25/09/2023

FUNZIONI DI DUE O PIÚ VARIABILI

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

$(x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

f é una FUNZIONE REALE di m VARIABILI REALI

i.e

$\forall (x_1, \dots, x_m) \in A \quad \exists! \; y \in \mathbb{R} \mid f(x_1, \dots, x_m) = y$

$m = 2$

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$

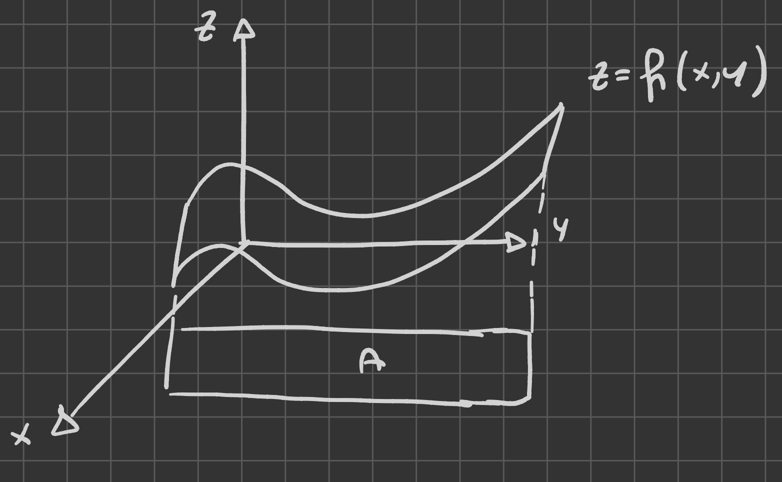
$m = 3$

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \mapsto t = f(x, y, z)$

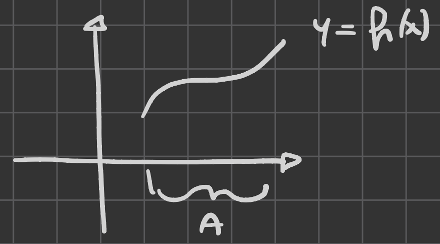
Grafico $f = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$

$= \{ (x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) \mid (x_1, \dots, x_m) \in A \} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$



$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$



graf $f = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$
$\subseteq \mathbb{R}^2$

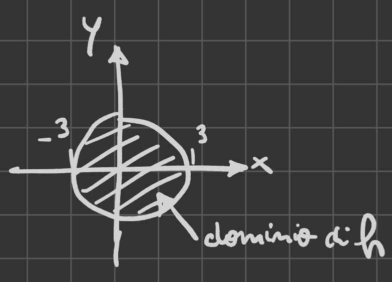
GRAFICO DI F

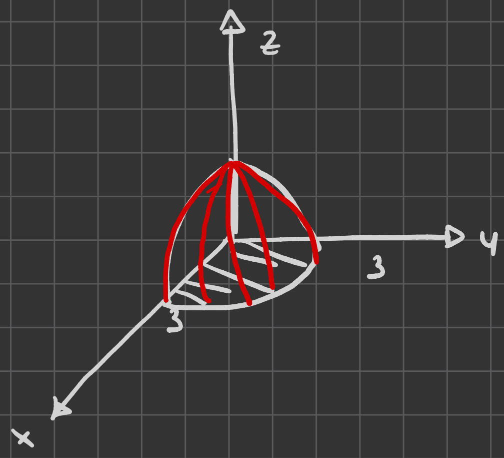
Esempi

1) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$9 - x^2 - y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 \leq 9$





Curve di livello della funzione f sono le curve lungo le quali la funzione è costante. La loro equazione è data da

$$f(x,y) = c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

$\sqrt{9-x^2-y^2} = c$ ⇒ $c < 0$

⇒ $9-x^2-y^2 = 0 \qquad x^2+y^2 = 9$

$9-x^2-y^2 = c^2 \qquad x^2+y^2 = 9-c^2$

$\emptyset$ se $9-c^2<0$

circonferenza centrata in $(0,0)$ con $r = \sqrt{9-c^2}$ se $9-c^2 \geq 0$

$c \in [0,3]$

$y = K$

$z = \sqrt{9-x^2-k^2}$

$z^2 = 9-x^2-k^2$

$x^2+z^2 = 9-k^2$

Esempi

$f(x,y) = x^2+y^2$

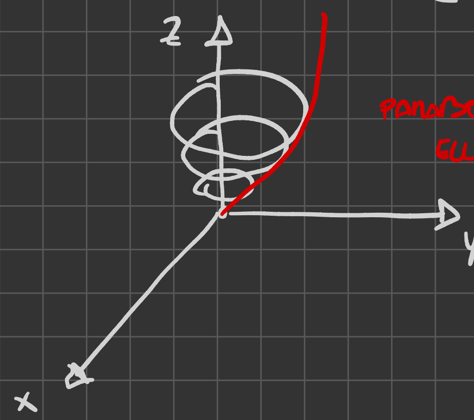
Dominio : $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = c \end{cases}$$

$c<0$: $\emptyset$

$c=0$: $(0,0,0)$

$c>0$: circonferenza di centro $(0,0,c)$ e raggio $\sqrt{c}$



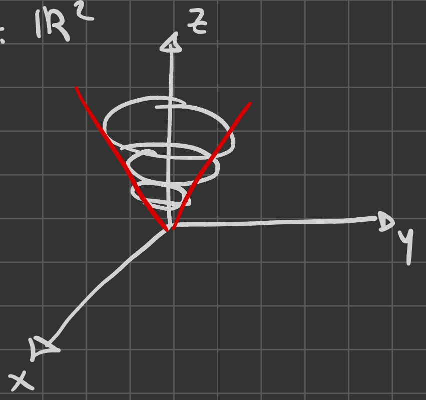
PARABOLOIDE ELLITTICO → $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$$\begin{cases} x = K \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$z = K^2 + y^2$ PARABOLA

3) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Dominio : $\mathbb{R}^2$



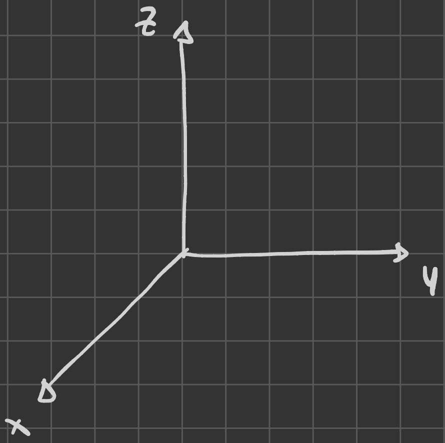
$\sqrt{x^2+y^2} = c \qquad c \geq 0$

$x^2+y^2 = c^2$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \qquad z = |x|$$

4) $f(x,y) = x^2 - y^2$

Dominio : $\mathbb{R}^2$



PARABOLOIDE IPERBOLICO

$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

$x^2 - y^2 = c \qquad c \in \mathbb{R}$

$c = 0 \qquad x^2 - y^2 = 0$

$y^2 = x^2 \qquad y = \pm x$

$x^2 - y^2 = c \,, \; c \neq 0$

$\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{c} = 1$ iperbole equilatera

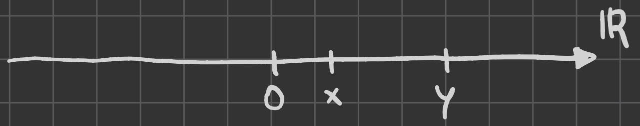
$$\begin{cases} x = 0 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$z = -y^2$ PARABOLA RIVOLTA VERSO IL BASSO

5) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

26/09/2023

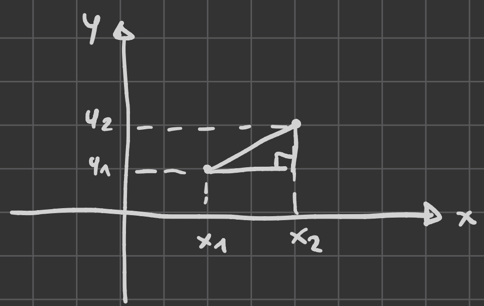
DISTANZA in $\mathbb{R}^n$



DISTANZA in $\mathbb{R}$:

$$d(x,y) = |x-y|$$

in $\mathbb{R}^2$



$$d(P,Q) = \overline{PQ} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{QH}^2}$$
$$= \sqrt{|x_1-x_2|^2 + |y_1-y_2|^2}$$
$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

In $\mathbb{R}^n$

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,, \quad \text{dove } P = (x_1, \dots, x_n) \text{ e } Q = (y_1, \dots, y_n)$$

DISTANZA EUCLIDEA IN $\mathbb{R}^n$

X insieme non vuoto
una distanza su X é una funzione

$$f : X \times X \to \mathbb{R}$$

tale che:

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
3) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$
4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

La coppia (X, d) si chiama SPAZIO METRICO

X SPAZIO VETTORIALE

d distanza su X

Si definisce NORMA di $x \in X$ la quantità $\|x\| = d(x, 0)$

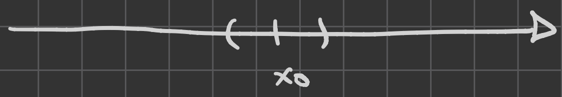
$d(x,y) = \|x - y\|$

$(X, \|\cdot\|)$ SPAZIO NORMATO

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

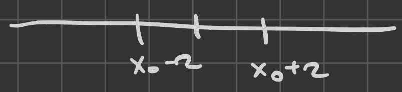
INTORNO IN $\mathbb{R}^n$

$x_0 \in \mathbb{R}$

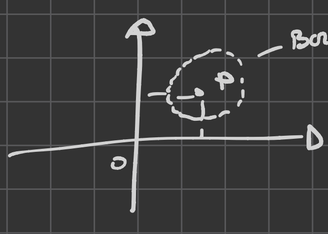


$$I_{x_0, r} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$
$$= (x_0 - r, x_0 + r) \qquad r > 0$$

INTORNO SFERICO di x_0



in $\mathbb{R}^2$



Bordo non sta nell'insieme

intorno sferico di P_0

$$I_{P_0, r} = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, P_0) < r\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

$P_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$

Un intorno sferico di P_0 in $\mathbb{R}^n$ è l'insieme

$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n + x_{0n})^2 < r^2\}$, con $r > 0$

$E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

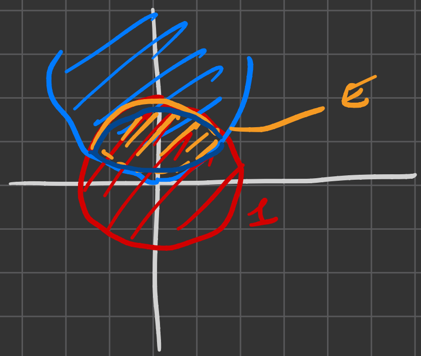
Si dice che x_0 è un

- PUNTO INTERNO ad E se $\exists I_{x_0}$ tale che $I_{x_0} \subset E$
- PUNTO ESTERNO ad E $\exists I_{x_0}$ tale che $I_{x_0} \subset E^c \; (:= \mathbb{R}^n \setminus E)$
- PUNTO DI FRONTIERA se ogni intorno di x_0 contiene punti di E e del suo complementare di E^c

Si indica con
- $\mathring{E}$ INTERNO DI E
- ∂E FRONTIERA DI E O BORDO
- $\bar{E}$ FRONTIERA DI E $\quad \bar{E} = E \cup \partial E$

Esempi

1) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \quad y > x^2\}$



$\mathring{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ e } y > x^2\}$

$E \subseteq \mathbb{R}^n$

E è APERTO se tutti i suoi punti sono interni ad E $\quad E = \mathring{E}$

E è CHIUSO se il suo complementare è aperto

$x_0 \in \mathbb{R}^n$

Un INTORNO di x_0 é un insieme aperto contenente il punto x_0.

Teorema: $E \subseteq \mathbb{R}^n$

1) E é aperto se e solo se non contiene la sua frontiera $E \cap \partial E = \emptyset$.

2) E é chiuso se e solo se contiene la sua frontiera $\partial E \subseteq E$.

$E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Teorema di Bolzano Weierstrass

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e infinito

$D(E) \neq \emptyset$

2/10/2023

LIMITI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$

$x \mapsto y = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$ $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m}) \in D(A)$

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_m - x_{0m})^2} < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

In $\mathbb{R}^2$ si ha:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall (x,y) \in A \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

QUALUNQUE MODO È POSSIBILE PER AVVICINARSI AL PUNTO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad -\infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall (x,y) \in A \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$
$$\Rightarrow f(x) > M \quad f(x) < -M$$

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, D illimitato superiormente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \quad x > N$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$f: A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}^n \qquad$ A ILLIMITATO

$x \mapsto y = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

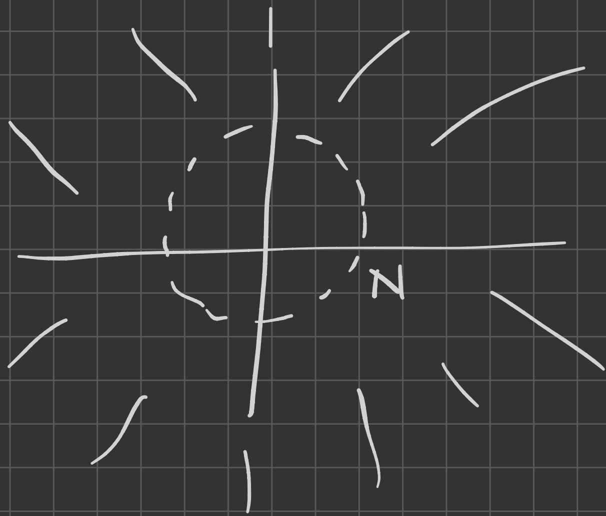
Si dice che:

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = L$$

se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) > 0 \mid x \in A \quad \sqrt{x_1 + \dots x_n^2} > N$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Esempi

1) $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f(x,y)$ è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(0,0) \in D(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

TH CARABINIERI

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow 0$$

METODO DELLE RESTRIZIONI

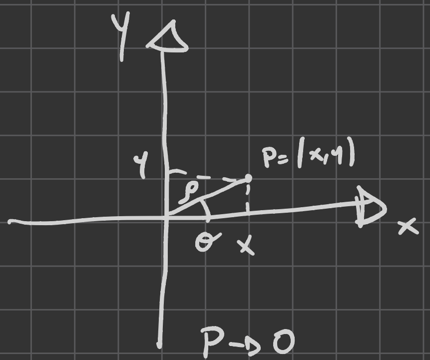
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(x,y) = \frac{0}{0}$$

$$y=0 \quad \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} \begin{cases} 0^+ & 1 \\ 0^- & \to -1 \end{cases}$$

IMP. $\nexists$ Limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

ρ e θ sono coordinate polari

$P=(x,y)$

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta)$$

Esempi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{2\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{2\rho^{\cancel{3}}\cos^2\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}}$$

$$\lim_{\rho\to 0} 2\rho\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

Tale limite é indipendente da θ

2)

03/10/2023

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D(A)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

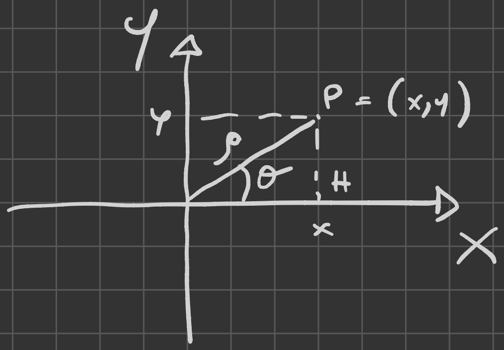
Esempi

$$\frac{0}{0}$$

1) $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$



$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^{\cancel{2}} \cos\theta \sin\theta\, e^{\rho}}{\cancel{\rho}} = \lim_{\rho \to 0} (\rho \cos\theta \sin\theta) = 0$$

$$0 \leq |\rho \cos\theta \sin\theta\, e^{\rho}| \leq \rho e^{\rho} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} xy\, e^{x^2+y^2} \qquad f(x,y) \text{ in } \mathbb{R}^2 \qquad \nexists$$

$$\lim_{\rho \to +\infty} (\rho^2 \cos\theta \sin\theta\, e^{\rho^2}) = +\infty$$

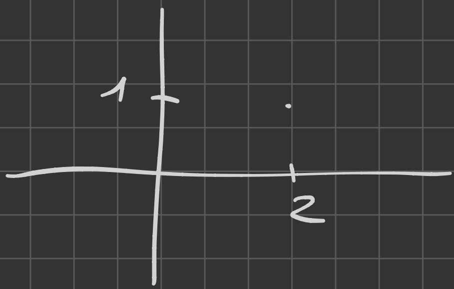
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{0} \qquad \nexists$$

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\sqrt{\rho^2 |\cos\theta \sin\theta|}}{\rho} = \frac{\cancel{\rho} \sqrt{|\cos\theta \sin\theta|}}{\cancel{\rho}} = \sqrt{|\cos\theta \sin\theta|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2 \sin \pi x}{(x-2)^2+(y-1)^2} \qquad \frac{0}{0}$$



$$x = \rho\cos\theta + 2$$
$$y = \rho\sin\theta + 1$$

$\to$ spostiamo il punto di riferimento in 0,0

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}\sin^2\theta \, \sin(\pi(2+\rho\cos\theta))}{\cancel{\rho^2}} = 0$$

Bisogna provare se tale limite è indipendente da θ

FUNZIONI CONTINUE

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in A$

$x \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$

f é CONTINUA in x_0 se

$x_0 \in D(A)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

oppure

$x_0 \in I_s(A)$

continuità

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

f è continua in x_0 se

$x_0 \in D(D)$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

oppure $x_0 \in I_s(D)$

Esempi

1) $f(x,y) = xy\,e^{x^2 y}$

f é continua in $\mathbb{R}$

INSIEMI APERTI E CHIUSI DEFINITI DA FUNZIONI CONTIN.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

a) Allora gli insiemi

1) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$
2) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$
3) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$

SONO APERTI

b) Gli insiemi

1) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0\}$
2) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$
3) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$

sono chiusi

Esempi

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \geq 0 \ , \ 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

Nota:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ -1 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Teorema di WEIERSTRASS

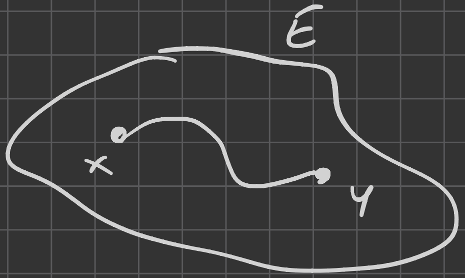
$E \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato

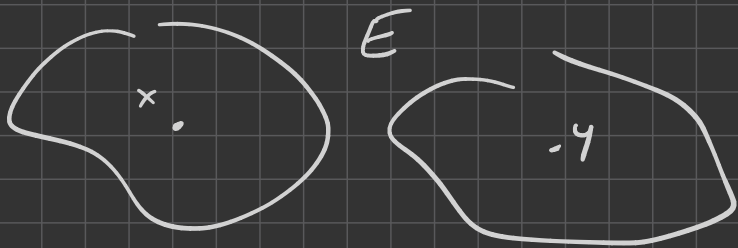
$f: E \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow f$ ammette max e min assoluti

$E \subseteq \mathbb{R}^n$

Si dice che E è CONNESSO se $\forall x, y \in E$, $x \neq y$, esiste una curva continua contenuta in E che congiunge x con y





Teorema degli zeri

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso

$f: E \to \mathbb{R}$ continua

$\exists\, x_1, x_2 \in E \mid f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in E \mid f(x_0) = 0$

Teorema dei valori intermedi

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso, limitato, connesso

$f: E \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow f$ ammette tutti i valori tra $\inf_E f$ e $\sup_E f$

09/10

$f : (a,b) \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in (a,b)$

$x \longmapsto y = f(x)$

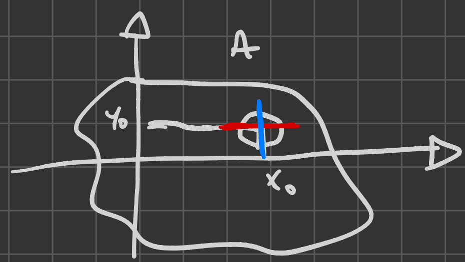
f é derivabile in x_0

$\exists$ in $\mathbb{R}$ $\lim_{h \to 0} \boxed{\dfrac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h}}$ RAPPORTO INCREMENTALE in x_0

DERIVABILITÁ PER FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $(x_0, y_0) \in A$

$(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$



f é DERIVABILE RISPETTO AD x (Y) in (x_0, y_0) se:

$\exists$ in $\mathbb{R}$ $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ e (x_0, y_0+h)

RAPPORTO INCREMENTALE

DERIVATA PARZIALE RISPETTO AD x (Y) di $f(x_0,y_0)$

si pone $\dfrac{df}{dx}(x_0, y_0)$ ($\dfrac{df}{dy}$) $= \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ (x_0, y_0+h)

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h} \quad \text{dove } e_i = (1,0) \text{ e } x_0 = (x_{01}, x_{02})}$$

CON NOTAZIONE CON *

Si dice che f é DERIVABILE in (x_0, y_0) se $\exists$ $\dfrac{df}{dx}(x_0,y_0)$ e $\dfrac{df}{dy}(x_0,y_0)$

In tal caso si definisce GRADIENTE di f in (x_0,y_0) il vettore

$$\nabla f(x_0,y_0) = \text{grad} f(x_0,y_0) = \left(\frac{df}{dx}(x_0,y_0), \frac{df}{dy}(x_0,y_0) \right)$$

Nota:

Sia

$g(x) = f(x, y_0)$

g é DERIVABILE in $x_0 \iff \exists$ in $\mathbb{R}$ $\lim_{h \to 0} \dfrac{g(x_0+h) \; g(x_0)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

$\iff$ f é derivabile rispetto ad x in (x_0, y_0)

Esempi

1) $f(x,y) = x^2 \cos y$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ é derivabile rispetto ad } x \\ f \text{ é derivabile rispetto ad } y \end{array}\right\}$ in tutto $\mathbb{R}^2$

$$\nabla(x,y) = \left(\frac{df}{dx}(x,y), \frac{df}{dy}(x,y)\right) = \left(2x \cos y, -x^2 \sin y\right)$$

2) $f(x,y) = e^{2xy^2}$ $\mathbb{R}^2$

f é derivabile in $\mathbb{R}^2$

$$\nabla(x,y) = \left(2y^2 e^{2xy^2}, \ 4xy\, e^{2xy^2}\right)$$

$f: A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$

f é DERIVABILE RISPETTO ad x_i rispetto x_0 se $\exists$ in $\mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0i} + h, \dots x_{0n}) - f(x_{01}, \dots, x_{0n})}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} \quad \text{dove}$$

$*$

$e_i = (0, \dots, i, \dots 0)$ i-esimo

Nota: Sia

$g(x_i) = f(x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0n})$

Si dice che f é DERIVABILE in x_0

se $\exists \ \frac{df}{dx_i}(x_0) \quad \forall i = 1, \dots, n$

In tal caso si definisce GRADIENTE di f in x_0 il vettore

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx_1}(x_0), \dots, \frac{df}{dx_n}(x_0) \right)$$

Esempi

1) $f(x,y,z) = x^2 e^{zy}$ in $\mathbb{R}^3$

f é derivabile in $\mathbb{R}^3$

$$\nabla f = \left(2x \cdot e^{zy}, x^2 z e^{zy}, x^2 y e^{zy} \right)$$

Note: f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ in $\mathbb{R}^2$

f é continua in $(0,0)$: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$

f é derivabile in $(0,0)$?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) \ f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \ \nexists$$

f NON é derivabile in $(0,0)$

Note 2: f derivabile $\not\Rightarrow$ f continua

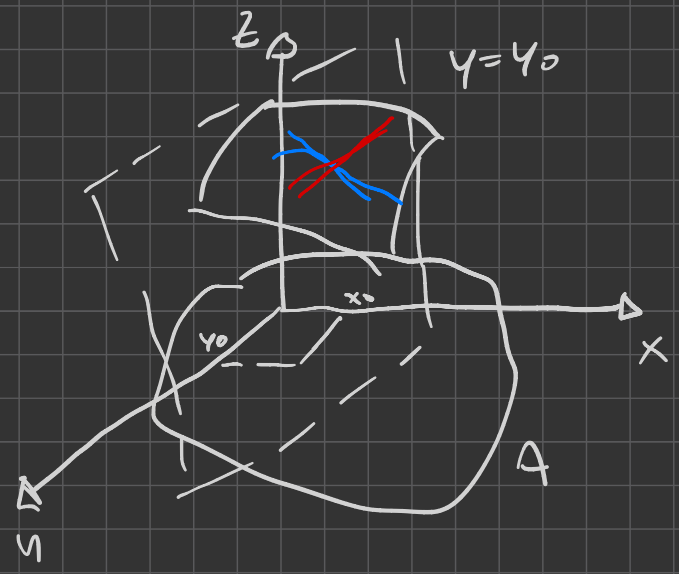
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f non é continua in $(0,0)$

f é derivabile? SI

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $(x_0, y_0) \in A$

f derivabile in (x_0, y_0)



$x \mapsto f(x, y_0)$

derivata in x_0

DIFFERENZIABILITÀ PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^{\cancel{2}\,n}$ aperto , $(\cancel{x_0, y_0})\ x_0 \in A$

Si dice che f è DIFFERENZIABILE in $(\cancel{x_0, y_0})\ x_0$ se

a) f è derivabile in $(\cancel{x_0, y_0})\ x_0$

b) $$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\, h - f_y(x_0, y_0)\, k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$f_x(x, y) = \frac{df}{dx}(x, y)$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h}{|h|} = 0$$

vettore nullo

$h = (h_1, \dots, h_n)$

$0 = (0, \dots, 0)$

La b) si può scrivere anche nella forma:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

ponendo $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$

f differenziabile in $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|} \text{ in } (0,0)$$

$\Downarrow \; \not\Uparrow$ $\qquad$ $\Downarrow \; \not\Uparrow$

f continua $\quad \not\Leftarrow \quad \not\Rightarrow \quad$ f derivabile in x_0

Teorema $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\quad x_0 \in A$

f differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

10/10/2023

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $\quad (x_0,y_0) \in A$

f è differenziabile in (x_0,y_0) se

$$f(h,k) \mapsto f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k = df(x_0,y_0)$$

a) f è derivabile in (x_0,y_0)

b) $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Se f è differenziabile in (x_0,y_0), allora:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \text{ è}$$

L'EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE AL GRAFICO di f in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Teorema del DIFFERENZIALE TOTALE

$f: A \to \mathbb{R}$ $\qquad A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $\qquad (x_0, y_0) \in A$

f è derivabile in un intorno di (x_0, y_0) con derivate continue

$\Rightarrow f$ è differenziabile in (x_0, y_0)

Dim: consideriamo

$$0 \le \left| \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\cdot h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

Osserviamo che

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}_{y \mapsto f(x_0+h, y)} + f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)$$

$y \mapsto f(x_0+h, y)$ $\quad y \in [y_0, y_0+k]$ $\quad ([y_0+k, y_0])$

$f_y(x_0+h, \bar{y})\cdot k$

$f_x(\bar{x}, y_0)\cdot h$ $\qquad$ dove $\bar{x} \in (x_0, x_0+h)$, $\bar{y} \in (y_0, y_0+k)$

$$0 \le \left| \frac{f_x(\bar{x}, y_0+k)\cdot h + f_y(x_0+h, \bar{x})\cdot k - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

$$0 \le \left| \frac{[f_x(\bar{x}, y_0) - f_x(x_0,y_0)]h}{\sqrt{k^2+h^2}} \right| + \left| \frac{[f_y(x_0+h, \bar{y}) - f_y(x_0,y_0)]k}{\sqrt{k^2+h^2}} \right| =$$

$$0 \le |f_x(\bar{x}, y_0) - f_x(x_0,y_0)| \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{k^2+h^2}}}_{\le 1} + |f_y(x_0+h, \bar{y}) - f_y(x_0,y_0)| \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{k^2+h^2}}}_{\le 1}$$

$$0 \le |f_x(\bar{x}, y_0) - f_x(x_0,y_0)| + |f_y(x_0+h, \bar{y}) - f_y(x_0,y_0)| \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

x_0, y_0 poiché f_x continue $\qquad x_0, y_0$ $\quad f_y$ continue

b) della definizione é soddisfatta $\Rightarrow$ f é differenziabile in (x_0, y_0)

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 1$$

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$ differenziabile in A $\rightarrow$ f continua in A; $\rightarrow$ f derivabile in A

REGOLE DI DERIVAZIONI

f, g derivabili in A

Allora

1) $\alpha f + b g$ é derivabile in A

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) $f \cdot g$ derivabile e

$$\nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$$

• prodotto di un vettore di $\mathbb{R}^n$ con uno scalare

In termini di componenti si ha:

$$\frac{d(f \cdot g)}{d x_i} = \frac{d f}{d x_i} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

3) $\frac{f}{g}$ é derivabile in A se $g(x) \neq 0$ e

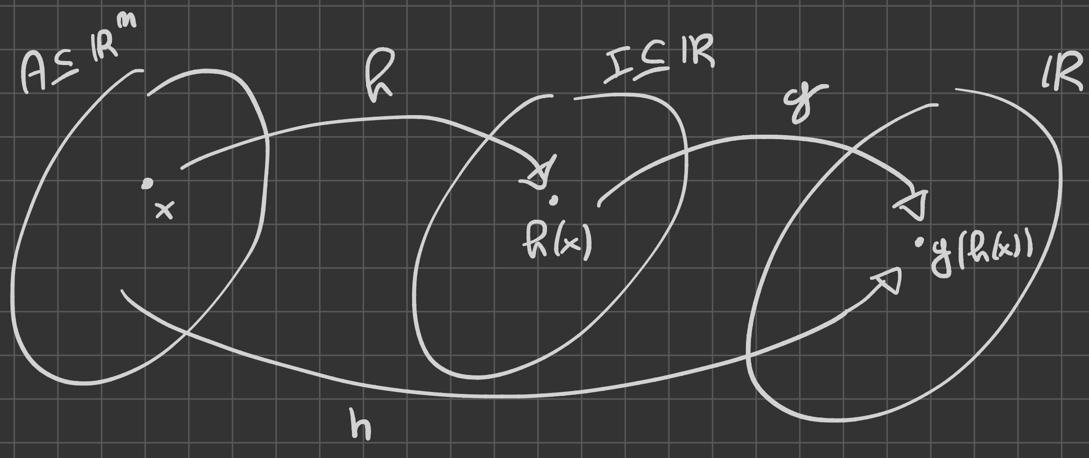
$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\nabla f \cdot g - f \cdot \nabla g}{g^2}$$

$$\frac{d\left(f/g\right)}{dx_i} = \frac{\frac{df}{dx_i} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx_i}}{g^2} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\quad f(A) \subseteq I$

$g: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$



$f: A \to \mathbb{R}$

$x \in A \mapsto h(x) = g(f(x))$

in $\mathbb{R}^1$ derivabile = differenziabile

Se f è differenziabile in $x_0 \in A$

e g è derivabile in $f(x_0)$, allora h è differenziabile in x_0 e si ha

$$\nabla f(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \nabla f(x_0)$$

→ PRODOTTO VETTORE PER UNO SCALARE

$$\frac{dh}{dx_i}(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx_i}(x_0) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

→ REGOLA DELLA CATENA

in $\mathbb{R}$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Teorema (FUNZIONI A GRADIENTE NULLO)

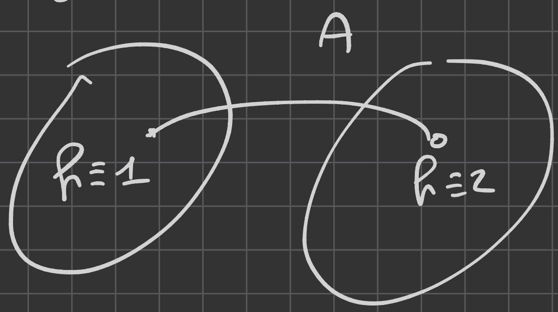
$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso

f differenziabile in A e tale che

$\nabla f = (0, \dots, 0)$ in A

Allora f è costante in A

Nota: In generale se A non è connesso il teorema non vale



f è differenziabile in A con:

$$\nabla f = (0, \dots, 0) \text{ in } A$$

Ma f non è costante in A!!!

Esercizio su teorema di derivazione funzione composta

Applicazione del teorema di derivazione della funzione composta

GRADIENTE DI UNA FUNZIONE RADIALE

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto h(x_1, \dots, x_n)$

Si dice che h è una funzione RADIALE se dipende solo da $|x|$, cioè dalla distanza dall'origine

Allora

$$h = g(|x|)$$

dove $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Sia

$f(x) = |x|$

allora

$$h(x) = g(f(x))$$

f è differenziabile in $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

f è derivabile $\forall x \neq 0$

e $\frac{df}{dx_i}(x) = \frac{1 \cdot 2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{|x|} \quad \forall x \neq$

e continua $\forall x \neq 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$

Se g è derivabile in $\mathbb{R}^+$ allora dal teorema di prima che

h è differenziabile in $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ e

$$\nabla h(x) = g'(f(x)) \cdot \frac{x}{|x|}$$

$$= g'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$$

In particolare

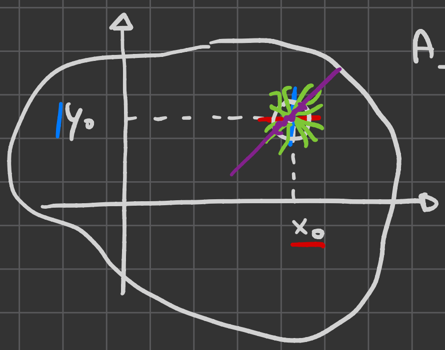
$$|\nabla h(x)| = |g'(|x|)| \quad \forall x = 0$$

16/10/2023

DERIVATE DIREZIONALI

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, $x_0 \in A$

$v \in \mathbb{R}^m$, $|v| = 1$ (DIREZIONE IN $\mathbb{R}^m$)



Si dice che f è DERIVABILE nella DIREZIONE v in x_0 se:

$$\exists \text{ in } \mathbb{R} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

e in questo caso si pone $\displaystyle \frac{df}{dv}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$

La DERIVATA DIREZIONALE di f in x_0 nella direzione v

Nota:

$\frac{df}{dv}(x_0)$ si indica anche con $D_v f(x_0)$

Nota 1:

Sia $v = (0, \dots, 1, \dots 0) = e_i$

i-esima posizione

Consideriamo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+he_i)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_{0_1},\dots x_{0_i}+h,\dots,x_{0_n})-f(x_{0_1},\dots,x_{0_n})}{h}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{df}{dx_i}(x_0)$$

se $\exists$ in $\mathbb{R}$ il limite

Nota 2: Sia

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$h\mapsto g(h)=f(x_0+hv)$$

f DERIVABILE rispetto alla direzione v in x_0

$$\iff$$

$\exists$ in x_0 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hv)-(f(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$

$\iff$

g è derivabile in 0

Inoltre

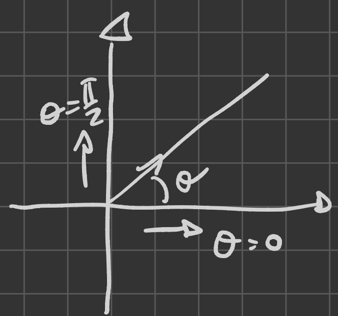
$$\frac{df}{dv}(x_0)=g'(0)$$

Esempio

$$f(x,y) = x e^{xy} \text{ in } (0,0)$$

a) f è derivabile nella direzione $v\in\mathbb{R}^2$ $|v|=1$ in $(0,0)$?

$$v=(\cos\theta,\sin\theta)$$



$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(\cos\theta,\sin\theta))-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h\cos\theta,h\sin\theta)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} \cos\theta \, e^{h^2 \cos\theta \sin\theta}}{\cancel{h}} = \cos\theta$$ dipende da θ perché la funzione nei

$$\Rightarrow \exists \frac{df}{dv}(0,0) = \cos\theta$$

b) $\nabla f(0,0) = ?$ $\left(\frac{df}{dx}(0,0), \frac{df}{dy}(0,0) \right)$

$$\frac{df}{dx}(0,0) = \frac{df}{de_1}(0,0), \quad \frac{df}{dy}(0,0) = \frac{df}{de_2}$$

$e_1 = \theta = 0$

$e_2 = \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,0)$$

TEOREMA (FORMULA DEL GRADIENTE)

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$

f differenziabile in x_0

$\Rightarrow f$ è derivabile in ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, in x_0 e si ha

$$\frac{df}{dv}(x_0) = \underbrace{\langle \nabla f(x_0), v \rangle}_{\text{PRODOTTO SCALARE tra } \nabla f(x_0) \text{ e } v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(x_0) \cdot v_i$$

Nota: f derivabile in ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$ $\overset{?}{\not\Rightarrow}$ f differenziabile

Sia

$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ in $(0,0)$

f è derivabile nella direzione $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ in $(0,0)$?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h(\cos\theta, \sin\theta)) - f(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cancel{h^3} \cos^2\theta \sin\theta}}{\cancel{h}} = \sqrt[3]{\cos^2\theta \sin\theta}$$

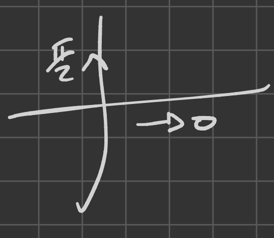
$$\Rightarrow \exists \frac{df}{dv}(0,0) = \sqrt[3]{\cos^2\theta \sin\theta}$$

In particolare

con $\theta = 0$ o $\frac{\pi}{2}$

$\to$ derivate parziali x, y

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$



Se f f.ne differenziabile in $(0,0)$ allora da ✱ si avrebbe

$$\sqrt{\cos^2\theta \sin\theta} = \frac{df}{dv}(0,0) = \langle (0,0), v \rangle = 0 \quad \forall \theta$$

ASSURDO!!!

DERIVATE SUCCESSIVE PER FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

f derivabile in A

$$\Rightarrow \exists f_x : A \to \mathbb{R} \qquad \exists f_y : A \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f_x(x,y) \qquad (x,y) \mapsto f_y(x,y)$$

Se f_x è derivabile in A, allora

$$\exists (f_x)_x = f_{xx} \quad e \quad (f_x)_y = f_{xy}$$
$$\exists (f_y)_x = f_{yx} \quad e \quad (f_y)_y = f_{yy}$$

DERIVATE SECONDE PURE DI f rispetto x e y

DERIVATE SECONDE MISTE DI f

Se f è derivabile DUE volte allora esiste:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \nabla f_x \\ \to \nabla f_y \end{array}$$

MATRICE HESSIANA di f

2×2

ESEMPI

1) $f(x,y) = x \sin y^2$

f è derivabile 2 VOLTE in $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (\sin y^2, 2xy\cos y^2)$$

$$f_{xx}(x,y) = 0 \qquad f_{xy}(x,y) = 2y\cos y^2$$

$D^2 f(x,y)$

$\left(f_{yx}(x,y) = 2y\cos y^2 \quad f_{yy}(x,y) = 2x\cos y^2 - 4xy^2 \sin y^2 \right)$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

derivabile in $(0,0)$?

$f(y,x) = -f(x,y)$ (A)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \qquad \exists f_x(0,0) = 0$$ (A)

$\exists f_y(0,0) = 0$

$\exists f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h} = -1 \qquad f_{xy}(0,0) = -1$$

$$f_x(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x,y) \neq 0,0$$

$(x,y) = (0,0)$

$$f_x(0,h) = -\frac{h^5}{h^4} =$$

Da A si ha che $f_{yx}(0,0) = 1$

In generale, ammesso che esistano,

$f_{xy}(x,y) \neq f_{yx}(x,y)$

Quindi l'ordine con cui si deriva è importante

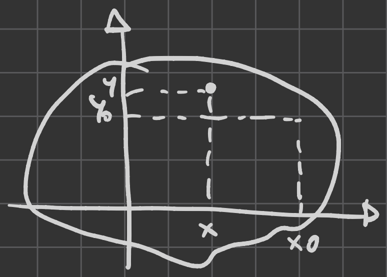
TEOREMA DI SCHWARD :

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto , $(x_0, y_0) \in A$

$f \in C^2$ in un intorno di (x_0, y_0)

$\Rightarrow f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

Dim :



$A \subseteq \mathbb{R}^2$ Sia $(x, y) \in A$ vicino ad (x_0, y_0) con $x \neq x_0$ e $y \neq y_0$

Siano F e G le funzioni definite da

$F(x) = -f(x,y) + f(x, y_0)$

$G(y) = g(x,y) - g(x_0, y)$

Dalla ipotesi su f si ha che
F è continua in $[x, x_0]$ e derivabile in (x, x_0)

TH lagrange
$$\Rightarrow \exists \tilde{x} \in (x, x_0) \mid F(x_0) - F(x) = F'(\tilde{x})(x_0 - x) \quad (1)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$
$$f_x(\tilde{x}, y) - f_x(\tilde{x}, y_0) \quad \text{dalla def di } F$$

Sia

$z \mapsto f_x(\tilde{x}, z)$ $\quad z \in [y_0, y]$

La Funzione è derivabile in (y_0, y) (2)

th lagrange
$$\Rightarrow \exists \tilde{y} \in (y_0, y) \mid f_x(\tilde{x}, y) - f_x(\tilde{x}, y_0) = f_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y})(y - y_0)$$

Da (1) e (2) si ha che

$$F(x_0) - F(x) \overset{(3)}{=} f_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y})(x_0 - x)(y - y_0)$$

In modo analogo

$\exists \bar{x} \in (x, x_0)$ e $\bar{y} \in (y_0, y)$ tali che

$$G(y) - G(y_0) \overset{④}{=} f_{yx}(\bar{x}, \bar{y})(x_0 - x)(y - y_0)$$

Osserviamo che, dalle def di F e G, si ha che

$$G(y) - G(y_0) \overset{⑤}{=} F(x_0) - F(x)$$

Allora da 3,4,5 si ha che

$$f_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cancel{(x_0 - x)} \cancel{(y - y_0)} = f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) \cancel{(x_0 - x)} \cancel{(y - y_0)}$$

da cui $f_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}) \overset{⑥}{=} f_{yx}(\bar{x}, \bar{y})$

Ponendo al limite per $(x,y) \to (x_0, y_0)$ in ⑥

$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ perché f_{xy} e f_{yx} sono CONTINUE

17/10/2023

FORMULA DI TAYLOR PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$, $h \in \mathbb{R}^n \mid x_0 + h \in A$

$f \in C^2(A)$

$$\Rightarrow \exists \delta \in (0,1) \; f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \overset{n \times n}{\underbrace{D^2 f(x_0 + \delta h)}_{\text{MATRICE HESSIANA}}} \overset{n \times 1}{h}, h \rangle$$

FORMULA DI TAYLOR AL SECONDO ORDINE CON IL RESTO DI LAGRANGE

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(\bar{x}) \, h^2$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x - x_0)^2$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

FORMULA DI PEANO

$f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(x_0) \cdot h, h \rangle + o(|h|^2)$$

per $h \to 0$

vettore $\quad (0, 0, \dots, 0, \dots)$

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$
$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$

} FUNZIONI REALI DI UNA O PIÚ VARIABILI REALI

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

$f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n, m \in \mathbb{N}$ $\quad x_0 \in D(A)$

$x_1, \dots, x_n \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots\dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

Nota:

1) $f: I \to \mathbb{R}^m$, $I \subseteq \mathbb{R}$, CURVA in $\mathbb{R}^m$
2) $f: A \to \mathbb{R}^3$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, SUPERFICIE in $\mathbb{R}^3$
3) $f: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, CAMPO VETTORIALE in $\mathbb{R}^n$

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L = (L_1, \dots, L_m)$$

se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f_i(x) = L_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Si dice che f é continua in $x_0 \in A$

se f_i é continua in x_0, $\forall i = 1, \dots, m$

Si dice che f é derivabile in $x_0 \in A$ se (aperto)

f_i é derivabile in x_0 $\forall i = 1, \dots, m$

$$\left.\begin{matrix} \nabla f_1(x_0) = \left(\frac{df_1}{dx_1}(x_0), \dots, \frac{df_1}{dx_n}(x_0) \right) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \nabla f_m(x_0) = \left(\frac{df_m}{dx_1}(x_0), \dots, \frac{df_m}{dx_n}(x_0) \right) \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} Df(x_0) \\ \shortparallel \\ Jf(x_0) \end{matrix}$$

MATRICE JACOBIANA di f in x_0

$\downarrow$

matrice $m \times n$

Si dice che f é differenziabile in $x_0 \in A$

se f_i é differenziabile in x_0 $\forall i = 1, \dots, m$

Teorema: $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

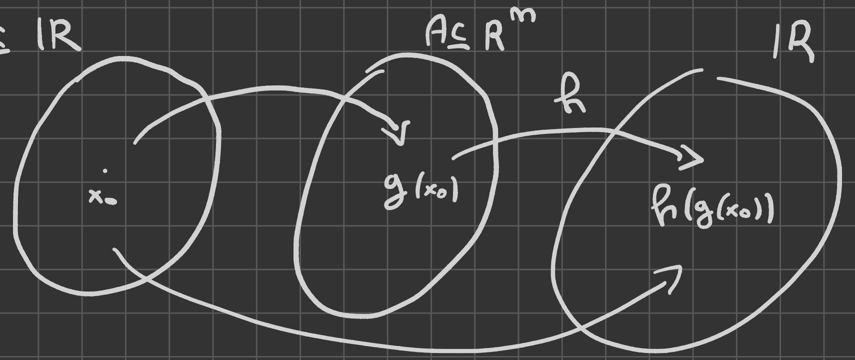
f é derivabile con derivate continue in A

$\Rightarrow$ f é differenziabile in A

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$g: I \to \mathbb{R}^n$ aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, $g(I) \subseteq A$

$f: A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto



$h: I \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto h(x) = f(g(x))$

g derivabile in x_0

f differenziabile $g(x_0)$

h é derivabile in x_0 e

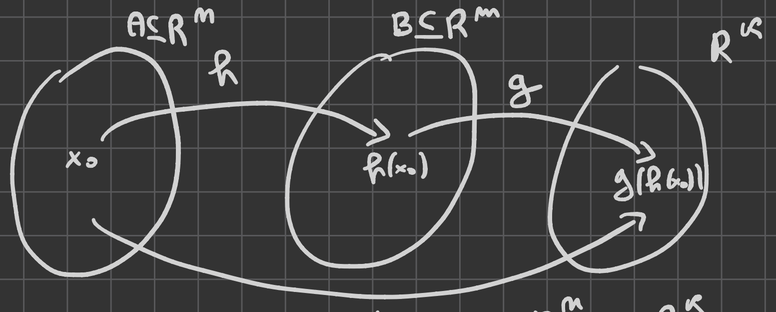
$$h'(x) = \langle \nabla f(g(x_0)), g'(x_0) \rangle$$

vettore $\mathbb{R}^n$ vettore di $\mathbb{R}^n$

TEOREMA DI DIFFERENZIAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto , $x_0 \in A$, $f(A) \subseteq B$

$g: B \to \mathbb{R}^k$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto



$$h : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$
$$x \longmapsto h(x) = g(f(x))$$

Se f è differenziabile in x_0 e g è differenziabile in $f(x_0)$ allora h è differenziabile in x_0 e

$$\frac{dh_j}{dx_i}(x_0) = \sum_{l=1}^{m} \frac{dg_j}{dy_l}(f(x_0)) \cdot \frac{df_l}{dx_i}(x_0) \qquad \begin{array}{l} j = 1, \dots, k \\ i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\underbrace{Dh(x_0)}_{K \times m} = \underbrace{Dg(f(x_0))}_{K \times m} \cdot \underbrace{Df(x_0)}_{m \times m}$$

ROTORE E DIVERGENZA

$F : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ campo vettoriale in $\mathbb{R}^m$

$F = (F_1, \dots, F_m)$

DIVERGENZA DI F

$$\underbrace{\operatorname{div} \nabla F}_{\text{SCALARE}} = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{m} \frac{dF_i}{dx_i} = \frac{dF_1}{dx_1} + \dots + \frac{dF_m}{dx_m}$$

Sia $m = 3$: $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$ derivabile

ROTORE di F

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{dF_3}{dy} - \frac{dF_2}{dz}, \frac{dF_1}{z} - \frac{dF_3}{dx}, \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} \right)$$

23/10/2023

$f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(), \dots, f_m())$ $f_i : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

CURVE IN $\mathbb{R}^n$

$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$t \mapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$

SI DEFINISCE CURVA IN $\mathbb{R}^n$ UNA FUNZIONE

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n, \ I \subseteq \mathbb{R}$$

tale che φ é continua in I

Esempi

$\varphi : I \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$

φ continua in I

CURVA IN $\mathbb{R}^3$

$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$

$t \mapsto \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$

e continua in I

le equazioni

$$\begin{cases} x_1(t) = \varphi_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = \varphi_n(t) \end{cases}$$

Si chiamano EQUAZIONI PARAMETRICHE della curva φ

$\varphi(I)$ si chiama SOSTEGNO della curva φ

$\varphi(I) = \{\varphi(t) \mid t \in I\}$

Esempi

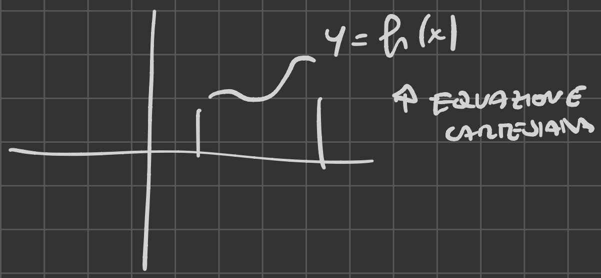
$f : I \to \mathbb{R}$ continua

$x \mapsto y = f(x)$

EQUAZIONE PARAMETRICA

$\varphi : I \to \mathbb{R}^2$

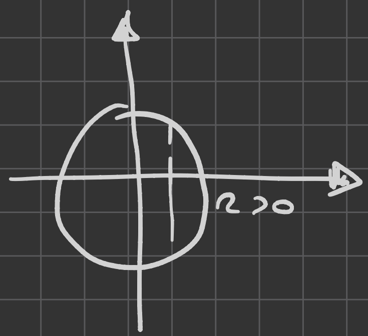
$t \mapsto \varphi(t) = (t, f(t))$



$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

$\varphi : I \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$



$$\varphi \begin{cases} x(t) = \sqrt{r} \cos t \\ y(t) = \sqrt{r} \sin t \end{cases} \qquad t \in I \, [0, 2\pi]$$

$x^2 + y^2 = r$ EQ. PARAMETRICA φ

$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$\varphi \in C(I)$

Si dice che φ è

- SEMPLICE se $\forall\, t_1, t_2 \in \mathring{I}$, $t_1 \neq t_2$

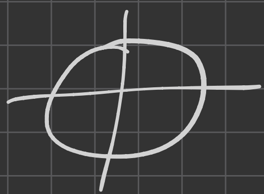
$$\Rightarrow \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$$

- CHIUSA se detto $I = [a, b]$, si ha che

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

Esempi

1) $\varphi_1 \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ è semplice? si
è chiusa? si



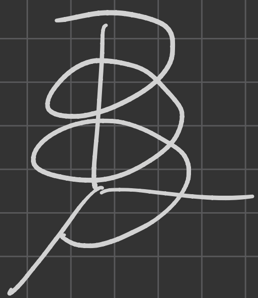
2) $\varphi_2 \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$ $\quad t \in [0, 4\pi]$ è semplice? NO

è chiusa? sì

3) $\varphi_3 \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \\ z(t) = bt \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$ ELICA CILINDRICA

è semplice? sì

è chiusa? NO

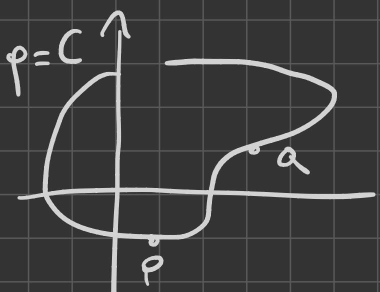


Sia una curva in $\mathbb{R}^n$ parametrizzata da:

$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$\varphi \in C(I)$ PARAMETRIZZAZIONE

Come orientiamo la curva φ



La parametrizzazione φ induce sulla curva C un orientazione definita come segue:

$P = \varphi(t_1)$ e $Q = \varphi(t_2)$

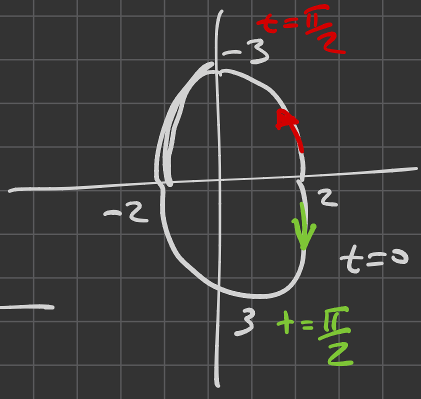
Si dice che P precede Q sulla curva se:

$$t_1 < t_2$$

Si dice che orientiamo C nel verso del parametro crescente VERSO POSITIVO, IL CONTRARIO NEGATIVO

Esempi

1) $\varphi : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = -3 \sin t \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$



$$x^2(t) = 4\cos^2 t$$

$$y^2(t) = 9 \sin^2 t$$

$$\frac{x^2}{4} = \cos^2 t$$

$$\frac{y^2}{9} = \sin^2 t$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

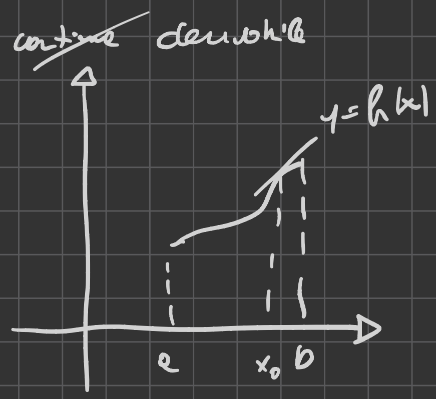
Due parametrizzazioni della stessa curva sono EQUIVALENTI se inducono la stessa orientazione

$\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$\varphi \in C(I) \to$ continua in I

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x)$



Si dice che φ è una CURVA REGOLARE se

1) $\varphi \in C^1(I) \to$ vettori

2) $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall (t) \in \mathring{I} \to$ vettore nullo

In tal caso il vettore

$$T(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} \quad \forall t \in \mathring{I}$$

Si dice VERSORE TANGENTE alla curva in $\varphi(t)$

Esempi:

$\varphi \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

φ è regolare? Si

$\varphi \in C^1([0,2])$ $\quad \forall t \in (0, 2\pi)$

$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0$

$$T(t) = \frac{(-\sin t, \cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = (-\sin t, \cos t) \quad \forall t \in (0, 2\pi)$$

$$\varphi : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-1, 1] \quad \text{curva in } \mathbb{R}^2$$

φ é una curva regolare? NO

$$\varphi \in C^1 \left([3t^2, 2t] \right) = (0,0) \iff t = 0$$

$$\varphi_1 \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad \text{si}$$

$$\varphi_2 \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad \text{si}$$

φ é una curva regolare a TRATTI un unione di un numero finito di curve regolare

Equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 = t^6 \\ y^3 = t^6 \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^3 \quad \boxed{x^2 - y^3 = 0}$$

$$t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

$$T(t) = \frac{(3t^2, 2t)}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} =$$

3) $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$$x \longmapsto y = f(x)$$

$f \in C^1(I)$

$$\varphi : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad t \in I \qquad \text{parametrizzazione del grafico } f$$

$\varphi \in C^1(I)$

φ regolare? $\quad f'(t) \neq 0$

$$T(t) = \frac{(1, f'(t))}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}$$

1) $y = x^2 \quad t \in [0,2] \qquad \varphi \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,2]$

24/10/2023

MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$

Si ha che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO MINIMO ASSOLUTO O GLOBALE per f se:

$$f(x_0) \overset{\leq}{\geq} f(x) \qquad \forall x \in A$$

Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO MINIMO LOCALE O RELATIVO per f se:

$\exists\, I_{x_0}$ intorno di x_0 tale che

$$f(x_0) \overset{\leq}{\geq} f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0} \cap A$$

TEOREMA: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

f derivabile nella direzione $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$ in x_0

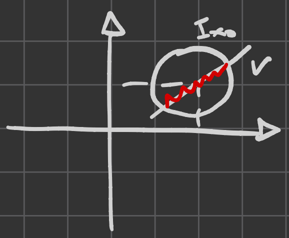
$x_0 \in \mathring{A}$ max (min) locale per f

$$\Rightarrow \frac{df}{dv}(x_0) = 0$$

Dim: Sia $g(t) = f(x_0 + tv)$

Dalle ipotesi si ha che g è derivabile in $t=0$ e $g'(0) = \frac{df}{dv}(x_0)$ ①

Inoltre poiché x_0 max (min) locale per f $\exists\, I_{x_0} \mid f(x_0) \overset{\leq}{\geq} f(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$



In particolare

$$f(x_0) \geq f(x_0 + vt) \quad \forall t \mid x_0 + tv \in I_{x_0}$$

$$g(0) \overset{\leq}{\geq} g(t) \qquad \text{per } t \text{ suff. piccolo}$$

cioè 0 è un punto di massimo minimo locale per g

Quindi dal teorema di Fermat

$$g'(0) = 0$$
$$\parallel$$
$$\frac{df}{dv}(x_0) \quad \text{da } (1)$$

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA DEL PRIMO ORDINE)

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

f derivabile in $x_0 \in \mathring{A}$

$x_0 \in \mathring{A}$ max (min) locale per f $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0) = 0 = (0, \dots, 0)$

Nota: I punti in cui il gradiente di una funzione è NULLO si chiamano punti CRITICI o punti STAZIONARI

max (min) locale per f

$\Downarrow \quad \Uparrow ?$

x_0 punto critico per f

Nota: In generale il viceversa non vale

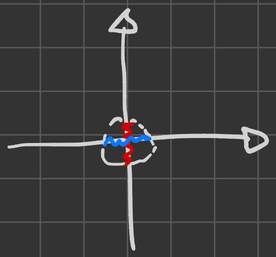
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

f è derivabile in $\mathbb{R}^2$ e

$\nabla f(x,y) = (2x, -2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ punto critico per f

$(0,0)$ max o min locale per f ?

$f(0,0) = 0$



$f(0,y) = -y^2 \leq 0$

$f(x,0) = x^2 \geq 0$

$\Rightarrow (0,0)$ non è né massimo e minimo per f

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Cerchiamo i max/min locali per f negli insiemi

1) $\{x \in \mathring{A} \mid f$ è derivabile in x e $\nabla f(x) = 0\}$

2) $\{x \in \mathring{A} \mid f$ non è derivabile in $x\}$

3) $A \cap \partial A \to$ punti alla frontiera

TEOREMA: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$ in x_0

f derivabile $f \in C^2(A)$

$x_0 \in \mathring{A}$ max (min) locale per f, g è derivabile

$g(t) = f(x_0 + tv)$

$$g'(t) = \langle \nabla f(x_0+tv), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(x_0+tv) \cdot v_i$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{d^2 f}{dx_i dx_j}(x_0+tv) \cdot v_j = \langle D^2 f(x_0+tv) \cdot v, v \rangle$$

A matrice $n \times n$

Si dice che A è

- DEFINITA POSITIVA (NEGATIVA) se

$\langle Av, v \rangle \overset{<}{>} 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

- SEMIDEFINITA POSITIVA (NEGATIVA) se

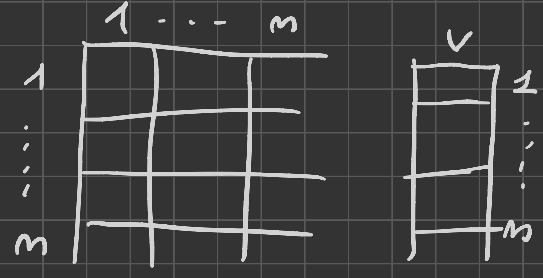
$\langle Av, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ e $\exists \bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid \langle A\bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$

- INDEFINITA se $\exists\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tali che

$$\langle A v_1, v_2 \rangle > 0 \quad e \quad \langle A v_2, v_2 \rangle < 0$$

PRODOTTO SCALARE

$\langle Av, v \rangle$



Nota: Sia

$$q(v) = \langle A \cdot v, v \rangle$$

q si chiama la FORMA QUADRATICA associata ad A

Se A è simmetrica per stabilire se è definita, semidefinita o indefinita si possono studiare i suoi AUTOVALORI

$\lambda \in \mathbb{C}$ è un AUTOVALORE di A se:

$\exists\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $Av = \lambda v$

$$Av - \lambda I_n v = 0$$

$$(A - \lambda I_n) v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema lineare di n equazioni in n variabili

$$\boxed{\underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\text{POLINOMIO CARATTERISTICO}} = 0} \leftarrow \text{EQUAZIONE CARATTERISTICA}$$

$\exists\, n$ soluzioni in $\mathbb{C}$ contate con la loro molteplicità

di grado n nella variabile λ

Se è simmetrica tutte le sue soluzioni sono valori reali

$\Updownarrow$

Nota: se A è simmetrica, allora tutti i suoi autovalori sono reali

$\downarrow$

Teorema :

A matrice simmetrica $n \times n$
Allora

1) A è definita positiva (negativa) se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi (negativi)
>0

2) A è semi definita positiva (negativa) se e solo se tutti i suoi autovalori sono non negativi (non positivi) e almeno uno è nullo
≥ 0

3) A è indefinita se e solo se ammette un autovalore positivo e uno negativo

↳ UTILIZZATE NEL MACHINE LEARNING E INTELLIGENZA ARTIFICIALE

CONDIZIONE NECESSARIA DEL SECONDO ORDINE TEOREMA :

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$

x_0 max / min locale per f

f derivabile due volte in A

a) $\nabla f(x_0) = 0$

b) La matrice ESSIANA $D^2 f(x_0)$ è SEMIDEFINITA NEGATIVA (POSITIVA)

CONDIZIONI SUFFICIENTI DEL SECONDO ORDINE TEOREMA

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

f derivabile due volte in A

$x_0 \in \mathring{A}$, $\nabla f(x_0) = 0$

Si ha :

1) $D^2 f(x_0)$ è definita positiva negativa $\Rightarrow$ x_0 min max locale di f

2) $D^2 f(x_0)$ è indefinita $\Rightarrow$ x_0 non è né max né min locali per f
(x_0 punto di sella)

30/10/2023

Teorema (condizioni suff del secondo ordine per funzioni di due variabili)

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$

f derivabile 2 volte in A

$x_0 \in \mathring{A}$, $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

$$D^2 f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Allora

a) Se $\det(D^2 f(x_0,y_0)) > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ min locale per f

b) Se $\det(D^2 f(x_0,y_0)) > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ max locale per f

c) Se $\det(D^2 f(x_0,y_0)) < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ punto di sella per f

Se $\det(D^2 f(x_0,y_0)) = 0$ non possiamo dire nulla

Esempi

1) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 1$

max e min locali di f nel suo dominio

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\nabla f = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x, 6y) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ unico punto critico per f

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{Det} = 12 > 0$$

min locale

2) $f(x,y) = x^4 + y^4$

max e min nel dominio

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\nabla f(x,y) = (4x^3, 4y^3) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ punto critico di f

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)}$$

3) $f(x,y) = x^4 - y^4$

$f(x,0) = x^4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(0,y) = -y^4 \leq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (0,0)$ punto di sella per f

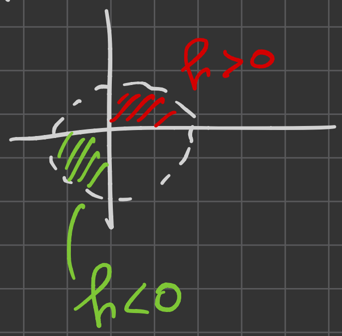
4) $f(x,y) = x^3 + y^3$

max e min nel dominio

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\nabla(x,y) = (3x^2, 3y^2) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ punto critico $(0,0)$

1° METODO



$f(x,y) < 0 \Rightarrow f(x,y) < 0$

$f(x,y) > 0 \Rightarrow f(x,y) > 0$

2° METODO

$$f(x,0) = x^3 \begin{cases} >0 & \text{se } x > 0 \\ <0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

MASSIMI E MINIMI IN UN INSIEME E

$f: A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n, \quad E \subseteq A$

max e min globali di f in E

$x_0 \in E$ e max (min) globale di f in E se

$$f(x_0) \underset{\leq}{\geq} f(x) \qquad \forall x \in E$$

Teorema di Weierstrass

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subset A$

f continua in A

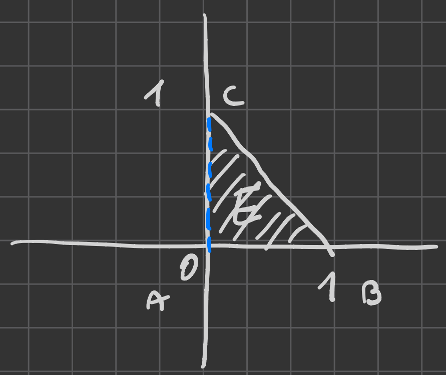
E chiuso e limitato $\Rightarrow \exists$ max e min ass. di f in E

1) $f(x,y) = y^2 + xy - 2x^2$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], \ 0 \leq y \leq -x+1\}$ $[0,1]$

Stabilire se f ammette massimo o minimo globale in E e in caso affermativo determinarli

$f \in C(\mathbb{R}^2)$



chiuso e limitato

$\xRightarrow{W} \exists \max_E f$ e $\min_E f$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\nabla f(x,y) = (y - 4x, \ 2y + x)$

$\begin{cases} y - 4x = 0 \Rightarrow y = 4x \\ 2y + x = 0 \end{cases}$

$8x + x = 0 \quad 9x = 0 \quad x = 0 \Rightarrow y = 0$

$(0,0) \notin \mathring{E}$ $\nexists$ punti critici per f in $\mathring{E}$

PARAMETRIZZARE IL BORDO

$\swarrow$ f ristretta al punto di E

$f|_{\partial E}$

$$AB: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$f|_{\partial AB}(x,y) = f(t,0) = 2t^2 = h(t)$

h è derivabile in $(0,1)$ e

$h'(t) = -4t = 0 \iff t=0 \notin (0,1)$

$\Rightarrow \nexists$ max e min per f AB

$$BC: \begin{cases} x = t \\ y = -t+1 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$f|_{BC}(x,y)\ f=(t,t+1) = (-t+1)^2 + t(-t+1) - 2t$

$= \cancel{t^2} - 2t + 1 \cancel{-t^2} + t - 2t^2$

$= -2t^2 - t + 1 = h(t)$

$h'(t) = -4t - 1 = 0$

$\iff t = -\frac{1}{4} \notin (0,1)$

$$AC: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

$f|_{AC}(x,y)\ f = (0,t) = t^2 = h(t) \qquad t = 0 \notin (0,1)$

$f(A) = f(0,0) = 0$

$f(B) = f(1,0) = -2 \leftarrow$ MIN ASSOLUTO IN E

$f(C) = f(0,1) = 1 \leftarrow$ MAX ASSOLUTO IN

31/10/2023

DIREZIONE MASSIMA E MINIMA CRESCITA DI UNA FUNZIONE DI PIÙ VAR.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \qquad v \in \mathbb{R}^n, \ |v| = 1$$

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

f differenziabile in $x_0 \in A$

la funzione:

$$|v| = 1 \quad \mathbb{R}^n \ni v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

Assume il valore MASSIMO se $v = (-)\dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$, $\nabla f(x_0) \neq 0$
MINIMO

Identicamente nulla se $\nabla f(x_0) = 0$

Dim:

Poiché f è differenziabile in x_0 dalla formula del gradiente, si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1$$

Allora

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| = |\langle \nabla f(x_0), v \rangle| \leq |\nabla f(x_0)| \cdot \cancel{|v|}^{\,1} = |\nabla f(x_0)|$$

$$\Rightarrow -|\nabla f(x_0)| \leq \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \leq |\nabla f(x_0)| = \left.\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right|_{v = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right|_{v = -\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}}$$

Sia $v = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ con $\nabla f(x_0) \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = \left\langle \nabla f(x_0), \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \right\rangle = \frac{1}{|\nabla f(x_0)|}\langle \nabla f(x_0), \nabla f(x_0) \rangle = \frac{|\nabla f(x_0)|^2}{|\nabla f(x_0)|} = |\nabla f(x_0)|$$

Se $\nabla f(x_0) = 0$, oltre si ha che

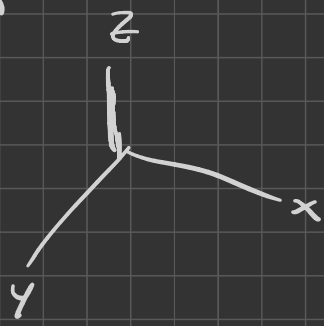
$$\frac{df}{dv} = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad |v| = 1$$

Quindi $\frac{df}{dv}(x_0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \ |v| = 1$

ORTOGONALITÀ DEL GRADIENTE ALLE CURVE DI LIVELLO

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile

$f(x,y) = c \qquad c \in \mathbb{R}$ curva di livello di f



Supponiamo che tale curva sia REGOLARE

Significa $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$$

$\varphi \in C^1(I)$ e $\varphi'(t) \neq (0,0) \quad \forall t \in \mathring{I}$

Sia $g : I \to \mathbb{R}$

$$t \longmapsto f(\varphi(t)) = f(x(t), y(t))$$

Dal teorema di derivazione della funzione composta si ha che g è derivabile in I e

$g'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \to$ REGOLA DELLA CATENA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA A PIÙ VARIABILI ①

Inoltre

$$g(t) = f(\varphi(t)) = f(x(t), y(t)) = c \quad \forall t \in I$$

g è derivabile in I e $g'(t) = 0 \quad \forall t \in I$ ②

Da ① e ② si ha che

$$\langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = g'(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \nabla f(\varphi(t)) \perp \varphi'(t) \quad \forall t \in I$$