTIVA E SURIETTIVA

$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists! \ x \in D : f(x) = y$

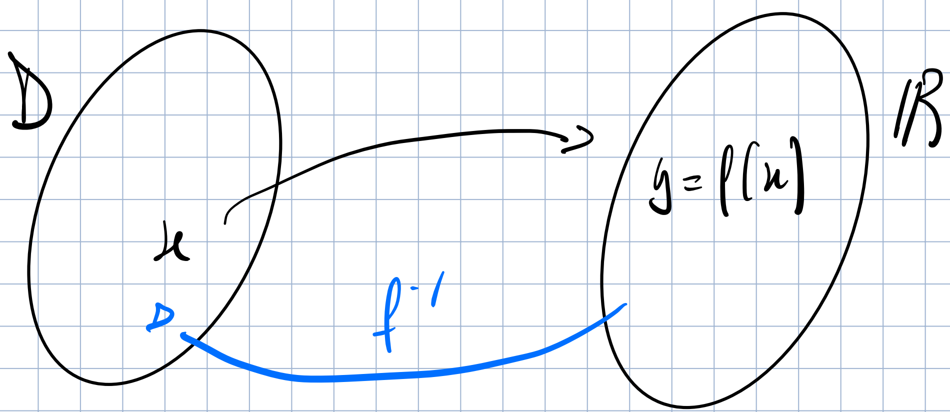
$f : \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}^+_0$



BIETTIVA

FUNZIONE INVERTIBILE / INVERSA

$f : D \to \mathbb{R} \qquad D \subseteq \mathbb{R}$



UNA FUNZIONE : $\forall x \in D \ \exists! \ y \in \mathbb{R} : f(x) = y$

BIETTIVA : $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists! \ x \in D : f(x) = y$

DUNQUE ESISTE f^{-1}.

$f : A \to B$ INVERTIBILE

$\Rightarrow \exists \ f^{-1} : B \to A$ TALE CHE

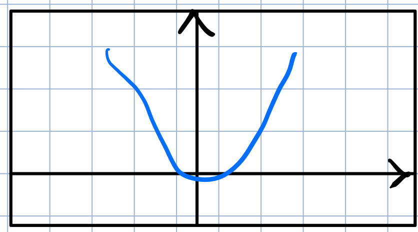
$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall \ x \in A \qquad f(f^{-1}(x)) = y \quad \forall \ y \in B$

FUNZIONE SIMMETRICA

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}$, D SIMMETRICO $(x \in D \Rightarrow -x \in D)$

SI DICE CHE f É PARI SE

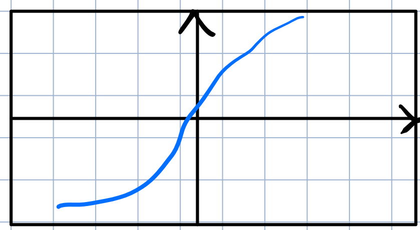
$$f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D$$



SIMMETRICA RISPETTO A Y

SI DICE CHE f É DISPARI SE

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall\, x \in D$$



SIMMETRICA RISPETTO ALL'ORIGINE

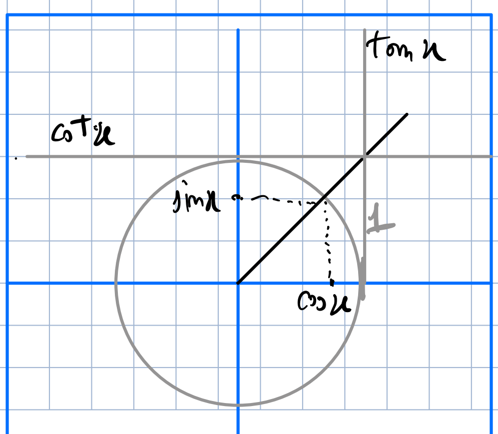
FUNZIONI PERIODICHE

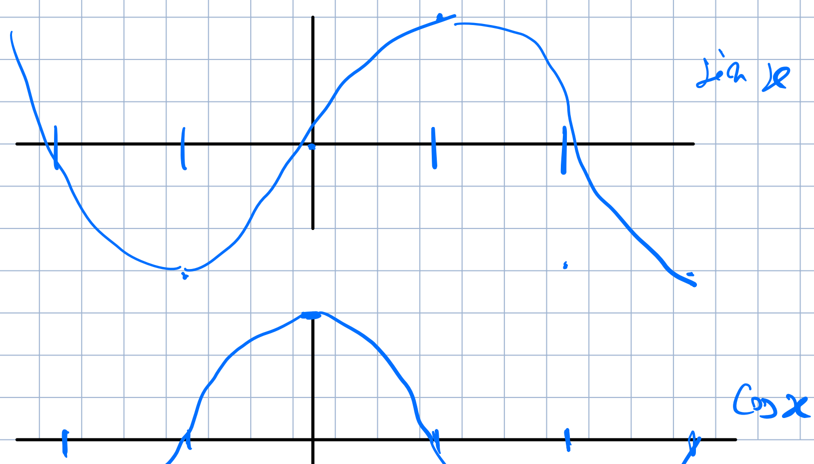
$f : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}$

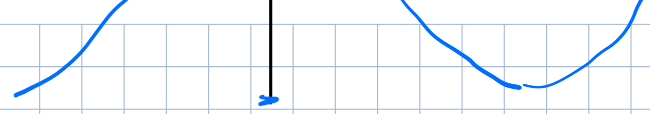
SI DICE CHE f É PERIODICA DI PERIODO T, SE T É IL PIÚ PICCOLO NUMERO REALE TALE CHE:

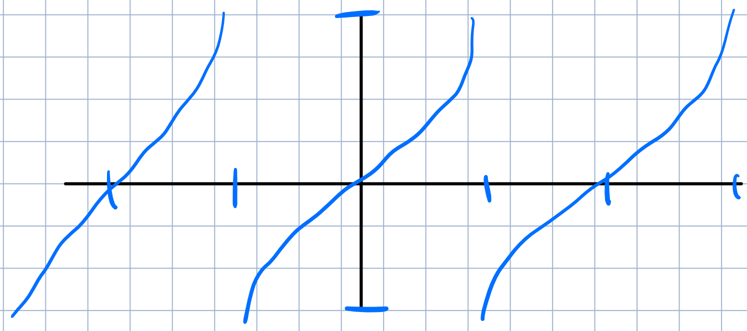
SE $\exists\, t > 0 : \; f(\underbrace{x+t}_{\text{PERIODO}}) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

SIN x e COS x SONO PERIODICI









$\tan x$

FUNZIONE LIMITATA

$f: D \to \mathbb{R}, \; D \subseteq \mathbb{R}$

SI DICE CHE f È

- LIMITATA SUPERIORMENTE :
  SE $\exists \, M \in \mathbb{R} \; : \; f(x) \leq M \quad \forall x \in D$
- LIMITATA INFERIORMENTE :
  SE $\exists \, m \in \mathbb{R} \; : \; f(x) \geq m \quad \forall x \in D$

ESEMPIO 2^x

- LIMITATA

$\exists \, m, M \in \mathbb{R} \quad m < M \; : \; m \leq f(x) \leq M$

ESEMPIO $\sin x$

FUNZIONI MONOTONE

$f: D \to \mathbb{R}, \; D \subseteq \mathbb{R}$

SI DICE CHE f È :

- CRESCENTE x :

STRETTAMENTE SE $<$

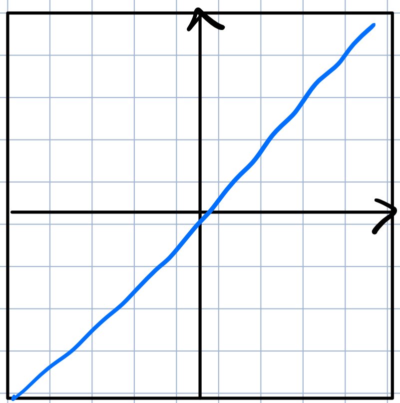
$$\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- DECRESCENTE x:

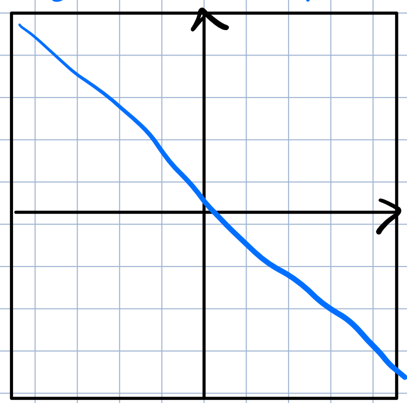
STRETTAMENTE SE $>$

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

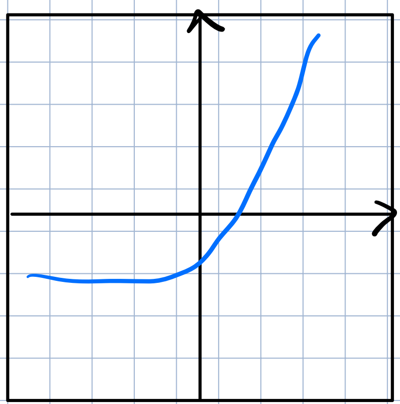
STR. CRESC.



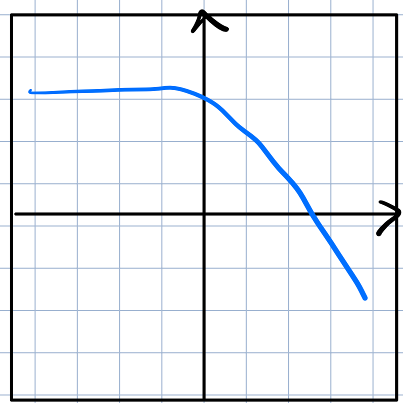
STR. DECR.



CRESC.

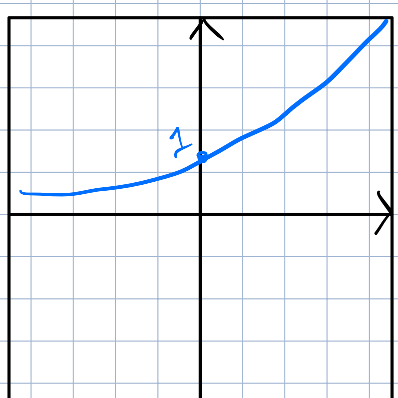


DECR.

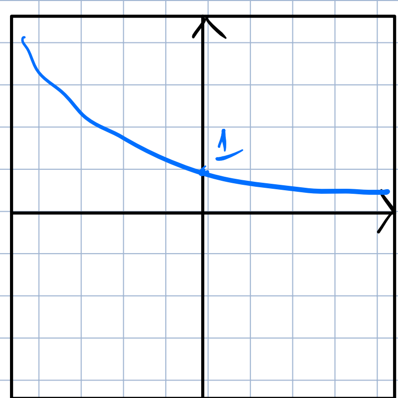


$$f(x) = a^x$$

$a > 1$



$0 < a < 1$



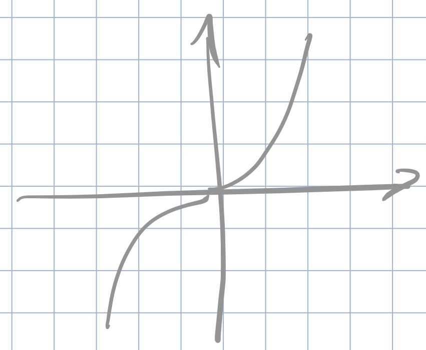
FUNZIONI A TRATTI

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

SI DICE CHE f É A TRATTI SE CONTIENE PIÚ ESPRESSIONI ANALITICHE.

Ex.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



OPERAZIONI TRA FUNZIONI

$f : D_1 \to \mathbb{R}$ $\quad D_1 \subseteq \mathbb{R}$

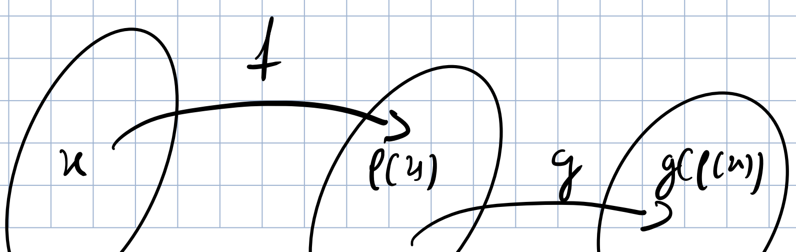
$g : D_2 \to \mathbb{R}$ $\quad D_2 \subseteq \mathbb{R}$

$f \pm g : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R} \quad x \to (f \pm g)(x) = f(x) + g(x)$

$f \cdot g : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R} \quad x \to (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

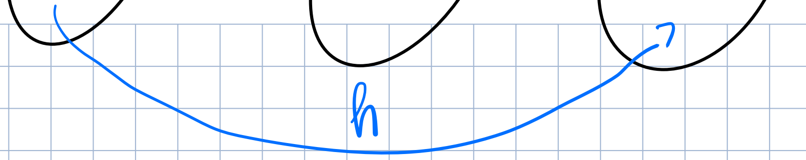
$f/g : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R} \quad g(x) \neq 0 \quad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI



$f(D_1) \subseteq D_2$

$(f(x) \in D_2 \ \forall x \in D_1)$



$$h : D_1 \to \mathbb{R} \qquad x \to h(x) = g(f(x))$$

Ex

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x+3$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

$g \circ f = (x+3)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

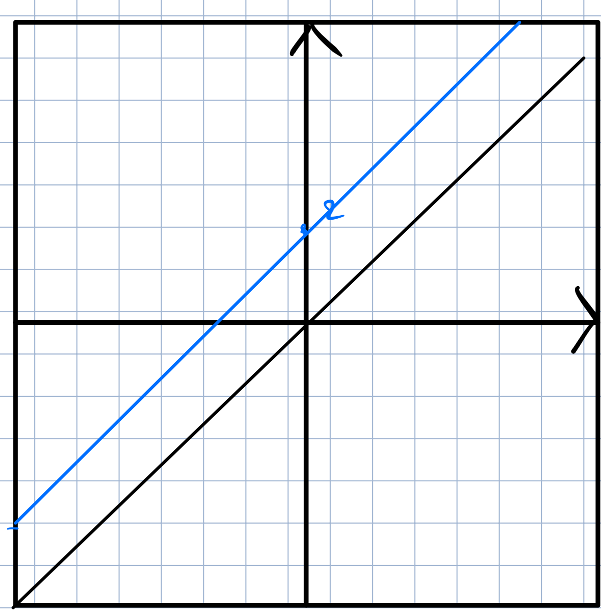
$f \circ g = x^2 + 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f \circ g \neq g \circ f$ NON COMMUTATIVA

OPERAZIONI SUI GRAFICI

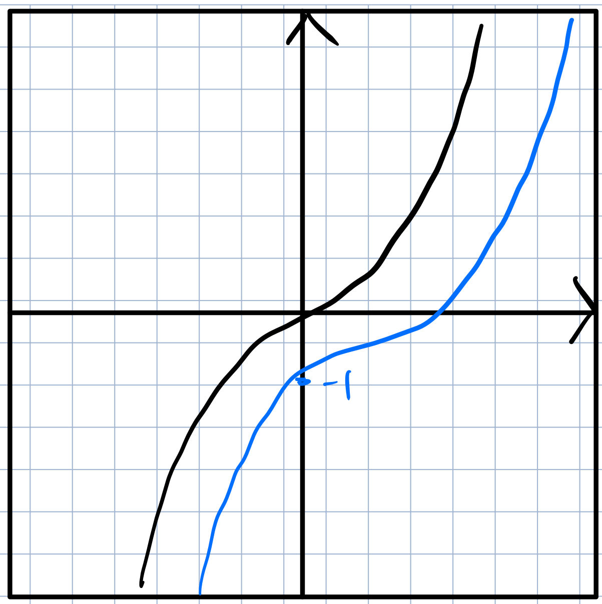
$f(x) = x$

$f(x) = x+2$



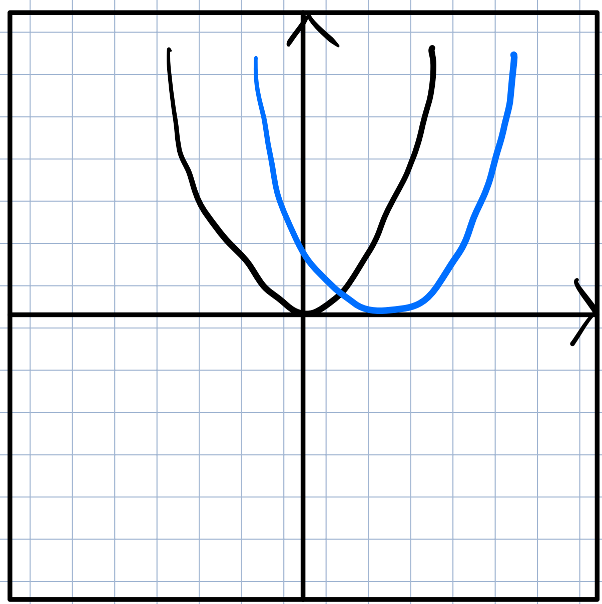
$f(x) = x^3$

$f(x) = x^3 - 1$



$f(x) = x^2$

$f(x) = (x-1)^2$

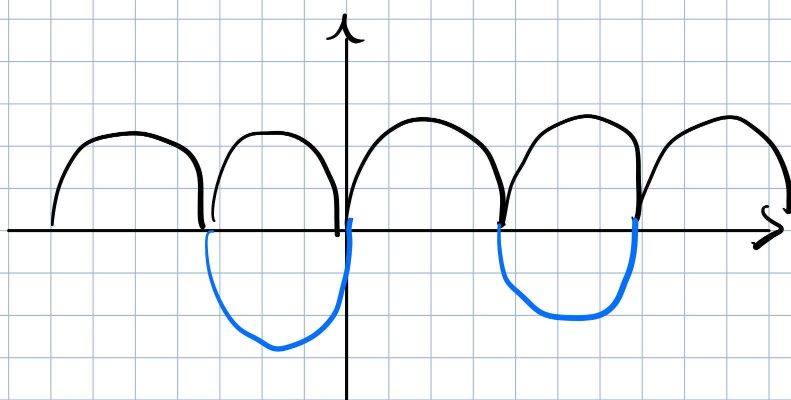


TRASLAZIONI SU X PROVOCANO SPOSTAMENTI A DESTRA E SINISTRA

TRASLAZIONI SU Y PROVOCANO SPOSTAMENTI IN ALTO E IN BASSO

$f(x) = |\sin x|$

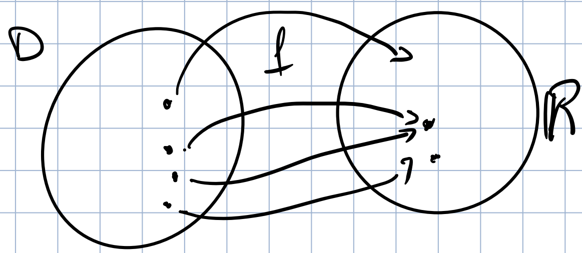
$f(x) = \sin x$



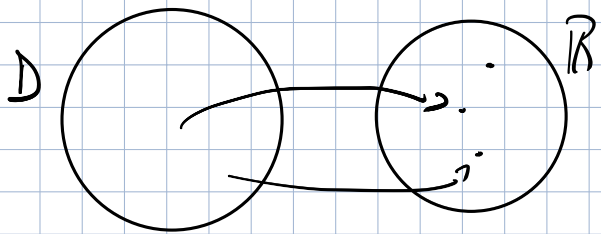
$$f(x) = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{se } \sin x > 0 \\ \sin x & \text{se } \sin x = 0 \\ \sin x & \text{se } \sin x < 0 \end{cases}$$

FUNZIONI INVERTIBILI (2)

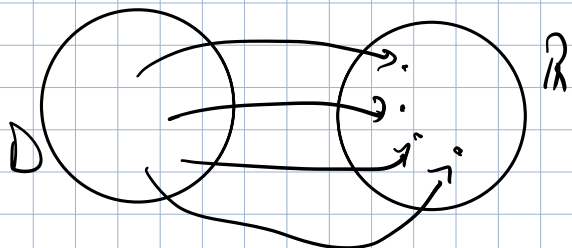
$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$



NON È INIETTIVA



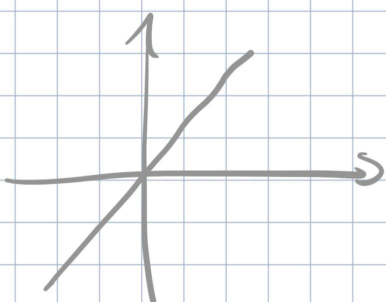
NON È SURIETTIVA



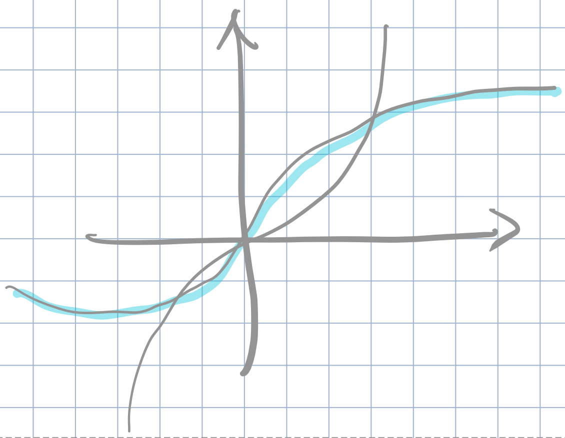
È BIETTIVA $\iff$ È INVERTIBILE

$$f \circ f^{-1} = id \qquad f^{-1} \circ f = id$$

Ex

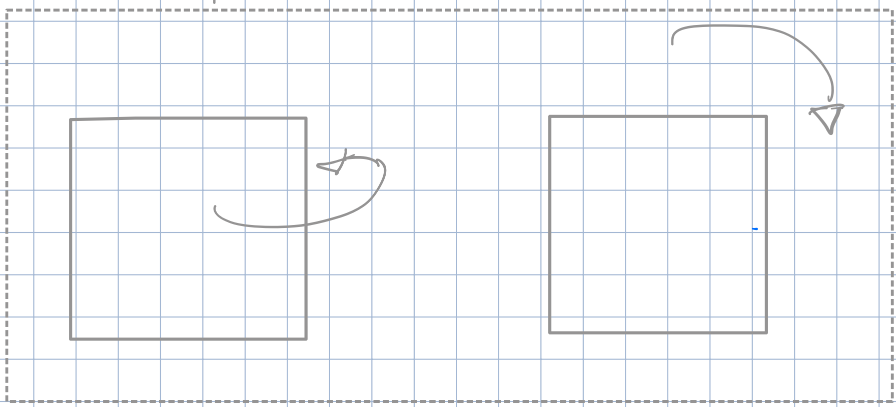


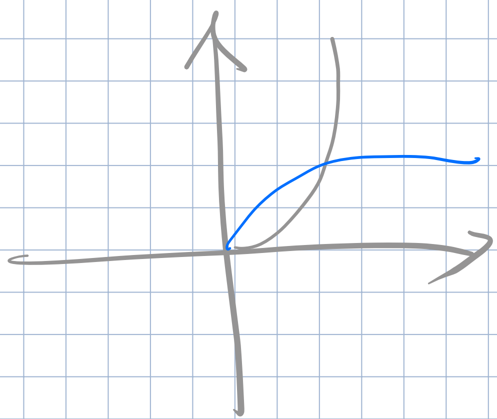
$f^{-1}(y = x) := y = x$



$y = x^3$

$y' = \sqrt[3]{x}$





$f(x) = x^2 \qquad f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

$$(x, y = f(x)) \in Graf(f)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = f^{-1}(y) \iff (y, x = f^{-1}(y)) \in Graf(f^{-1})$$

Dunque: $(x, y) \in Graf(f) \iff (y, x) \in Graf(f^{-1})$

Una funzione inversa è simmetrica rispetto a $y = x$

Teorema: $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}$

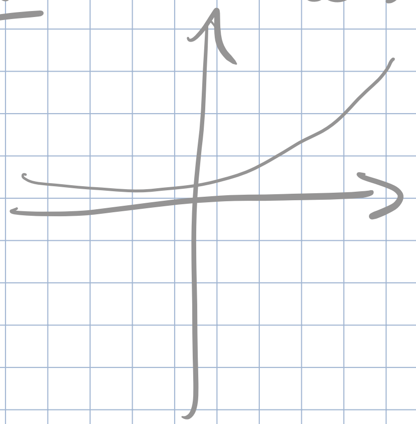
f strettamente monotona in D

$\Downarrow$

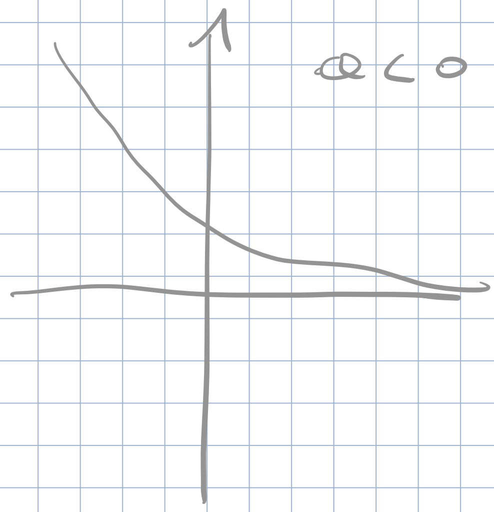
f è invertibile in D e f^{-1} è monotona nel dominio

Es

$a > 0, a \neq 1$



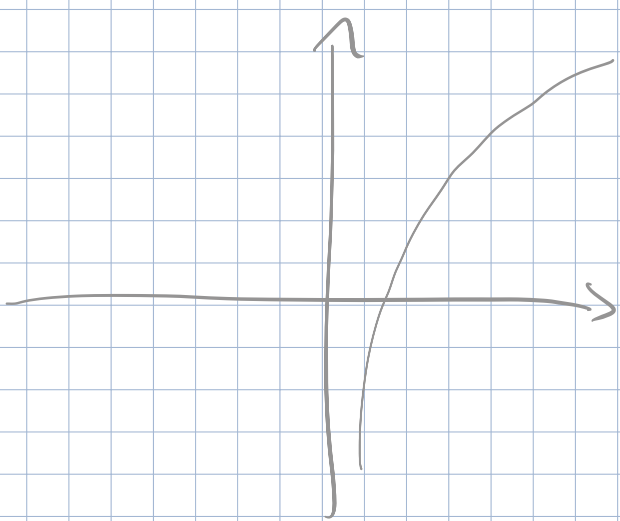
$a < 0$



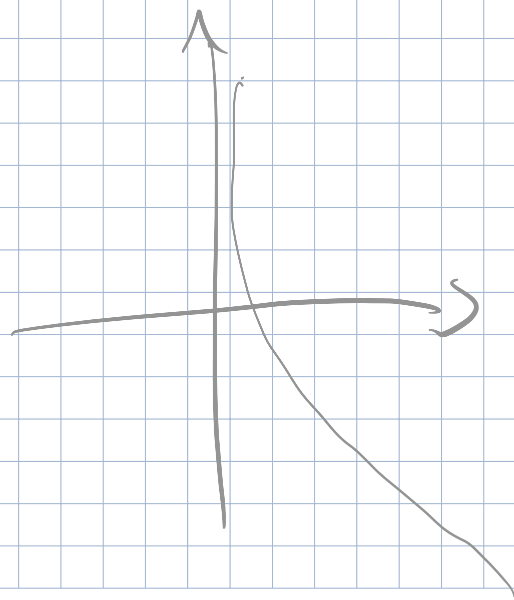
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad f(x) = a^x$

$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad f(x) = \log_a a^x$

$a > 0, a \neq 1$

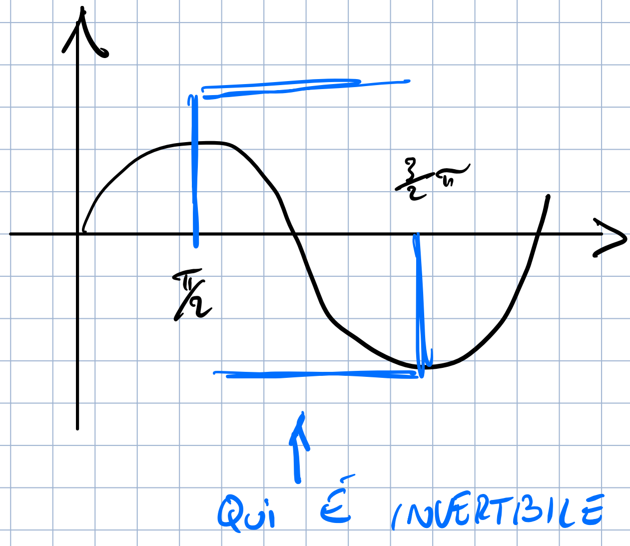


$a < 0$



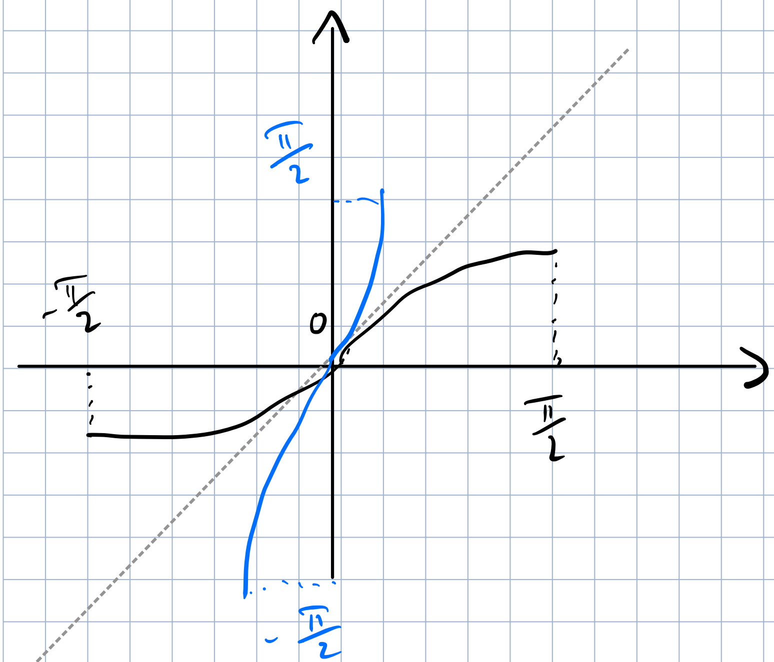
LE FUNZIONI PERIODICHE SONO INVERTIBILI SOLO RESTRINGENDO IL DOMINIO.

$$f(x) = \sin x$$
$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$



SOLTANTO SI INVERTE IL SENO IN $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

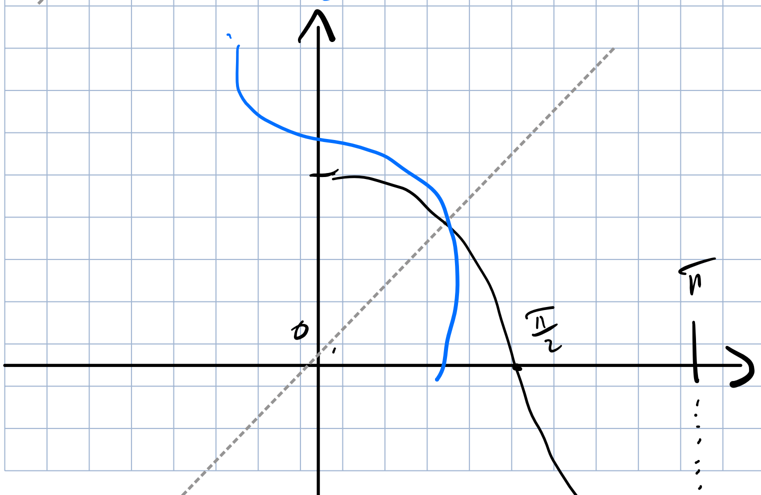
$$\exists f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$y \to f^{-1}(y) = \arcsin y$$



SAPENDO CHE

$$\sin x \leq x$$
$$\forall x \geq 0$$

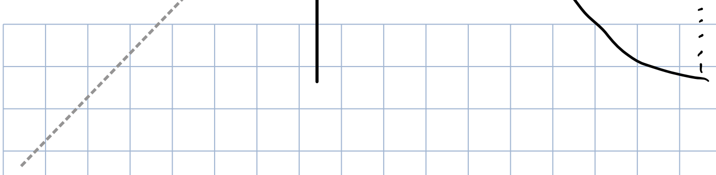
$\arcsin x$

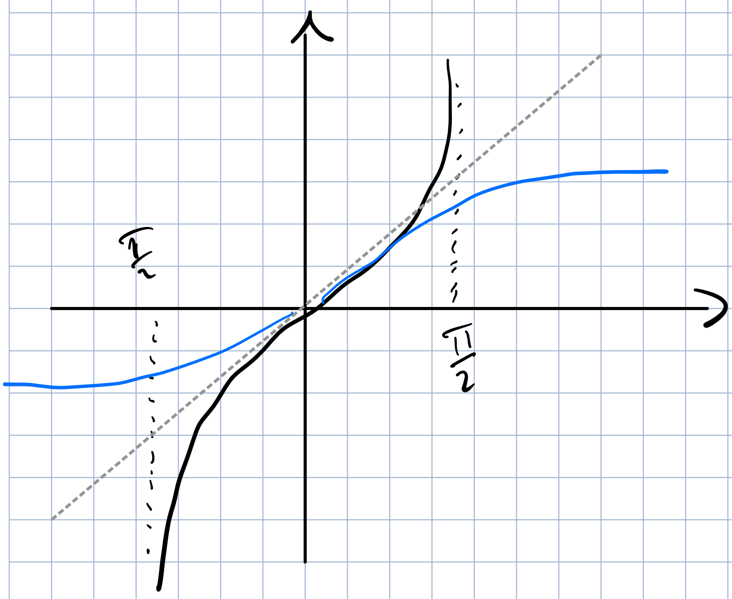


PER IL $\cos x$ SI PRENDE L'INTERVALLO $[0, \pi]$

$\cos x$

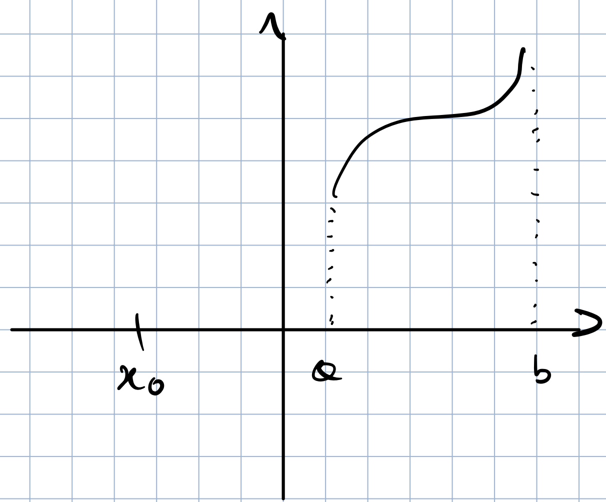
$arcosx$





$\tan x$

$\cot x$



$$f : D \to \mathbb{R} D = \mathbb{R}$$

$$x_0 \in D f\left(x_0\right)$$

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

POSSIAMO CHIEDERCI COME SI COMPORTA f VICINO AD x_0.

HA SENSO PARLARNE SOLO SE x^0 È VICINO AL DOMINIO.

Ex

$f(x) = \frac{1+x}{x}$ $\quad D = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad x_0 = 0$

SI DEFINISCE INTORNO (SFERICO) DI x_0 DI RAGGIO R.
CON $R > 0$ L'INTERVALLO:

$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - x_0| < r\} = (x_0 - r_1, x_0 + r)$$

$$r \in \mathbb{R}^+$$

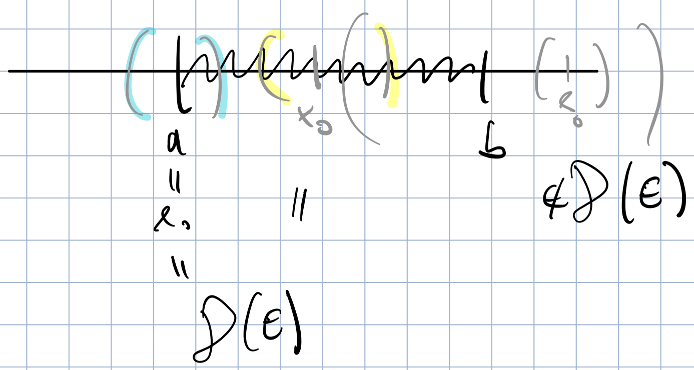
$E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

SI DICE CHE x_0 É UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER E SE IN OGNI INTORNO DI x_0 CADONO PUNTI DI E DIVERSI DA x_0, CIOÈ:

$$\forall\, I(x_0) \quad E \cap (I_{x_0} - \{x_0\}) \neq \emptyset$$

L'INSIEME DEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI E SI CHIAMA DERIVATO DI E E SI INDICA CON IL SIMBOLO $\mathcal{D}(E)$.
SE $x_0 \notin \mathcal{D}(E)$ ALLORA SI DICE PUNTO ISOLATO

$E = (a, b]$ $\qquad$ $\mathcal{D}(E) = [a, b]$



$E = \mathbb{Q}$ $\qquad \mathcal{D}(E) = \mathbb{R}$

$E = \{a\}$ $\qquad \mathcal{D}(E) = \emptyset$

TEOREMA: $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

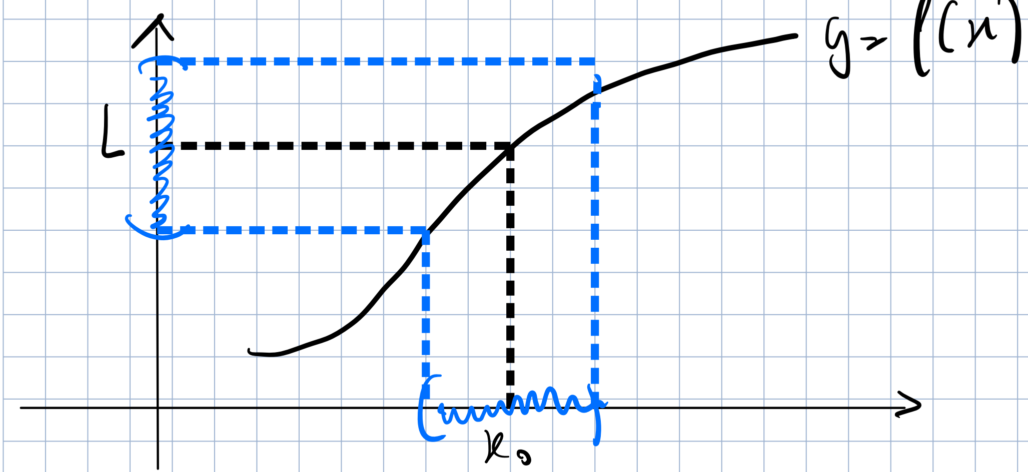
$x_0 \in \mathcal{D}(E)$ SE E SOLO SE IN OGNI INTORNO CADONO INFINITI ELEMENTI DI E.

$\Downarrow$

DI CONSEGUENZA SI HA CHE UN'INSIEME COSTITUITO DA UN NUMERO FINITO DI PUNTI NON HA PUNTI DI ACCUMULAZIONE.

LIMITE

PRENDIAMO $f : D \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathcal{D}(D)$, $x_0 \notin D$



STUDIARE IL COMPORTAMENTO DI f VICINO AD x_0 SIGNIFICA STUDIARE $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

SI DICE $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ SE È POSSIBILE RENDERE $f(x)$ VICINO AD L QUANTO VOGLIAMO PUR DI SCEGLIERE x ABBASTANZA VICINO AD x_0.

i.e. È POSSIBILE RENDERE $|f(x)-L|$ PICCOLO QUANTO VOGLIAMO PUR DI SCEGLIERE $|x-x_0|$ ABBASTANZA PICCOLO.

DUNQUE:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D, \ 0 < |x-x_0| < \delta$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

SI PARTE DALL' INTORNO DI L NON DA QUELLO DI x_0.

<u>TEOREMA</u>: $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = M, \quad L, M \in \mathbb{R}$$

ALLORA:

① $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = L \pm M$

② $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = L \cdot M$

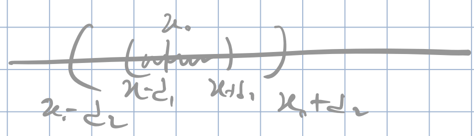
③ Se $M \neq 0$ ALLORA $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

DIM DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE SI HA CHE

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ d_1 = d_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D, \ 0 < |x - x_0| < d_1 \Rightarrow \underline{|f(x) - L| < \varepsilon}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ d_2 = d_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D, \ 0 < |x - x_0| < d_2 \Rightarrow \underline{|g(x) - M| < \varepsilon}$

PRENDIAMO $d = \min\{d_1, d_2\}$



SUPPONENDO CHE $d_1 < d_2$, SE VALE IN d_1 VALE IN d_2.

PROVIAMO ①:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |f(x) - L + g(x) - M| =$$

$$= |f(x) - L| + |g(x) - M| < 2\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = M + L$$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

$f(x) : D \to \mathbb{R}, \ D \subseteq \mathbb{R}, \ x_0 \mathcal{D}(D)$

SE $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ ALLORA TALE LIMITE È UNICO.

DIM (PER ASSURDO)

SUPPONIAMO CHE: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$

con $L_1 \neq L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ d_1 = d_1(\varepsilon)>0 : \forall x\in D,\ 0<|x-x_0|<d_1 \Rightarrow \underline{|f(x)-L_1|<\varepsilon}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ d_2 = d_2(\varepsilon)>0 : \forall x\in D,\ 0<|x-x_0|<d_2 \Rightarrow \underline{|f(x)-L_2|<\varepsilon}$

Sia $d = \min(d_1, d_2)$

$$0 < |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \le |f(x)-L_1| + |f(x)-L_2|$$

$$\underline{\forall x\in D \quad 0<|x-x_0|<d < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon}$$

sse

$$|L_1 - L_2| = 0 \Rightarrow L_1 = L_2 \text{ ASSURDO}$$

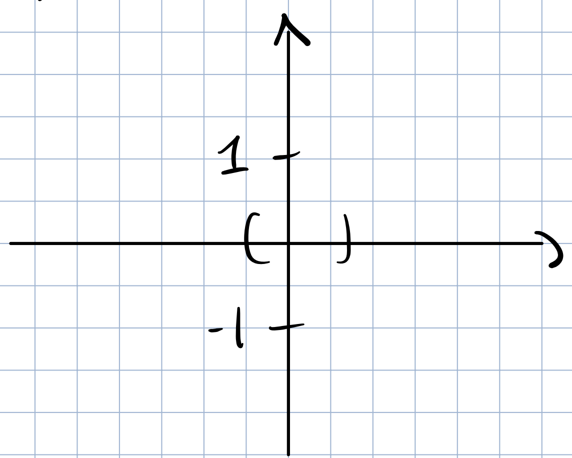
NON ESISTENZA DEL LIMITE

$f(x) = \cos\frac{1}{x}$ $\qquad D := \mathbb{R}-\{0\}$ $\qquad 0 \in \mathcal{D}(D)$

$\lim_{x\to x_0} \cos\frac{1}{x} \nexists$

$f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \cos(2k\pi) = 1$

$f\left(\frac{1}{2k\pi+\pi}\right) = \cos(\pi+2k\pi) = -1$



TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$

SE $L > 0$ ALLORA ESISTE I_{x_0} TALE CHE:

$$\forall x \in D \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \quad f(x) > \frac{L}{2}$$

E QUINDI f È POSITIVA IN I_{x_0}.

DIM. DALLA DEFINIZIONE DI LIM, SI HA:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, d = d(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D, \; 0 < |x - x_0| < d \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Sia $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ (POICHÉ $L > 0$) ALLORA SI HA CHE:

$$f(x) > L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \qquad f(x) < L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

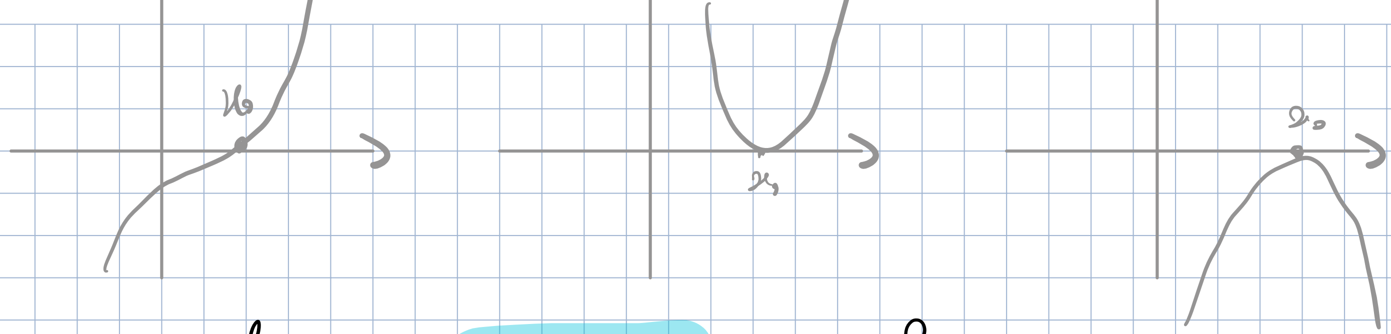
SE $L < 0$ ALLORA ESISTE I_{x_0} TALE CHE:

$$\forall x \in D \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \quad f(x) < \frac{L}{2}$$

E QUINDI f È NEGATIVA IN I_{x_0}.

SE $L = 0$ IL TEOREMA NON VALE.

Ex



SI DICE CHE f HA LA DEFINITIVAMENTE PROPRIETÀ P PER $x \to x_0$ SE:

$\exists\, I_{x_0}$ INTORNO DI x_0 : $\forall x \in D \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\})$ $f(x)$ HA P

TEOREMA:

$$f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in \mathcal{D}(D)$$

$\exists\, I_{x_0}$ INTORNO DI x_0 : $\forall x_0 \in D \cap (I_{x_0} / \{x_0\})$

$$f(x_0) \underset{(<)}{\le} g(x)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = M \implies L \le M$$

DIM (PER ASSURDO) + PERMANENZA DEL SEGNO

$$L > M \qquad \lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L - M > 0$$

DUNQUE $(f(x) - g(x))$ È POSITIVA PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO.

ASSURDO PERCHÉ $f(x) \le g(x)$.

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI:

$$f, g, h : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in \mathcal{D}(D)$$

$\exists\, I_{x_0}$ INTORNO DI x_0 : $\forall x_0 \in D \cap (I_{x_0} / \{x_0\})$

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x) = L \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

DIM: DALLA DEF DI LIMITE SI HA CHE:

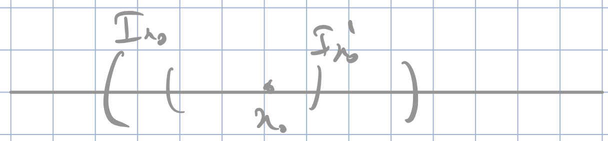
$$\forall I_L \ \exists I'_{x_0} : \forall x \in D \cap (I'_{x_0} \setminus \{x_0\}) \quad f(x) \in I_L \ \ g(x) \in I_L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists d' = d(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D, \ 0 < |x - x_0| < d'$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \qquad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < L + \varepsilon$$

$$\forall x \in D \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\})$$



$$d = \min(d, d') = I'_{x_0}$$

QUINDI $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

PROPOSIZIONE: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists d = d(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D, \ 0 < |x - x_0| < d \Rightarrow \big| f(x) \big| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

COROLLARIO: (TEOREMA DEI CARABINIERI)

$h, f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$ g LIMITATA IN D.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (f \text{ è INFINITESIMA PER } x \to x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

DIM. POICHÉ g È LIMITATA IN D:

$$\exists M > 0 : |g(x)| \leq M \quad \forall x \in D$$

ALLORA

$$0 < |f(x) \cdot g(x)| \leq \underbrace{M \cdot \underbrace{|f(x)|}_{\text{TENDE A } 0}}_{\text{TENDE A } 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x) \cdot g(x)| = 0$$

Ex.

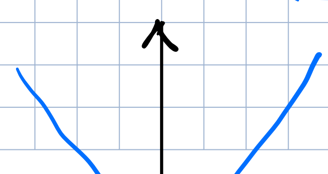
1. $\lim_{x \to 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)$

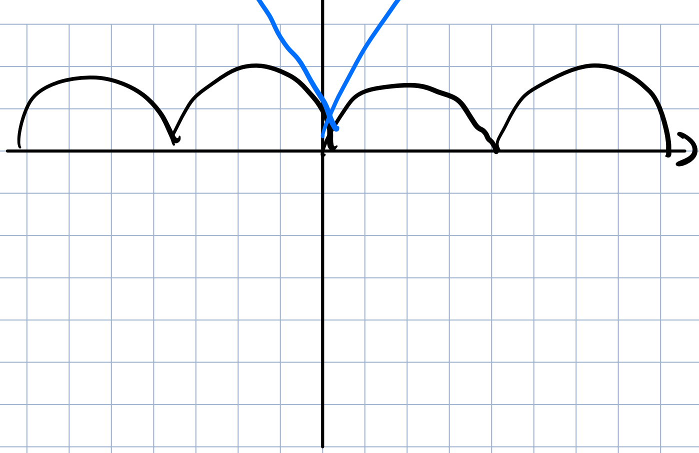
$\sin \frac{1}{x}$ è LIMITATA $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$

$\lim_{x \to x_0} \left(\sin \frac{1}{x}\right) \nexists$

2. $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

$$0 \leq |\sin x| \leq |x|$$





$$\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} x = 0 \implies \lim_{x \to x_0} \sin x = 0$$

3 $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ $\quad 0 < \cos x \le 1 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$0 \le \cos x - 1 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}(1+\cos x) = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x} =$$

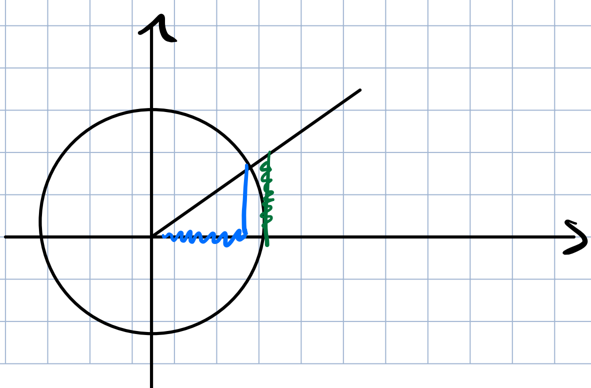
$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos} < \underline{\sin^2 x}$$

TENDE A 0

$$\lim_{x \to 0} (1-\cos x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} (\cos x) = \lim_{x \to 0} (\cos x + 1 - 1) = \lim_{x \to 0} (\cos x - 1) + \lim_{x \to x_0} (1) = 1$$

5 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to x_0} x = 0$ QUINDI NON SI PUÒ USARE $\frac{M}{L}$.



$$0 < \sin x < x < \tan x$$

$$0 < 1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{\tan x}{\sin x} \quad \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

$\underline{\text{DISRAMU}} = \text{PAMU}$
DISRAMU

RAMU

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq 1$$

5 $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1} \underbrace{\frac{1}{\cos x + 1}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

6 $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$ IPSE DIXIT

7 $$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$ IPSE DIXIT

8 $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2}$$ $y = \sqrt{x}$ $$\frac{1-\cos y}{y^2} \xrightarrow[y \to 0]{} \frac{1}{2}$$

9 $$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = 1$$

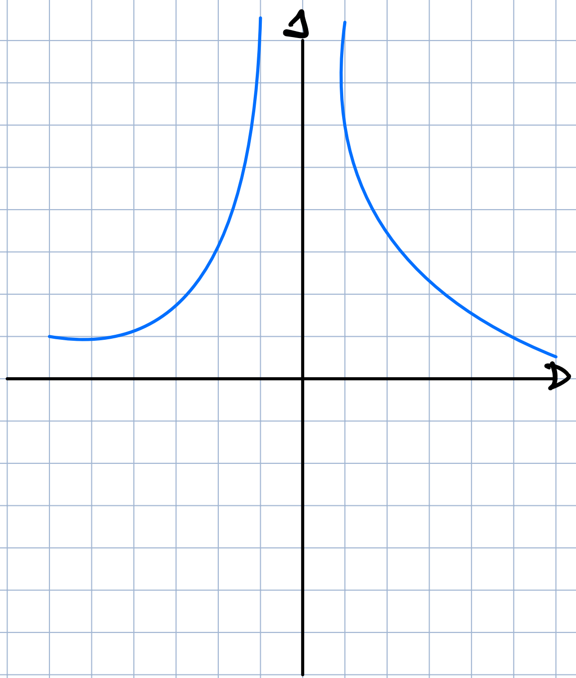
$$y = x-2$$

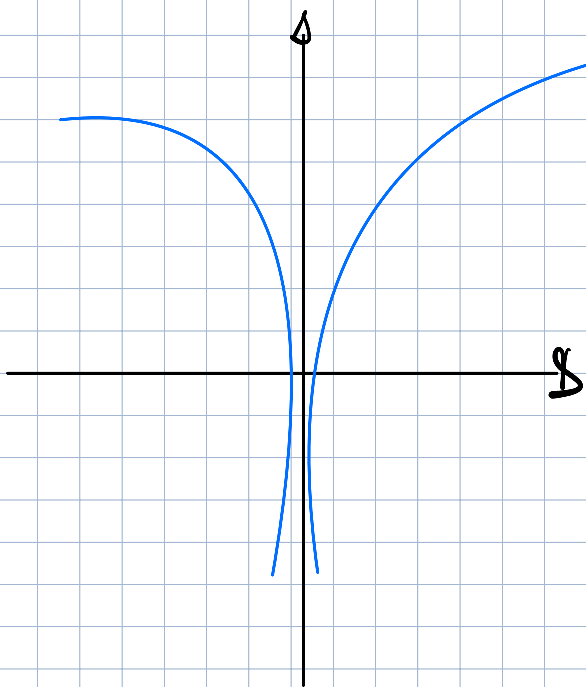
$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{\frac{\sin(x-2)}{x-2}} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1$$

LIMITI INFINITI

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad g(x) = \log|x|$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$





$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty$$

$x = 0$ È UN ASINTOTO VERTICALE PER f

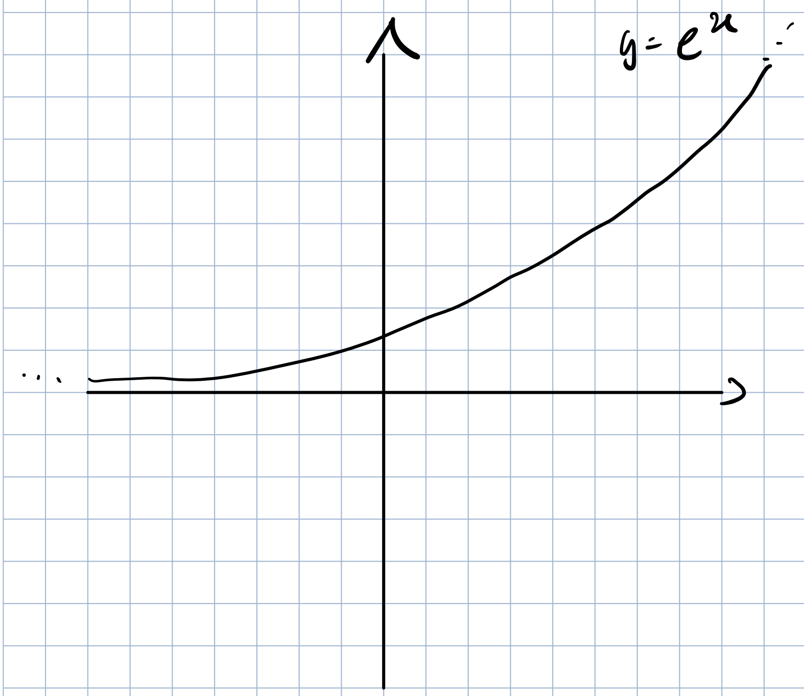
DEFINIZIONE FORMALE:

$f : D \to \mathbb{R}, \ D \subseteq \mathbb{R}, \ x_0 \in \mathcal{D}(D)$

SI DICE $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ SE E SOLO SE

$+\infty$ $\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(M) > 0 \ | \ \forall x \in D \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

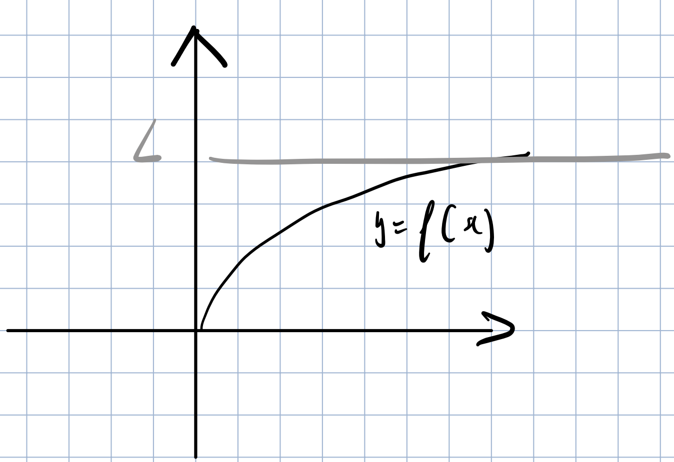
$-\infty$ $\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(M) > 0 \ | \ \forall x \in D \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$



$\lim_{x \to +\infty} e^x$

$\lim_{x \to -\infty} e^x$

HA SENSO SOLO QUANDO IL DOMINIO È ILLIMITATO (SUP O INF)



$+\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 :$
$\forall x \in D, \ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$-\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 :$
$\forall x \in D, \ x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

I teoremi enunciati fino ad ora valgono per quelli infiniti.

Supponiamo che i due limiti esistono:

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} (f(x)+g(x))$
L	M	$L+M$
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x))$
L	M	$L \cdot M$
$L > 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$L < 0$	$\mp\infty$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\mp\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$
L	$M \neq 0$	$\frac{L}{M}$
L	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$M > 0$	$\pm\infty$

$\pm$ $\qquad$ $M < 0$ $\qquad$ $+\infty$

$L > 0$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $\begin{cases} +\infty & \text{se } g(x) > 0 \text{ vicino a } x_0 \\ -\infty & \text{se } g(x) < 0 \text{ vicino a } x_0 \\ \nexists & \text{se } g(x) \text{ cambia segno} \end{cases}$

$L < 0$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $\begin{cases} -\infty & \text{se } g(x) > 0 \text{ vicino a } x_0 \\ +\infty & \text{se } g(x) < 0 \text{ vicino a } x_0 \\ \nexists & \text{se } g(x) \text{ cambia segno} \end{cases}$

FORME INDETERMINATE:

$+\infty \pm -\infty$

$0 \cdot \pm\infty$

∞ / ∞

$0 / 0$

$1 ^ \infty$

$\pm\infty ^ 0$

$0 ^ 0$

PER $\frac{\infty}{0}$ POSSO RISCRIVERLO COME $\infty \cdot \frac{1}{0}$ E UTILIZZO QUESTO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) \qquad \lim_{x \to x_0} \left(f(x)^{g(x)} \right)$$

$$L > 0 \qquad M \qquad L^M$$

Ex

1 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3} = \left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\infty} \right) = +\infty$$

2 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = \frac{\overbrace{x^2 - 1}^{\to -1}}{\underbrace{x^4}_{\to 0}} = -\infty$

3 $\lim_{x \to 0} \frac{2}{\underbrace{|x|}_{\to 0}} = +\infty$

4 $\lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{x}^{\to 1}}{\underbrace{|x-1|}_{\to 0}} = +\infty$

5 $\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\sin(\cos x)}^{\to \sin 1}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} = +\infty$

6 $\lim_{x \to 0} e^{\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to +\infty}} = +\infty$

7 $\lim_{x \to 1} \log \left(\frac{1}{(x-1)^2} \right) = +\infty$

8 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = 0$

9 $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

10 $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \sin x \cdot \frac{1}{x} = 0$

$\sin x$ LIMITATA, $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x}{2x^3 + 1} = \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{2}$

2 $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x + 3}{4x^4} = \frac{x\left(5 + \frac{3}{x}\right)}{4x^4} = 0$

3 $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^4 + 3}{x + 7} = \frac{x^4\left(4 + \frac{3}{x^4}\right)}{x\left(1 + 7/x\right)} = +\infty$

QUANDO CI SI TROVA NEI CASI DI POLINOMIO / POLINOMIO, CHE TENDONO A $\pm\infty$:

$$P(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$$

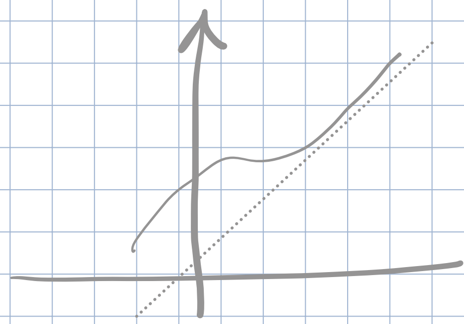
$$Q(x) = b_m x^m + \ldots b_1 x + b_0$$

$a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i = 1 \ldots n$, $j = 1 \ldots m$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty & n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

ASINTOTI DI UNA FUNZIONE

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

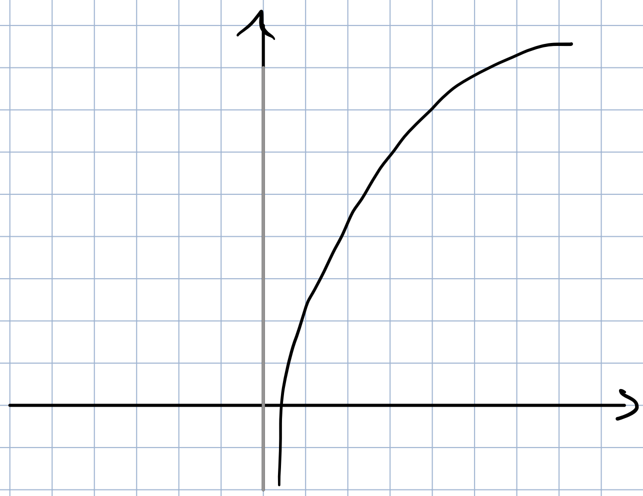


SI DICE CHE f HA **ASINTOTO VERTICALE** SE:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$

EX

$$f(x) = \log_2 x$$

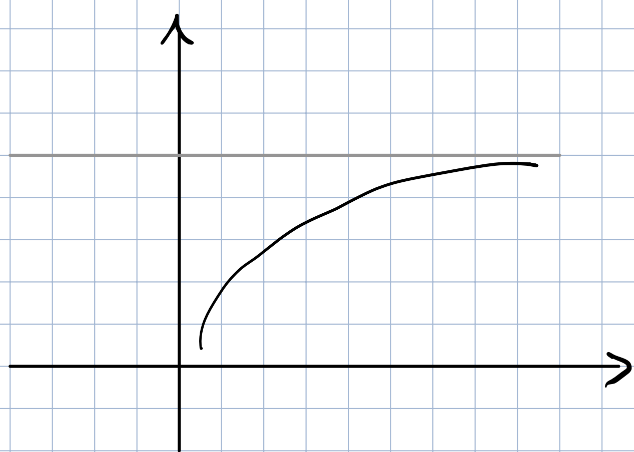


$$\lim_{x \to 0^+} \log_2(x) = -\infty$$

SE D É ILLIMITATO:

SI DICE CHE f HA UN **ASINTOTO ORIZZONTALE** PER $x \to +\infty \ (-\infty)$ SE:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$



$y = L$ ASINTOTO ORIZZONTALE

COSA SUCCEDE SE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$?

f POTREBBE AVERE UN' ASINTOTO OBLIQUO.

PROPOSIZIONE: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ illimitato

f AMMETTE **ASINTOTO OBLIQUO** PER $x \to +\infty$ SE E SOLO SE

1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\
&\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \\
&\lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty \\
&\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty
\end{aligned}\right\} f \text{ è un infinito per } x \to x_0$$

TEOREMA GERARCHIA DEGLI INFINITI

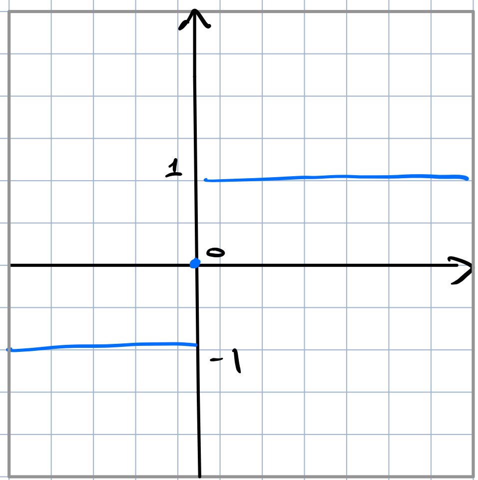
SIANO $\alpha > 0$ e $a > 1$. ALLORA:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty$$

i.e. LE FUNZIONI $y = a^x$, $y = x^\alpha$, $y = \log_a x$ SONO INFINITI PER $x \to +\infty$ ORDINABILI, DAL PIÙ GRANDE AL PIÙ PICCOLO.

LIMITE DESTRO E SINISTRO

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

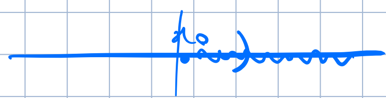


$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$$

$$\nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$$

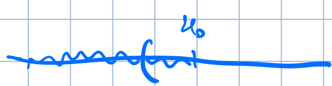
DEF.

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}^+(D)$ — PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA DESTRA



$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \ \ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| > \varepsilon$$

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}^-(D)$ — PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA SINISTRA



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \ \ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

TEOREMA

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}^+(D)$, $x_0 \in \mathcal{D}^-(D)$ $\quad L \in \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

GRAZIE A QUESTO TEOREMA POSSIAMO STABILIRE SE UNA FUNZIONE NON AMMETTE LIMITE.

Ex.

1 $\displaystyle \lim_{x \to 0} 3^{\frac{1}{x}} = \nexists$ $\qquad \displaystyle \lim_{x \to 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{+\infty} = +\infty$ $\qquad \displaystyle \lim_{x \to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{-\infty} = 0$

2 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists$ $\qquad \displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\qquad \displaystyle \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

3 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

TEOREMA: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ MONOTONA

ALLORA:

a $\forall x_0 \in (a,b)$ ESISTONO FINITI

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

b NEGLI ESTREMI DELL'INTERVALLO

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

ESISTONO EVENTUALMENTE INFINITI

SUCCESSIONE NUMERICA

UNA SUCCESSIONE È UNA FUNZIONE

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \to a(n) = \underline{a_n}$$

INDICE DELLA SUCCESSIONE

TERMINE DELLA SUCCESSIONE

IN GENERE SI INDICA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_n$

<u>Ex</u>

1. $n \to n^2$ $\quad 1, 4, 9, 16, 25 \ldots$ NON
2. $n \to \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ LIMITATA
3. $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ LIMITATA
4. $((-1)^n)_n$ $\quad -1, 1, -1, 1, -1 \ldots$ LIMITATA
5. $a_n = 3 \ \forall n$ $\quad 3, 3, 3 \ldots$ LIMITATA

MONOTONA

$a_n \le a_m \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

CRESCENTE

$a_n \le a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

DECRESCENTE

$a_n \ge a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

NEL CASO DEI NUMERI NATURALI HA SENSO SOLO FARE $\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$,

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, N = N(\varepsilon) > 0 : \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n > N \Rightarrow |a_n - L| < L$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \; (-\infty)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, M > 0 \; \exists\, N = N(M) > 0 : \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n > N \quad a_n > M$$

$(< -M)$

TEOREMA

SE a_n È MONOTONA $\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} a_n$

SE È ANCHE LIMITATA, IL LIMITE È FINITO,
IN QUEL CASO SI DICE CONVERGENTE.
IN CASO CONTRARIO È DIVERGENTE.

SE NON ESISTE IL LIMITE SI DICE INDETERMINATA o IRREGOLARE.

Ex

1 $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

2 $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n = \nexists$

3 $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{e^n} = 0$

4 $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$ $\qquad n! = n(n-1) \cdots 1 \geq \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{n}}$

5 $\lim_{n \to +\infty} \left(\overbrace{(-1)^n}^{\text{LIM}} \cdot \underset{0}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{n}}}\right) = 0$

6 $\lim_{n \to \infty} n^n = \lim_{n \to \infty} e^{n \log n} = +\infty$

7 $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad a \in \mathbb{R}$

$|a| \leq 1 \qquad 0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!} \to 0$

$|a| \geq 1 \qquad |a| < k$

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{k^n}{n!}\right| = \frac{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k \cdot k}{1 \cdot \ldots \cdot k(k+1)} = \frac{k^k}{k!} \frac{k}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

8) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1) \ldots 1}{n \cdot n \ldots n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ORDINE DEGLI INFINITI DELLE SUCCESSIONI

$n^n, \; n!, \; a^n, \; n^\alpha, \; \log_a n \qquad a > 1, \; \alpha > 0$

FUNZIONI CONTINUE

$f: D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}, \quad x_0 \in D$

SI DICE CHE f È CONTINUA IN x_0 SE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D \; |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \varepsilon$

DUNQUE PICCOLE VARIAZIONI IN x_0 PRODUCONO PICCOLE VARIAZIONI IN $f(x_0)$.

DA TALE DEFINIZIONE:

f È CONTINUA IN $x_0 \in D$ SE:

$$x_0 \in \mathcal{D}(D) \quad e \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

OPPURE

$$x_0 \in \mathcal{J}_0(D)$$ PUNTO ISOLATO

SI DICE CHE f È CONTINUA IN $E \subseteq D$ SE f È CONTINUA IN OGNI PUNTO DI E.

Es

1 $f(x) = a \quad a \in \mathbb{R}$

$D = \mathbb{R}, \quad x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} a = a = f(x_0)$$

2 $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$

$D = \mathbb{R}, \quad x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^n = \lim_{x \to x_0} x \dots x = x_0^n = f(x_0)$$

3 $f(x) = \sin x \qquad D = \mathbb{R}, \; x_0 \in D$

PER DEF: $\lim_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0)$

FORMULA DI PROSTAFERESI

$$0 \le |\sin x - \sin x_0| = \left| -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$$\le 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \left|\cos \frac{x - x_0}{2}\right|$$

$$\le 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$|\sin x| \le |x|$

$$\le 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$$\le |x - x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

4 $f(x) = \cos x$ $D = \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

PER DEF: $\lim_{x \to x_0} (\cos x - \cos x_0) = 0$

FORMULA DI PROSTAFERESI

$$0 \le |\cos x - \cos x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2} \right|$$

$$\le 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \left|\cos \frac{x - x_0}{2}\right|$$

$$\le 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$|\sin x| \le |x|$

$$\le 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right|$$

$$\le |x - x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

5 $f(x) = e^x$

$$\lim_{x \to x_0} e^x - e^{x_0} = e^{x_0}\left(e^{x-x_0} - 1\right) = \overset{\text{UN NUMERO}}{e^{x_0}} \underbrace{\frac{\left(e^{x-x_0} - 1\right)}{x - x_0}}_{1} \underbrace{(x - x_0)}_{0}$$

$$= 0$$

IN GENERALE $f(x) = a^x$

$a > 0$

$a \neq 1$

6 $f(x) = \log(x)$ $\quad D = \mathbb{R}^+$, $x_0 \in D$

$$\lim_{x \to x_0} \log(x) = \log(x - x_0 + x_0)$$

$$= \log\left(x_0\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right) + 1\right)$$

$$= \log x_0 + \log\left(\frac{x - x_0}{x_0} + 1\right)$$

$$\lim_{x \to x_0}\left(\log x_0 + \underbrace{\frac{\log\left(\frac{x - x_0}{x_0} + 1\right)}{\frac{x - x_0}{x_0}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{x - x_0}{x_0}}_{0}\right)$$

$$= \log x_0$$

7 $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ x & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

SI PERCHÉ x^n $n=1$ LO È

$\lim_{x \to 0} = 0 = |0|$

PERCHÉ

$\lim_{x \to x_0} -(x) = -x_0$

TEOREMA (ALGEBRA DELLE FUNZIONI CONTINUE)

$f, g : D \to \mathbb{R}, \; D \subseteq \mathbb{R}, \; x_0 \in D$

f, g CONTINUE IN x_0

ALLORA:

1. $f \pm g$ È CONTINUA IN x_0
2. $f \cdot g$ È CONTINUA IN x_0
3. SE $g(x_0) \neq 0$ ALLORA $\frac{f}{g}$ È CONTINUA IN x_0

DIM. SEGUE DALL'ANALOGO TEOREMA SUI LIMITI

COME CONSEGUENZA:

a) I POLINOMI

b $\frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q POLINOMI

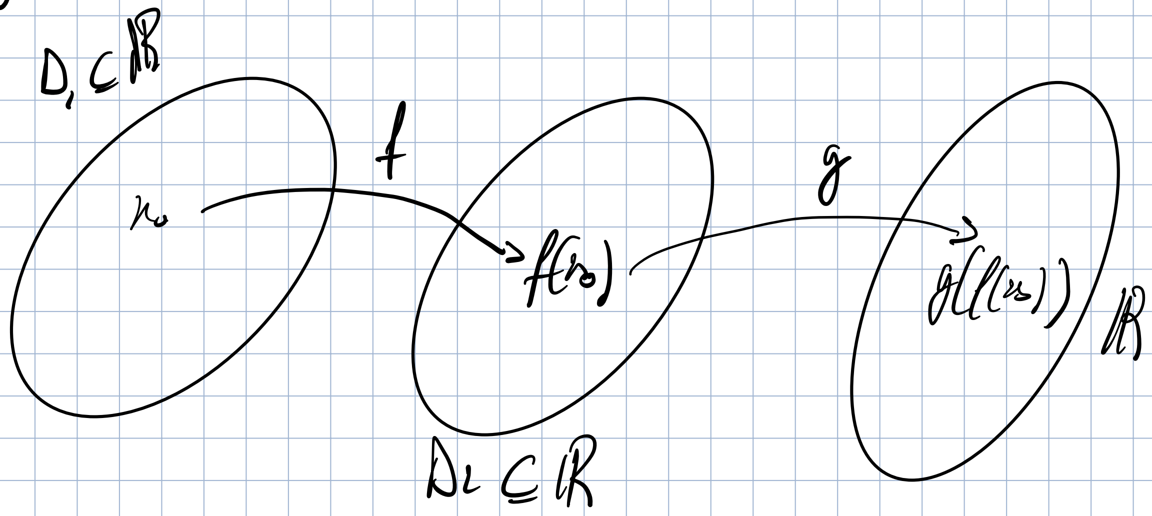
c $tg(x)$, $ctg(x)$

SONO FUNZIONI CONTINUE

TEOREMA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$f: D_1 \to \mathbb{R}$ $\quad D_1 \in \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in D_1$

$g: D_2 \to \mathbb{R}$ $\quad D_2 \in \mathbb{R}$ $\quad f(D_1) \in D_2$



SE f È CONTINUA IN x_0 E g È CONTINUA IN $f(x_0)$ ALLORA $g \circ f$ È CONTINUA IN $f(x_0)$.

$h(x) = g(f(x))$

DIM.

DOBBIAMO PROVARE CHE $\lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$

IPH : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$

CONSIDERIAMO

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x))$$

$$y \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$$

$$\lim_{y\to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0)) = h(x_0)$$

COROLLARIO

f, g CONTINUE NEL LORO DOMINIO CON $f > 0$ NEL SUO DOMINIO, ALLORA $f(x)^{g(x)}$ È CONTINUA NEL SUO DOMINIO

DIM

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log(f(x))}$$

COMPOSIZIONE E PRODOTTO SONO CONTINUE QUINDI È CONTINUA.

CONSEGUENZA:

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad x > 0$$

TEOREMA CONTINUITÀ FUNZIONE INVERSA

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO

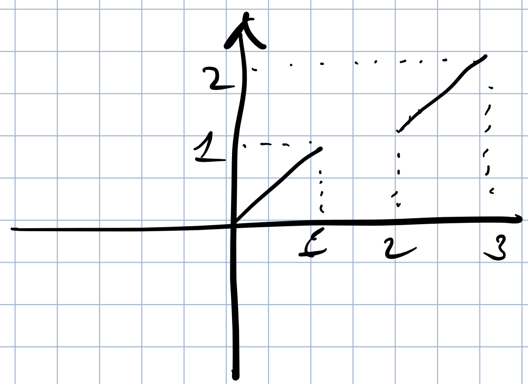
f CONTINUA E INVERTIBILE IN I

$\Rightarrow$ f^{-1} È CONTINUA NEL SUO DOMINIO

NOTA: IN GENERALE SÌ, SE I NON È UN'INTERVALLO IL TEO NON VALE

$f: [0,1) \cup [2,3] \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ x-1 & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$



$\exists$ $f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in [0,1) \\ y+1 & \text{se } y \in [1,2] \end{cases}$ $f^{-1}: [0,2] \to \mathbb{R}$

$\lim_{y \to 1^-} f^{-1}(y) = 1 \neq 2 = \lim_{y \to 1^+} f^{-1}(y)$

NON CONTINUA

CONSEGUENZA:

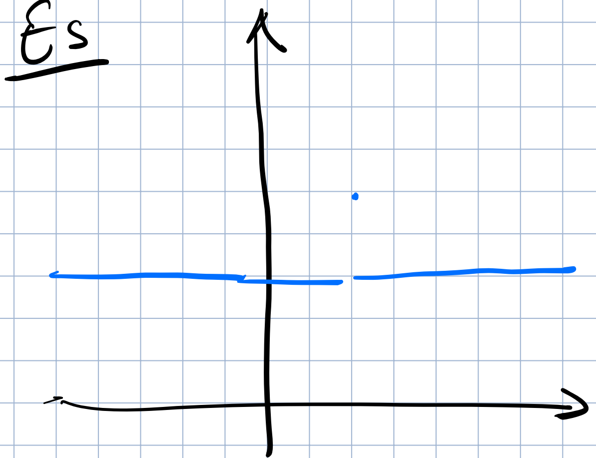
arcsin x, arccos x, arctan x SONO CONTINUE

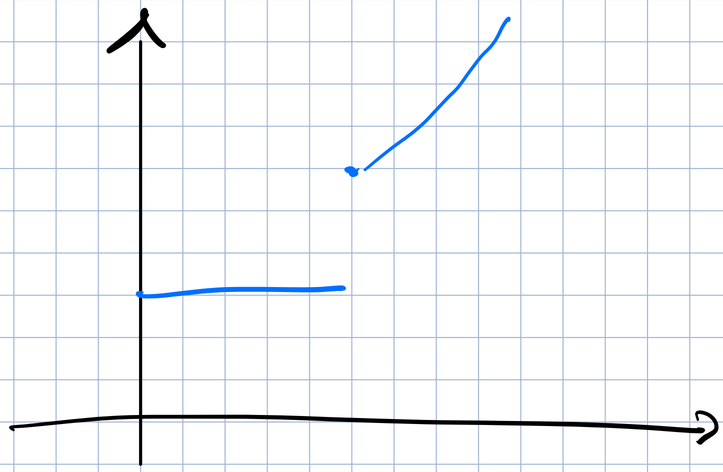
PUNTI DI DISCONTINUITÀ

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in D$

f: NON CONTINUA IN x_0 $\Rightarrow$ x_0 È DETTO PUNTO DI DISCONTINUITÀ

ES





QUANDO IL LIMITE ESISTE (FINITO) MA È DIVERSO DA x_0 È ELIMINABILE.

DUNQUE È POSSIBILE COSTRUIRE UNA FUNZIONE $\tilde{f}(x) = 1$ CONTINUA.

PROLUNGAMENTO FINITO DI f

LIMITE NON ESISTE

$\Downarrow$

NON ELIMINABILI

MA DI SALTO

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in D$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, $L \neq f(x_0)$

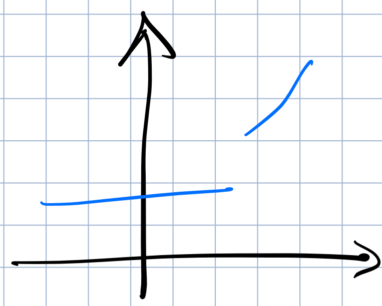
x_0 È DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0,\ x \in D \\ L & x = x_0 \end{cases}$$

CHE È CONTINUA IN x_0.

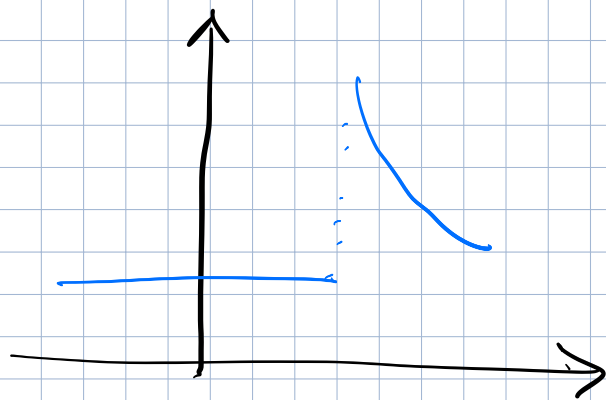
1 $\exists$ FINITI E DISTINTI

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

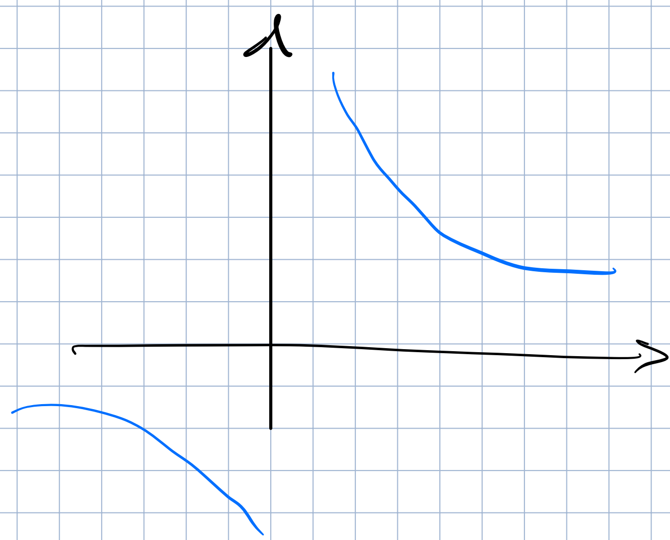


x_0 PUNTO DI SALTO

2 ALMENO UNO DEI DUE LIMITI È INFINITO O NON ESISTE.



3 LIM DESTRO E SINISTRO INFINITI



IN TUTTI QUESTI CASI È DETTO DI DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE.

Es

1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$\underbrace{\frac{\log(1+2x)}{2x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}}_{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2+1}{x^2+2}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)^{x^2+2}}_{e}{}^{\overbrace{\frac{x}{x^2+2}}^{0}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

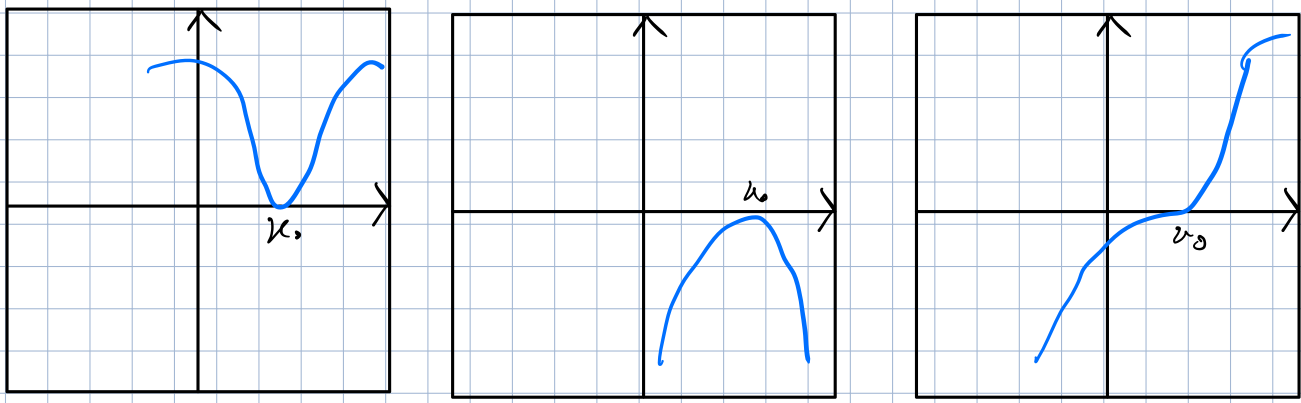
TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

$f: D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in D$

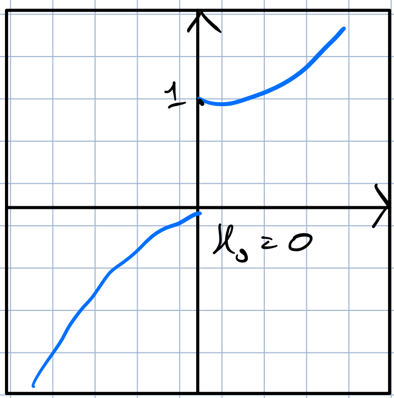
f continua in x_0 con $f(x) \overset{<}{>} 0$ oppure C

$\Rightarrow$ f è definitivamente positiva (maggiore di C) negativa vicino ad x_0.

CHE SUCCEDE SE $f(x_0) = 0$?



NOTA: LA CONTINUITÁ NON SI PUÓ RIMUOVERE



$f(0) = 1 > 0$

f CAMBIA SEGNO VICINO A 0.

TEOREMA DEGLI ZERI

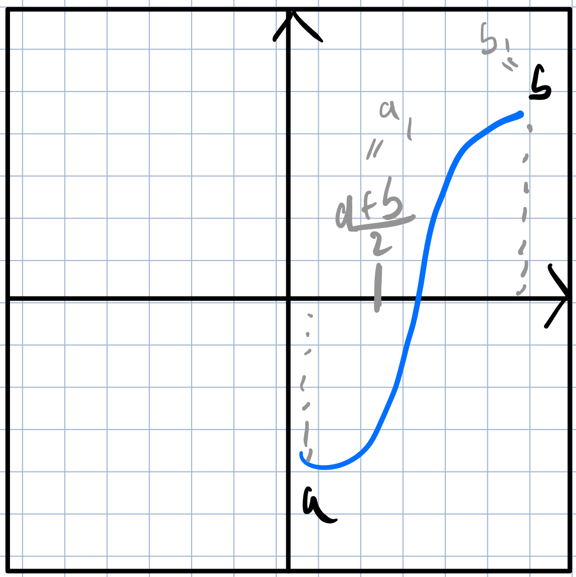
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

f CONTINUA IN $[a, b]$

$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$

CONDIZIONI SUFFICIENTI

DIM



SUPPONIAMO CHE

$f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

DIVIDIAMO IN DUE PARTI L'INTERVALLO E CALCOLIAMO

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

SE $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ $\quad x_0 = \frac{a+b}{2}$

SE $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ $\begin{cases} f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0 \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \end{cases}$

PRENDIAMO L'INTERVALLO CHE HA AGLI ESTREMI IL SEGNO OPPOSTO.

NEL NOSTRO CASO ABBIAMO L'INTERVALLO a_1, b_1,

CONTINUIAMO A DIVIDERE L'INTERVALLO FINO A TROVARE x_0.

ABBIAMO DUE SUCCESSIONI a_n, b_n

i) $a_n, b_n \in [a,b] \; \forall n \Rightarrow$ SONO LIMITATE $A, B \in \mathbb{R}$

ii) $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ SONO MONOTONE $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

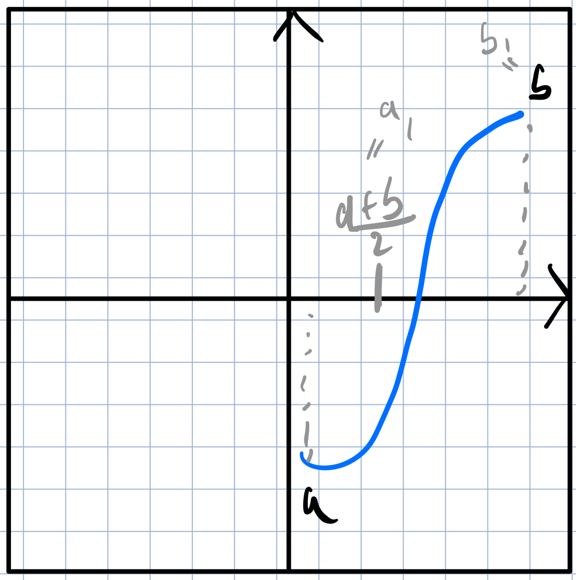
iii) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \; \forall n \Rightarrow B - A = \lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

iv) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{f(c) \cdot f(c)} \geq 0$

PERCHÉ f È CONTINUA

$f(\ell) = 0$



SE NON È CONTINUA IN GENERALE IL TEOREMA NON VALE.

SE $f(a) \cdot f(b) < 0$ NON VALE IN GENERALE IL TEO NON VALE.

APPLICAZIONE: ESISTENZA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO POSITIVO

<u>DIM</u> SIA $a \geq 0 \quad a \in \mathbb{R}$

PROVIAMO CHE $\exists x_0 \in \mathbb{R} : x_0^2 = a$ con $x_0 \geq 0$.

SE $A = 0$, $x_0 = 0$

SE $A = 1$, $x_0 = 1$

SIA $f(x) = x^2 - a$, f CONTINUA IN $\mathbb{R}$

CASO 1: $0 < a < 1$

f CONTINUA IN $[a, 1]$ $\begin{cases} f(a) = a^2 - a < 0 \\ f(1) = 1 - a > 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\exists x_0 \in [a, 1] : x_0^2 = a$

$x_0 = \sqrt{a}$

CASO 2: $a > 1$

f CONTINUA IN $[1, a]$

$$f(a) = a^2 - a > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x_0 \in (1, a) : \quad x_0^2 = a \quad \boxed{x_0 = \sqrt{a}}$$
$$f(1) = 1 - a < 0$$

UNICITÀ: PER ASSURDO

$\exists x_0, x_1 \in \mathbb{R} \quad x_0 > 0, \; x_1 > 0$

$x_0 \neq x_1 \qquad x_0^2 = a = x_1^2$

$$0 = x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1)\underbrace{(x_0 + x_1)}_{\neq 0} \Rightarrow x_0 = x_1 \text{ ASSURDO}$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

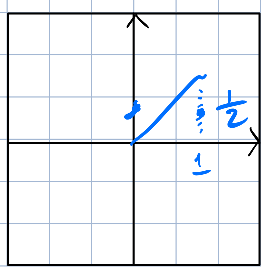
f CONTINUA IN $[a, b] \Rightarrow f$ AMMETTE MINIMO E MASSIMO ASSOLUTI IN $[a, b]$ i.e. $\exists x_M, x_m \in [a, b]$

TALI CHE: $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

CONDIZIONI SUFFICIENTI

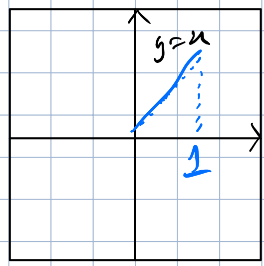
1 SE f NON È CONTINUA IL TEOREMA IN GENERALE NON VALE.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & x = 0, 1 \end{cases}$$



2 SE L'INTERVALLO NON È CHIUSO, IL TEOREMA IN GENERALE NON VALE

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}$$



TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad$ f CONTINUA IN $[a,b]$

$$\Rightarrow \forall \lambda \in \left[\min_{a,b} f(x), \max_{a,b} f(x)\right]$$

$$\exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \lambda$$

CONDIZIONI SUFFICIENTI

Dim: DA WEIERSTRASS $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$: TALI CHE $f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$

RESTA DA PROVARE PER $\lambda \in (m, M)$

Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x \to g(x) = f(x) - \lambda$

DA TEO DEGLI ZERI

CON $\lambda \in (m, M) \to m < \lambda < M$

SI HA CHE:

$$g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0$$

$$g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0$$

g È CONTINUA IN $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (x_m, x_M) : g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \lambda$

NOTA: SE f NON È CONTINUA IL TEOREMA IN GENERALE NON VALE.

APPLICAZIONE: UN POLINOMIO DI GRADO DISPARI A COEFF. REALI, AMMETTE SEMPRE UNO 0 REALE.

CONTINUA

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \neq 0$

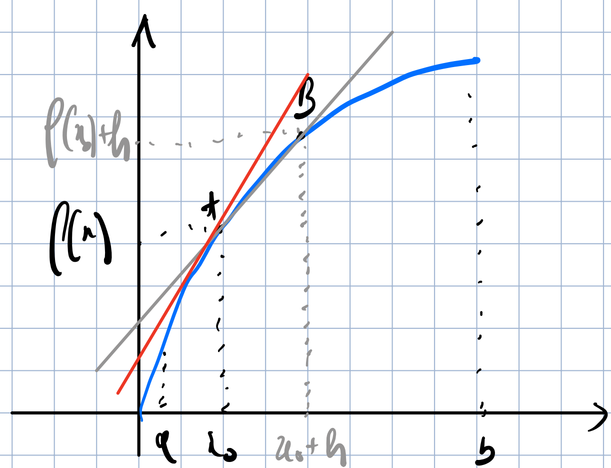
$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ (SE $a_n > 0$), $-\infty$ (SE $a_n < 0$)

$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ (SE $a_n > 0$), $+\infty$ (SE $a_n < 0$)

$\exists\, x \in \mathbb{R}$ $P(x) = 0$

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ CONTINUA $x_0 \in (a,b)$

PROBLEMA: DETERMINARE SE ESISTE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO



L'EQUAZIONE DELLA RETTA SECANTE IN A B È:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

DA UN PUNTO DI VISTA GEOMETRICO PER $h \to 0$ (SE IL LIMITE ESISTE) LA SECANTE DIVENTA TANGENTE IN A.

B PUÒ "SCORRERE" SU f PERCHÉ f È CONTINUA

$$\underbrace{\frac{f(x_0+h) + f(x_0)}{h}}_{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}}$$

h — INCREMENTO

DEFINIZIONE: SI DICE CHE f È DERIVABILE IN x_0 SE $\exists$ IN $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+h) + f(x)}{h}$$

DERIVATA PRIMA

DUNQUE L'EQUAZIONE DELLA TANGENTE DIVENTA:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

IL PUNTO IN CUI STUDIAMO LA DERIVABILITÀ DEVE ESSERE DEL DOMINIO. SE GLI ESTREMI SONO INCLUSI SERVE FARE IL LIMITE DESTRO O SINISTRO.

INTERPRETAZIONE FISICA

$x = x(t)$ LEGGE ORARIA

$(t, t+h)$ INTERVALLO DI TEMPO

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \text{VEL. MEDIA}$$

$$\downarrow h \to 0 \qquad \Downarrow$$

$$x'(t) = v_t \qquad \text{VEL ISTANT.}$$

Ex.

1 $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 0$ — f È DERIVABILE IN $\mathbb{R}$ $f'(x) = 0$

$$\lim_{h \to 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

2 $f(x) = x$, $a \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 1$

$$\lim_{h \to 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

3 $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

4 $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin(x+h)}{h} - \frac{\sin(x)}{h}$$

$$\frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} =$$

$$= \sin x \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{(\cos h + 1) h} + \cos x \frac{\sin h}{h} =$$

$$= \frac{\cos^2 h - 1}{(\cos h + 1)^2 h} + \cos x \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \to 0} -\sin x \frac{\sin^2 h \cdot h}{(\cos h + 1) \cdot h^2} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x$$

5 $f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x$$

6 $f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \cdot x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x}$$

7 $f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = +\infty$ NON DEFINITA IN $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

TEOREMA LEGAME DERIVABILITÀ - CONTINUITÀ

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ $\quad f$ DERIVABILE IN x_0

$\Rightarrow f$ CONTINUA

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{\to 0}{h} = 0$$

ESSENDO DERIVABILE, IL LIMITE ESISTE FINITO

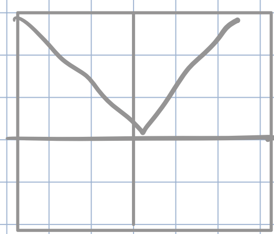
DUNQUE

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

$\Downarrow$

CONTINUA

LA CONTINUITÀ NON IMPLICA LA DERIVABILITÀ

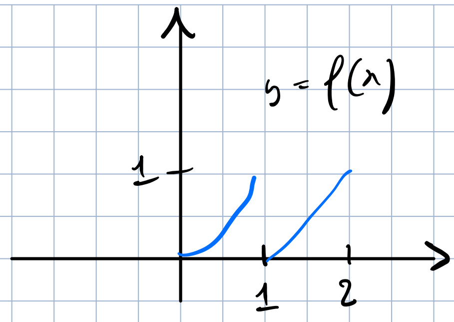


Esempio $\sqrt{x}$ o $|x|$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \begin{cases} 1 & h \to 0^+ \\ -1 & h \to 0^- \end{cases}$$

1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ x-1 & x \in [1,2] \end{cases}$$

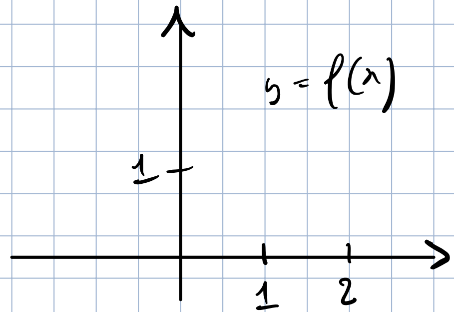


f É DERIVABILE IN $[0,2]$?

NON É CONTINUA $\Rightarrow$ NON DERIVABILE IN 1.

2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ x & x \in [1,2] \end{cases}$$



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \nexists \Rightarrow$$ NON DERIVABILE IN 1

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1-h+1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2$$

ALGEBRA DELLE DERIVATE

REGOLE DI DERIVAZIONE: $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ APERTO

f e g DERIVABILI IN A.

ALLORA:

1. $f+g$ É DERIVABILE IN A $\quad (f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $f \cdot g$ É DERIVABILE IN A $\quad (f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$
3. f/g É DERIVABILE IN A $\quad (f/g)' = \dfrac{f'g - f g'}{g^2}$

DIMOSTRAZIONE :

1 $$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] = f'(x) + g'(x)$$

ANALOGAMENTE PER LA DIFFERENZA

2 $$\lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

SOMMO E SOTTRAGGO E POSSO PERCHÉ È DEFINITA NEL PUNTO

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

$f(x)$ POICHÉ CONTINUA

$$= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] =$$

$$= f(x)\cdot g'(x) + g'(x)\, f(x)$$

3 $f(x+h)\,g(x+h)$ DA AGGIUNGERE E TOGLIERE PER DIM,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f/g)(x+h)-(f/g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

NOTA:

a DA 2 SI HA CHE $k \in \mathbb{R}$, $k \cdot f$ È DERIVABILE

$(k \cdot f') = k \cdot f'$

QUINDI $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b DA 3 SI HA CHE $\frac{1}{g}$ È DERIVABILE, $g \neq 0$

$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

c LA FUNZIONE $h(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$ È DERIVABIE,

$h'(x) = n x^{n-1}$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE:

BASE: $n=1$ $h = x$ DERIVABILE $h'(x) = 1$

INDUTTIVA: $g(x) = x^{n+1}$ $g'(x) = (n+1)\, x^n$

$g(x) = x \cdot x^n$ DERIVABILE

$$g'(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1}$$
$$= x^n + n x^n$$
$$= (n+1) x^n \qquad \text{DIMOSTRATO}$$

SI DIMOSTRA CHE

$$f(x) = x^\alpha \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

È DERIVABILE IN $\mathbb{R}^+$ E

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

ESEMPI

1. $f(x) = \sqrt{x} \qquad x \geq 0$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \alpha = \frac{1}{2}$$

f È DERIVABILE IN $\mathbb{R}^+$ $(x > 0)$

E $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

TUTTE LE RADICI NON SONO DERIVABILI IN 0.
PER DEFINIZIONE

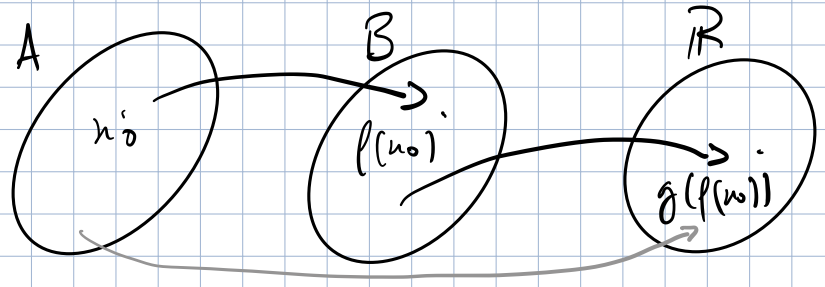
4. $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$\frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

DERIVABILITÀ DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ APERTO $x_0 \in A$

$g : B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ APERTO



$h : A \to B$

$x \to h(x) = g(f(x))$

f DERIVABILE IN x_0

g DERIVABILE IN $f(x_0)$ $\Rightarrow$ h È DERIVABILE IN x_0

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{\underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}_{k}} \cdot \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))}{k} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right]$$

PER $h \to 0$, $k \to 0$ QUINDI:

$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \Rightarrow h$ È DERIVABILE

ESEMPI

1. $h(x) = \sin^3 x$

$$h'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

2. $h(x) = e^{3x^2}$ $\qquad h'(x) = e^{3x^2} \cdot 6x$

3. $h(x) = \cos 7x$ $\qquad h'(x) = -\sin(7x) \cdot 7$

4. $h(x) = e^{\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}}$ $\qquad x \geq 0$

$$h'(x) = e^{\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= e^{\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

DERIVABILITÀ FUNZIONE INVERSA

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$

f DERIVABILE IN (a,b) CON INVERSA f^{-1}.

SE $\exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0) \neq 0$, ALLORA f^{-1} È DERIVABILE IN $f(x_0)$.

$$f^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

DIMOSTRAZIONE

SIA $h \in \mathbb{R}$ E PONIAMO $f(x_0+h) = \eta$ E $f(x_0) = y_0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_0 + h = f^{-1}(\eta) \qquad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

$$\frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_0)}{\eta - y_0} = \frac{\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}}{f(x_0+h) + f(x_0)} = \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

COSA SUCCEDE AD h PER $\eta \to y_0$?

$$\eta \to y_0 \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(\eta)}_{= x_0+h} \to \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{= x_0} \Rightarrow h \to 0$$

CONTINUA PERCHÉ IN UN INTERVALLO

$$\lim_{\eta \to y_0} \frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_0)}{\eta - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R}$$

ESEMPI

$$\left((f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = (f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \right)$$

1. $f^{-1}(y) = \log y \qquad f(y) = e^y$

2. $f^{-1}(y) = \arcsin y \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(y) = \sin y$

$$f'(x) = \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ DERIVABILE IN $(-1, 1)$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1, 1)$$

$$(\arctan)' = \frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arccotan})' = -\frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

3 $\quad f(x) = a^x \qquad a > 0, \ a \neq 1$

$$a = e^{\log a}$$

$$f(x) = a^x = \left(a^{\log a}\right)^x = a^{(\log a) x}$$

$$f'(x) = e^{(\log a) x} \cdot \log a = \log a \cdot a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

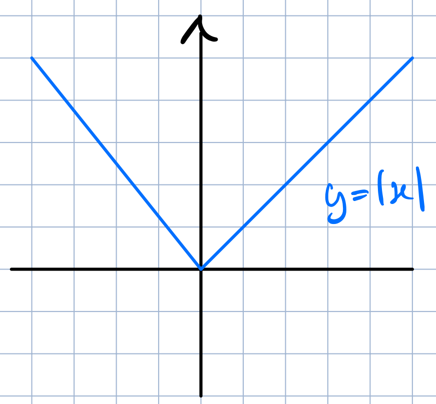
$f : (a,b) \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in (a,b)$

f CONTINUA IN x_0

f NON DERIVABILE IN x_0

CASI :

1 $\exists\ f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ DISTINTI E FINITI

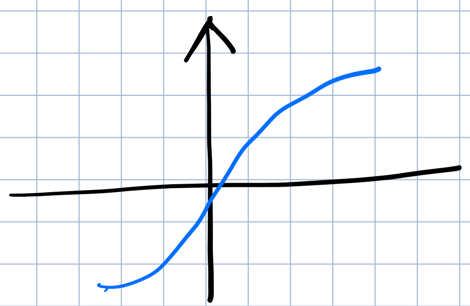


in $x_0 = 0$

PUNTO ANGOLOSO

2 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty\ (-\infty)$

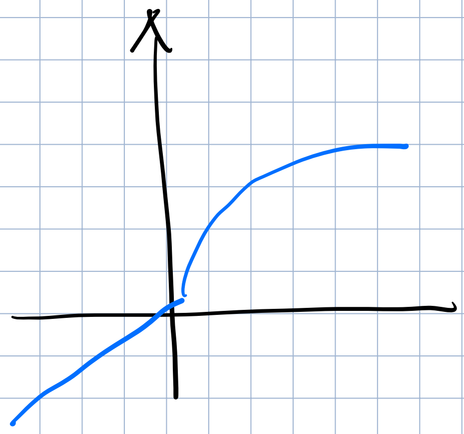
FLESSO A TANGENTE VERTICALE

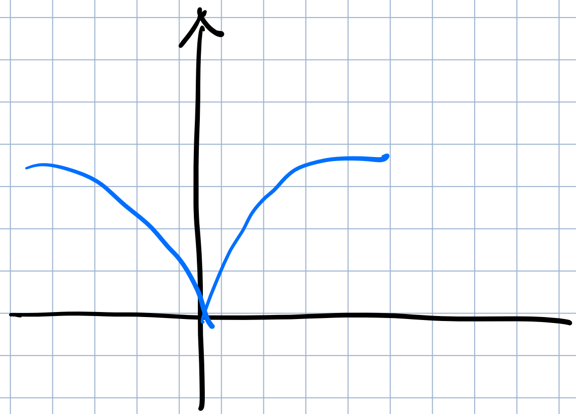


3 $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty\ (-\infty)\ L$

$\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\infty\ (+\infty)\ (\pm\infty)$

CUSPIDE





MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE

$f: [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in [a,b]$

SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO

ASSOLUTO SE $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$

RELATIVO SE $\exists\, I_{x_0} : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b] \cap I_{x_0}$

SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO DI MINIMO

ASSOLUTO SE $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$

RELATIVO SE $\exists\, I_{x_0} : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b] \cap I_{x_0}$

TEOREMA DI FERMAT

Iph $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

f DERIVABILE IN (a,b)

APERTI PERCHÉ È NECESSARIO FARE LIMITE DESTRO E SINISTRO

$x_0 \in (a,b)$ max o min LOCALE PER f.

Th $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

CONDIZIONI NECESSARIE

DIMOSTRAZIONE

IPh: x_0 max LOCALE PER f.

ALLORA: $\exists\, d > 0 \mid \forall x\, (x_0 - d,\ x_0 + d)$ $\quad f(x_0) \geq f(x)$

CONSIDERIAMO QUINDI $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ≤ 0

PERCHÉ $f(x_0) \geq f(x_0 + h)$

ESSENDO h PICCOLO IN MODO TALE CHE SA NELL' INTORNO.

$$h > 0 \quad \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$h < 0 \quad \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) = f'_-(x_0) \geq 0$$

DATO CHE f È DERIVABILE IN x_0

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$ APERTO

$x_0 \in A$ $\quad f$ DERIVABILE IN x_0

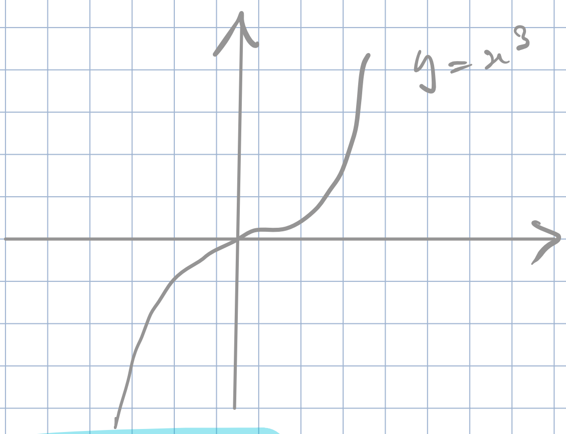
SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO CRITICO E STAZIONARIO PER f SE

$$f'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) \not\Rightarrow x_0 \text{ MAX o MIN}$$

Ex $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 = 0 \iff x = 0$



OSSERVAZIONE

$f: A \to \mathbb{R}$

f DERIVABILE IN $\mathring{A}$

$x_0 \in \mathring{A}$ max o min LOCALE PER f.

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

FERMAT CI DICE DI CERCARE MAX E MIN LOCALI DI f IN

1 $\{x \in \mathring{A} \mid f$ DERIVABILE IN x E $f'(x) = 0\}$

2 $\{x \in A \mid f$ NON DERIVABILE IN $x\}$

3 $\{x \in dA \cap A\}$

ESEMPI

TROVARE MAX o MIN

1 $f(x) = 3x^3 - 2x^2$ IN $[0,1]$

FERMAT NON DICE NULLA

$f'(x) = 9x^2 - 4x = 0$

$$x(9x-4) = \begin{cases} x = 0 \notin (0,1) \\ x = \frac{4}{9} \in (0,1) \end{cases}$$

I CANDIDATI MAX MIN SONO $\frac{4}{9}$, 0, 1

$f\left(\frac{4}{9}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{9}\right)^2 = -\frac{32}{243}$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

SE $[0,1]$ FOSSE APERTO DOVREI VERIFICARE

$3x^2 - 2x^2 \geq -\frac{32}{243}$ $\qquad$ $3x^2 - 2x^2 \leq 0$

PER SAPERE SE UNO DEI DUE SIA MASSIMO/MINIMO

TEOREMA DI ROLLE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$

f DERIVABILE IN (a,b) , $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists \, x_0 \in (a,b) : f'(x) = 0$

DIMOSTRAZIONE

DA WEISTRASS SAPPIAMO CHE :

$$\exists \, x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x) \quad f(x_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

1° CASO : UNO DEI DUE PUNTI $(x_1 \cdot x_2)$ É INTERNO ALL' INTERVALLO $[a,b]$ $(x_i \in (a,b))$

$$\overset{\text{FERMAT}}{\Longrightarrow} \quad f'(x_i) = 0$$

2° CASO : ENTRAMBI I PUNTI $(x_1 \text{ e } x_2)$ SONO SUL BORDO DI $[a,b]$ $(x_1 = a$ E $x_2 = b)$

$$f(a) = f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$f(b) = f(x_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

$\Rightarrow f$ COSTANTE IN $[a,b]$

$\Downarrow$

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

TEOREMA DI LAGRANGE (VALOR MEDIO)

Ipt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$

f DERIVABILE IN (a,b)

Th $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIMOSTRAZIONE: SIA $F(x) = f(x) - \lambda x$

CON $\lambda \in \mathbb{R}$ DA DETERMINARE IN MODO TALE CHE LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE.

F È CONTINUA IN $[a,b]$

F È DERIVABILE IN (a,b)

$F(a) = F(b) \Leftrightarrow \lambda \; \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$F(a) = f(a) - \lambda a$

$F(b) = f(b) - \lambda b$

$F(b) = f(b) - \lambda b$

$F(a) = F(b)$

$\Leftrightarrow$

$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$

$\Leftrightarrow \lambda(b-a) = f(b) - f(a) \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ALLORA F VERIFICA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE, QUINDI

$\exists\, x_0 \in (a,b) : F'(x_0) = 0$

$\parallel$

$$f'(x_1) - \lambda = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI LAGRANGE

1 CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI A DERIVATA NULLA IN UN INTERVALLO.

$f: I \to \mathbb{R} \qquad I \subseteq \mathbb{R}$

f CONTINUA IN I

f DERIVABILE IN $\mathring{I}$ CON $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathring{I}$

$\Rightarrow f$ È COSTANTE IN I

DIMOSTRAZIONE: CONSEGUENZA LAGRANGE

2 CARATTERIZZAZIONE FUNZIONI MONOTONE IN UN' INTERVALLO

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, f DERIVABILE IN I

ALLORA:

$$\begin{cases} f \text{ È CRESCENTE IN } I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ f \text{ È DECRESCENTE IN } I \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE: CONSEGUENZA LAGRANGE

LA DOPPIA IMPLICAZIONE $\iff$ VALE SOLO NEGLI INTERVALLI

IN CASO CONTRARIO È $\Rightarrow$.

ESEMPIO:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ x-3 & x \in (2,3) \end{cases} \qquad f'(x) = 1$$

ESEMPIO

1 $f(x) = x + \frac{9}{x}$ IN $(0,+\infty)$

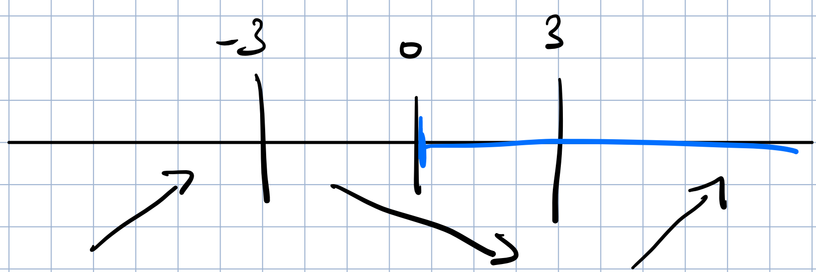
$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x = \begin{cases} -3 & \text{NON ACCETABILE} \\ +3 \end{cases}$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$\frac{x^2-9}{x^2} \geq 0 \qquad x^2 \geq 9 \qquad 3 < x < -3$$



3 È MINIMO LOCALE

PER VEDERE SE È ASSOLUTO

$$f(3) = 6$$

$$f(x) \geq 6 \qquad x + \frac{9}{x} \geq 6$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x} \geq 0$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0 \qquad (x-3)^2 \geq 0$$ VERO SEMPRE

2 $$f(x) = \frac{2x-4}{e^{x^2+2x+1}} = \frac{2x-4}{e^{(x+1)^2}}$$

f È DERIVABILE IN $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot e^{\cancel{(x+1)^2}} - e^{\cancel{(x+1)^2}} \cdot (2x+2)}{e^{(x+1)^{\cancel{4}}}}$$

$$= \frac{2}{e^{(x+1)^2}} \left[1 - (x-2)(2x+2)\right]$$

$$= \frac{2\left(-2x^2 + 2x + 5\right)}{e^{(x+1)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \iff -2x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$$

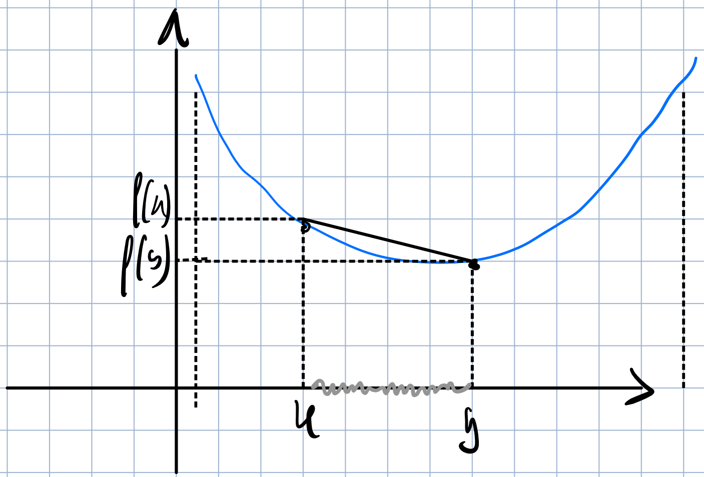
$$f'(x) \geq 0 \qquad -2x^2 + 2x + 5 \geq 0$$

$$\frac{1 - \sqrt{11}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{11}}{2}$$

FUNZIONI CONCAVE E CONVESSE

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO

SI DICE CHE f È CONVESSA (CONCAVA) IN I SE $\forall x, y \in I$ IL SEGMENTO DI ESTREMI $(x, f(x))$ E $(y, f(y))$ NON HA PUNTI SOTTO (SOPRA) IL GRAFICO DELLA FUNZIONE.



$\forall x, y \in I \ \forall t \in [0,1]$ SI HA:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y)$$
$(\geq)$

TEOREMA $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO

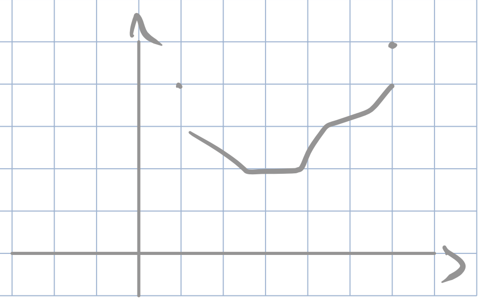
f CONCAVA O CONVESSA IN I

ALLORA:

1. f È CONTINUA IN I TRANNE AL PIÙ SUI PUNTI DEL BORDO.

2. f HA DERIVATA DESTRA E SINISTRA IN TUTTI I PUNTI INTERNI AD I.

LA FUNZIONE CONCAVA PEGGIORE CHE PUÒ CAPITARE È:



$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

f DERIVABILE IN $(a,b) \Rightarrow \exists\ f' : (a,b) \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f'(x) = g(x)$

SE $f'(x)$ È DERIVABILE :

$g' : (a,b) \to \mathbb{R}$

$x \to g'(x)$

$\shortparallel$

$f''(x)$ È DETTA **DERIVATA SECONDA**

SE f È DERIVABILE n VOLTE, $n \in \mathbb{N}$, ALLORA: $f \in C^n(a,b)$

$\exists\ f^{(n)}$ DERIVATA DI ORDINE n DI f

$\shortparallel$

$\left(f^{(n-1)}\right)'$

ESEMPIO

$f(x) = e^{\sin x}$

$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$

$f''(x) \quad (e^{\sin x} \cdot \cos x) \cos x + e^{\sin x}(-\sin x)$

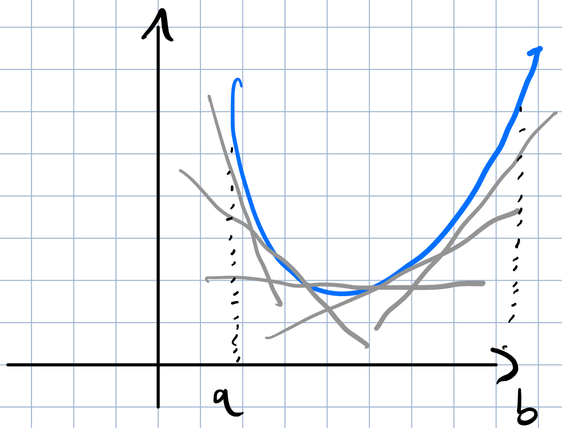
TEOREMA : $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

f DERIVABILE DUE VOLTE IN (a,b)

ALLORA

1) f È CONVESSA IN $(a,b) \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

2) f È CONVESSA IN $(a,b) \iff f''(x) \leq \quad \forall x \in (a,b)$

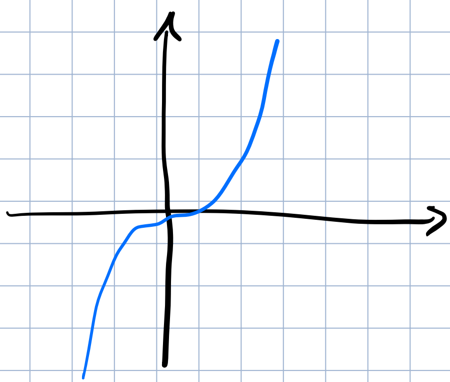


f' CRESCE

$f'' = (f')' \geq 0$ IN (a,b)

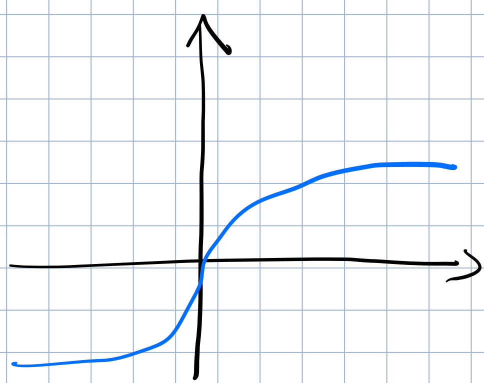
ESEMPIO

$y = x^3$



$y = \sqrt[3]{x}$

FLESSO A TANGENTE VERTICALE IN 0.



$f(a,b) \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in (a,b)$

SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO DI FLESSO PER f SE:

1 f È DERIVABILE IN x_0

2. f HA CONCAVITÀ OPPOSTA A DESTRA E SINISTRA DI x_0.

TEOREMA $f[a,b] \to \mathbb{R}$

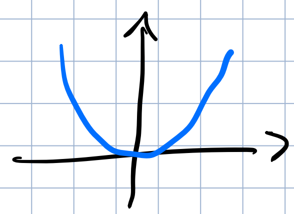
f DERIVABILE DUE VOLTE IN (a,b)

$x_0 \in (a,b)$ FLESSO PER f.

$\Rightarrow f''(x_0) = 0$

NOTA: $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ FLESSO PER f

$f(x) = x^4$



$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2 = 0 \quad x = 0$ NON È FLESSO

TEOREMA $f: (a,b) \to \mathbb{R}, \; x_0 \in (a,b)$

f DERIVABILE n-VOLTE IN (a,b)

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$

ALLORA

1. SE n È PARI E
   - $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ MIN. LOCALE PER f.
   - $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ MAX LOCALE PER f.

2. SE n È DISPARI, ALLORA x_0 NON È NÉ MAX NÉ MIN LOCALE PER f.

DI SOLITO SI UTILIZZA PER LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

ESEMPIO

$$f(x) = x^4 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 = 0 \iff x = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 = 0$$

$$f'''(x) = 24x = 0$$

$$f^{IV}(x) = 24 \neq 0 \qquad n = 4 \qquad f^{IV}(x) = 24 > 0$$

QUINDI $x = 0$ È MIN LOCALE

STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6}$$

DOMINIO $= \mathbb{R}$

SIMMETRIE E PERIODICITÀ = NO

SE CI SONO POTENZE PARI E DISPARI ASSIEME NON È SIMMETRICA

(PARI / DISPARI)

SEGNO E INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

$$\frac{2x^3+3x^2-12x}{6} \geq 0$$

$$2x^3+3x^2-12x$$

$$x(2x^2+3x-12) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2+3x-12 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} x \geq 0 \\ \frac{-3+\sqrt{105}}{4} > x > \frac{-3-\sqrt{105}}{4} \end{array}$$

	$\frac{-3-\sqrt{103}}{4}$		0		$\frac{-3+\sqrt{105}}{2}$	
$-$		$-$		$+$		$+$
$+$		$-$		$-$		$+$
$-$		$+$		$-$		$+$

$$\left[-\frac{3-\sqrt{105}}{4}, 0\right] \cup \left[-\frac{3+\sqrt{105}}{2}, +\infty\right[$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \iff f(x) = 0 \iff 2x^3+3x^2-12x=0$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \qquad O(0,0)$$

LIMITI E ASINTOTI:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \frac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{6} = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$$

POTREBBERO ESSERCI OBLIQUI

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2 + 3x - 12}{6} \xrightarrow[\substack{x \to +\infty \\ -\infty}]{} +\infty \quad \text{NON C'È}$$

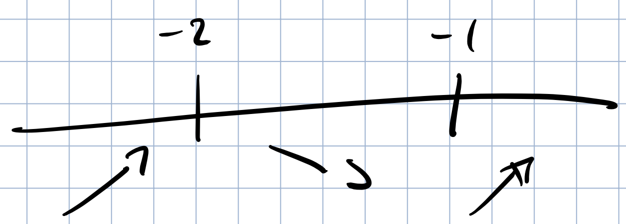
DERIVABILITÀ, MAX E MIN:

f È DERIVABILE IN $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = x^2 + x - 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases} \text{ PUNTI CRITICI}$$

$$f'(x) \geq 0 \qquad x^2 + x - 2 \geq 0 \qquad 1 \leq x \leq -2$$



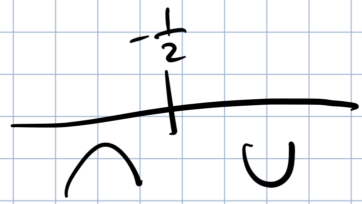
-2 È MAX LOCALE, 1 MIN LOCALE

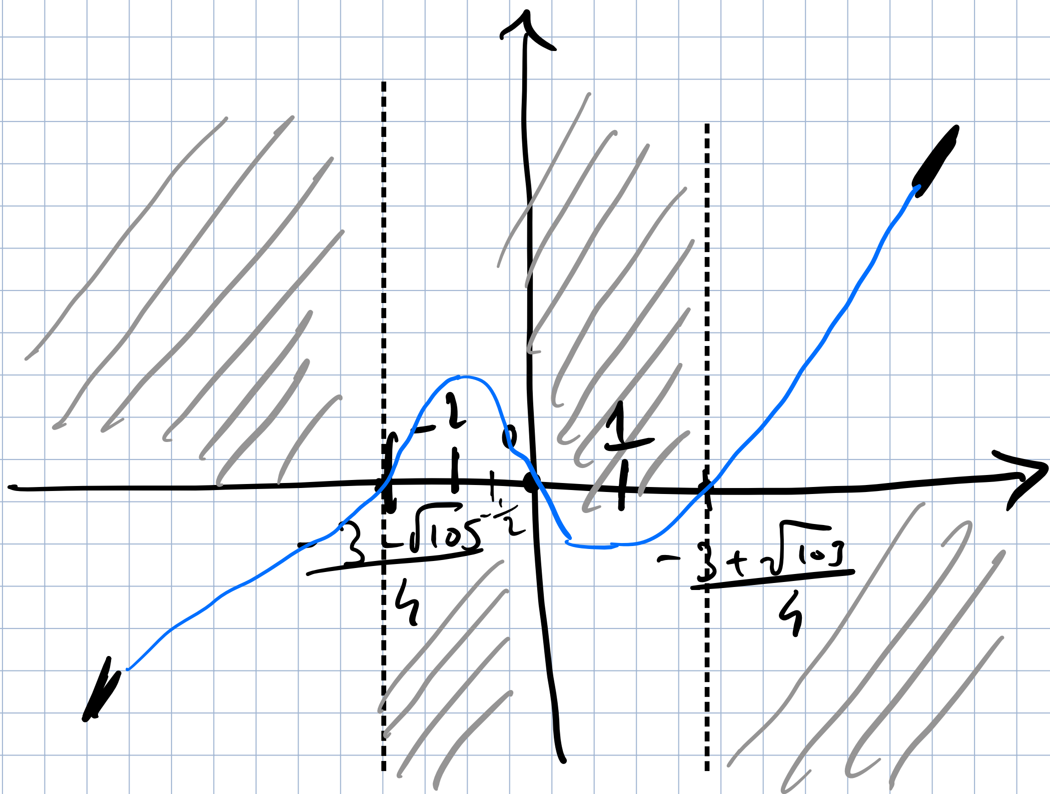
CONCAVITÀ E FLESSI:

f È DERIVABILE 2 VOLTE IN $\mathbb{R}$

$f''(x) = 2x+1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$

$2x+1 \geq 0 \qquad x \geq -\frac{1}{2}$





TEOREMI DI DE L'HOPITAL

PRIMO TEOREMA : $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$

1. f e g DERIVABILE IN (a, b) CON $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$
2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$
3. $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

DA UTILIZZARE IN FORMA INDETERMINATA DEL TIPO $\frac{0}{0}$ O $\frac{\infty}{\infty}$

NOTA BENE $\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'}$

ESEMPI

1. $\lim_{x \to 1} \frac{5x^3 - 8x^2 + 4x - 1}{2x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{15x^2 - 16x + 4}{2x - 3} = \frac{3}{-1} = -3 \quad \underline{\underline{H}}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \overset{H}{=} 2$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} \overset{H}{=} 2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} = 2$$

3 $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

4 $$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = \frac{\log x}{x^{-2}} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \overset{H}{=} 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{-2} = 0$$

5 $$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} \log\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \overset{H}{=} 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} = \left[\frac{x}{e^x-1} \cdot \frac{e^x \cdot x - (e^x-1)}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

NOTA: SE $\nexists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ALLORA

IN GENERALE I TEOREMI DI DE L'HOPITAL NON VALGONO

Ex

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \sin x^2}{1+x^2} = x\left(1+\frac{\sin x^2}{x}\right) \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2x\cos x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}+\cos x\right) \nexists$$

PERÒ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{\sin x^2}{1+x^2}\right) = 0$$

CONSEGUENZA LAGRANGE E DE L'HOPITAL

1. f CONTINUA IN x_0
2. DERIVABILE IN $I_{x_0}-\{x_0\}$ $\Rightarrow$ f DERIVABILE IN x_0 e $f'(x_0)=L$
3. $\lim_{x\to x_0} f'(x) = L \in \mathbb{R}$

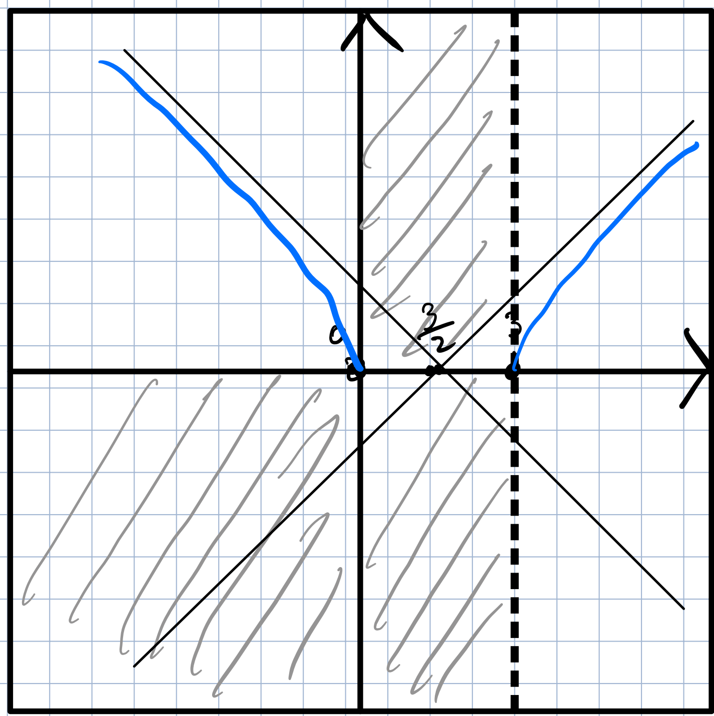
SE IL LIMITE È INFINITO, NON È DERIVABILE, SE NON ESISTE NON POSSO DIRE NULLA

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN $x_0=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h} = 0$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$$



$$x^2 - 3x \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$3 \leq x \leq 0$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \qquad 3, \; 0$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \qquad (0,0)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 3x} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = -\frac{3}{2}$$

$y = x - \frac{3}{2}$ ASINTOTO OBL. A $+\infty$

$y = -x + \frac{3}{2}$ ASINTOTO OBL. A $-\infty$

f DERIVABILE PER $x < 0$, $x > 3$

$$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$$

MAX E MIN

$f'(x) = 0 \iff 2x - 3 = 0$ $\quad x = \frac{3}{2} \notin D$

NON CI SONO MAX E MIN

MONOTONIA

$$\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} \geq 0 \qquad x \geq \frac{3}{2}$$

DERIVABILITÀ IN $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$$

NON DERIVABILE IN $x = 0$, FLESSO A TAN VERTICALE

$$\lim_{x \to 3^+} f'(x) = +\infty$$

NON DERIVABILE IN $x=3$

FLESSI A TAN VERTICALI

INTEGRALI

PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

SI DEFINISCE PRIMITIVA DI f IN $[a,b]$ UNA FUNZIONE:

$$F:[a,b] \to \mathbb{R}$$

TALE CHE:

- F È DERIVABILE IN $[a,b]$
- $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$

CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE IN UN INTERVALLO:

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

F e G PRIMITIVE DI f IN $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + c$

CONSEGUENZA DIRETTA DI LAGRANGE

SE $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$\Rightarrow \exists\, F$ PRIMITIVA IN $f\,[a,b]$

L'INSIEME DELLE PRIMITIVE DI f SI INDICA CON IL SIMBOLO:

$$\int f(x)\,dx$$

CHE SI CHIAMA INTEGRALE INDEFINITO DI f:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

CLASSE DI EQUIV.?

ESEMPI

1. $\int 1\,dx = x + c \qquad c \in \mathbb{R}$
2. $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$
3. $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + c \qquad c \in \mathbb{R}$
4. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$
5. $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = -\dfrac{1}{x} + c \qquad c \in \mathbb{R}$
6. $\int \sqrt{x}\,dx = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \qquad c \in \mathbb{R}$
7. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log|x| + c \qquad c \in \mathbb{R}$

8 $$\int x^{\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & c \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 1 \\ \log|x| + c & c \in \mathbb{R}, \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

9 $$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

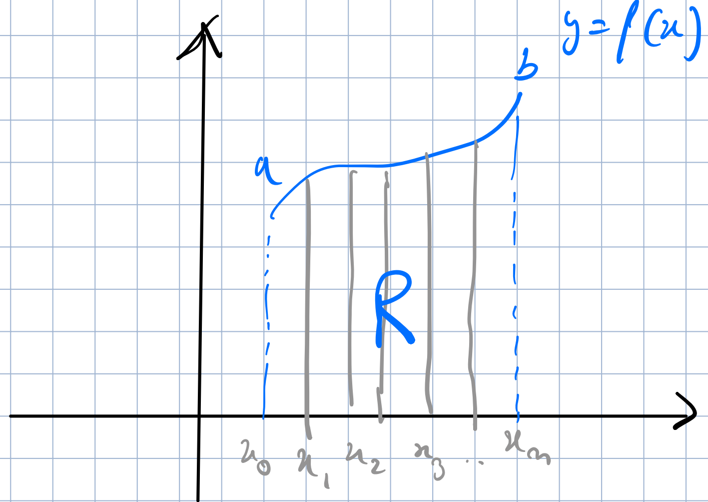
10 $$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

11 $$\int \cos x\,dx = \sin x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

12 $$\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

INTEGRALE DEFINITO E FUNZIONI INTEGRABILI

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA ~~POSITIVA E CONTINUA~~ IN $[a,b]$



PROBLEMA:

CALCOLARE SE ESISTE L'AREA DELLA REGIONE DI PIANO R COMPRESA TRA L'ASSE DELLE ASCISSE E IL GRAFICO $y = f(x)$ E DELIMITATA DALLE $x = a$, $x = b$

$\mathcal{P} = \{ x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b \}$

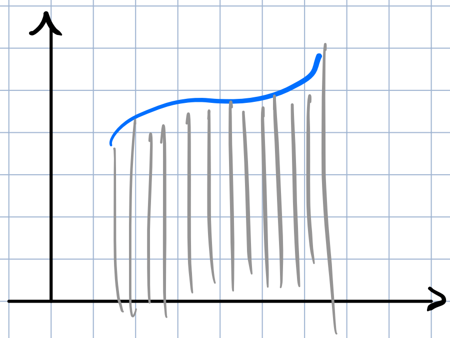
PARTIZIONE DI $[a, b]$

$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] , \quad i = 0, \dots, n-1$$

SOMMA DI CAUCHY REIMANN

$$\sum_{i=0}^{n-1} Q(R_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{POSSIBILE PERCHÉ } f \text{ È POSITIVA.}} \overbrace{(x_{i-1} - x_i)}^{\text{ALTEZZA} \cdot \text{BASE}} = S(f, \mathcal{P})$$

ABBIAMO OTTENUTO UNA APPROSSIMAZIONE



SE $n \to +\infty$

$$\max_{i=0,\dots,n-1} (x_{i+1} - x_i) \to 0$$

SE $\exists$ FINITO

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max_{i=0,\dots,n-1} (x_{i+1} - x_i) \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

ED È INDIPENDENTE DALLA SCELTA DEI PUNTI ξ_i,

ALLORA SI PONE $Q(R)$ UGUALE AL VALORE DEL LIMITE.

SI DICE CHE f È INTEGRABILE IN $[a, b]$ E SI PONE

ESTREMI DI INTEGRAZIONE

FUNZIONE INTEGRANDA

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\max_{i=0,\dots,m-1} (x_{i+1} - x_i) \to 0$$

PURCHÉ LA FUNZIONE SIA POSITIVA E CONTINUA.

__NOTA__ SIA

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

f È LIMITATA IN $[0,1]$

f È INTEGRABILE IN $[0,1]$? __NO__ :

$$s(f,P) = \sum_{i=0}^{m-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \begin{cases} \overbrace{\sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i)}^{1} & \xi_i \in \mathbb{Q} \ \forall i \\ 0 & \xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

QUINDI f LIMITATA $\not\Rightarrow$ f INTEGRABILE

__TEOREMA 1__: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

PER WEIERSTRASS È LIMITATA

f CONTINUA IN $[a,b]$ $\Rightarrow$ f INTEGRABILE IN $[a,b]$

__TEOREMA 2__: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f LIMITATA E MONOTONA IN $[a,b]$

$\Rightarrow$ INTEGRABILE IN $[a,b]$

__TEOREMA 3__ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f È LIMITATA IN $[a,b]$ E CONTINUA TRANNE AL

PIÙ IN UN NUMERO FINITO DI PUNTI $a \le x_1 \le x_n \le b$

$\Rightarrow f$ INTEGRABILE IN $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_n}^b f(x)\,dx$$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE IN $[a,b]$

1. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2. $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

3. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall c \in [a,b]$$

4. $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

MONOTONIA

5. $\alpha f + \beta g$ È INTEGRABILE IN $[a,b]$ E

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

LINEARITÀ

6. SE $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

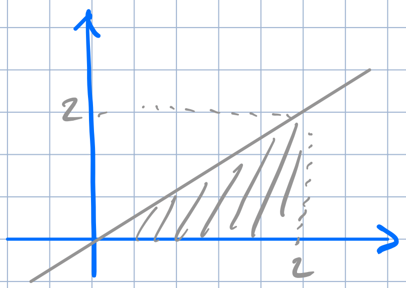
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

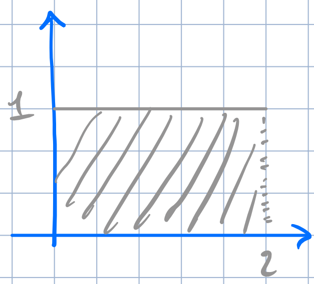
$\boxed{a < b}$

NOTA SE $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

ALLORA $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, da 6

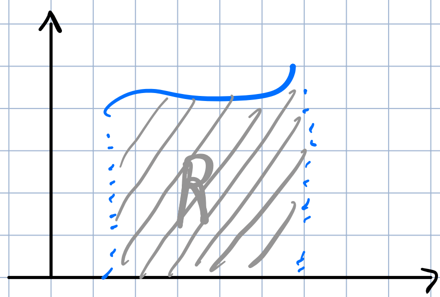
$$\int_0^2 (x+2)\,dx = \int_0^2 x\,dx + 2\int_0^2 1\,dx = 2 + 2\cdot 2 = 6$$



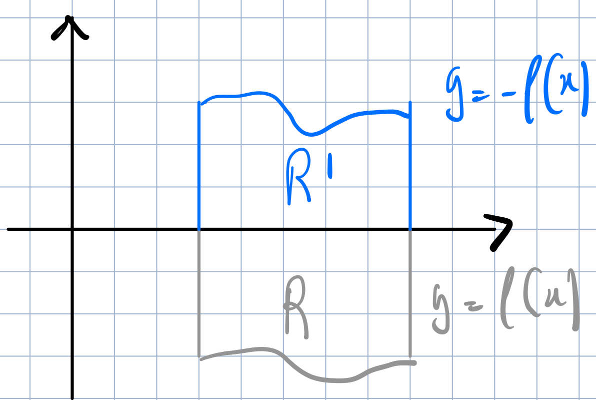


$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA E $f \geq 0$ IN $[a,b]$

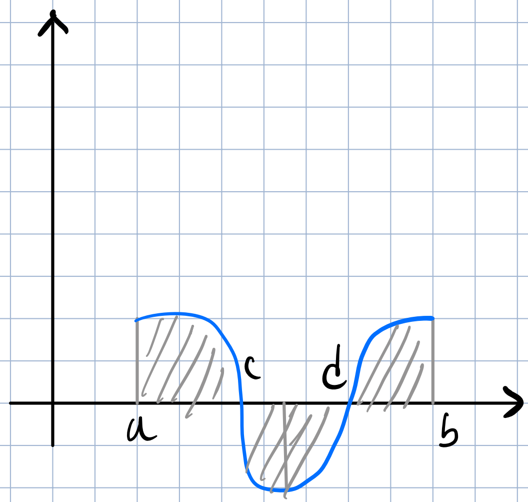
$$\int_a^b f(x)\,dx = Q(R)$$



$f \leq 0$ in $[a,b]$



$$Q(R) = Q(R') = \int_a^b -f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



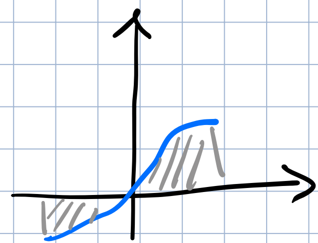
$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)dx$$

ESEMPI

$f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[-a, a]$

1 f DISPARI IN $[-a, a] \Rightarrow Q(R_1) = Q(R_2)$

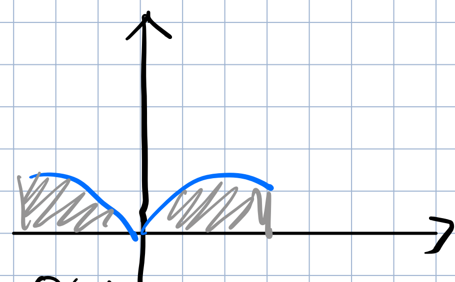
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x) = -Q(R_2) + Q(R_1) = 0$$

2 f PARI IN $[-a, a] \Rightarrow Q(R_1) = Q(R_2)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = Q(R_1) + Q(R_2) = 2Q(R_1)$$

TEOREMA DELLA MEDIA

Ip $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

Th $\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\cdot(b-a)$

DIMOSTRAZIONE

DA WEIERSTRASS $\exists$ MAX E MIN ASS DI f IN $[a,b]$

QUINDI :

$$m = \min f(x) \le f(x) \le \max f(x) = M \qquad \forall x \in [a,b]$$

DALLA MONOTONIA DELL' INTEGRALE SI HA CHE :

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

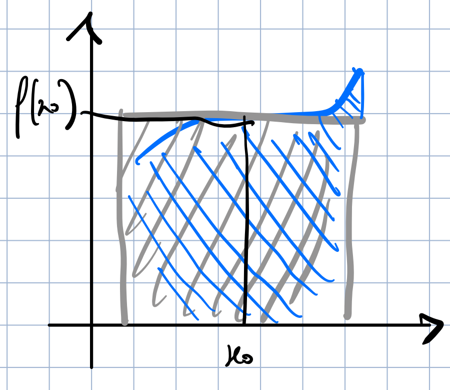
$$\int_a^b M\,dx = M\int_a^b 1\,dx = M(b-a)$$

DIVIDENDO PER $b-a$ (>0) SI HA :

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI $\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in [a,b]$ TALE CHE

$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \Rightarrow \text{TESI}$$

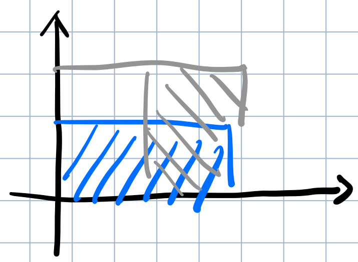


ESISTE UN PUNTO x TALE CHE IL RETTANGOLO $f(x_0)(b-a)$ EQUIVALE ALL' AREA TOTALE DELLA FUNZIONE IN $[a,b]$

NOTA:

SE NON É CONTINUA, IL TEOREMA IN GENERALE NON VALE:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,2] \end{cases}$$



LA FUNZIONE INTEGRALE É CONTINUA

Iph $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA E INTEGRABILE IN $[a,b]$

$$F:[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$F(x)$ É LA **FUNZIONE INTEGRALE** DI f IN $[a,b]$

PERCHÉ x É UN' ESTREMO DI INTEGRAZIONE

TEOREMA: F É CONTINUA IN $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE: SIA $x_0 \in (a,b)$ SE CONSIDERIAMO:

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$= \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} =$$

PERCHÉ NON SAPPIAMO SE $x_0+h \leq x_0$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+h} k\,dt\right| \leq k\int_{x_0}^{x_0+h} 1\,dt$$

$$= k|h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

CON $k>0 \Rightarrow F$ CONTINUA

LIMITATA: $\exists\, k>0 :$ $|f(t)| \leq k \quad \forall t \in [a,b)$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

ALLORA F É DERIVABILE IN $[a, b]$ E $F'(x) = f(x)$

(QUINDI F É UNA PRIMITIVA DI f IN $[a, b]$)

DIMOSTRAZIONE

SIA $x_0 \in (a, b)$ E CONSIDERIAMO

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \cancel{- \int_a^{x_0} f(t)}\right]$$

$$= \frac{1}{h} \cdot f(x(h)) \cdot h \quad \text{CON } x(h) \in [x_0, x_0+h]$$

DAL TEO DELLA MEDIA (RICHIEDE CONTINUITÁ)

$$= f(x(h)) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x_0) \quad \text{POICHÉ } f \text{ É CONTINUA}$$

$\Longrightarrow f$ DERIVABILE IN x_0 E $F'(x_0) = f(x_0)$

SE f NON É CONTINUA IN GENERALE NON VALE

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

(FORMULA DI TORRICELLI - BARROW)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

G PRIMITIVA DI f IN $[a,b]$

ALLORA $$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

DIMOSTRAZIONE

SIA $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ LA FUNZIONE INTEGRALE DI f IN $[a,b]$. F È UNA PRIMITIVA DI f IN $[a,b]$.

QUINDI, DALLA CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE, SI HA CHE $\exists\, c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$:

$$G(b) - G(a) = F(b) + \cancel{c} - F(a) - \cancel{c}$$

$$= \int_a^b f(x) - \int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

ESEMPI

1. $f(x) = \sin x$ $$\int_0^1 \sin x\,dx =$$

$G(x) = -\cos x$

$$\int_0^1 \sin x\,dx = G(1) - G(0) = -\cos 1 + 1$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$F(x) = \int_0^x \sin t \, dt = -\cos t \Big|_0^x = -\cos x + 1$$

2 $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,2] \end{cases}$$

f LIMITATA E INTEGRABILE $[0,2]$
MA NON CONTINUA

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x 1\,dt & \text{SE } x \in [0,1] \\ \int_0^1 1\,dt + \int_1^x 2\,dt & \text{SE } x_0 \in (1,2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} t\Big|_0^x = x & \text{SE } x \in [0,1] \\ 1 + 2t\Big|_1^x = 1 + 2x - 2 & \text{SE } x \in (1,2] \end{cases} = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 2x - 1 & x \in (1,2] \end{cases}$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

f CONTINUA

$x = g(t)$ $\quad g$ DERIVABILE, g' CONTINUA

ALLORA:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

DIMOSTRAZIONE:

SIA $F = F(x)$ PRIMITIVA DI f (F DERIVABILE E $F'(x) = f(x)$)

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE CHE MANDA $t \to F(g(t)) = G(t)$

G È DERIVABILE POICHÉ COMPOSIZIONE DI FUNZIONI DERIVABILI

$$G'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

$\Longrightarrow$ G PRIMITIVA DI $f(g(t)) \cdot g'(t)$

ESEMPI

1 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx =$

$\sqrt{x} = t$
$x = t^2 = g(t)$
$dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{t-3} \cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t}{t-3} \cdot dt$$

$$= 2\int \frac{t-3+3}{t-3}\,dt = 2\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right)dt =$$

$$= 2\left(t + 3\log|t-3|\right) + c = 2\sqrt{x} + 6\log|\sqrt{x}-3| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

2 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$

$e^x = t$
$x = \log t$
$dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$= \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + c$$

$$= \arctan e^x + c$$

3) $$\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{4}{9}x^2+1\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{4}{9}x^2+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{3}x\right)^2+1}\,dx$$

$\frac{2}{3}x = t$ $$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{t^2+1}\,\frac{3}{2}\,dt = \frac{1}{6}\arctan t + c =$$

$x = \frac{3}{2}t$ $$= \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2}{3}x\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$dx = \frac{3}{2}\,dt$

PER GLI INTEGRALI DEFINITI

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

$$g(c) = a \qquad g(d) = b$$

ESEMPIO

1) $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$x = \sin t$ $\quad x = \cos t$

$dx = \cos t\,dt$

$t = \arcsin x$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt$$

DATO CHE IN $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ È POSITIVO

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cdot \cos t\,dt \Longrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$
$$= \cos^2 t - (1-\cos^2 t)$$
$$= 2\cos^2 t - 1$$
$$\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Ip) f, g DERIVABILI CON DERIVATE CONTINUE

Th) $$\int \underbrace{f(x)}_{\text{FATTORE FINITO}} \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{\text{FATTORE DIFFERENZIALE}} = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE:

DALLA DIM. DERIVAZIONE DEL PRODOTTO:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx + \int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)$$

PER L'INTEGRALE DEFINITO:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

ESEMPIO

1 $\int x \cos x \, dx$

$f(x) = x \quad f'(x) = 1$

$g(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$

$x \cdot \sin x - \int \sin x = x \sin x + \cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$

2 $\int \log x \, dx = \int \log x \cdot 1 \, dx$

$f(x) = \log x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = x \quad g'(x) = 1$

$x \cdot \log x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \log x - x + c \qquad c \in \mathbb{R}$

3 $\int e^x \sin x \, dx$

$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$

$g(x) = e^x \quad g'(x) = e^x$

$e^x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot e^x \, dx$

$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$

$g(x) = \sin x \quad g'(x) = \cos x$

$= e^x \sin x - [e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$

$= \int e^x \sin x \, dx$

$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$

$g(x) = e^x \quad g'(x) = e^x$

$= e^x \sin x - [e^x \cos x - \int -\sin x \, e^x \, dx]$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int \sin x \, e^x \, dx$

RIPORTANDO A SINISTRA L'INTEGRALE

$2 \int \sin x \, e^x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$

$$\int \sin x \cdot e^x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

4 $\int \arctan x \, dx$

$$\int \arctan x \cdot 1 \, dx = \qquad g(x) = x \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\arctan x \cdot x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = |\log(f(x))|$$

5 $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos x \, dx$

$$f(x) = \cos x \quad g(x) = -\sin x$$
$$f'(x) = -\sin x \quad g'(x) = -\cos x$$

$$= \sin x \cos x - \int -\sin x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c$$

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$ DOVE P e Q SONO POLINOMI DI ∂P e ∂Q

1° CASO: $\partial P > \partial Q$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{cccc|l}
x^3 & 0\cdot x^2 & 0\cdot x & 1 & x^2+1 \\
\cline{5-5}
x^3 & & x & & x \\
\hline
0 & 0 & -x & 1 &
\end{array}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1} = \int x + \frac{1-x}{x^2+1}$$

$$x^3+1 = (x^2+1)\cdot x + (-x+1)$$

$$= \frac{x^3}{2} + \arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

2° CASO: $\partial P = \partial Q$

$$\int \frac{x}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{2x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1\,dx - \int \frac{1}{2x+1}\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\log|2x+1|\right] + c$$

3° CASO $\partial P < \partial Q$

1 $$\int \frac{1}{x+3}\,dx = \log|x+3| + c$$

2 $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+1} = 2\arctan x + c$

3 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{2}\log(x^2+3)+c$

4 $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{x+7}{(x+1)(x-2)}\,dx$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow x+7 = Ax-2A+Bx+B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=7 \end{cases} \quad \begin{matrix} A=1-B \\ -2+2B+B=7 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A=-2 \\ B=3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \int \frac{-2}{x+1} + \frac{3}{x-2}\,dx = -2\log|x+1| + 3\log|x+2| + c$$

$c \in \mathbb{R}$

5 $\displaystyle\int \frac{x}{x+2x+1}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$

$$= \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad Ax+A+B=x$$

$$\begin{cases} A=1 \\ A+B=0 \end{cases} \quad B=-1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx = \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

⑥ $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$

x^2+2x+5

$\overset{\shortparallel}{(x)^2} \cdot \overset{\shortparallel}{2x} \cdot 1 \qquad (x+1)^2 = x+2x+1$

$\Downarrow$

$x^2+2x = (x+1)^2 - 1$

$\Rightarrow x^2+2x+5 = (x+1)^2 - 1 + 5 = (x+1)^2+4$

$= \int \frac{1}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}\,dx = \frac{1}{4}\,2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

⑦ $\int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\,dx = -\int \frac{2x-1}{x^2+2x+5}\,dx = -\int \frac{2x+2-2-1}{x^2+2x+5}\,dx =$

$= -\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \int \frac{3}{x^2+2x+5} = \log(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

⑧ $\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx$

$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$

$= \frac{Ax^2 + Bx(x-1) + C(x-1)}{x^2(x-1)}$

$$\Leftrightarrow \quad Ax^2 + Bx^2 - Bx + Cx - C = 1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=0 \\ -C=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \log|x-1| - \log|x| + \frac{1}{x} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

9 $$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\,dx$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} + c$$

10 $$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\sqrt[6]{x} = t$$
$$t^6 = x$$
$$dx = 6t^5\,dt$$

$$= \int \frac{t^3-1}{t^3-2} \cdot \frac{1}{t^3} \cdot 6t^{\cancel{8}\,2}\,dt$$

$$\int \frac{(t^3-1)\,t^{3}}{t^2(t-1)}\,dt = 6\int \frac{t^3-1}{t-1}\,dt =$$

$$= 6\int \frac{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)}{\cancel{t-1}}\,dt$$

$$= 6\int t^2+t+1\,dt = 6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right)+c$$

$$= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + c$$

11 $$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + c$$

12 $$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \log|\cos x| + c$$

INTEGRALI IMPROPRI

1 $f : [a, +\infty)\ (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA

OPPURE

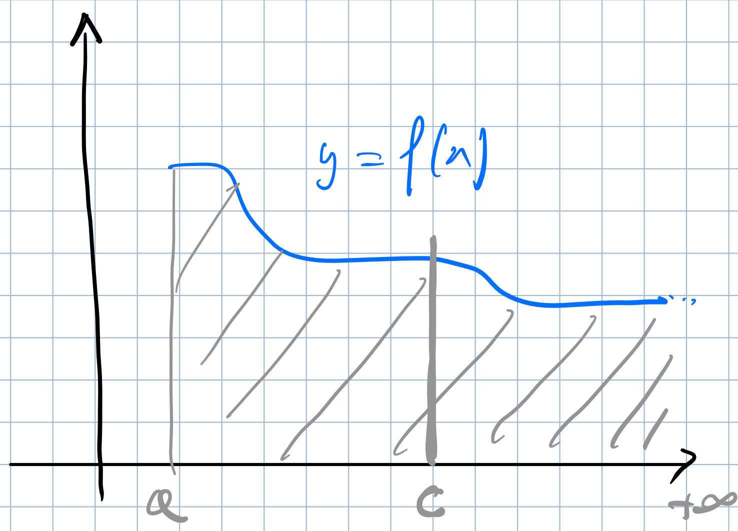
2 $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ILLIMITATA PER $x \to b^-$

PRIMO CASO

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE IN $[a, x]$ $\forall x > a$

PROBLEMA:

CALCOLARE, SE HA SENSO, L'AREA DI $\mathbb{R}$.



SI DICE CHE f È **INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO O GENERALIZZATO** IN $[a, +\infty)$.

SE $\exists$ IN $\mathbb{R}$ $\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$

E IN TAL CASO SI PONE:

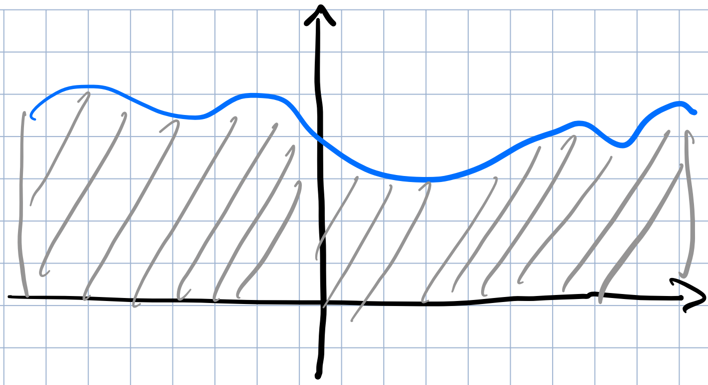
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

E SI DICE CHE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE AL VALORE DEL LIMITE.

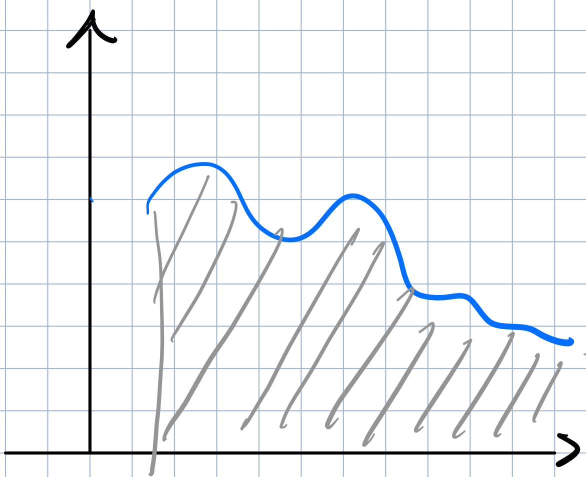
SE $\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx = +\infty \ (-\infty)$ SI DICE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **DIVERGE A $+\infty$ $(-\infty)$**.

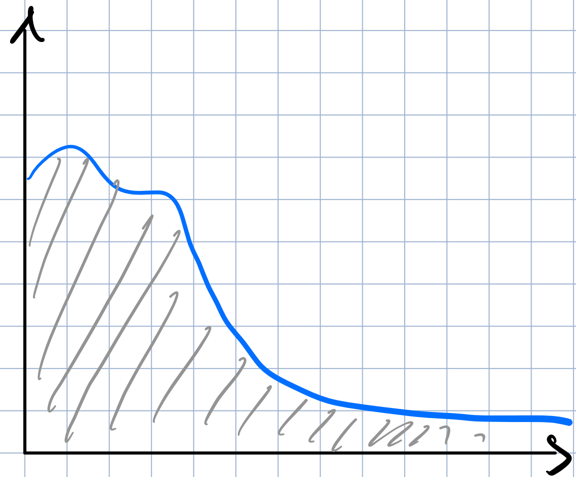
SE $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{c\to-\infty \\ d\to+\infty}} \int_c^d f(x)\,dx$$



QUINDI DIMOSTRIAMO CHE L'AREA DI QUESTE DUE FUNZIONI SIA $+\infty$.





ESEMPI

1. $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^c$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left[2\sqrt{c} - 2\sqrt{1}\right] = +\infty$$

2. $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c =$$

$$\lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c}+1\right) = 1$$

3 $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x^\alpha}\,dx =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{SE } \alpha \neq 1 \\ \log x & \text{SE } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{-\alpha+1}\left(c^{\alpha+1}-1\right) \\ \log c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{SE } \alpha > 1 \quad \text{— CONVERGE} \\ +\infty & \text{SE } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{SE } \alpha = 1 \end{cases} \Big\rangle \text{ DIVERGE}$$

4 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{c\to-\infty \\ d\to+\infty}} \left(\arctan d - \arctan c\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

5 $$\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-\cos x\right]_0^c = \lim_{c\to+\infty} \left(1-\cos c\right)$$

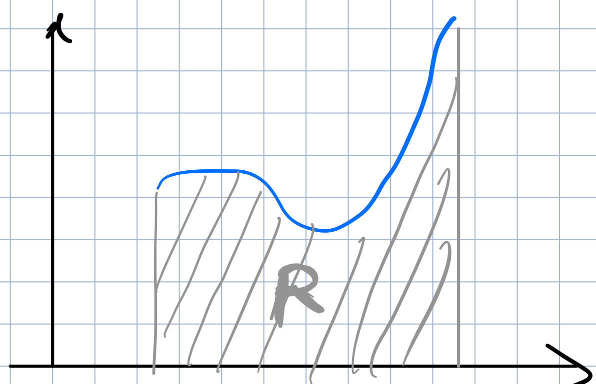
INTEGRALI IMPROPRI DI SECONDO TIPO

$f : [a,b) \to \mathbb{R}$ CONTINUA E POSITIVA IN $[a,b)$

f ILLIMITATA PER $x \to b^-$ $\left(\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty\right)$

PROBLEMA:

CALCOLARE L'AREA DI R.



SI DICE CHE f È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO O GENERALIZZATO IN $[a, +\infty)$.

SE $\exists$ IN $\mathbb{R}$ $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$

E IN TAL CASO SI PONE:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

E SI DICE CHE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE AL VALORE DEL LIMITE.

SE $\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx = +\infty \, (-\infty)$ SI DICE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE A $+\infty \, (-\infty)$.

ESEMPIO:

1. $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_c^1$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{c}\right) = 2$$

2. $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{c}\right) = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \alpha > 1 & \text{DIVERGE} \\ \alpha < 1 & \text{CONVERGE} \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \alpha > 1 & \text{CONVERGE} \\ \alpha \leq 1 & \text{DIVERGE} \end{cases}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO

$f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ INTEGRABILE IN $[a, x]$ $\forall x > a$

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

ALLORA:

a) $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE

b) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ DIVERGE

DIMOSTRAZIONE:

DALLA MONOTONIA DELL' INTEGRALE SI HA:

$$0 \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx \quad \forall c > a$$

$c \to \int_a^c f(x)\,dx$ È MONOTONA PERCHÉ $f \geq 0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

PASSANDO AL LIMITE PER $c \to +\infty$ IN

$$0 \leq \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx \leq \lim_{c \to +\infty} \int_a^c g(x)\,dx$$

TESI PROVATA

STESSO CRITERIO CON $[a, b)$:

$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE IN $[a, b]$ $\forall x \in (a, b)$

f, g ILLIMITATA IN PROSSIMITÀ DI b.

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, b)$$

ALLORA:

a) $\int_a^b g(x)\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE

b) $\int_a^b f(x)\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ DIVERGE

ESEMPI:

1 $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2}\,dx \ge \frac{1}{x^2}$

$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \to$ DIVERGE

ALLORA ANCHE $\frac{x^2+1}{x^2} \to$ DIVERGE

2 $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx =$ CONVERGE

$$0 \le \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$$

$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ CONVERGE

POTREMMO PERÒ DIRE CHE

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & x \in (0, \pi] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

QUESTA È INTEGRABILE PER RIEMANN

$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$

③ $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ $y = e^{-x^2}$ FUNZIONE GAUSSIANA

$x^2 > x \quad \forall x \geq 1$

$-x^2 \leq -x$

$e^{-x^2} \leq e^{-x}$

PERCHÉ L'ESPONENZIALE È CRESCENTE CON BASE > 1

$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_1^R e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE IN $[x, b]$ $\forall x \in (a,b)$

f, g ILLIMITATE IN PROSSIMITÀ DI a.

$f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ IN $(a,b]$, $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} - \{0\}$

ALLORA:

① $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE $\iff$ $\int_a^b g(x)\,dx$ CONVERGE

② $\int_a^b f(x)\,dx$ DIVERGE $\iff$ $\int_a^b g(x)\,dx$ DIVERGE

DIMOSTRAZIONE

DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in (a,b) \quad 0 < x - a < \delta$

$\overset{\parallel}{L/2}$

$$\underset{(l-\varepsilon)}{\frac{L}{2}} < \frac{f(x)}{g(x)} < \underset{(l+\varepsilon)}{\frac{3}{2}L}$$

DA CUI, POICHÉ $g(x) > 0$ SI HA

$$\frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}L\,g(x) \quad \forall\ x \in (a, a+d)$$

LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO.

VALE ANCHE PER $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

NOTA: SE LA FUNZIONE CAMBIA SEGNO

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ CONVERGE } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

COME CONSEGUENZA DELLA PROPRIETÀ

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

ESEMPI

1 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+2}$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^4+2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)x^2}{x^4+2} =$

$$\frac{x^2+1}{x^4+2} \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \qquad = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+x^2}{x^4+2} = 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \text{ CONVERGE } \Rightarrow \text{ CONVERGE}$$

2 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \simeq \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x\right)$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ DIVERGE

3 $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2+x-6}\,dx =$

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x-2)(x+3)} \simeq \frac{1}{(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{(x-2)(x+3)}}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{1}{5}$$

$\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx \longrightarrow$ DIVERGE $\Rightarrow$ DIVERGE A $+\infty$

4 $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x\cos^2\sqrt{x}}$

$$-1 \leq \cos\sqrt{x} \leq 1$$
$$0 \leq \cos^2\sqrt{x} \leq 1$$
$$2 \leq \cos^2\sqrt{x}+2 \leq 3$$
$$2x \leq x(\cos^2\sqrt{x}+2) \leq 3x$$

$$\frac{1}{3n} \le \underbrace{n\left(\cos^2\sqrt{n}+2\right)}_{\text{DIVERGE A } +\infty} \le \frac{1}{2n}$$

NUMERI COMPLESSI

PERCHÉ STUDIARE I COMPLESSI? NEI REALI...

$x^2-1=0 \quad \pm 1 \quad , \quad x^3-1=0 \quad 1 \quad , \quad x^2+1=0 \quad \nexists$

IL NUMERO DI SOLUZIONI VARIA TROPPO.

LAVORANDO SUI COMPLESSI UN POLINOMIO DI GRADO n, AMMETTE ESATTAMENTE n SOLUZIONI.

UN NUMERO COMPLESSO È UN NUMERO DI FORMA:

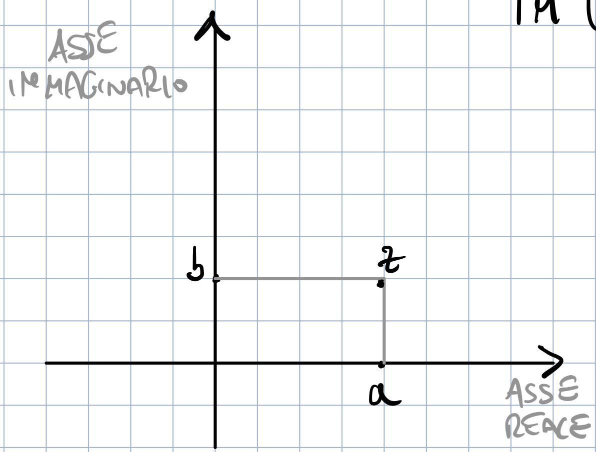
NUMERI REALI $\quad a + i\,b \quad$ UNITÀ IMMAGINARIA

i HA LA PROPRIETÀ $i^2 = -1$

$z = a + ib$

$\mathrm{Re}(z) = a$ PARTE REALE

$\mathrm{Im}(z) = b$ PARTE IMMAGINARIA



L'INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI È DEFINITO COME:

$$\mathbb{C} := \{ a+ib : a,b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + i \cdot 0$ $\quad a = x$, $b = 0$

$\mathbb{R}$ È UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{C}$

FORMA ALGEBRICA

$$z = a + ib$$

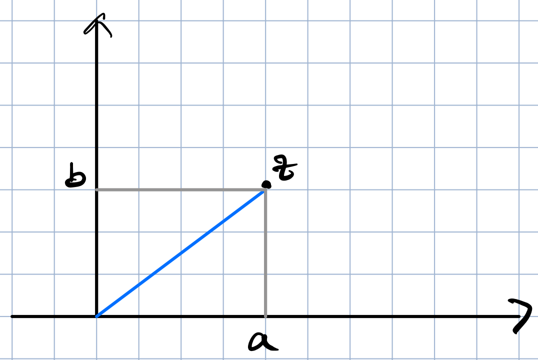
COPPIA DI NUMERI REALI

$$z = (a, b)$$

MODULO DI NUMERO COMPLESSO

$$z = a + ib$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



IL **COMPLESSO CONIUGATO** DI z È IL NUMERO COMPLESSO:

$$\bar{z} = a - ib$$

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z}) \qquad \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z})$$

PROPRIETÀ:

$\forall\, z \in \mathbb{C}$

1. $|z| \in \mathbb{R}$
2. $|z| \geq 0$
3. $|z| = 0 \iff z = 0$
4. $|z| = |\bar{z}|$
5. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
6. $z = -\bar{z} \iff$ IMMAGINARIO PURO

OPERAZIONI

$z = a + ib \quad , \quad w = c + id \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

SOMMA: $z + w = (a+c) + i(b+d)$

DIFFERENZA: $z - w = (a-c) + i(b-d)$

PROPRIETÀ:

1. $z + \bar{z} = 2a$
2. $z - \bar{z} = 2ib$
3. $\overline{z+w} = (a+c) - i(b+d) = (a-ib) + (c-id) = \bar{z} + \bar{w}$

PRODOTTO: $z \cdot w = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc - bd$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

PROPRIETÀ:

1. $z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - a\cancel{ib} + i\cancel{b}a + b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

NOTE:

$\overline{\alpha \cdot z} = \bar{\alpha} \cdot \bar{z} = \alpha \cdot \bar{z}$

RAPPORTO: $\dfrac{z}{w} = z \cdot \dfrac{1}{w}$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c+id} = \frac{1}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

DUNQUE: $z/w = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$

PROPRIETA':

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

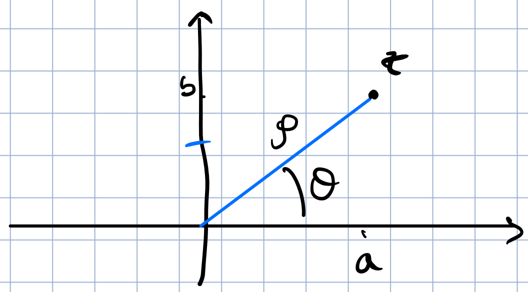
$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}\right)} = \frac{\overline{z} \cdot w}{|w|^2} = \overline{z} \cdot \frac{w}{|\overline{w}|^2} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$z = a + ib$

$w = z\,i = (a+ib)\,i = -b + ia$

FORMA TRIGONOMETRICA

$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ $\Leftarrow$



$$\begin{cases} a = \rho \cos\theta \\ b = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$\rho = |z|$ MODULO DI z

$\theta = \arg z$ ARGOMENTO

SE È INDICATO $\operatorname{Arg} z$ È DEFINITO IN $[0, 2\pi)$ o $(-\pi, \pi]$ ED E' DETTO ARGOMENTO PRINCIPALE.

FORMA ESPONENZIALE COMPLESSA

$z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ $\qquad e^{i\pi} + 1 = 0$

ESERCIZI

1. $z = 2$

$(a, b) = (2, 0)$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\qquad \rho = 2$

$\theta = 0$

2. $z = 1 + i$ $\qquad (1, 1)$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \rho = \sqrt{2}$ $\qquad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

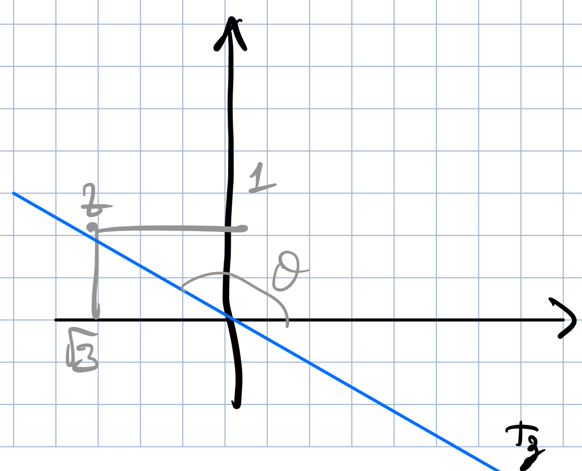
3. $z = i$ $\qquad (0, 1)$

$\rho = 1$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

4. $z = -\sqrt{3} + i$

$\rho = 2$

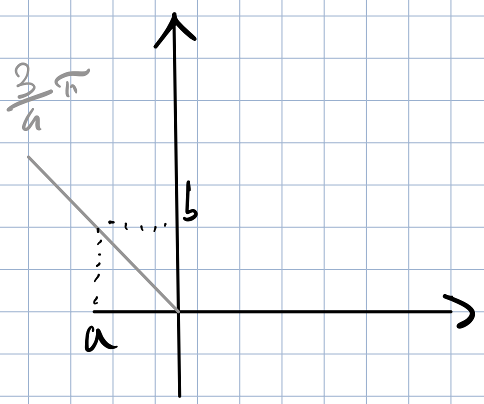
$\vartheta = \frac{5}{6}\pi$



$$y = mx$$

$$1 = -\sqrt{3}\, m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

5 $\quad |z| = 1 \qquad \text{Arg}\, z = \frac{3}{4}\pi$



$b > 0$

$a < 0$

$$\begin{cases} a = -b \\ |z| = 1 \end{cases}$$

$$2b^2 = 1 \implies b = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

FORMULE DI DE MOIVRE

FORMULA DI DE MOIVRE PRODOTTO

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \sin\theta_2 + i \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

$$= \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2))$$

$$= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

COME CONSEGUENZA DELLA FORMULA:

$$z_1^n = \rho_1^n \left(\cos(n\theta_1) + i \sin(\theta_1) \right)$$

$$|z_1^n| = |z_1|^n$$

$$\arg(z_1^n) = n \arg(z_1)$$

FORMULA DI DE MOIVRE POTENZA

FORMULA RAPPORTO DE MOIVRE

$z_2 \neq 0$ $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg(z_1 / z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

ESEMPIO

1

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = 7\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 21 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

2 $(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7 \left(\cos\left(7 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(7 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right)$

$$= 8\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8 - 8i \right.$$

3 $w = \left(- \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i \right)^4$

$$\rho = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = 3$$

$\arg z = \frac{7}{6}\pi$

$y = mx$

$-\frac{3}{2} = m\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$

$$w = 81 \left[\cos\left(4 \frac{7}{6}\pi\right) + i \sin\left(4 \frac{7}{6}\pi\right) \right]$$

$$= 81 \left[\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right] = 81 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

RADICI n-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

$w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

SI DEFINISCE RADICE n-ESIMA DI w IL NUMERO COMPLESSO z TALE CHE:

$$z^n = w$$

TEOREMA

SIANO $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $n \in \mathbb{N}$

ALLORA ESISTONO n RADICI n-ESIME DI w DATE DA:

$$z_k = \rho_k \left(\cos\theta_k + i \sin\theta_k\right) \qquad k=0, \dots n-1$$

DOVE

$$\rho = \rho^{1/n} \qquad \theta = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \qquad k=0, \dots n-1$$

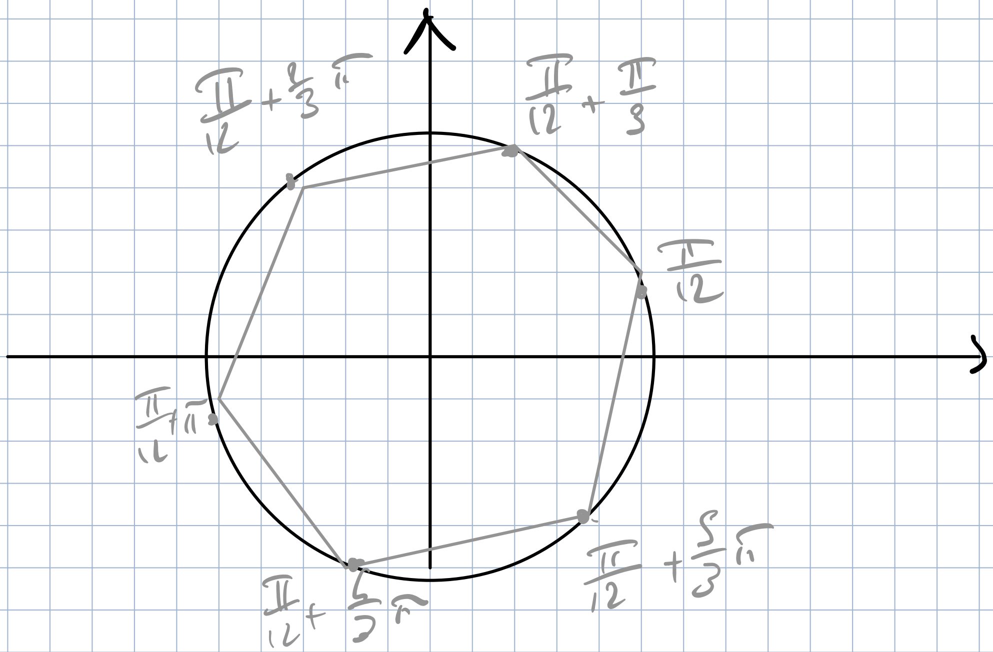
ESERCIZIO:

1

$$z = \sqrt[6]{i} \qquad \rho = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$z_k = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right) \qquad k=0 \dots 5$$



2 $\sqrt[3]{-1} = z$

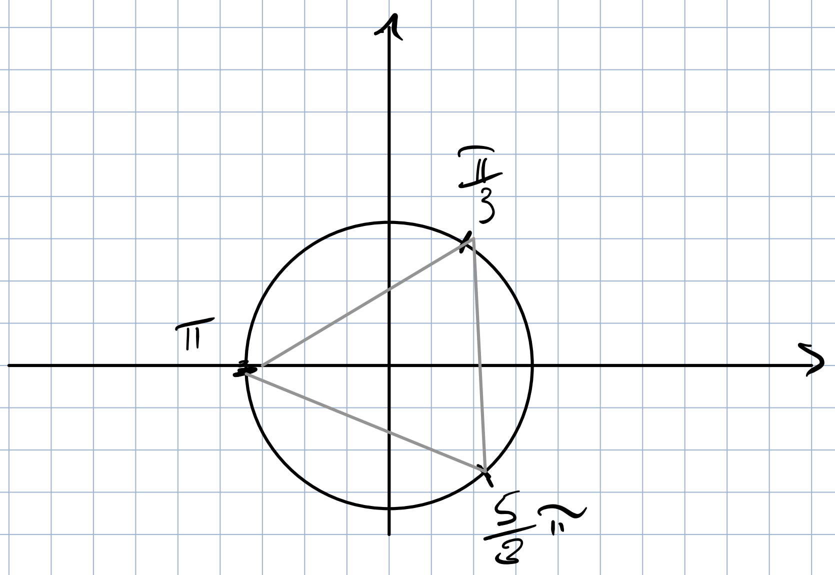
$$w = -1 = 1\left(\cos \pi + i \sin \pi\right)$$

$$z_k = 1\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

$k = 0$ $\quad z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\quad z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

$\quad z_2 = \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$



TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

SIANO $n \in \mathbb{N}$ E $a_0, \dots a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$.
ALLORA L'EQUAZIONE ALGEBRICA

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

AMMETTE n SOLUZIONI IN $\mathbb{C}$ CONTATE CON LA LORO MOLTEPLICITÀ.

COROLLARIO:

SIANO $n \in \mathbb{N}$ E $a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

SE n É DISPARI ALLORA L'EQUAZIONE ALGEBRICA

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

AMMETTE UNA SOLUZIONE REALE.

CONSEGUENZA GIA' OSSERVATA NEL TEOREMA DEGLI O.

DIM SEGUE DAL FATTO CHE SE z É SOLUZIONE LO É ANCHE $\bar{z}$.

ESERCIZIO

1 $(z-2)^3 = -i$

$z - 2 = \sqrt[3]{-i}$ $\qquad -i = 1\left(\cos \frac{3}{2}\pi + \sin \frac{3}{2}\pi\right)$

$$\sqrt[3]{-i} = \cos\left(\frac{\frac{3}{2}+2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{3}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

$k=0 \qquad \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i + 2$

$k=1 \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + 2$

$k=2 \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + 2$

APPUNTO

$$|\sin x| \le |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x) = \sin x - x$ DERIVABILE

$f'(x) = \cos x - 1 \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f È DECRESCENTE IN $\mathbb{R}$

$x \ge 0 \quad f(x) \le f(0)$

$\sin x - x \le 0 \implies \sin x \le x$

SERIE NUMERICHE

$(a_n)_n$ SUCCESSIONE NUMERICA, SI DEFINISCE SERIE NUMERICA DI TERMINE GENERALE a_n E SI INDICA CON IL SIMBOLO:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

TERMINE GENERALE DELLA SERIE

LA SOMMA DI TUTTI I TERMINI DELLA SUCCESSIONE a_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

ESEMPI

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$ SERIE ARMONICA

2. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n-1} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

LA SUCCESSIONE $(S_n)_n$ DEFINITA DA:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

SI CHIAMA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI O DELLE RIDOTTE DELLA SERIE DATA.

SI DICE CHE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ È:

- CONVERGENTE AD S SE $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$
- DIVERGENTE A $\pm\infty$ SE $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \pm\infty \notin \mathbb{R}$

- **INDETERMINATA** SE $\nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$

LE SERIE CONVERGENTI O DIVERGENTI SI DICONO **REGOLARI**.

ESEMPI

1 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \underline{1}$$

SERIE DI MENGONI-CAUCHY

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) \dots \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \underline{1}$$

2 $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

$S_1 = -1$, $S_2 = 1 - 1$, $S_3 = -1 + 1 - 1$, ...

$$\nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$$

CONDIZIONE NECESSARIA CONVERGENZA SERIE:

Ip: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGENTE

Th: $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

DIMOSTRAZIONE: POICHÉ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

DALLA DEFINIZIONE DI $(S_n)_n$ SI HA CHE:

$$S_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \implies a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

PASSANDO AL LIMITE PER $n \to +\infty$ SI HA CHE:

$$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(S_{n+1} - S_n \right) = 0$$

SE NON FOSSERO FINITI NON POTREI DIRE CON CERTEZZA IL VALORE DEL LIMITE

ESERCIZI

1 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n-1}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ NON CONV.

2 $\sum_{n=1}^{\infty} 7$ $\lim_{n\to+\infty} 7 \neq 0$ $S_n = 7n$ $\lim_{n\to+\infty} 7n = +\infty$

SERIE GEOMETRICHE

$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$ q RAGIONE DELLA SERIE

$a_n = a \cdot q^n$ $a, q \neq 0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a q^{n+1}}{a q^n} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$S_n = a_0 + \dots + a_n = a + aq + \dots + aq^n =$

$$\begin{cases} \text{SE } q \neq 1 & a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ \text{SE } q = 1 & a(n+1) \end{cases}$$

$\boxed{a \text{ È IL PRIMO TERMINE DELLA SERIE}}$

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = \begin{cases} +\infty & \text{SE } q > 1 \\ 0 & \text{SE } |q| < 1 \\ \nexists & \text{SE } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} (\text{sgn } a) \cdot \infty & \text{SE } q \geq 1 \\ \frac{a}{1-q} & \text{SE } |q| < 1 \\ \nexists & \text{SE } q \leq -1 \end{cases}$$

DUNQUE:

- DIVERGE SE LA RAGIONE È ≥ 1
- CONVERGE SE LA RAGIONE È $|q| < 1$ $\left(\frac{a}{1-q}\right)$
- INDETERMINATA SE LA RAGIONE È ≤ -1

ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$q = \frac{1}{2}$

$a = 1$

ESERCIZIO: ANALIZZARE SERIE NUMERICA RISULTANTE DALLA DIVISIONE DI UN LATO DI 1m.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = 0 \implies \text{PUÒ CONVERGERE}$$

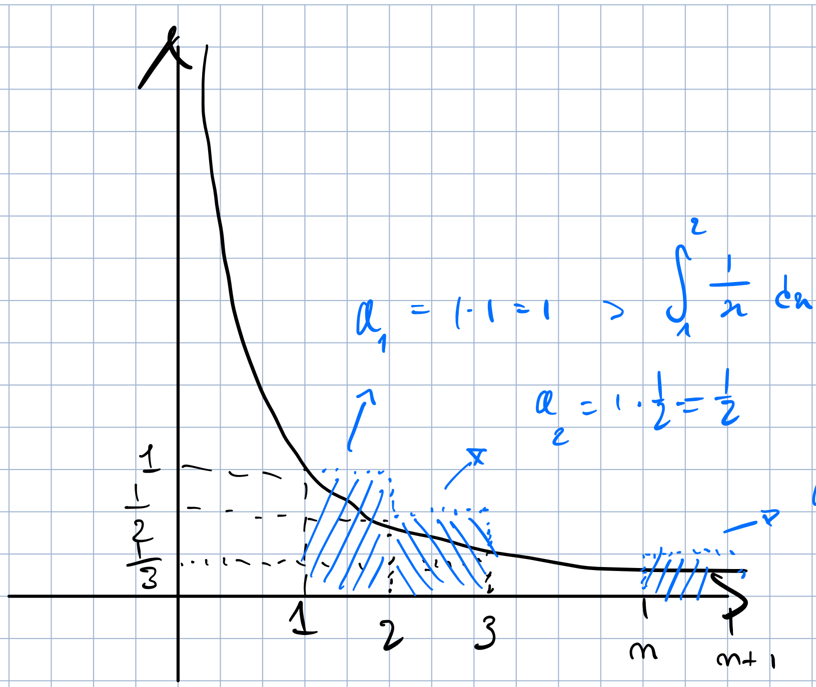
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = S_n\left(\frac{1}{2^n}\right) - 1 = 1$$

STUDIO SERIE NUMERICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$ PUÒ CONVERGERE

$\geq$ POICHÉ $a_k \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

PASSANDO AL LIMITE: (IL LIMITE ESISTE POICHÉ S_n È MONOTONA CRESCENTE)

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \geq \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ DIVERGE a } +\infty$$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{CONVERGE} & \alpha > 1 \\ \text{DIVERGE} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Ip: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Th: LA SERIE È REGOLARE

DIMOSTRAZIONE:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \overset{\le}{\geq} S_n \quad \text{POICHÉ} \quad a_{n+1} \overset{\le}{\geq} 0$$

$$\Rightarrow (S_n)_n \ \text{È} \ \underset{\text{DECRESCENTE}}{\text{MONOTONA}} \Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} S_n$$

ESEMPIO

$$\sum_{n=2} \frac{n}{n-1} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n-1} = 1 \Rightarrow \text{DIVERGE}$$

$\Downarrow$

REGOLARE

CRITERIO DEL CONFRONTO (PER LE SERIE)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

TALE CHE $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ SERIE A TERMINI NON NEGATIVI.

ALLORA

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum_{n=1} a_n$ CONVERGE

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}$ DIVERGE

DIMOSTRAZIONE:

DA $0 \le a_n \le b_n$ SI HA CHE:

$$0 \le A_n = a_1 + \dots + a_n \le b_1 + \dots + b_n = B_n$$

PASSANDO AL LIMITE: (CHE SI PUÒ FARE POICHÉ LA SERIE È A TERMINI NON NEGATIVI)

$$0 \le \lim_{n \to +\infty} A_n \le \lim_{n \to +\infty} B_n$$

DA QUI SEGUONO 1 e 2

ESEMPI

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ È A TERMINI POSITIVI $\Rightarrow$ REGOLARE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$$

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$$ CONVERGE A 1 $\Rightarrow$ CONVERGE

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a q^n = \frac{a \cdot q^{\bar{n}}}{1-q}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Iph: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $a_n \ge 0$, $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

TALI CHE $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$

Th:

ALLORA:

1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}$ CONVERGE

2 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}$ DIVERGE

DIMOSTRAZIONE

DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}$

SUPPONIAMO $\varepsilon = L/2$ E OTTENIAMO:

$$(L-\varepsilon) \quad \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} L \quad (L+\varepsilon)$$

DATO CHE $b_n > 0$ SI HA:

$$0 < \frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} L \, b_n \qquad \forall x \in (a, a+d)$$

LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO

ESEMPI

2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \simeq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ DIVERGE} \quad \Rightarrow \quad \text{DIVERGE}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

3 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+1}$$

$\longrightarrow\ > 0$

$n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{2n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2n \cdot n^2}{n^3+1} = 2 \neq 0$$

$$\frac{1}{n^2} \text{ CONVERGE} \quad \Rightarrow \quad \text{CONVERGE}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO:

Ip: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$: $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

Th:

1 SE $L < 1$ ALLORA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE.

2 SE $L > 1$ ALLORA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE

DA DEFINIZIONE DI SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE L.

CRITERIO DELLA RADICE:

Ip: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

Th:

1. SE $L<1$ ALLORA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE.
2. SE $L>1$ ALLORA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE

ESEMPI

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$$

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

SI DICE CHE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ È CONVERGENTE.

ESERCIZIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\log_2(n))}{n^2 \log_2 n}$$

STUDIAMO LA SERIE DEI MODULI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(\log(n))}{n^2 \log n} \right| \le \frac{|\log n|}{n^2 \log n} = \frac{1}{n^2} \to \text{CONVERGE}$$

$|\sin x| \le |x|$

$\Downarrow$

É ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

TEOREMA

SE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ É ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE ALLORA TALE SERIE CONVERGE

NON VALE IL CONTRARIO, BASTA CONSIDERARE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

CRITERIO DI LEIBNIZ (PER SERIE A SEGNI ALTERNATI)

Ip: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

SE

1. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

2. $(a_n)_n$ É MONOTONA DECRESCENTE

Th: ALLORA LA SERIE DATA CONVERGE, INOLTRE È DETTA S LA SOMMA DELLE SERIE SI HA

$$|S_n - S| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{LIMITATA}} \underbrace{a_n}_{\to 0} = 0$$

ESEMPIO

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots$$

LEIBNITZ: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ ①

INOLTRE: $n+1 > n$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \quad ② \text{ OK}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n} - \lim_{n \to +\infty} = 1 \quad \text{NO LEIBNITZ}$$

CONVERGENZA ASSOLUTA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} \quad \text{DIVERGE PERCHÉ } \lim \neq 0$$

QUINDI NON ASS. CONV.

3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$ $\lim_{n \to +\infty} = 0$

DECRESCENTE ?

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$ f DERIVABILE

$f'(x) = \frac{x^2+x-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

$= \frac{x^2+x-2x^2-x+2x+1}{(x^2+x)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+x)^2}$

$x^2-2x-1 \leq 0$

$1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$ $\Rightarrow (a_n)$ DECRESCE

$\Rightarrow$ CONVERGE PER LEIBNITZ

4

STABILIRE PER QUALI VALORI DI $t \in \mathbb{R}^+$
LA SERIE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \log(n+1)}$$

CONVERGE O DIVERGE?

$$\frac{t^{n+1}}{2^{n+1}\log(n+2)} \cdot \frac{2^n \log(n+1)}{t^n} = \frac{t}{2}\,\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = \frac{t}{2}$$

DE L'HOPITAL

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x+1)}{\log(x+2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+2}} \overset{H}{=} 1$$

$\frac{t}{2} < 1$ CONV

$\frac{t}{2} > 1$ DIV.

$t = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$

$\log n < n$

$\log(n+1) < (n+1)$

$$\frac{1}{\log(n+1)} > \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{DIV}} \Rightarrow \text{DIV.}$$

FUNZIONI ASINTOTICHE

$f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

SI DICE CHE f e g SONO ASINTOTICHE VICINO AD x_0 SE:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\boxed{f \sim g \text{ PER } x \to x_0}$$

LA RELAZIONE DI ASINTOTICO È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA:

- RIFLESSIVA: $f \sim g$
- SIMMETRICA: $f \sim g \Rightarrow g \sim f$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = 1$$

$\to 1$

- TRANSITIVA:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)} = 1$$

$\to 1$ $\to 1$

PROPOSIZIONE: $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

$f \sim g$ PER $x \to x_0$

a ALLORA: HANNO STESSO COMPORTAMENTO

$$\left.\begin{array}{l} - f \text{ e } g \text{ HANNO STESSO LIMITE FINITO} \\ - f \text{ e } g \text{ HANNO STESSO LIMITE INFINITO} \\ - f \text{ e } g \text{ NON AMMETTONO LIMITE} \end{array}\right\} \text{PER } x \to x_0$$

b

SE $f \sim h$ e $g \sim r$ PER $x \to x_0$ ALLORA:

$$f \cdot g \sim h \cdot r \quad \text{e} \quad \frac{f}{g} \sim \frac{h}{r} \quad \text{PER } x \to x_0$$

DIMOSTRAZIONE:

a SUPPONIAMO $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

SI HA:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{g(x)}{f(x)}}_{1} \underbrace{f(x)}_{L} = L$$

SUPPONIAMO CHE $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$ E PER ASSURDO $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$

ALLORA:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right) = L \quad \text{ASSURDO}$$

b PER IPOTESI $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 1 = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{r(x)}$

ALLORA:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x) \cdot r(x)} = 1 \Rightarrow f \cdot g \sim h \cdot r \text{ PER } x \to x_0$$

O-PICCOLO

$f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

SI DICE CHE f É UN "O-PICCOLO" DI g PER $x \to x_0$ SE:

$$f = o(g) \text{ PER } x \to x_0$$

SE:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f SI DICE INFINITESIMO PER $x \to x_0$ SE:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f = o(1) \text{ PER } x \to x_0$$

PROPRIETÀ DI o: $(x_0 = 0)$ $x \to 0$

1 $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

$\boxed{\text{SE } x_0 \neq 0 \quad o((x - x_0)^n)}$

2. $c \cdot o(x^n) = o(x^n)$, $c \in \mathbb{R}$

3. $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$

4. $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

5. $\dfrac{o(x^n)}{o(x^m)} = o(x^{n-m})$, $n \geq m$

PROPOSIZIONE: RELAZIONE TRA o e $\sim$

$f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

ALLORA:

$$f \sim g \text{ PER } x \to x_0 \iff f = g + o(g) \text{ PER } x \to x_0$$

DIMOSTRAZIONE: SIA $f \sim g$ PER $x \to x_0$. $\iff$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right) = 0 \iff f - g = o\,g$$

$$\iff f = g + o\,g \text{ PER } x \to x_0$$

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \sin x \sim x$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \qquad 1-\cos x \sim x^2/2 \qquad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad e^x - 1 \sim x \qquad e^x \sim 1 + x$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \log(1+x) \sim x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

$$\lim f(x) = 0$$

$$\iff \sin f(x) \sim f(x) \quad \text{PER } x \to x_0$$

UTILIZZANDO o-PICCOLO

PER UNA QUANTITÀ CHE DIVISA PER x, TENDE A 0

$$\sin x = x + o(x) \qquad x \to 0$$

$$e^x - 1 = x + o(x) \qquad e^x = 1 + x + o(x) \qquad x \to 0$$

$$\log(1+x) = x + o(x) \qquad x \to 0$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad \cos x = 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad x \to 0$$

CON LE PROPRIETÀ DI o $\quad \cos x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

ESERCIZI

1 $$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{\log(x)}$$

$$\sin(x-1) \sim x-1 \qquad x \to 1$$

$$\log(x) = \log(1-1+x) = \log(1+(x-1)) \sim x-1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

2 $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$e^{x^2}-1 \sim 1+x^2-1 = x^2$$

$$\sin x \sim x$$

3 $$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)^2 \cdot \sin(x-1)}{\sqrt{x}\,\log x} \sim \frac{(x^2+1)^2 \cdot (x-1)}{\sqrt{x}\,(x-1)} = 4$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)^2\,[x-1+o(x-1)]}{\sqrt{x}\,[x-1+o(x-1)]} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)^2}{\sqrt{x}} \frac{(x-1)}{(x-1)} \frac{\left(1+\overbrace{\frac{o(x-1)}{x-1}}^{\to 0}\right)}{\left(1+\underbrace{\frac{o(x-1)}{x-1}}_{\to 0}\right)}$$

$$= 4$$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - \log(1+x) - x - 1}{x} = \dfrac{1 - x + \theta(x) - x - \theta - x - 1}{x}$

$\log(1+x) = x + \theta(x)$

$e^{-x} = 1 - x + \theta(x)$

$= \dfrac{-3x + \theta(x) - \theta(x)}{x} = \dfrac{-3x + \theta(x)}{x} = \dfrac{\cancel{x}\left(-3 + \frac{\theta(x)}{2}\right)}{\cancel{x}}$

$= -3$

5 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2\cos x + \log(x+1)}{x^2} = \dfrac{2 - 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \theta(x^2)\right) + x + \theta(x)}{x^2}$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \theta(x^2)$

$\log(1+x) = x + \theta(x)$

$= \dfrac{2 - 2 + x^2 + \theta(x^2) + x^2 + \theta(x^2)}{x^2} = \dfrac{2x^2 + \theta(x^2)}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(2 + \dfrac{\theta(x^2)}{x^2}\right) = 2$

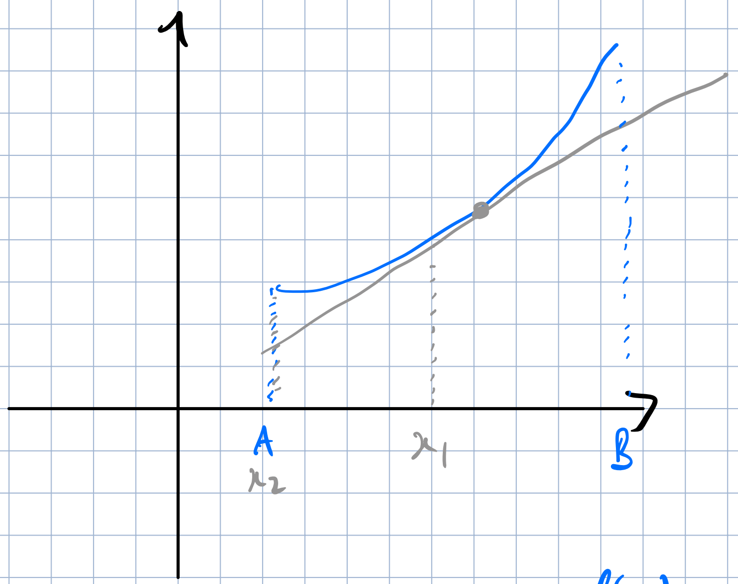
$f(a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

PROBLEMA: È POSSIBILE LINEARIZZARE f VICINO AD x_0?
IN ALTRE PAROLE, È POSSIBILE APPROSSIMARE f VICINO AD x_0 USANDO UN POLINOMIO.

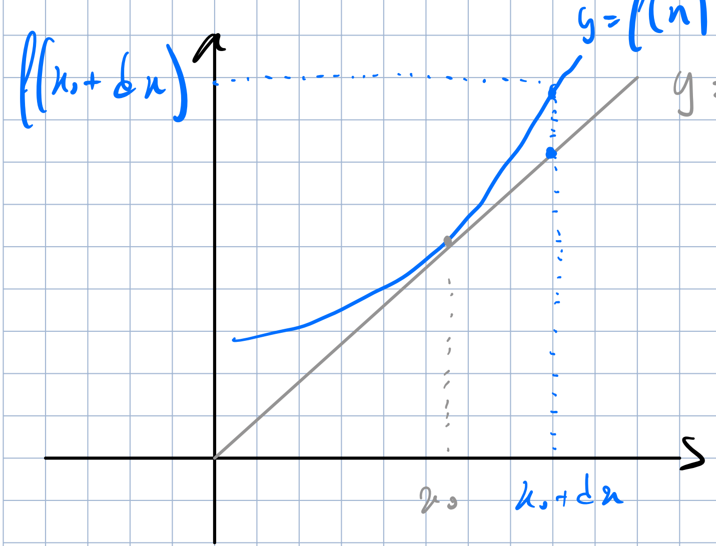
EQUAZIONE RETTA TANGENTE IN x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

RISPOSTA: SÌ SE È DERIVABILE.



IN x_1 È UNA BUONA APPROSSIMAZIONE, MA IN x_2 NO.



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$|dx| << 1$$

$$f(x_0+dx) - \left(f(x_0) + f'(x_0)dx\right)$$

$$= \underbrace{f(x_0+dx) - f(x_0)}_{\text{INCREMENTO}} - \underbrace{f'(x_0)dx}_{\text{DIFFERENZIALE}} = df(x)$$

DI f IN x_0 DI f IN x_0

f DERIVABILE IN x_0 :

$$\Rightarrow \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_0+dx)+f(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{dx \to 0} \left[\frac{f(x_0+dx)+f(x_0)}{dx} - f'(x_0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{dx \to 0} \left[\frac{f(x+dx)-f(x_0)-f'(x_0)dx}{dx}\right] = 0$$

$(x-x_0)$

$$\Rightarrow f(x_0+dx)-f(x_0)-f'(x_0)dx = \theta\, dx \quad \text{PER } dx \to 0$$

$$f(x_0+dx) = f(x_0)+f'(x_0)dx + \theta(dx) \quad \text{PER } dx \to 0$$

$$\sin x = x + \theta(x) \qquad x \to 0$$

$$e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + x + \theta(x) \qquad x \to 0$$

$$\log(1+x) = x + \theta(x) \qquad x \to 0$$

USANDO LA SEGUENTE FORMULA PER IL SIN

$$f(x_0+dx) = f(x_0)+f'(x_0)dx + \theta(dx)$$

$$f(x) = \sin x \qquad \text{in } x_0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x = 1 \qquad \text{QUINDI} \qquad \sin x = x + \theta(x)$$

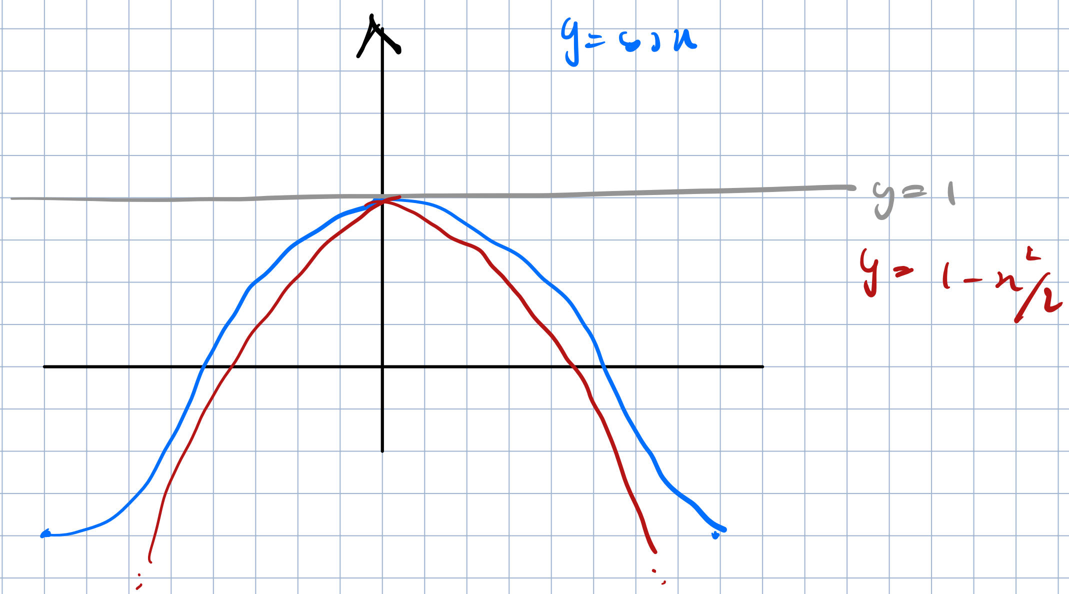
PER IL $\cos x$:

$f(x) = \cos x$ in $x_0 = 0$

$f'(x) = -\sin x$ $\cos x = 1 + o(x)$

POTREMMO APPROSSIMARE MEGLIO CON EQUAZIONI DI SECONDO GRADO ?

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$



PER AVERE UN POLINOMIO DI GRADO n, $f(x)$ DEVE ESSERE DERIVABILE n VOLTE.

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ $f \in C^n(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$

ALLORA:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{POLINOMIO DI TAYLOR}} + \underbrace{o\left((x-x_0)^n\right)}_{\text{RESTO DI PEANO}}$$

DOVE $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e $0! = 1$

PER $n=1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{PER } x \to x_0$$

IL POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO n CENTRATO IN x_0:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \dots$$

$$\dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

DIMOSTRAZIONE: PER INDUZIONE

BASE DELL'INDUZIONE: $n=1$

f DERIVABILE IN x_0:

$$\Rightarrow \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_0+dx) + f(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{dx \to 0} \left[\frac{f(x_0+dx) + f(x_0)}{dx} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{dx \to 0} \left[\frac{f(x_0+dx) - f(x_0) - f'(x_0)dx}{dx} \right] = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0+dx) - f(x_0) - f'(x_0)\overset{(x-x_0)}{dx} = o(dx) \quad \text{PER } dx \to 0$$

$$f(x_0+dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx + o(dx) \quad \text{PER } dx \to 0$$

IPOTESI INDUTTIVA: PER OGNI $g \in C^{n-1}(a,b)$ VALE LA FORMULA:

$$g(x) = P_{n-1,g}(x) + o\left((x-x_0)^{n-1}\right) \quad \text{PER } x \to x_0$$

DOBBIAMO PROVARE CHE $f(x) = P_{n,f}(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$ PER $x \to x_0$, i.e.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\overbrace{f(x) - P_{n,f}(x)}^{\to 0}}{\underbrace{(x-x_0)^n}_{\to 0}} = 0$$

DE L'HOPITAL: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P'_{n,f}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$

$$\Rightarrow P'_{n,f}(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$= P_{n-1,f'}(x)$$

DALL'IPOTESI INDUTTIVA

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P_{n-1,f'}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = 0$$ POICHÉ $f' \in C^{n-1}(a,b)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,f}(x)}{(x-x_0)^n} \overset{H}{=} 0$$ PROVATO.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k + o(x^n) \quad \text{PER } x \to 0$$

ESEMPI

1 $\quad f(x) = e^x$ $\quad$ POLINOMIO DI GRADO n SI PUÒ PERCHÉ $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{PER } x \to 0$$

2 $\quad f(x) = \log(1+x) \qquad f \in C^n(-1, +\infty)$

$f(0) = 0$ $\quad$ IN $x=0$ $\quad 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad$ IN $x=0$ $\quad 0$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2}$ $\quad$ IN $x=0$ $\quad 0$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\quad$ IN $x=0$ $\quad 0$

$f^{IV}(x) = \frac{-6}{(1+x^4)} = -6 = -3!$

$$\log(1+x) = \sum_{k}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \quad x \to 0$$

3 $f(x) = \sin x \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f'(x) = \cos x = 1$

$f''(x) = -\sin x = 0$

$f'''(x) = -\cos x = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x = 0$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(2n+1) \quad x \to 0$$

4

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(2^n) \quad x \to 0$$

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE

$f \in C^n(a,b)$, $x, x_0 \in (a,b) \Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (x_0, x)\ (x, x_0)$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{VALORE APPROSSIMATIVO DI } f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{RESTO DI LAGRANGE}}$$

È o di $(x_0 - x_0)^{n-1}$

PER PEANO $n-1$ $= f(x) = P_{n-1}(x) + o\left((x-x_0)^{n-1}\right)$ PER $x \to x_0$

NOTA: PER $n=1$: $f \in C^1(a,b)$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a,b) : f(x) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x-x_0)$

$f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x-x_0)$ TEOREMA DI LAGRANGE

ESERCIZIO:

1 APPROSSIMARE IL VALORE DI e

CONSIDERIAMO e^x

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{PER } x \to 0$$

$e = f(1)$

$$P_1(x) = 1 + x \Big|_{x=1} = 2$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{16}{6} = 2,\overline{6}$$

⋮

2 APPROSSIMARE IL VALORE DI $\sqrt{e}$ IN MODO TALE CHE L'ERRORE NON SIA SUPERIORE A 10^{-2}.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{PER } x \to 0 \quad \Rightarrow \text{NO}$$

USIAMO LAGRANGE

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\left| \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < 10^{-2}$$

USIAMO $x = \frac{1}{2}$

$\bar{x} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\left| \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right| < 10^{-2}$$

$$\frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-2}$$

$$\frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{\overbrace{\sqrt{e}}^{<\sqrt{3}}}{(n+1)!} \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}^{<1} < \frac{\sqrt{3}}{(n+1)!} < 10^{-2}$$

$$\frac{(n+1)!}{\sqrt{3}} > 10^{2} = (n+1)! > 10^{2} \cdot \sqrt{3}$$

SE $n \geq 5$

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO INTEGRALE

$f \in C^{n+1}(a,b)$, $x, x_0 \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{\text{RESTO INTEGRALE}}$$

NOTA: PER $n=0$ SI HA $f \in C^1(a,b)$ $x, x_0 \in (a,b)$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$ FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

ESERCIZIO

1. SCRIVERE IL POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO 5 CENTRATO IN $x_0 = 2$ DELLA FUNZIONE $f(x) = \lg x$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad x \to x_0$$

1° METODO: SVOLGERE LE DERIVATE FINO A 5

2° METODO: RICONDURSI AD ALTRE FUNZIONI

$$\log(1+y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\, y^k}{k} + o(y^n) \qquad y \to 0$$

$$f(x) = \log(x) = \log\left(2 + (x-2)\right) = \log\left[2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)\right]$$

$$= \log 2 + \log\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)$$

$y \to 0 \quad x \to 2$

$$= \log 2 + \sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{x-2}{2}\right)^k + o\left((x-2)^5\right) \qquad x \to 2$$

$$= \log 2 + \sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k+1}}{k=1} (x-2)^k + o\left((x-2)^5\right) \qquad x \to 2$$

2 POLINOMIO DI TAYLOR $n=8$, $x_0 = 0$

$$f(x) = x^3 \cdot e^x$$

$$f(x) = x^3\left(\sum_{k=0}^{5} \frac{x^k}{k!} + o(x^5)\right) = \sum_{k=0}^{5} \frac{x^{k+3}}{k!} + o(x^8) \qquad x \to 0$$

3 POLINOMIO DI TAYLOR $n=10$, $x_0=0$

$$f(x) = x^2 \sin x$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \qquad x \to 0$$

$$f(x) = x^2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^9) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+3} + o(x^{11}) \right)$$

DATO CHE LE POTENZE PARI DEL SENO SONO NULLE È UGUALE A $o(x^{10})$

4 $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin^2 \sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2}$$

$\sin x = x + o$ $\qquad \sin^2 x = x^2 + o(x^2)$

$\sin^2 \sqrt{x} = x + o(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x + o(x) - x^2 + o(x^2)}{x} =$$

NON OTTENGO NULLA

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x) - x^2 + o}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^2}$$

L' $\mathcal{O}(x)$ DI GRADO MINORE ASSORBE QUELLI DI GRADO MAGGIORE

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \quad x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^4) + \frac{x^6}{36} + \mathcal{O}(x^6) + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\sin^2 \sqrt{x} = x - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^2)\right) - \left(x^2 - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^2)}{x^2} = -\frac{2}{3}$$

5 $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{1/x^2} - \cos\frac{1}{x}\right) \quad 0 \cdot (\infty)$

$t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{t^2} - \cos t}{t^2}$$

$$e^y = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!} + \mathcal{O}(y^n) \quad y \to 0$$

$$\cos y = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + o(y^{2m})$$

$$e^y = 1 + y + o(y)$$ SVILUPPO e^x AL PRIMO GRADO PERCHE' E' t^2

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1 + t^2 + o(t^2) - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^2}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{3}{2}t^2 + o(t^4)}{t^2} = \frac{3}{2}$$

6 $$\lim_{x \to 0} \frac{-2\sqrt[3]{x} \cdot \log(1+x)}{\sqrt{x^2 - \log^2(1+x)}}$$ $\frac{0}{0}$

$$\log(1+x) = x + o(x) \quad x \to 0$$

$$\log^2(1+x) = x^2 + o(x^2)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sqrt[3]{x} \cdot (x + o(x))}{\sqrt{x^2 - x^2 + o(x^2)}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sqrt[3]{x} \cdot x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)}{\sqrt{\ldots o(x^2)}}$$

$$\sqrt{x^2 \frac{o(x^2)}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sqrt[3]{x} \cdot x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)}{|x| \sqrt{\frac{o(x^2)}{x^2}}}$$

NON VA BENE $\frac{0}{0}$

AUMENTIAMO GRADO IL DENOMINATORE

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log^2(1+x) = x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2\sqrt[3]{x}\,(x + o(x))}{\sqrt{x^2 - (x^2 - x^3 + o(x^3))}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sqrt[3]{x} \cdot x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)}{\sqrt{x^3\left(1 + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)}} = -\infty$$

SERIE DI TAYLOR

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ $\qquad f \in C^n(a,b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{R_n(x,x_0)}_{\text{RESTO o ERRORE}}$$

SE $f \in C^\infty(a,b)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

SI DICE CHE f È SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR INTORNO AD x_0 SE $\exists\, r > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x \in (a,b) \quad |x - x_0| < r$$

NOTA :

$f \in C^\infty \not\Rightarrow f$ SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR

DIM.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{SE } x \neq 0 \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

SI DIMOSTRA CHE $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ALLORA LA SERIE DI TAYLOR

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x) \quad \forall x \neq 0$$

CRITERI DI SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR

CRITERIO 1 : $f \in C^{\infty}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$

f È SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR INTORNO AD x_0 SE E SOLO SE :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x, x_0) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad |x - x_0| < r.$$

DOVE $R_n(x, x_0)$ È IL RESTO NELLA FORMULA DI TAYLOR.

COME CONSEGUENZA :

$f(x) = e^x$ È SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR IN TUTTO $\mathbb{R}$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

IN PARTICOLARE SI HA CHE : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

CRITERIO 2: $f \in C^\infty(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ SUFF.

$\exists M > 0$ TALE CHE $|f^{(n)}(x)| \le M \quad \forall x \in (a,b) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ f È SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR.

COME CONSEGUENZA:

$$\sin x = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

PER $\log(1+x)$:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (-1)^{n-1}}{n} \quad \forall x \in (-1,1]$$

$$x = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$$