LOGICA ALGEBRA GEOMETRIA

TEORIA DELLE RELAZIONI

29/09

TEORIA DEGLI INSIEMI → $X = \{ x : x \notin x \}$

PARADOSSO DI RUSSEL

TEORIA NON INGENUA DEGLI INSIEMI

X insieme (oggetto di elementi)

$x \in X$ APPARTIENE ALL'INSIEME

$x \notin X$ NON APPARTIENE NELL'INSIEME

TALE CHE LA CLASSE DEGLI ELEMENTI DI X

$\emptyset$ NON CI SONO ELEMENTI $\underbrace{\emptyset = \{ x : x \neq x \}}_{\text{INSIEME VUOTO}}$ (IN MANIERA FORMALE)

COS'È L'UGUAGLIANZA?

$X \neq \emptyset$

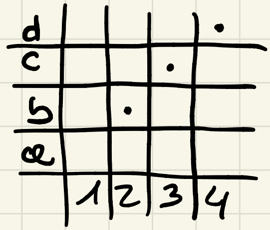
è anche una relazione detta anche relazione vuota

PARADOSSO DI CANTOR

ESISTE L'INSIEME DI TUTTI GLI INSIEMI
SE PARTO DALL'IPOTESI CHE ESISTE DIMOSTRO CHE NON ESISTE
VICEVERSA SE PARTO DALL'IPOTESI CHE NON ESISTE

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{a, b, c, d\}$



$$X \times Y = \{(x, y) ; x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

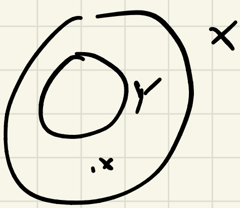
DANDO UNA PROPRIETÁ NON É VERO CHE SI HA UN INSIEME

$$X = \{x : x \notin x\}$$

PRINCIPIO DOPPIO INCLUSIONE INSIEMISTICA

$$X = Y \iff X \subseteq Y \land Y \subseteq X$$

EULERO VENN



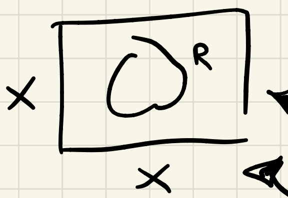
PRODOTTO CARTESIANO

$X^2 : X \times X = \{(x,y) : x,y \in X\}$ $X \times Y \neq Y \times X$

RELAZIONE UNARIA SU X (Relazione (1, aria) su X)

SI PUÓ CHIAMARE ANCHE PROPRIETÁ

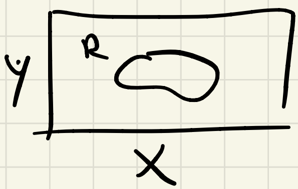
UNA PROPRIETÁ DI X é un sottoinsieme di X



RELAZIONE (2, aria) SU X

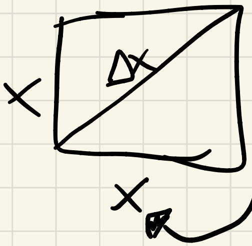
RELAZIONE (1, aria) SU $X \times X$

Fisso un sottoinsieme in R $\rightarrow$ $(x,y) \in R$



UGUAGLIANZA É UNA PARTICOLARE RELAZIONE

SONO UGUALI SONO IN X



RELAZIONE DI UGUAGLIANZA $\Delta x \subset X^2$

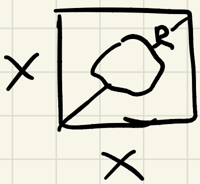
$$\Delta x = \{(x,x) : x \in X\}$$

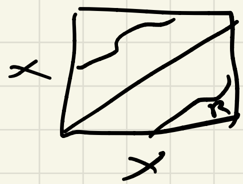
INVERSA

$$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$$

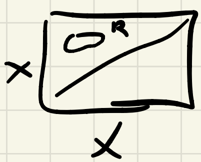
R É RIFLESSIVA solo se $\Delta(X) \subseteq R$

NO RIFLES.

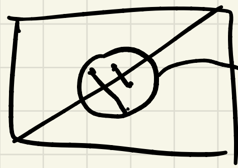




R É ANTI RIFLESSIVA solo se $\Delta(x) \cap R = \emptyset$

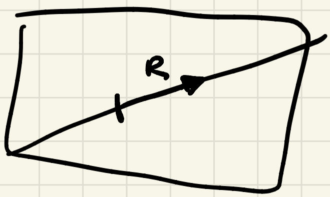


R É SIMMETRICA $R^{-1} = R$



LE DUE PARTI SPEZZATE SONO UGUALI

R É ANTISIMMETRICA $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta(X)$



R É TRANSITIVA $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

R É UN EQUIVALENZA IN X SE E SOLO SE É

RIFLESSIVA

SIMMETRICA

E TRANSITIVA

ES $\Rightarrow \Delta(X)$

30/09

ORDINE TOTALE

$R \cup R^{-1} = \Delta(X)$

$x = y$

$x R y$

$y R x \quad ((x,y) \in R^{-1})$

$X = \{a, b\}$

$\underline{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

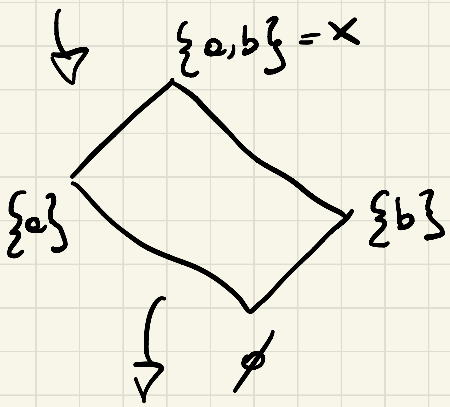
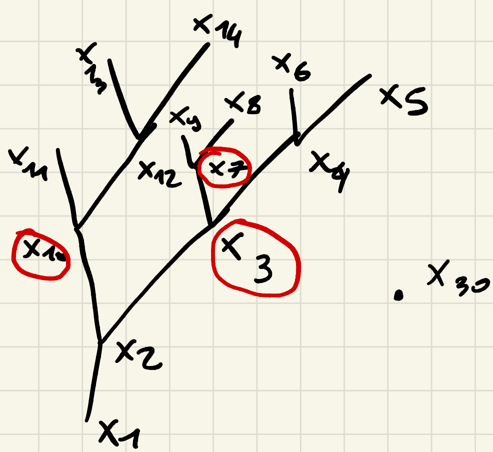


DIAGRAMMA DI ASS

$(P(X), \subseteq)$

é un insieme ordinato (non totalmente) POSET

ORDINE LARGO



IL POSET NON É TOTALMENTE ORDINATO POICHÉ ESISTONO ELEMENTI NON CONFRONTABILI

• SIA $Y \subset X$ $h \in X$ é un maggiorante per Y IN X se:

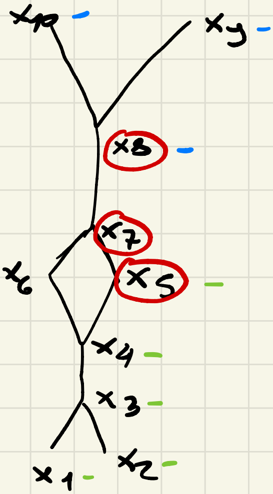
$\forall x \in Y, x \leq h$

• SIA $Y \subset X$ l é un minorante di Y in X se:

$\forall x \in Y, l \leq x$

$Y = \{x_7, x_3\}$ → x_8 maggiorante per Y
x_9 " " "
x_7 " " "

→ x_3 min " "
x_2 min " "
x_1 min " "



$Y = \{x_5, x_7, x_8\}$

DET. MAGG. E MINOR. DI Y

MINORANTI DI Y SU X : x_5, x_4, x_3, x_2, x_1
MAGGIORANTI DI Y SU X : x_8, x_9, x_{10}

DOMANDA: CHI È IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI?

x_8

DOMANDA: CHI È IL PIÙ GRANDE DEI MAGGIORANTI?

x_5

DOMANDA: IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI E IL PIÙ GRANDE DEI MINORANTI ESISTONO SEMPRE?

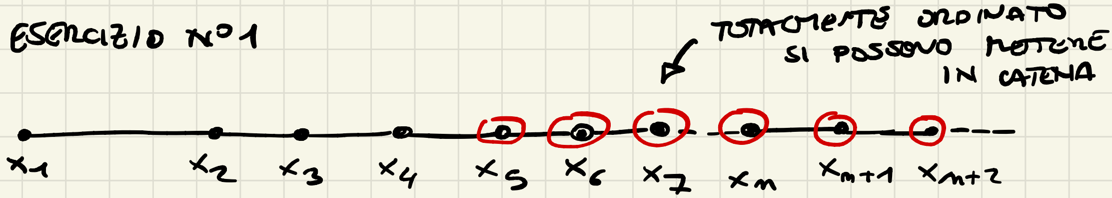
RISPOSTA: In generale no, ma se esistono sono unici.

Il più piccolo dei maggioranti si dice estremo superiore di Y in X e lo si denota con $\sup_X Y$, analogamente il più grande dei minoranti si dice estremo inferiore di Y in X e lo si denota con $\inf_X Y$.

Se $\sup_X Y$ esiste e $\sup_X Y \in Y$ esso si dice massimo di Y in X

Se $\inf_X Y$ esiste e $\inf_X Y \in Y$ esso si dice minimo di Y in X

ESERCIZIO N°1



$$Y = \{x_5, x_6, x_7, \dots x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \dots\}$$

MAGGIORANTI DI Y in X? $\emptyset$

MINORANTI DI Y in X? x_5, x_4, x_3, x_2, x_1

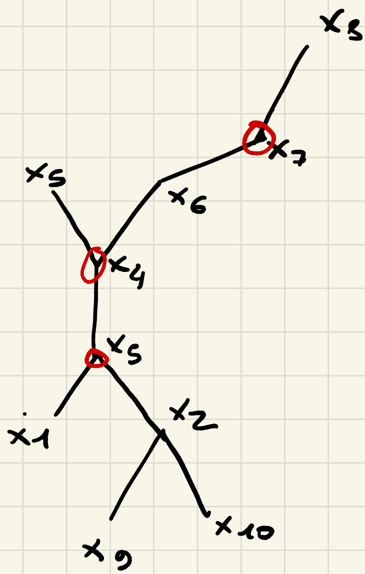
$\inf_X Y$? x_5

$\sup_X Y$? NON ESISTE

$\min_X Y$? x_5

$\max_X Y$? NON ESISTE

ESERCIZIO N°2



$Y = \{x_5, x_4, x_7\}$

MAGGIORANTI DI Y in X ? x_8, x_7

MINORANTI DI Y in X ? $x_1, x_2, x_9, x_{10}, x_5$

$\inf_X Y$? x_5

$\sup_X Y$? x_7

$\min_X Y$? x_5

$\max_X Y$? x_7

DEFINIZIONE

$x \in X$ si dice elemento massimale per X, se da $y \geq x$ segue $x = y$ $\forall y \in X$

$x \in X$ si dice elemento minimale per X, se da $y \leq x$ segue $y = x$ $\forall y \in X$

ELEMENTI MASSIMALI SONO QUEGLI ELEMENTI DOVE SOPRA DI ESSI NON C'É NULLA, VICEVERSA PER I MINIMALI

Un elemento minimale é anche minimo? IN GENERALE NO

Se l'elemento minimale é 1 allora é anche l'elemento minimo?

OGNI ELEMENTO MINIMO É ANCHE MINIMALE

ESERCIZIO PER CASA

OGNI MASSIMO É ANCHE MASSIMALE

SE L'ELEMENTO MASSIMALE É UNICO É ANCHE L'ELEMENTO MASSIMO

03/10 (SAM PIER MATEMATICO WALVAGHISTA)

ESERCITAZIONE

1) NO, nell'ambito delle teoria degli insiemi ingenua (cantor)

*2) Russel Paradosso $X = \{ x : x \notin X \}$ Tramite la teoria degli insiemi ingenua non si riesce a dare una risposta, se si prova a dare una

3) $\emptyset = \{ x : x \neq x \}$

4) $A = \{a, b, c, d\}$ $\underline{P} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}$
$\{d,a\}, \{a,c\}, \{b,d\}$
$\{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{c,d,a\},$
$\{d,a,b\}, \emptyset \}$

5)

*2 FUORI DAL SENSO COMUNE

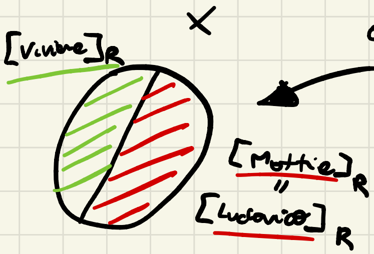
$X \neq \emptyset$, $R \subset X^2$; R è equivalente in X
↳ RELAZIONE

sia $x \in X$

↗ UN SINGOLA EQUIVALENZA

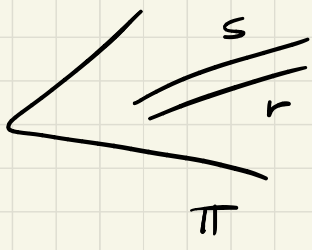
$[x]_R = \{ y \in X : y R x \}$ classe di equivalenza individuata di $x \in X$ secondo R

↳ TALE CHE



OGNI VOLTA CHE FISSO UN'EQUIVALENZA DIVIDO L'INSIEME IN PIÙ PICCOLI INSIEMI

$X/R = \{ [x]_R : x \in X \}$ insieme quoziente di X modulo R (X modulo R)



$s \parallel r$

$x \not R y$

$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

$x R y$

$[x]_R \cap [y]_R = [x]_R = [y]_R$

$$\bigcup_{\alpha \in J} [x_\alpha] = X$$

TEORIA PROIEZIONI MONGE

Sia $(X_\alpha)_{\alpha \in J}$

$$\bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha = X \quad e \quad X_\alpha \neq \emptyset$$

$$X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset \; ; \forall \underset{\alpha \neq \beta}{\alpha, \beta \in J}$$

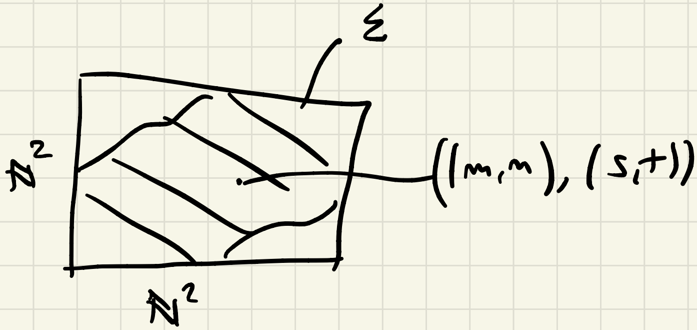
Una equivalenza su X individua una partizione di X

6 / 10

Sia $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali provare che la relazione $\mathcal{E}$ definita da

$$(m,n)\ \mathcal{E}\ (s,t) \iff m+t = n+s$$

$\forall (m,n),(s,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é una relazione di equivalenza in $\mathbb{N}^2$



$$X = \mathbb{N}^2$$

1) $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad (m,n)\ \mathcal{E}\ (m,n)$ RIFLESSIVA

SIMMETRICA

2) $\forall (m,n),(s,t) \in \mathbb{N}^2,\ (m,n)\ \mathcal{E}\ (s,t) \Rightarrow (s,t)\ \mathcal{E}\ (m,n)$

TRANSITIVA

3) $\forall (m,n),(s,t),(l,g) \in \mathbb{N}^2,\ (m,n)\ \mathcal{E}\ (s,t) \Rightarrow (s,t)\ \mathcal{E}\ (l,g)$

$\Rightarrow (m,n)\ \mathcal{E}\ (l,g)$

① $m+n = n+m$

Poiché la somma nei numeri naturali è commutativa l'uguaglianza precedente è verificata

②

$$m+t = n+s \implies s+n = m+t$$

③

$$(m,n) \leq (s,t) \iff m+t = n+s \quad (m+\underbrace{t+l}=n+s+l)$$

$$(s,t) \leq (l,q) \iff s+q = t+l \quad (n+\cancel{s}+q = n+\cancel{s}+l)$$

$$(m,n) \leq (l,q) \iff m+q = n+l \quad (m+q = n+l)$$

$$m+\cancel{s}+q = n+\cancel{s}+l$$

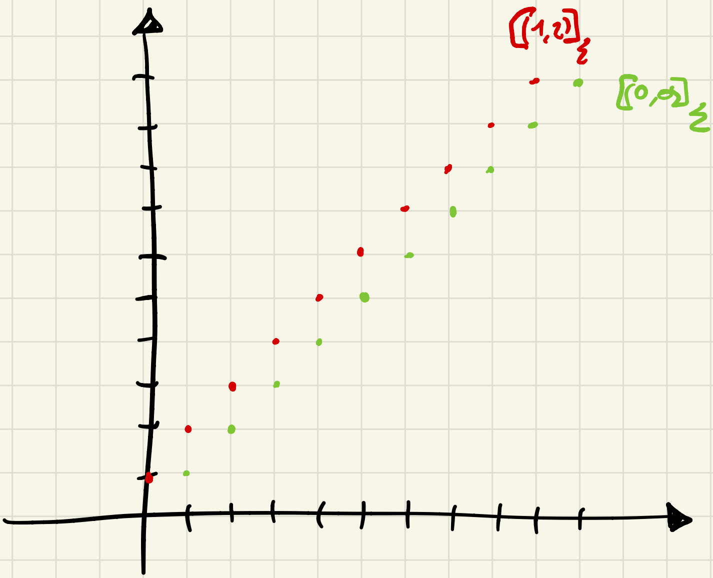
$$-s \qquad\qquad -s$$

SI PUÒ FARE SOLO SE

$m+s+q \geq -s$ (SEMPRE VERA ANCHE QUANDO $m;q=0$)

$$\mathbb{N}^2/_{\leq} = \{[(m,n)]_{\leq} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\} = X/_R = \{y \in X : yR_x\}$$

$$[(m,n)]_\Sigma = \{ (s,t) \in \mathbb{N}^2 : (s,t)\, \Sigma\, (m,n) \}$$



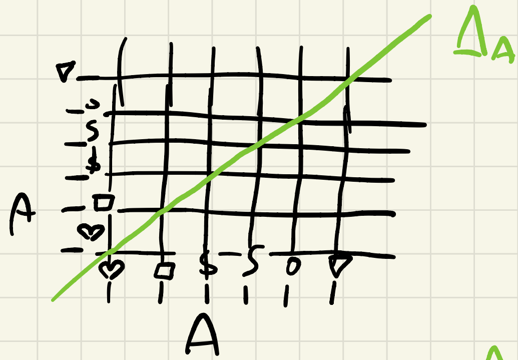
$$[(0,0)]_\Sigma = \{ (s,t) \in \mathbb{N} : (s,t)\, \Sigma\, (0,0)$$

$$s+0 = t+0$$

ESERCIZIO DATO L'INSIEME

$$A = \{ \heartsuit, \square, \$, \int, o, \nabla \}$$

definire almeno una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ e descrivere l'insieme quoziente $A/\mathcal{E}$



$$\Delta_A = \{ (*,*) : * \in A \}$$

$$A/\Delta_A = \{ [*]_{\Delta(A)} : * \in A \}$$

$$[\heartsuit] = \{ * \in A : * \,\Delta(A)\, \heartsuit \}$$

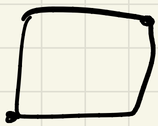
$*$ = generico simbolo

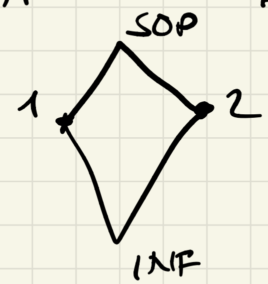
ESERCIZIO SCRIVERE UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA DI A che non sia un'uguaglianza e indurre in A un ordine totale

LATTICE RETICOLO PARZIALMENTE ORDINATO

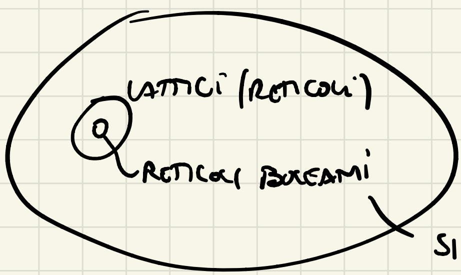
POSET

PRENDENDO 2 PUNTI AMMETTE EST. INF e EST SUP





PARZ ORD (POSET)



SI POSSONO CONFONDERE CON LE ALGEBRE DI BOOLE

10/10

Introdurre in A un ordine totale. Si può sempre fare?

□ ≤ $ ≤ O ≤ ∇ ≤ ♡ ≤ ∫

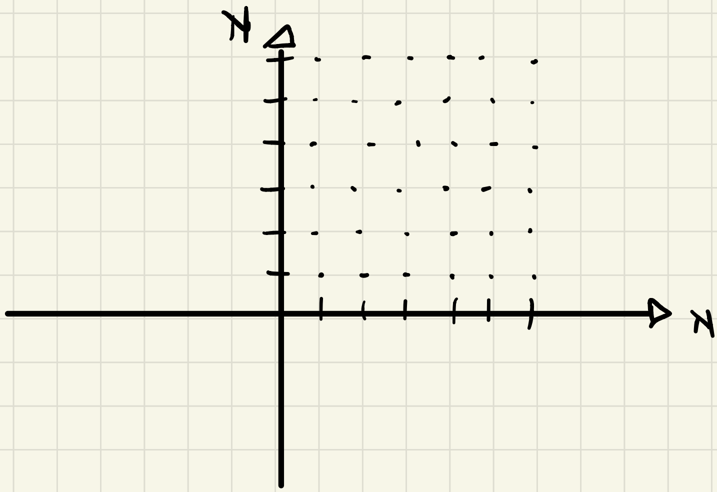
QUANTI ORDINI TOTALI SONO INTRODUCIBILI IN A?

RISPOSTA $6! = 720$ → numero permutazioni degli elementi → 720 ORDINI

$ ≤ □ ≤ O ≤ ∇ ≤ ♡ ≤ ∫

O ≤ $ ≤ □ ≤ ∇ ≤ ♡ ≤ ∫

RISPOSTA AL PROBLEMA SI se A è finito



ORDINARE CON UN ORDINE TOTALE TUTTI I PUNTI DI $N \times N$

$N = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

RISPOSTA È SI È TOTALMENTE ORDINABILE

$(3,2) \leq_M (4,5)$

$(m,n) \leq_M (m',n')$

$\iff m \leq_N m' \wedge n \leq_N n'$

1) $(m,n) \leq (m,n) \iff$

$m \leq m \wedge n \leq n$

2) $(m,n) \leq (x,y) \iff m \leq x \wedge n \leq y$

NO, È VERA

$(x,y) \not\leq (m,n) \qquad x \leq m \wedge y \leq n$

3) $(m,n) \leq (x,y) \wedge (x,y) \leq (z,l) \to (m,n) \leq (z,l)$

$$m \leq x \wedge n \leq y$$

$$x \leq z \wedge y \leq l$$

$$m \leq z \wedge n \leq l$$

LA RELAZIONE CONSIDERATA È UN ORDINE IN $N \times N$

MA NON È TOTALE

$\cancel{(1,2) \leq (2,1)}$

$\cancel{(2,1) \leq (1,2)}$

TEOREMA DI ZERMELO

Siano S e T

$f: S \to T$ introduciamo in S introduco la seguente relazione $\forall x, y \in S \quad x R_f y \iff f(x) = f(y)$

$\downarrow$

R_f

Provare che R_f é una relazione naturale indotta da f

1)

$\forall x \in S \quad x R_f x$

$\Updownarrow$

$f(x) = f(x)$

2) $\forall x, y \in S \quad x R_f y \Rightarrow y R_f x$

$\Updownarrow$

$f(x) = f(y)$

$f(y) = f(x)$

3) $\forall x, y, z \in S \quad x R_h y \to y R_h z \Rightarrow x R_h z$

$$h(x) = h(y)$$
$$h(y) = h(z)$$
$$h(x) = h(z)$$

$$[x]_{R_h} := \{ y \in S : y R_h x \}$$
$$\{ y \in S : h(x) = h(y) \}$$

13/10

ESERCIZIO 1

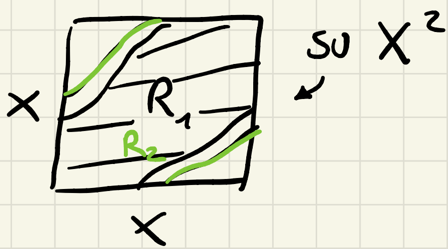
LIBRO MARIO CURZIO

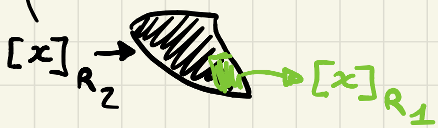
Date due relazioni di equivalenza R_1 e R_2 su X
Provare che sono equivalenti i seguenti fatti

$R_1 \subseteq R_2$

$[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2} \quad \forall x \in X$

$\boxed{X/_{R_1} \subseteq X/_{R_2}}$ FALSA *





$[x]_{R_2} \supseteq [x]_{R_1}$

(1) → 2

$R_1 \subseteq R_2$

FISSATO x in X consideriamo la classe $[x]_{R_1}$

$[x]_{R_1} = \{y \in X : y R_1 x\}$

$[x]_{R_2} = \{y \in X : y R_2 x\}$

$$\forall y : \quad y \in [x]_{R_1} \to y \in [x]_{R_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$$

$$(x,y) \in R_1 \Rightarrow y R_1 x$$

$$(x,y) \in R_2 \Rightarrow y R_2 x$$

$(2) \to 3$

$$[x]_{R_1} = \{ y \in X : y R_1 x \}$$

$$[x]_{R_2} = \{ y \in X : y R_2 x \}$$

$$[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$$

$$X/_{R_1} \subseteq X/_{R_2}$$

* FALSA PERCHÉ

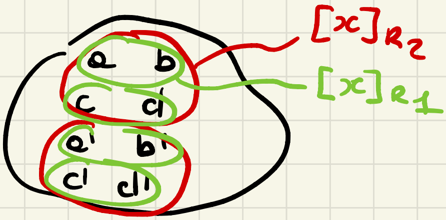
$$R_1 \subseteq R_2$$

$$X/_{R_2} \; \{\{a,b,c,d\}, \{a',b',c',d'\}\}$$

$$X/_{R_1} = \{\{a,b\}, \{c,d\}, \{a',b'\}, \{c',d'\}\}$$

$$X \; \{ a,b,c,d,a',b',c',d \}$$

$X/_{R_2} \subseteq X/_{R_1}$ perché sono insiemi diversi



insieme quoziente

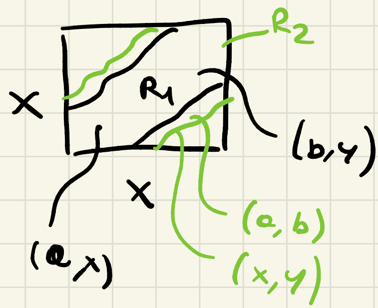
X_{R_1} è la somma di tutte le classi

ogni classe é la divisione dell'insieme di partenza tramite una relazione comune a tutti quegli elementi

ESEMPI:

Siano R_1 e R_2 due relazioni di equivalenza in X $(R_1 \subseteq R_2)$

Supponiamo che $(a,x) \in R_1$ $\quad (b,y) \in R_1$ $\quad (a,b) \in R_2$ $\Rightarrow (x,y) \in R_2$



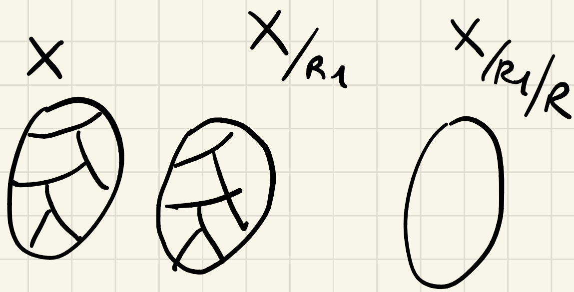
$(a,x) \in R_1 \subseteq R_2 \rightarrow a R_2 x \overset{eq}{\Leftrightarrow} x R_2 a$

$(a,b) \in R_2 \rightarrow a R_2 b$ $\qquad \overset{\text{TRANSITIVA}}{\Rightarrow} x R_2 y \Rightarrow (x,y) \in R_2$

$(b,y) \in R_1 \subseteq R_2 \rightarrow b R_2 y$

ESERCIZIO 3

Siano R_1 e R_2 due relazioni di equivalenza di X $(R_1 \subseteq R_2)$



Come sono fatte le relazione R su quoziente $X/_{R_1}$

$R_1 \subseteq R_2 \quad X$

$X/_{R_1}$

$$\forall [x]_{R_1}, [y]_{R_1} \in X/_{R_1}, \; [x]_{R_1} \overset{R}{\overset{\|}{R_2/_{R_1}}} [y]_{R_1} \overset{def}{\Longleftrightarrow} x R_2 y \quad (*)$$

ESERCIZIO PROVARE CHE È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA

$X/_{R_1}$

Proposizione

Siano R_1 ed R due relazioni di equivalenze rispettivamente su X e su $X/_{R_1}$.

Allora esiste un unica relazione R_2 su X tale che $R_1 \subseteq R_2$ e R è uguale a $R_2/_{R_1}$

DIMOSTRAZIONE

Costruiamo una Relazione R_2 su X tale che $R_1 \subseteq R_2$ e $R = R_2/_{R_1}$

La relazione da definire è quello definito dalla $(*)$

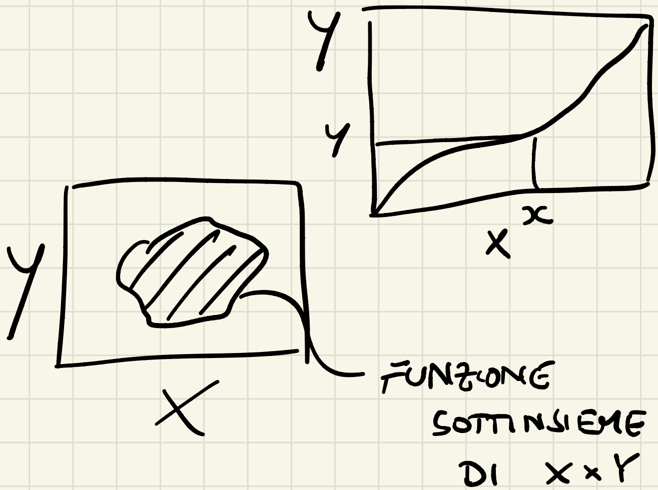
Resta da dimostrare l'unicità Esercizio

PAG LIB. 45, 46, 47, 48, 49, 50

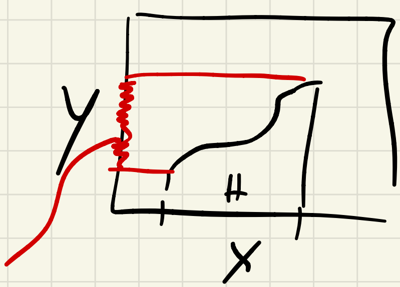
17/10

Funzioni

Una funzione $f : X \to Y$ è una relazione individuale da un insieme $G_f(f) \subseteq X \times Y$ tale che



$$\forall x \in X \; \exists! \, y \in Y : (x,y) \in \underbrace{G_f(f)}_{\text{GRAFICO DELLA FUNZIONE}} \quad (1)$$



CODOMINIO

$f(x)$: codominio di X

$\cancel{f : X \to Y}$ NO!

$f : H \to Y$

$f/_H$

(a) HA IL DOMINIO $(G_F(f)) = X$

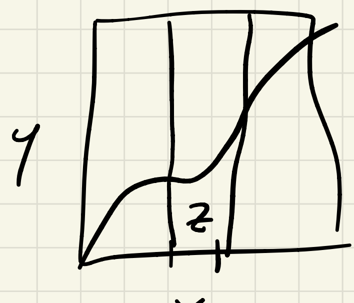
(b) $(x,y) \in G_r(f) \wedge (x,z) \in G_r(f) \Rightarrow y = z$ in Y

$F(x) := \{ y \in Y : \exists x \in X$ e $(x,y) \in G_r(f) \}$

$(x,y) \in G_r(f) \Leftrightarrow y = f(x)$

• $Z \subseteq X$ la restrizione di f a Z

$f|_Z$ RIC NOTE

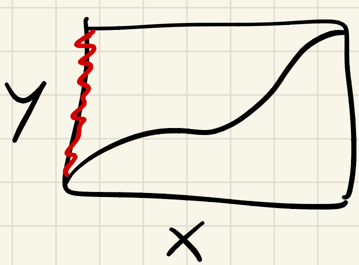


$G_r(f)$

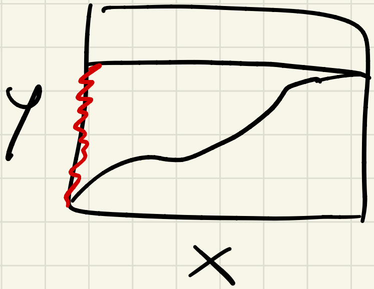
$G_r(f|_Z) = G_r(f) \cap (Z \times Y)$

• $f : X \to Y$ é detto suriettiva

$\Leftrightarrow$ def $f(X) = Y$



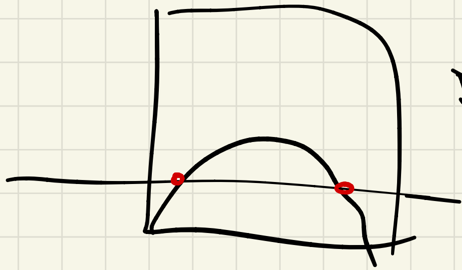
SI



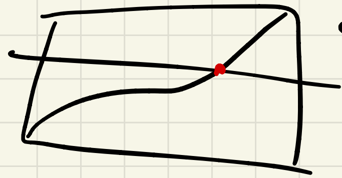
NO

- INIETTIVA

RIC APP



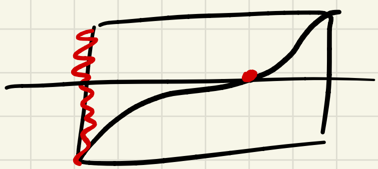
NO



SI

- BIETTIVA → INIETTIVA + SURIETTIVA

RIC APP



SI

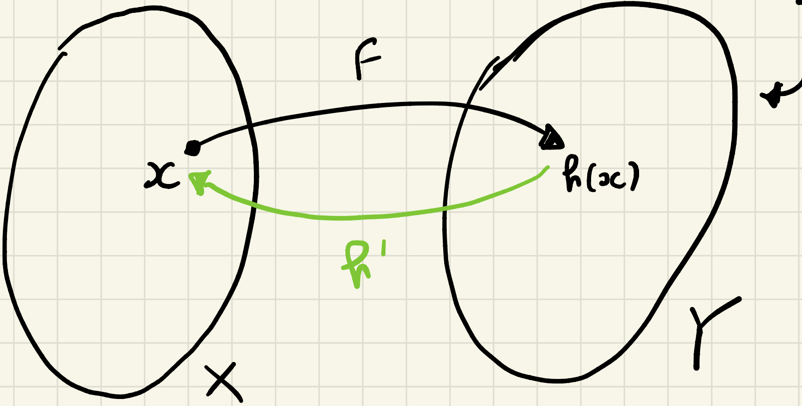
$$f^{-1} \circ f = id_X$$

$$\wedge$$

$$f \circ f^{-1} = id_X$$

TUTTE FUNZIONI INVERTIBILI

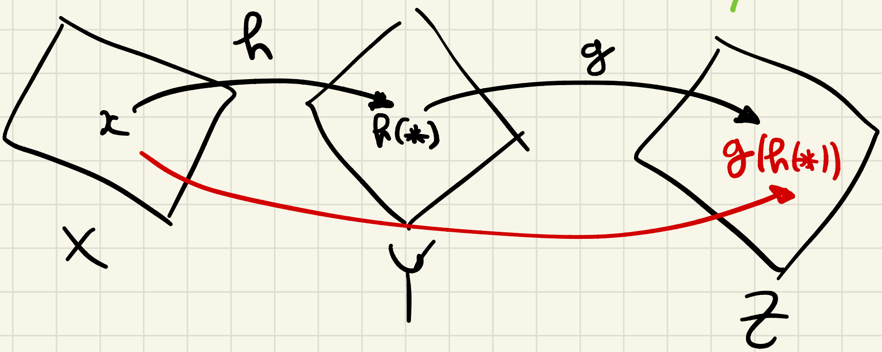
DEF FUNZIONE



Esiste sempre una tale g ?

$$h^{-1} \circ h = id_x \iff h^{-1}(h(x)) = x$$

$$h \circ h^{-1} = id_y \iff h(h^{-1}(y)) = y$$



$$h \circ g : X \to Z$$

$\Downarrow$

prima h poi g

NOTE

$$Gr(g \circ h) = Gr(g) \circ Gr(h)$$

$R \subset X \times Y$

$S \subset Y \times T$

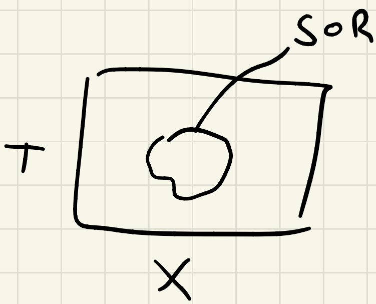
$$\boxed{R \circ S \neq S \circ R}$$

$S \circ R \subseteq X \times T$

$(x,y) \in S \circ R \iff \exists\, y \in Y \quad \begin{matrix} (x,y) \in R \\ (y,z) \in S \end{matrix}$

RELAZIONE COMPOSTE TRA DUE RELAZIONI

∃ SEMPRE LE RELAZIONI COMPOSTE, NON É COMMUTATIVA



Nota op di composizione non é commutativa

$$R \circ S \neq S \circ R$$

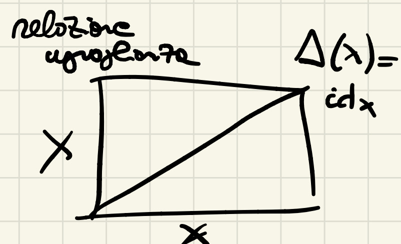
$\Delta(x)$ relazioni uguaglianza X

$f : X \to X \qquad f(x) = x, \ \forall x \in X$

Funzione identica nel X

$id_X : X \to X$

$id_X(x) = x, \ \forall x \in X$



Richiami

R relazione equivalenza in X

X/R insieme quoziente di X modulo R

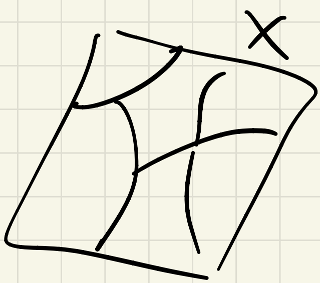
insieme delle $[x]$ modulo R

$$X/R := \{ [x]_R : x \in X \}$$

$$[x]_R = \{ y \in X : y \, R \, x \}$$

$$(y, x) \in R$$

R in X equivale a partizione X senso



$\underline{P}(x) \supseteq \Sigma$

Σ è una partizione di X

① $\bigcup_{\bar{x} \in \Sigma} \bar{x} = X$

② $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \Sigma, \ \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

③ $\forall \bar{x} \in \Sigma, \ \bar{x} \neq \emptyset$

$\overline{X}$ $\quad R$ vedi video

2° TEOREMA OMOMORFISMO

Siano R_1 e R_2 due relazione di equivalenza su X sia $R_1 \subseteq R_2$

$[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$
$\forall x \in X$

$$
\begin{tikzcd}
X/R_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & X/R_2 \\
\left(X/R_1\right)\big/\left(R_2/R_1\right) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{[x]_{R_1}} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\pi"'] & {[x]_{R_2}} \\
{\left[[x]_{R_1}\right]_{R_2/R_1}} \arrow[ur, mapsto, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

$(*)$

allora esiste una unica funzione $g : {}^{X/R_1}\!/_{R_2/R_1} \to X/R_2$ biettiva tale che (*) rende commutativo il diagramma

Siano f e g due funzioni

$$f : X \to Y$$
$$g : Y \to Z$$

① Se f é iniettiva (surjettiva) e g é iniettiva (surjettiva) allora $g \circ f$ INIETTIVA (SURIETTIVA)

② Se $g \circ f$ é surjettiva ed f é surjettiva allora g é surjettiva

③ Se $g \circ f$ é iniettiva e g é iniettiva allora f é iniettiva

20/10 Esercizio: Siano $h: X \to Y$ e $g: Y \to Z$

Valgono i seguenti fatti se h e g sono iniettive (suriettive)

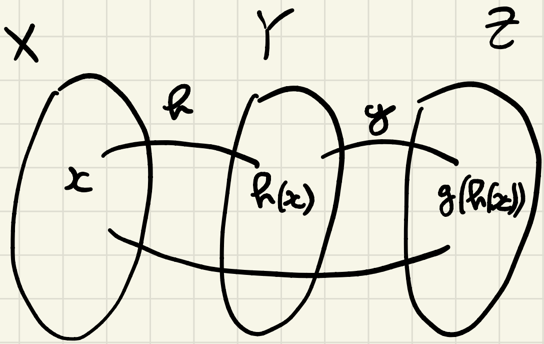
$\Rightarrow$ ① $g \circ h$ é iniettiva (suriettiva)

② $h \circ g$ é iniettiva $\Rightarrow$ h é iniettiva

③ $h \circ g$ é suriettiva $\Rightarrow$ g é suriettiva

④ $g \circ h$ é suriettiva e g é iniettiva $\Rightarrow$ h suriettiva

⑤ $g \circ h$ é iniettiva e h é suriettiva $\Rightarrow$ g é iniettiva



$g \circ h : X \to Z$

$h: X \to Y$ é invertibile $\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longrightarrow}}$ $\exists\ g = h^{-1} : Y \to X$

$$(*) \begin{cases} g \circ h = id_X \\ h \circ g = id_Y \end{cases} \quad \left(id_X : X \to X \quad id(x) := x, \forall x \in X \right)$$

(1)

$$x \longmapsto h(x)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "id_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$x \qquad g(h(x)) = x$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[d, "id"] \\ & Y \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd}$$

$$g(y) \qquad h(g(y)) = y \qquad y$$

Questi diagrammi valgono

Proposizione: $h : X \to Y$ è invertibile

$$\Updownarrow$$

h è biettiva $\begin{cases} \text{suriettiva} \\ \text{iniettiva} \end{cases}$

prop 2: $h : X \to Y$ è iniettiva

$$\Updownarrow$$

$\exists\, g : Y \to X$

$$\boxed{\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[ul, "id_X"] \end{tikzcd}}$$

$$g \iff g \circ h = id_X \iff g(h(x)) = x$$

$$\forall x \in X$$

prep 3 $f: X \to Y$ <u>suriettiva</u>

$\exists\, g: Y \to X$ tale che

$g(y)$ $\quad f(g(y)) = y$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "id_Y"] \\ & Y \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd}$$

$y = f(g(y))$

$f \circ g = id_Y$

$(X^X, \circ)$ $\quad f: X \to X$

$id_X \circ f = f \circ id_X \Rightarrow f$

$X^X = \{f: X \to X\}$ biettive $\quad \boxed{f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id_X}$ SOLO LE BIETTIVE

CURZIO 36-37-38

Dimostrare proposizione 3

Sia $h : X \to Y$ una funzione sia h è suriettiva

$$\Updownarrow$$

$\exists g : X \to Y$ tale che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[d, "id_Y"] \\ & Y \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd} \iff \underbrace{h \circ g = id_Y}_{h \text{ è invertibile e destra}}$$

Dimostriamo che dal diagramma è commutativo

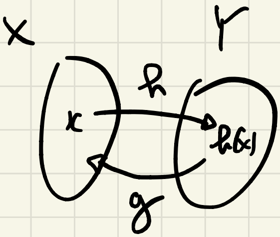
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[d, "id_Y"] \\ & Y \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd}$$

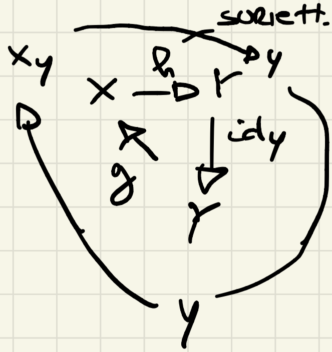
$$\underbrace{h \circ g}_{\text{suriettiva}} = \underbrace{id_Y}_{\text{biettiva } \begin{cases} \text{iniett} \\ \text{suriettiva} \end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

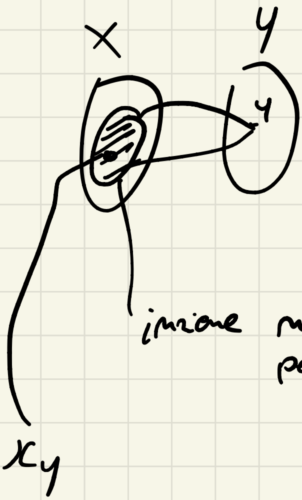
h è suriettiva

dimostra dalla suriettività il diagramma





$f \circ g = id_Y$



insieme non vuoto
per la suriettività

$$g(y) = x_y \in f^{\leftarrow}(y)$$

24/10 **Insieme numeri naturali $\mathbb{N}$**

(Von Neumann) - modello 1923

Necessità teoria insiemi formale → no ingenua (no Cantor)

Utilizzo del vuoto come insieme

ASSIOMA ① $\exists$ è insieme $\emptyset$ (ASSIOMA DEL VUOTO) (TEORIA GÖDEL, BERNAYS, VON NEUMANN)

$\emptyset$ ⇒ simbolo andré weil

$$succ(n) = n \cup \{n\}$$

$$0 = \emptyset \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} \ \ldots$$

ASSIOMA INSIEME INFINITO

$$\left.\begin{array}{l} \emptyset \in X \\ x \in X \rightarrow x \cup \{x\} \in X \end{array}\right]$$ 2° PROPRIETÀ INSIEME INDUTTIVO

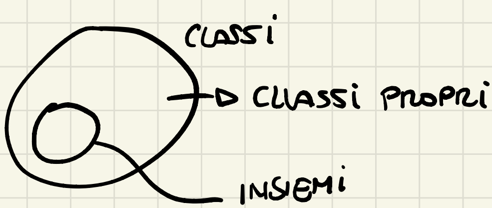
$(\cancel{\in})$ non sempre

CLASSE ⇑ INSIEME ⇕ OGGETTO

$\in$ (APPARTENENZA) → OGGETTI

$\subset$ (INCLUSIONE) → CLASSE

Le classi che non sono insieme si dicono classi proprie



X è un insieme induttivo $\quad \emptyset \in X$

$x \in X \to x \cup \{x\} \in X$

Sia $\mathcal{F}$ l' ~~insieme~~ CLASSE di tutti gli insiemi induttivi

$X \in \mathcal{F} \quad Z \notin \mathcal{F}$

$Y \in \mathcal{F}$

$\emptyset \neq \mathcal{F}$ per l'assioma dell'infinito

$\bigcap X$ è un insieme induttivo

$x \in \mathcal{F}$

① $\emptyset \in \bigcap X \quad x \in \mathcal{F}$

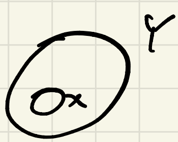
② $\forall x \in \bigcap X \quad x \in \mathcal{F}$

$x \cup \{x\} \in \bigcap X$

ω = intersezione di tutti gli insiemi induttivi

Assioma comprensione (TEORIA GOUDEL, BERNÉ, VON-NEWMAN)

X, Y classi $\to X \subseteq Y \to$ insieme $\to$ anche X sarà un insieme



É l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi costruibili

↓

Insieme numeri naturali

ω MODELLO VON NEUMAN ↗
ℕ MODELLO ASTRATTO

ASSIOMI DI PEANO

$\exists \ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ proprietà:

1 $0 \in \mathbb{N}$; → $\mathbb{N}$ contiene almeno un elemento

2 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ é iniettiva → 0 avrebbe un'immagine

$X \subseteq \mathbb{N}$

3 $0 \in X$

$\forall n : n \in X \Rightarrow \sigma(n) \in X \to X = \mathbb{N}$

TEOREMA AX - COEN → MODELLI ISOMORFI

TEOREMA DI RICORSIONE IN FORMA DEBOLE

↓

definire operazione somma

$n+1 = \sigma(n) \qquad (\mathbb{N}, \sigma)$

ASSIOMI DI PEANO
(PRINCIPIO INDUZIONE)

↓

(TEOREMA) RICORSIONE DEB.

↓

SOMMA, PRODOTTO, ORDINE

INSIEME $\leftarrow$ $(\mathbb{N}, \sigma)$ $\rightarrow$ SUCCESSIVO (FUNZ.)

ASSIOMI PEANO

$\downarrow$

TEOREMA RICORS. DEB

$\downarrow$

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ SEMIANELLO ORDINATO

ESERCIZIO INDUZIONE IMPORTANTE !!

SOMMA PRIMI 100 numeri

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

DIMOSTRARE

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 100 & \rightarrow \\ 100 & 99 & 98 & \dots & 1 & \leftarrow \\ \hline 101 & 101 & 101 & & 101 & \end{array} \quad \times 2$$

$$\frac{100 \cdot (100+1)}{2} = 5050$$

TEOREMA D'INDUZIONE IN FORMA DEBOLE SEMANTICA

Sia $P(n)$ un predicato $\mathbb{N}$, $P(n), n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \quad 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$$

Uso il teorema di induzione

$$n_0 = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

$$n > 1 \quad 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE $\Rightarrow$ BUON ORDINAMENTO

27 / 10 RIPASSO NUMERI NATURALI

$(\mathbb{N}, \sigma, 0)$ → SIMBOLO $(\in \mathbb{N})$

insieme $\quad \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

① $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iniettiva

② $0 \in \mathbb{N}$, $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$

③ se $X \in \mathbb{N}$ tale che:

(i) $0 \in \mathbb{N}$

(ii) $\forall x \in X \Rightarrow \sigma(x) \in \mathbb{N}$

allora $X = \mathbb{N}$

(1923)

MODELLO VON-NEUMANN (ω) (uno dei modelli costruibili)

$0 = \emptyset$; $1 = \{0\}$; $2 = \{0, 1\}$; .... $Succ(n) := n \cup \{n\}$

ASSIOMA INFINITO ⟷ COSTRUIRE I NUMERI NATURALI IMPLICA IL CONCETTO DI INFINITO

ASSIOMA DEL VUOTO

PIÙ TUTTI GLI ALTRI ASSIOMI FONDAMENTALI PER COSTRUIRE I NUMERI E LE RELAZIONI

TEOREMA RICORSIONE DEBOLE (DEFINIRE OPERAZIONI SOMMA, PRODOTTO)

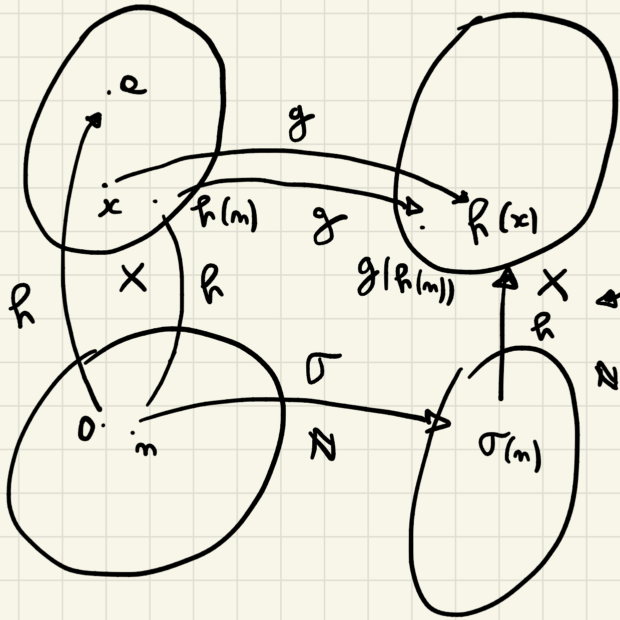
$X \neq \emptyset \qquad g : X \to X$ ← X non vuoto

$a \in X$, allora $\exists!$ funzione ← Esiste una unica funzione

$f : \mathbb{N} \to X$ tale che:

$f(0) = a \in X$

$f(\sigma(n)) = g(f(n))$



$h(\sigma(n)) = g(h(n))$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ $\qquad$ $0! = 1$

$n! = n(n-1)$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)n! \end{cases}$$

$$h(\sigma(n)) = g(h(n))$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\to n(n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\to (n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\to n! \end{aligned}$$

$+_{\mathbb{N}}$: Fissato $n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$0 +_{\mathbb{N}} m = m$$

$$\sigma(n) +_{\mathbb{N}} m = \sigma(n +_{\mathbb{N}} m)$$

$\cdot_{\mathbb{N}}$ Fissato $n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$0 \cdot_{\mathbb{N}} m = 0$$

$$\sigma(n) \cdot_{\mathbb{N}} m = (n \cdot_{\mathbb{N}} m) +_{\mathbb{N}} m$$

Infine in $\mathbb{N}$ si definisce un ordine $\leq_{\mathbb{N}}$:

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ $\quad n \leq m \iff \forall X \subseteq \mathbb{N}$ (stabile rispetto a σ)

RIC. APP. SUL PORTALE

TEOREMA : Sono equivalenti

1. PRINCIPIO DI INDUZIONE
2. PRINCIPIO DEL BUON ORDINAMENTO

] SONO LA STESSA COSA

$$\forall X \subseteq \mathbb{N} ,\ X \neq \emptyset \quad \exists \min_{\mathbb{N}} X$$

FORMA DEBOLE (1) , FORMA SEMANTICA

Sia $P(n)$

Assumiamo

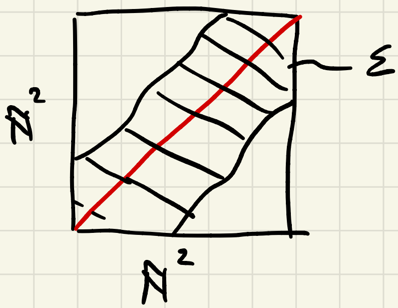
COSTRUIRE L'INSIEME DEI NUMERI INTERI AD ANELLO

$\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione equivalente $\mathcal{E}$

$\forall\, (m,n), (s,t) \in \mathbb{N}^2$

$$(m,n)\,\mathcal{E}\,(s,t) \iff m+t = n+s$$

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2 / \mathcal{E}$$



$(m,n) \in \mathbb{N}^2$

$(s,t) \in \mathbb{N}^2$

$(m,n)\,\mathcal{E}\,(s,t) \overset{def}{\iff} m+t = n+s$

$(1,2)\,\cancel{\mathcal{E}}\,(3,1)$ $\quad 1+1 = 2+3$

$2 = 5$ NO

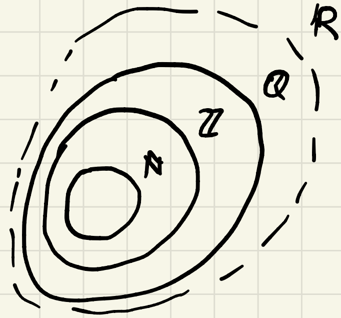
$\Downarrow$

$2 \neq 5$

Dim $\mathcal{E}$ relaz di equivalenza su $\mathbb{N}^2$ (già svolto)

7/11

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

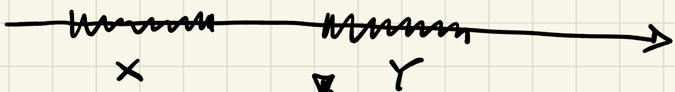


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Dedechind per costruire un sovracampo di $\mathbb{Q}$

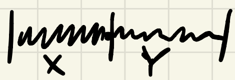
Siano X e $Y \neq \emptyset$ di un campo K totalmente ordinato

$$X \le Y \iff (\forall x \in X, \forall y \in Y : x \le y)$$



$X \le Y$ ← sono separati se vale

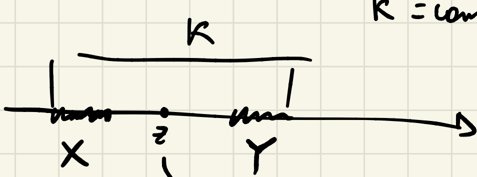
N.B



SI POSSONO TOCCARE

proprietà di completezza (DEDEKIND)

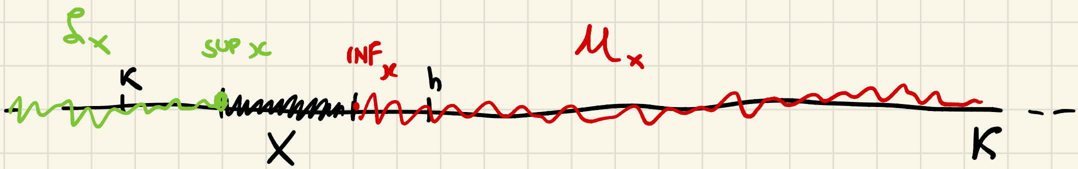
K = campo



→ elemento separazione

se esiste è dedekind completo

N.B. non esiste sempre



$h \in K$ magg per X ? $\forall x \in X$ $h \geq x$ $\quad \mathcal{U}_x$ insieme magg

$k \in K$ min per X ? $\forall x \in X$ $h \leq x$ $\quad \mathcal{L}_x$ insieme min

$\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ non anno $\mathcal{U}_x$ e $\mathcal{L}_x$ possono essere $\emptyset$

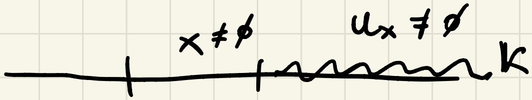
$\left.\begin{array}{l} \mathcal{U}_x \neq \emptyset \\ \mathcal{L}_x \neq \emptyset \end{array}\right]$ LIMITATO in K

$\sup_x K$ come il minimo dei magg di x in K
$\inf_x K$ come il massimo dei min di x in K

TEOREMA

Sia $(\mathbb{K}; +; <)$

$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{K} \text{ è D-completo} \\ \forall\, X, Y \neq \emptyset \\ \quad X \leq Y \ \ \exists\, z : X \leq z \leq Y \end{array}}$

2 

solo se è D-completo

$\exists \min \mathcal{U}_x = \sup_K x$

3

TEOREMA CARATTERIZZAZIONE permette di definire tramite le def e i risultati esiste un unico campo $\mathbb{K}$ totalmente ordinato e D-completo a meno di isomorfismi crescenti di campi

$\downarrow$ identificazioni

$\|$ ovvero $\mathbb{R}$

Esiste $\mathbb{R}$ unico campo totalmente ordinato e D-completo che ha senso in virtù del teorema di Dedekind

$\mathbb{Q}$ non é D-completo

$\hookrightarrow$ $\mathbb{Q} \to$ campo tot ordinato

$X := \{ q : q \in \mathbb{Q} \wedge q \geq 0 \; q^2 < 2 \}$

$X \neq \emptyset$ $\quad \mathcal{U}_X \neq \emptyset$ $\quad$ ma non esiste estremo superiore

$\downarrow$

$1 \in X$

$q^2 < 2 \to q^2 < 4 \to q^2 - 4 < 0$

$\downarrow$

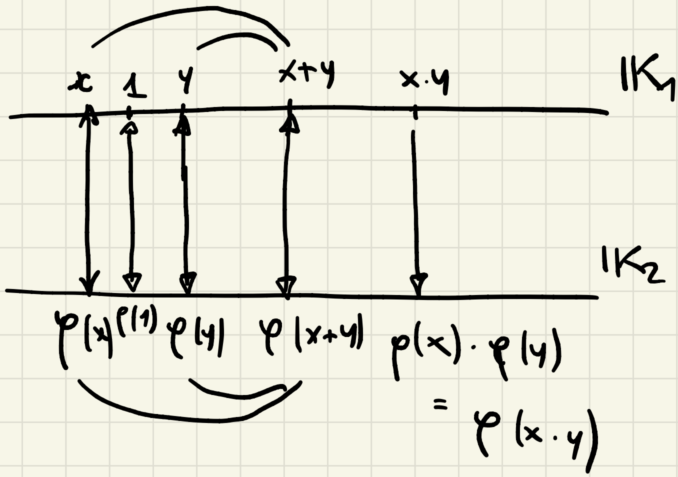
$(q-2)\cancel{(q+2)} < 0$

$\downarrow$ $q > 2$ $\qquad$ $\downarrow$ pos sempre

Nota dati due campi $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ TOT ordinati $(\leq_1, \leq_2)$

$\varphi : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ isomorfismo crescente di campi se sono verificati

1. φ è biettiva
2. $\varphi(x +_1 y) = \varphi(x) +_2 \varphi(y)$
3. $\varphi(x \cdot_1 y) = \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y)$
4. $\varphi(1_{\mathbb{K}_1}) = 1_{\mathbb{K}_2}$
5. $x \leq_1 y \Rightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y)$



Costruzione $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

↑

CAMPO FONDAMENTALE

(ISOMORFISMO)

CARDINALITÀ DI FREGHE 10/11

X insieme

$$\left(\text{se } X \text{ è finito} \underset{\text{def}}{\iff} \exists f : J_m = \{1 \dots m\} \to X \right) \Rightarrow |X| = \# \text{ elementi di } X$$

biettiva, per qualche $m \in \mathbb{N}$

nota: se $m = 0 \iff X = \emptyset \quad J_0 = \{\}$

Se X non è finito $\Rightarrow |X| = \{ Y : Y \sim X \}$

è la classe degli insiemi equipotenti ad X

Nota

$$Y \sim X \underset{\text{def}}{\iff} \exists f : Y \leftrightarrow X$$

corr. biunivoca

Nota se X è finito le due def. coincidono

Nota cardinalità di x se non è finito non è un insieme è una classe secondo goedel

Cardinalità di X è una classe propria nella teoria goedel bernays-von neumann

$$|X| = |Y| \iff X \sim Y$$

$|X|$ numero cardinale

X ed Y sono insiemi

$$|X| + |Y| := |X \sqcup Y|$$

$$|X| \cdot |Y| := |X \times Y|$$

$$|Y|^{|X|} := |Y^X|$$

$Y^X := \{ f : X \to Y : f \text{ sia una funzione} \}$

$$(|X| + |Y|) \cdot |Z| = |X||Z| + |Y||Z|$$

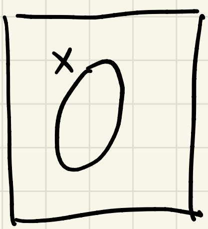
$$|X|^{|Y|+|Z|} = |X|^{|Y|} \cdot |X|^{|Z|}$$

$$(|X| + |Y|)^{|Z|} = |X|^{|Z|} \cdot |Y|^{|Z|}$$

$\mathcal{C}_{set}/\sim$ non è definita nella teoria del teorema gödel Bernays-von Neumann

E un insieme universo

E



E un insieme ; $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$

$$\mathcal{P}(E)/\sim \; := \{ |X| : X \in \mathcal{P}(E) \}$$

$$|X| := \{ Y \subseteq E : Y \sim X \}$$

Nell'insieme $\mathcal{P}(E)/\sim$

$$|X| = |Y| \iff X \sim Y$$

$$X, Y \in \mathcal{P}(E) \quad X \leq Y \overset{}{\underset{\text{def}}{\iff}} j : X \to Y$$

mono fine

$$\Updownarrow$$

$$|X| \leq |Y|$$

$$(\mathcal{P}(E), \preceq) \longrightarrow \mathcal{P}(E)/_\sim$$

$X \sim Z$
$Y \sim T$ in $\mathcal{P}(E)$
$X \preceq Y \Rightarrow Z \preceq T$

induce

$\mathcal{P}(E)/_\sim$

Il quoziente ha proprietà ereditate dall'insieme di potenza, ma in più

non tutte le proprietà

$|X| \leq |Y|$ in $\mathcal{P}(E)/_\sim \Leftrightarrow X \preceq Y$ in $\mathcal{P}(E)$

$X \precsim Y \quad \exists f: X \to Y$ iniettiva $\qquad X \subseteq Y,\ Y \subseteq X \Rightarrow Y = X$

$X \prec Y \quad \exists f: X \to Y$ iniettiva e $X \neq Y$

Teorema $(\mathcal{P}(E)/_\sim; \preceq)$ ordine totale:

1. $|X| \preceq |X|$
2. $\boxed{|X| \preceq |Y| \wedge |Y| \preceq |X| \Rightarrow |X| = |Y|}$ proprietà di tricotomia
3. $|X| \preceq |Y| \preceq |Z| \Rightarrow |X| \preceq |Z|$
4. X, Y sono insiemi:

$|X| \prec |Y|;\ |X| = |Y|;\ |X| \succ |Y|$ (tricotomia)

Teorema di Cantor Schröder - Bernstein

TEORIA (GÖDEL, BERNAYS, VON-NEUMANN) (TEORIA NON INGENUA DEGLI INSIEMI)

Permette di bypassare le contraddizioni della teoria degli insiemi di Cantor

$\mathcal{U}$ = CLASSE UNIVERSALE

ASSIOMI

① **ASSIOMA ESTENSIONALITÀ**

X e Y classi

$$X = Y \underset{def}{\Leftrightarrow} \forall_z \left(z \in X \Leftrightarrow z \in Y \right)$$

② **Schema di astrazione**

$\varphi(X, Y_1, \dots, Y_m)$ è una formula predicativa

$$Z := \{ x : \varphi(X, Y_1, \dots, Y_m) \}$$

$\boxed{\text{Fissata una proprietà questa vuol dire originare una classe}}$

③ **Assioma di comprensione**

Y è un insieme $\rightarrow (X \subseteq Y \rightarrow X$ è un insieme$)$

Sottoclassi di insieme è un insieme

④ **ASSIOMA DEL VUOTO**

$\exists \, \emptyset$ è un insieme

$\exists \emptyset$ è una classe
è un insieme

5. **ASSIOMA DI COPPIA**

$x, y \to \{ z : z = x \vee z = y \} = \{x, y\}$

è un insieme

6. **ASSIOMA DELL' UNIONE**

X insieme di insiemi, allora

$\bigcup X := \{ x : \exists y (y \in X \wedge x \in y) \}$

è un insieme

7. **ASSIOMA DEGLI OGGETTI** (ASSIOMA DEL URELEMENTI)

Ogni oggetto è un insieme

8. **ASSIOMA DELL' INFINITO**

$\exists X$ tale che
1. $\emptyset \in X$
2. $x \in X \to x \cup \{x\} \in X$

9. **ASSIOMA DELLA POTENZA**

Sia X un' insieme $\wp(X) := \{ Y : Y \subseteq X \}$ è un insieme

10. **ASSIOMA RIMPIAZZAMENTO**

$f : X \to Y$ → CLASSI

È UNA CLASSE È ANCHE

X è un $\Rightarrow f(X)$ è un insieme

(11) ASSIOMA DELLA SCELTA

Se $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ é una famiglia di insiemi disgiunti non vuoti

allora $\exists$ un insieme S tale che

$$S \cap X_\alpha \; \{x_\alpha\} \; \forall \alpha \in \mathcal{J}$$

(12) ASSIOMA DI FONDAZIONE

$$\forall X \neq \emptyset \; \exists \, a \in X :$$

$$X \cap a = \emptyset$$

$\Downarrow$ Fatti

- $\mathcal{U}$ contiene classi
- ogni classe contiene gatti

Osservo $\mathcal{Y} = \{ x : x \notin x \}$ é una classe propria detta classe di Russell

Dim:

$x \in y \iff x \notin x$ Assumiamo sia un insieme

$\downarrow$

y è anche un oggetto

$\downarrow$

y posso applicare appartenenza

$\downarrow$

$y \in y \iff y \notin y$

17/11

SPAZIO VETTORIALE SU UN CAMPO K $(K=\mathbb{R})$

$V \neq \emptyset$; $+$; $V \times V \to V$; $\cdot : K \times V \to V$

BINARIA INTERNA

BINARIA ESTERNA

SPAZ. VETT $(V, +, \cdot)$

SOMMA

① $x+y = y+x$, $\forall x, y \in V$

② $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x, y \in V$

③ $\exists! \, 0 \in V$, $x+0 = x$, $\forall x \in V$

④ $\forall x \in V \; \exists! (-x) \in V \cdot x+(-x) = 0$

$(V, +)$ Gruppo abbelliano commutativo

PRODOTTO

$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \qquad \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$

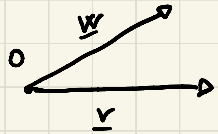
$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$

$1 \cdot x = x \qquad \forall x \in V$

$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \qquad \forall \alpha, \beta \in K, x \in V$

K = SCALARI
V = VETTORI

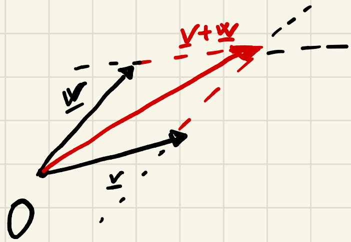
SPAZIO VETTORIALE DEI VETTORI GEOMETRICI DEL PIANO



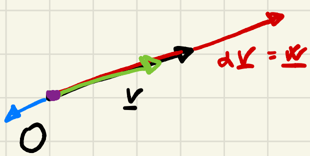
vettore geometrico di origine O

$S_0^{(2)}$ = insieme dei vettori geometrici del piano di origine O

SOMMA VETTORIALE



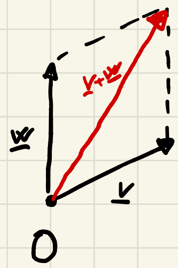
PRODOTTO VETTORIALE



$\alpha > 1$		$\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$1 > \alpha > 0$	compreso tra $\underline{v}$ e 0	
$\alpha < 0$	cambia verso	
$\alpha = 0$	vettore nullo	

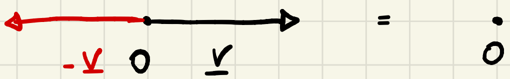
$(S_0^{(2)}, +, \cdot)$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

① PROP. DI SOMMA

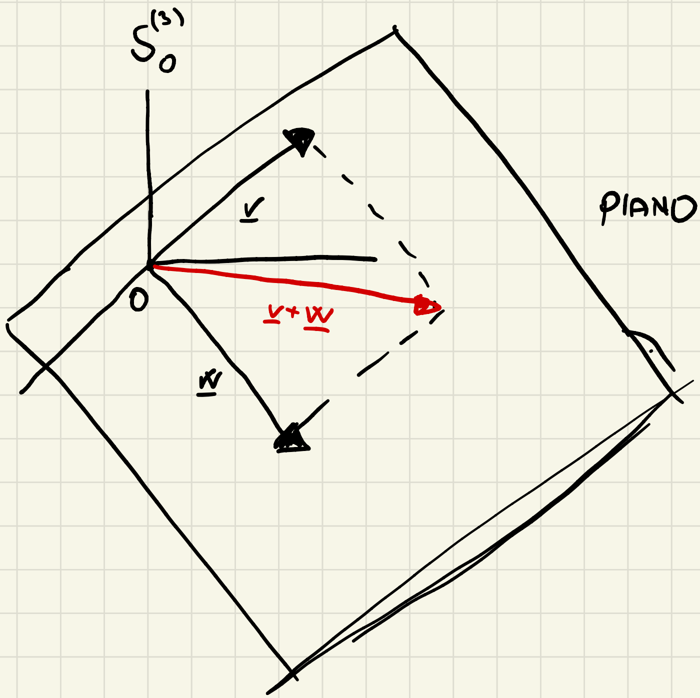


$\underline{v}+\underline{w} = \underline{w}+\underline{v}$ Geometricamente sono la stessa cosa

④



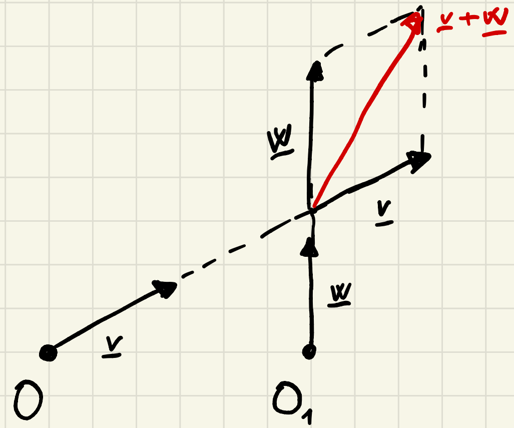
$-\underline{v}+\underline{v}=0$ Graficamente



PIANO S_0^2 Generato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$

LINEARMENTE INDIPENDENTI $\longrightarrow$ PIANO

LINEARMENTE DIPENDENTI $\longrightarrow$ FASCIO DI PIANI



si può fare con l'equipollenza aggiungendo una relazione di equivalenza

$\downarrow$

lavoriamo in uno spazio quoziente è uno spazio vettoriale

SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^n$

Spazio euclideo

$n = 1 = \mathbb{R}$ è uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

$n = 2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ è uno $\mathbb{R}$-SPAZIO vettoriale

$$(x,y) + (z,t) = (x+z, y+t)$$

$$(3,2) + (\sqrt{2}, -1) = (3+\sqrt{2}, 2+(-1))$$

SOMMA

$$\alpha \cdot (x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

$$3 \cdot (2, \sqrt{2}) = (6, 3\sqrt{2})$$

PRODOTTO

OSS

$$(x,y)+(z,t) = (z,t)+(x,y)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$(x+z, y+t) = (z+x, t+y)$$

$$\alpha((x,y)+(z,t)) = \alpha(x+z, y+t) = (\alpha(x+z), \alpha(y+t))$$

$$\alpha x+\alpha z, \alpha y+\alpha t$$

$$(\alpha(x,y)+\alpha(z,t))$$

SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^n$

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

$$\alpha(x_1,x_2,\dots,x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

OSS. se K é un campo K^n é uno spazio vettoriale

NOTA: ESISTONO SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE INFINITA

SPAZIO VETTORIALE MATRICI REALI

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{2} \\ 4 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & e^{-} & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

MATRICI $n-m$ (MATRICI A ENTRATE REALI)

$$C = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

VETTORI COLONNA $1-m$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{7} \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

VETTORE RIGA $n-1$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 & 307 \end{pmatrix}$$

$n \neq m$ MATRICI RETTANGOLARI

$n = m$ MATRICI QUADRATE

Indichiamo con $M_{n \times m}(\mathbb{R}) :=$ l'insieme delle matrici reali di m righe $\times$ n colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 7 & 13 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ SI PUÒ RENDERE UN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE

ad esempio

$M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

DEF SOMMA

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

ES

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 7\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = A$$

21/11

Si considerano le scritte formali del tipo $z = a + bi$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ e "i" è un simbolo tale che $i^2 = -1$

Introdurre in $\mathbb{C} := \{ z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$ due operazioni

tale che $\mathbb{C}$ sia un campo

$z, w \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad z = a + bi \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$w = c + di$

$i^2 = -1$

$$z + w = a + bi + c + di = (a+c) + (b+d)i \in \mathbb{C}$$

$$z \cdot w = (a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bci + \underbrace{bdi^2}_{-bd}$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{C}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo (DIMOSTRARLO)

$(\mathbb{C}, +)$ gruppo abelliano (1 PROP. COMM, 2 ASSOC, 3 $\exists! \, 0 \in \mathbb{C}$ neutro, 4 $\forall z \in \mathbb{C} \ \exists! -z \in \mathbb{C}$ $z + (-z) = 0$ OPPOSTO)

1

PROP. COMM $= z + w = w + z$

$$a + bi + c + di = c + di + a + bi$$

$$\underset{\in \mathbb{R}}{(a+c)} + \underset{\in \mathbb{R}}{(b+d)}i = \underset{\in \mathbb{R}}{(c+a)} + \underset{\in \mathbb{R}}{(d+b)}i$$

$\mathbb{R}$ COMMUTATIVO

2

$$z+(w+y)=(z+w)+y$$ DIM. ASS PER ESERC.

3 ELEM. NEUTR.

$$z=a+bi \Rightarrow 0=0+0i$$

$$z+0=(a+0)+(b+0)i$$

$$a \qquad b \quad i \qquad = a+bi$$

in $\mathbb{R}$

4 ELEMENTO OPP.

$$-z=(-a)+(-b)i$$

$$z+(-z) = a+bi+(-a)+(-b)i$$

$$(a-a)+(b-b)i$$

$$0 \qquad 0 \quad i = 0$$

in $\mathbb{R}$

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}-\{0\}$$

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grup. abeliano $\qquad (ac-bd)+(ad+bc)i \in \mathbb{C}$

1 $z\cdot w = w\cdot z$

2 $(z\cdot w)\cdot y = z\cdot(w\cdot y)$

3 $\exists\, 1 \in \mathbb{C} := z\cdot 1 = z$

$4\ \forall z \in \mathbb{Z}^* : \exists!\, z^{-1} : z \cdot z^{-1} = 1$

③ $z = a + bi$ $\exists\, 1 \in \mathbb{Z} := z \cdot 1 = z$

$1_z = 1 + 1i$

$z + 1_z = (a \cdot 1 - b \cdot 1) + (a \cdot 1 + b \cdot 1)i$ → sbagliato mo

$1_z = 1 + 0i$

$z + 1_z = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = a + bi$

④

$z = a + bi$ $\forall z \in \mathbb{Z}^* : \exists!\, z^{-1} : z \cdot z^{-1} = 1$

$(x + iy) = z^{-1}$

$(ac - bd) + (ad + bc)i$

$(a + bi)(x + iy) = 1 + 0i$

$$\underbrace{(ax - by)}_{1} + \underbrace{(ay + bx)}_{0}i = 1 + 0i$$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{by + 1}{a} = \frac{1 + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)b}{a} = \frac{\frac{a^2 \cancel{+b^2} \cancel{-b^2}}{a^2+b^2}}{a} = \boxed{\frac{a}{a^2+b^2} = x}$$

$$ay + b\left(\frac{by+1}{a}\right) = 0 \rightarrow a^2 y + b(by+1) = 0$$

$$\rightarrow a^2 y + b^2 y + b = 0$$

$$(a^2+b^2)y = -b$$

$$\boxed{y = \frac{-b}{a^2+b^2}}$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$$(ax - by) + (ay + bx)i = 1+0i$$

$$(a+bi)\cdot\left(\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i\right) = 1+0i$$

$$= \frac{a^2}{a^2+b^2} - \cancel{\frac{ab}{a^2+b^2}}\, i + \cancel{\frac{ab}{a^2+b^2}}\, i + \frac{b^2}{a^2+b^2} =$$

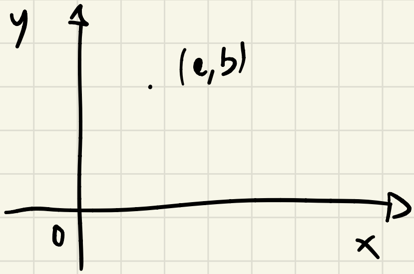
$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \left(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) i$$

$$= 1 + 0i$$

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ é un campo

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(a,b)+(c,d)$
$(a,b)(c,d)$

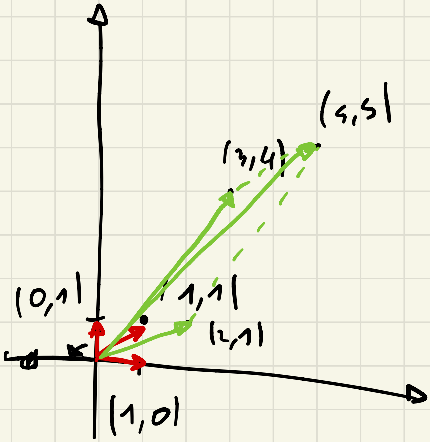


$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ risulta un campo

$$(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-db,\ ad+cb)$$

ES PROVARE CON $\mathbb{R}^2$ é un campo con i gruppi abbelliani di somma e prodotto

SOMMA SOMMA VETTORIALE



$(1,0) + (0,1) = (1,1)$

$(2,1) + (3,4) = (5,5)$

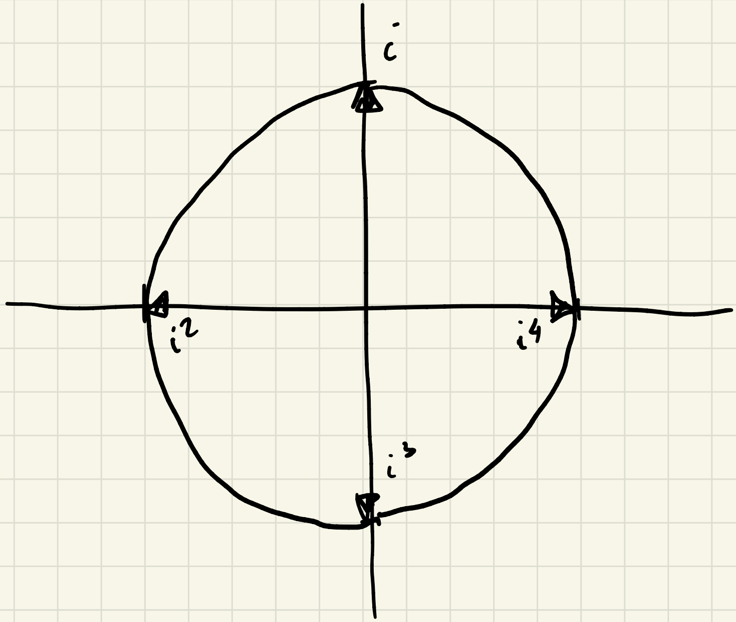
$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a\underbrace{(1,0)}_{1} + b\underbrace{(0,1)}_{i}$$

$$= a\,1 + b\,i$$

$$i = (0,1)$$

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$

i = rot 90°



numero complesso

coppia $\underline{\underline{(a,b)}}$

algebrica $\underline{\underline{a+bi}}$

vettoriale $\underline{z} = \nearrow$ vettore nel piano

ISOMORFISMO

$\mathbb{C}$ campo numeri complessi

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

↳ NORMA, MODULO

ESERCIZIO

① $\mathbb{C}$ é un $\mathbb{R}$- spazio vettoriale di dimensione 2 (già fatto)

② $\mathbb{C}$ é un $\mathbb{C}$- spazio vettoriale di dimensione 1

$$\dim \mathbb{C} = 1$$

① $(x, y) + (z, t) = (x+z, y+t)$

$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

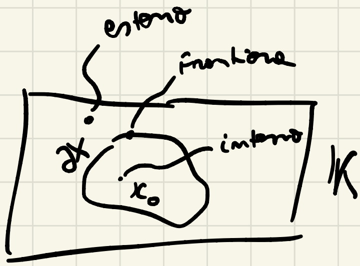
24/11

$X \subseteq \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ campo totalmente ordinato, $(\mathbb{K}, \leq)$

$x_0 \in \mathbb{K}$,

x_0, è interno a X
, esterno a X
, di frontiera per X

∂X l'insieme dei punti di frontiera per X



X = insieme dei punti interni a X

Un insieme A si dice aperto in $\mathbb{K}$ se $A = A$

Un insieme C si dice chiuso in $\mathbb{K}$ se $C = \mathbb{K} \setminus A$, dove A è un aperto in $\mathbb{K}$

oss: Le bocce aperte sono aperte
Le bocce chiuse sono chiuse

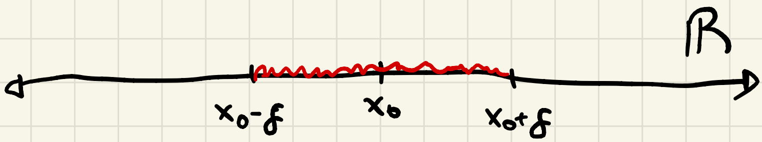
Valgono i seguenti fatti:

① $\emptyset$ e $\mathbb{K}$ sono aperti di $\mathbb{K}$

② Sia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una famiglia arbitraria di aperti in $\mathbb{K}$

allora $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ è un aperto in $\mathbb{K}$

③ Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono aperti in $\mathbb{K}$ allora $A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n$ è aperto in $\mathbb{K}$ (solo numero finiti)



Palla aperta (boccia)$^{\text{DEF}}$

Palla chiusa (boccia)$^{\text{DEF}}$

BOCCIA APERTA

$\delta > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : d(x_0, x) < \delta\}$

in $\mathbb{R}$ $|x_0, x|$

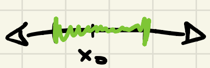
$$|x_0, x| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

$=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ APERTO

$B(x_0, \delta) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ CHIUSO

compresi gli estremi



Poiché valgono le prop 1, 2, 3 si dice che in $\mathbb{K}$ è assegnata una topologia di aperti

Per le formule di De-Morgan valgono i seguenti fatti:

① $\emptyset$ e $\mathbb{K}$ sono chiusi in $\mathbb{K}$

② Se $C_1, C_2, \dots, C_n$ sono chiusi in $\mathbb{K}$ $C_1 \cap C_2 \dots \cap C_n$ è un chiuso in $\mathbb{K}$

③ Se $\{C_\alpha\}_{\alpha \in J}$ è una famiglia arbitraria di chiusi in $\mathbb{K}$ allora $\bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha$ è un chiuso in $\mathbb{K}$ in questo caso si dice che è assegnata una topologia di chiusi in $\mathbb{K}$.

Nota: assegnare una top di chiusi o aperti è la stessa cosa
è equivalente

TOPOLOGIA

Richiamo formule di de-Morgan

Siano X e Y due insiemi sottoinsiemi di E: (DA CHIUSI A APERTI)
(DA APERTI A CHIUSI)

$$E \setminus (X \cup Y) = (E \setminus X) \cap (E \setminus Y), \quad E \setminus (X \cap Y) = (E \setminus X) \cup (E \setminus Y)$$

DEF GEN DI TOPOLOGIA:

Sia X un insieme e sia $P(X)$ l'insieme delle sue parti

Sia inoltre $\mathcal{T} \subseteq P(X)$

DICIAMO CHE $\mathcal{T}$ è una TOPOLOGIA DI APERTI SU X se valgono:

① $\emptyset$ e $X \in \mathcal{J}$

② Se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é una famiglia arbitraria di elementi di $\mathcal{J}$

$$(A_\alpha \in \mathcal{J}, \forall \alpha \in J) \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{J}$$

③ Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{J} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{J}$

Si dice spazio topologico un insieme X munito di una topologia

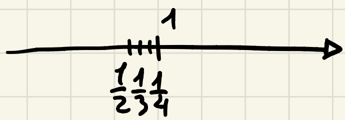
$$(X, \mathcal{J}) \longrightarrow \text{TOPOLOGIE}$$

tip. aperta, chiusa

DEF. DI SUCC. DI UN CAMPO $\mathbb{K}$ TOTALMENTE ORDINATO

Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ si dice successione l'immagine di n tramite f ossia $f(n)$ viene indicata con un abuso di linguaggio con x_n e la funzione f confuse confuse con le sue immagine. Ad esempio se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si parlerà di successione numerica reale il cui studio é rimandato ai corsi di analisi 1 per esempio

succ $x_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$



succ $x_n = (-1)^n$

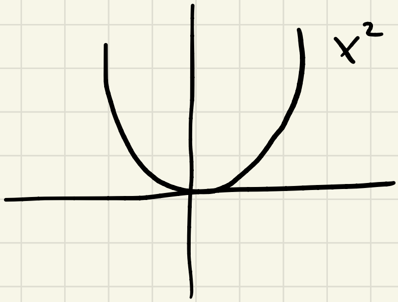
SUCC DI MATRICI

consideriamo lo spazio delle matrici $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

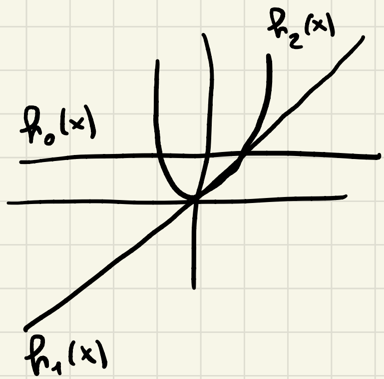
$$X_n = \begin{pmatrix} n^2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^2$$



$$h_m(x) = x^m \qquad m=0 \rightarrow x^0 = 1$$



25/11

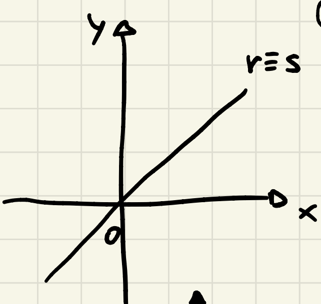
SISTEMI LINEARI

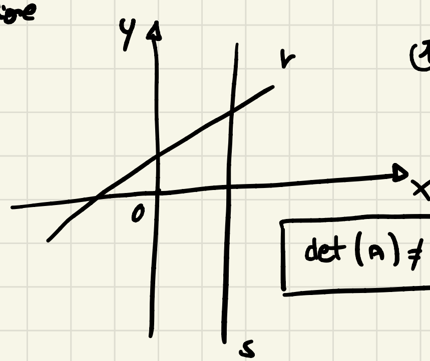
Caso di due equazioni e (due incognite)

$$S \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \qquad a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{R}$$

$$(a,b) \neq (0,0)$$
$$(a',b') \neq (0,0)$$

(3) ∞^1 soluzioni

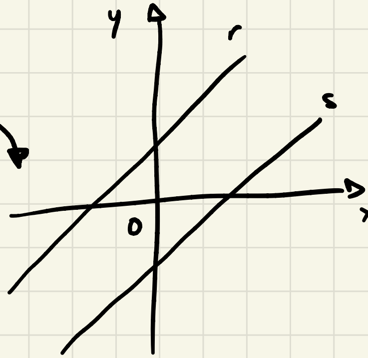




(1) una soluz sistema

$\boxed{\det(A) \neq 0}$

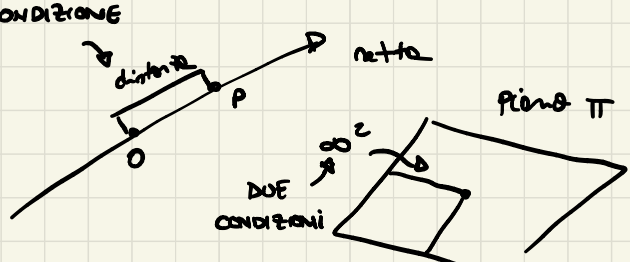
$\det(A) = 0$



(2) Nessuna soluzione

∞^1 infiniti punti basta conoscere la distanza P a O

UNA CONDIZIONE



GRADI DI LIBERTÀ DI UN PUNTO MATERIALE LIBERO, O VINCOLATO

$$S \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Al sistema associamo due matrici
- INCOMPLETA
- COMPLETA

MATRICE INCOMPLETA ASS. AD S

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

MATRICE COMPLETA ASS AD S

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Se $\det(A) \neq 0$ allora il sistema S ammette una unica soluzione (si tratta di un se e solo se)

Ad una generica matrice si associa un rango di una matrice

Sia A una matrice
Si indica con $\rho(A)$, il rango di A

$$A \rightsquigarrow \rho(A)$$

Se $\det(A)=0$ allora, $\rho(A) \neq 2$ allora:

Se $\rho(A) = \rho(B)$ allora il sistema ammette ∞^1 soluzioni
Se $\underbrace{\rho(A) = \rho(B)}_{1}$ allora il sistema non ammette soluzioni

TEOREMA ROUSCÉ - CAPELLI

Consideriamo il caso $\det(A) \neq 0$ (in questo caso avremo $\rho(A) = \rho(B)$)

In questo caso l'unica soluzione si determina tramite il metodo di cramer

$$x_0 = \frac{\det\begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix}}{\det(A)}$$ → PRIMA COLONNA TERMINI NOTI

$$y_0 = \frac{\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}}{\det(A)}$$ → SECONDA COLONNA TERMINI NOTI

ESEMPI

Consideriamo il sistema

$$S \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x - \sqrt{2}y = 1/2 \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (2)\cdot(-\sqrt{2}) - (-2)(3) = -2\sqrt{2} + 6 \neq 0$$ allora S HA UNA UNICA SOLUZIONE

CHE DETERMINIAMO CON IL METODO DI CRAMER

$$x_0 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}}{-2\sqrt{2}+6} = \frac{-\sqrt{2} - \frac{3}{2}}{-2\sqrt{2}+6}$$

$$y_0 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{-2\sqrt{2}+6} = \frac{3}{-2\sqrt{2}+6}$$

Prendiamo un sistema 3

$$S \begin{cases} 2x - 3y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 3y - z = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & +1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & +1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 2(1+3) + 3(-2-1) - 1(-6+1)$$

$$8 - 9 + 5 = 4 \neq 0 \rightarrow S \text{ HA UNA UNICA SOLUZIONE}$$

$$x_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\overbrace{1\,(1+3)}^{3} \; - \; \overbrace{+3\,(-1-0)}^{3} \; - \; \overbrace{-1\,(0+1)}^{1}}{4} =$$

$$y_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & +1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\overset{-2}{2\,(0-1)} \; \overset{+3}{-1\,(-2-1)} \; \overset{-2}{-1\,(2-0)}}{4}$$

$$z_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\text{CALCOLARE A CASA}}{4}$$

Si dice rango della matrice A il numero di righe non nulle di una matrice ridotta per righe ottenibile da A tramite trasformazioni elementari

Matrice Ridotta una matrice che gode della seguente proprietà per ogni riga non nulla esiste un elemento non nullo al di sotto del quale vi sono elementi tutti nulli

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Rango } 2$$

Metodo eliminazione di gauss, metodo dei pivot

28/11

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$\downarrow$$

$\rho(A)$ rango di A

Data una matrice A si dice rango di A il numero di righe non nulle, della matrice ridotta ottenuta da A tramite trasformazioni elementari (operazioni)

$A \rightsquigarrow A_{rid}$

trasformazioni elementari per righe

$\#$ righe non nulle e $A_{rid} = \rho(A) = \operatorname{rank}(A)$

Data una matrice A ridotta non nulla se per ogni riga non nulla di A esiste esiste un elemento non nullo al di sotto del quale ha elementi nulli

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \text{rank}(A) = 2$$

Algoritmo di eliminazione di gauss

↓

DA A e A_{RID}

Metodo di eliminazione di Gauss da $A \to A_{RID}$

Indichiamo con R_i la riga iesima della matrice A

Una trasformazione elementare é un operazione tra le righe di A del tipo $R_i \to R_i + K R_J \lor R_i \leftrightarrow R_J$ dove $K \in \mathbb{R}$

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} -4 & -3 & -8 \\ 3 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$2 \to 2 - 2(3)$

$1 \to 1 - 2(2)$

$4 \to 4 - 2(6)$

$$\Big\downarrow \begin{matrix} R_2 \to R_3 \\ R_3 \to R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -8 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

METODO ELIMINAZIONE DI GAUSS TRAMITE ESEMPIO : (METODO PIVOT O PERNI)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + k R_2 \quad -\frac{3}{2}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 0 & -9 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$6 \to 6 + k\,4 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$k = -\frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{4}\,2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 0 & -9 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - h R_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -9 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -9 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + t R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + k R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$k = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + y R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$y = -2$$

TEOREMA DI ROUCHÉ -CAPELLI

Dato un sistema algebrico $AX = B$ esso ammette soluzione se e soltanto se $\rho(A) = \rho(A|B)$, in particolare detto r $\rho(A) = \rho(AB)$ si hanno ∞^{n-r} soluzioni essendo n il numero di incognite del sistema algebrico, considerato.

ESEMPIO :

Rouché - capelli di dimensione 3

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$AX = B$$

MATRICE INCOMPLETA

$$\begin{array}{c} A \\ A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} X \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} B \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

MATRICE COMPLETA

$$A|B = \left(\begin{array}{cc} A & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \end{array} \right)$$

$n = 3$ INCOGNITE

$$\rho(A) = \rho(A|B) = r = \infty^{3-r} \text{ SOLUZ.}$$

$= 3 = \infty^0$ SOL UN PUNTO

$= 2 = \infty^1$ SOL UNA RETTA

$= 1 = \infty^2$ SOL PIANI COINCID.

$$\rho(A) \neq \rho(A|B)$$ PIANI PARALLELI
NON C'È SOLUZIONE

$$S \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

→ NON PUÒ AVERE UNA SOLUZIONE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

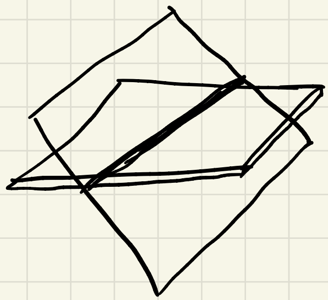
$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTA PER DETERMINARE IL RANGO DELLA MATRICE SI PUÒ UTILIZZARE IL COSIDETTO METODO DI KRONEKER

IL RANGO DI UNA MATRICE A é l'ordine massimo dei minori non nulli estraibili da A

NOTA: TUTTE LE SOTTOMATRICI DI ORDINE 3 sono con $\det = 0$

$$\rho(A) = \rho(A|B) = \infty^1 \text{ SOL}$$ HANNO UNA RETTA



LOGICA

Definizione di logica → TEORIA FORMALE

Assegno $L := (\Lambda_L, \Sigma_L, \Upsilon_L, \Pi_L)$ 4 insiemi

$\mathcal{L}$ LINGUAGGIO — Λ_L = ALFABETO DELLA LOGICA; Σ_L = INSIEME FORMULE BEN FORMATE

$\mathcal{L}$ SISTEMA DEDUTTIVO — Υ_L = INSIEME ASSIOMI PROPRI; Π_L = INSIEME REGOLE DI INFERENZA

LOGICA PROPOSIZIONALE → RAGIONAMENTO (MATEMATIZZARE)
LOGICA PREDICATIVA →

TEORIA FORMALE LOGICA PROPOSIZIONALE → MATEMATIZZARE I METALINGUAGG

NON SI PUÒ DEFINIRE LA VERITÀ → TEOREMA DI TARSKI

LOGICA PROPOSIZIONALE

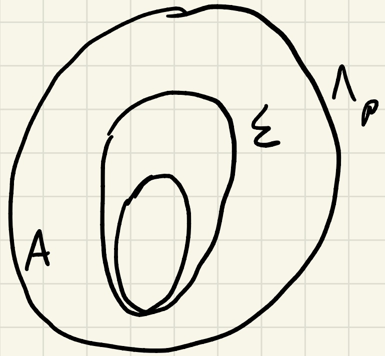
$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ → FINITO, O NUMERABILI → VARIABILI ATOMICHE O PROPOSIZIONE

(,) parentesi simboli di parentesi $\Lambda_p \supset \Sigma_p$ grammatica

simboli di connettivo $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$
et, vel, freccia, doppia frecciette, non

$\vee \neg p_1)) \rightarrow p_2 \rightarrow p_3$

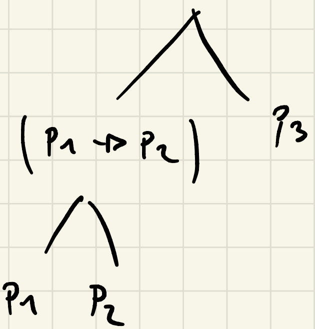
Formule ben formate



$((p_1 \land p_2) \land p_3)$

ALGORITMO DEGLI ALBERI ANCESTRALE $\rightarrow$ algoritmo di parsing

$((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3)$



p_1, p_2, p_3

FORMULA BEN FORMATA

$$(((\neg p_1) \to p_2) \leftrightarrow p_3)$$

$((\neg p_1) \to p_2)$ $\quad$ p_3

$(\neg p_1)$ $\quad$ p_2

p_1

QUANDO SI ASSEGNA UNA LOGICA SI ASSEGNA UNA SINTASSI E UNA SEMANTICA

SINTASSI → CORRETTEZZA FORMALE DELLE FORMULE

SEMANTICA → INTERPRETAZIONI E AI SIGNIFICATI DI UNA FORMULA BEN FORMATA

LE FORMULE BEN FORMATE SI INDICANO CON LE LETTERE GRECHE MIN. DELL ALFABETO α, β, γ ecc.

LOGICA

CONCETTI CHE SI INTRODUCONO IN UNA LOGICA

SODDISFACIBILITÀ $\downarrow$ NELL' AMBITO DELLA SEMANTICA

DIMOSTRABILITÀ $\downarrow$ NELL' AMBITO DELLA SINTASSI

TEOREMA DI GEUDEL TEOREMA DI COMPLETEZZA

SINTATT. CORR
SE E SOLO SE
È SEMANTICAMENTE
VALIDA

φ $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ TAVOLA DI VERITÀ

SEMANTICA LOGICA PROPOSIZIONALE

ASSEGNARE A UNA F.B.F $\Longleftrightarrow$ φ che vale 1 o 0

1 $\rightarrow$ VERA

0 $\rightarrow$ FALSO

1 ASSEGNO UN SIGNIFICATO AI CONNETTIVI LOGICI
2 SI ATTRIBUISCE UN VALORE DI VERITÀ AGLI ATOMI
3 SI ESTENDE QUESTO VALORE DI VERITÀ A φ IN MANIERA UNICA

$\rightarrow$ PRINCIPIO DI RICORSIONE

$$\varphi = ((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3)$$

$v(\varphi) = 1$

ESERCIZIO

Principio di induzione generalizzato

$X \neq \emptyset \ , k \in \mathbb{N}^* \quad \forall i = 1, \dots, k$

$f_i : \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{r_i} \to X \qquad \forall i = 1, \dots, k$

(k - funzioni o operazioni
r_i operazioni su X)

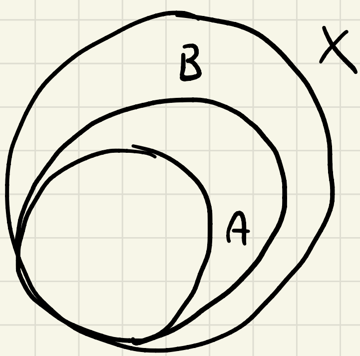
$\mathcal{F} = \{ f_i \} \to$ insieme operazioni in X

$A \subseteq X \ , A \neq \emptyset$

$B \subseteq X$ e $(A, \mathcal{F})$ induttivo

(i) $A \subseteq B$

(ii) B deve essere chiuso per ogni $f_i \in \mathcal{F}$



PRINCIPIO DI INDUZIONE GENERALIZZATO

$X, A, \mathcal{F}$ come prima $\quad T \subseteq X$ tale che

① $A \subseteq T$

② $\forall i = 1, \dots, k \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_{r_i} \in T \Rightarrow f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{r_i}) \in T$

(T è chiuso rispetto ad ogni f_i in $\mathcal{F}$

(T è F induttivo)

$I(A, \mathcal{F}) \subseteq T$

Consideriamo $\mathcal{J}$ la famiglia $(A, \mathcal{F})$ induttivi su X

OSS $X \in \mathcal{J} \Rightarrow \mathcal{J} \neq \emptyset$

$I(A, \mathcal{F}) = \bigcap_{B \mathcal{J}} B$

$I(A, \mathcal{F})$ é $(A, \mathcal{F})$ induttivo

(i) $A \subseteq I(A, \mathcal{F}) = \bigcap_{B \in \mathcal{J}} B$

$A \subseteq B \ \forall B \in \mathcal{J}$

$A \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{J}} B$

(ii) $I(A,\mathcal{F})$ é chiuso rispetto ad f_i, $\forall i = 1, \dots, k$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r_i} \in I(A,\mathcal{F}) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_{r_i} \in B \quad \forall B \in \mathcal{F}$$

$$f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{r_i}) \in B \ \forall B \in \mathcal{F} \Rightarrow f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{r_i}) \in I(A,\mathcal{F})$$

ESEMPIO

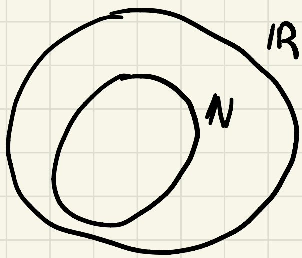
$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x+1$$

$X = \mathbb{R}$; $A = \{0\}$; $\mathcal{F} = \{x+1\}$

chi é $I(A,\mathcal{F})$?

$\Downarrow$

$\mathbb{N}$



$I(A,\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{N}$

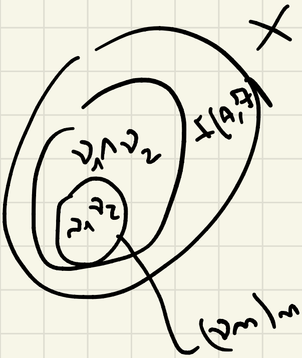
Def

Diremo $I(A,\mathcal{F}) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B$ é liberamente generato da A tramite $\mathcal{F}$ se e soltanto se:

① f_i $\underbrace{X \times X \times \dots \times X \times X}_{r_i} \to X$ ristretta $\underbrace{I(A,\mathcal{F}) \times \dots \times I(A,\mathcal{F})}_{r_i \text{ volte}}$ é iniettiva, $\forall i = 1, \dots, k$

② $\forall i \neq j \in \{i, \dots, k\}$ $f_i \Big|_{I(A,\mathcal{F})} (I(A,\mathcal{F})) \cap f_j \Big|_{I(A,\mathcal{F})} (I(A,\mathcal{F})) \neq \emptyset$

ed inoltre $f_i \Big|_{I(A,\mathcal{F})} (I(A,\mathcal{F})) \cap A = \emptyset$



TEOREMA LETTURA UNICA LOGICA PROPOSIZIONALE

φ é ben formata

① φ é atomica

② $\exists!$ φ_1 e φ_2 formule ben formate $\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

③ $\exists!$ φ_1 e φ_2

$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$

$\varphi = (\neg \varphi_1)$ essendo φ_1 ben formata

↳ TEOREMA RICORSIONE GENERALIZZATO

5/12

LOGICHE $\to$ TEORIA FORMALE $\to$ LINGUAGGIO + SIST. DEDUTTIVO

- $\to$ LOGICA PROPOSIZIONALE (FORMALIZZARE I METALINGUAGGI NATURALI)
- $\to$ LOGICA PREDICATIVA (ESTENSIONE LOGICA PROPOSIZIONALE) (FORMALIZZARE TUTTA LA MATEMATICA)

SEMANTICA DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

LOGICA BOOLEANA $\begin{cases} 0 & \text{FALSA} \\ 1 & \text{VERA} \end{cases}$ $v(\varphi = (\ldots\ldots)) \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$

FUNZIONE DI INTERPRETAZIONE

$v : FBF \to \{0,1\}$

TEOREMA RICORSIONE: UNA VOLTA CHE CONOSCI I VALORI DI VERITÀ NEGLI ATOMI SI POSSONO ESTENDERE A TUTTE LE FORMULE BEN FORMATE

DEF. 1.9

$\boxed{v \models \varphi} \underset{def}{\iff} v(\varphi) = 1$

$v \models \varphi$ é un modello di φ

$\models \sigma$ é una tautologia

$\Gamma := \{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi \}$ $\Gamma \subseteq FBF$

$|A|$ é numerabile onde FBF sarà numerabile

$v \models \Gamma$ é un modello

DEF 1.18

TEOREMA DEDUZIONE SEMANTICA

$$\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \models \varphi$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi_2, \dots, \varphi_m\} \models \varphi_1 \to \varphi$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi_3, \dots, \varphi_m\} \models (\varphi_2 \to (\varphi_1 \to \varphi))$$
$$\Updownarrow$$
$$\models (\varphi_n \to (\dots \to \varphi)$$

1.22

$\Gamma \subseteq FBF$

$\exists\, v(\alpha) = 1, \ \forall \alpha \in \Gamma$

Γ é finitamente soddisfacibile

$\forall\, \Gamma^* \subseteq \Gamma$ finito Γ^* é soddisfacibile

OSS Γ finito ; (Γ finit sodd $\Leftrightarrow$ Γ sodd)

EQUIVALENZA SEMANTICA

LOGICA DEI PREDICATI

$\to (\varphi)$

ASSIOMI $\to$ SISTEMA HILBERT-HANDERSON

SOTT DI ASS FBF

① $(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \quad \forall\, \varphi, \psi$

Dimostrabilità formale $\varphi \in FBF$

φ é dimostrabile $\vdash \varphi \quad \Gamma \subseteq FBF$

che esiste, una successione finita di FBF

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in FBF$

$\varphi_i = \begin{cases} \circ \text{ é un assioma} \\ \circ \in \Gamma \end{cases}$

oppure si ottiene tramite MP da due formule precedenti

$\varphi_n = \varphi$

$\Gamma \vdash \varphi$

TEOREMA DI COMPLETEZZA $\to$ GOEDEL

VOCABOLARIO LOGICA PREDICATIVA