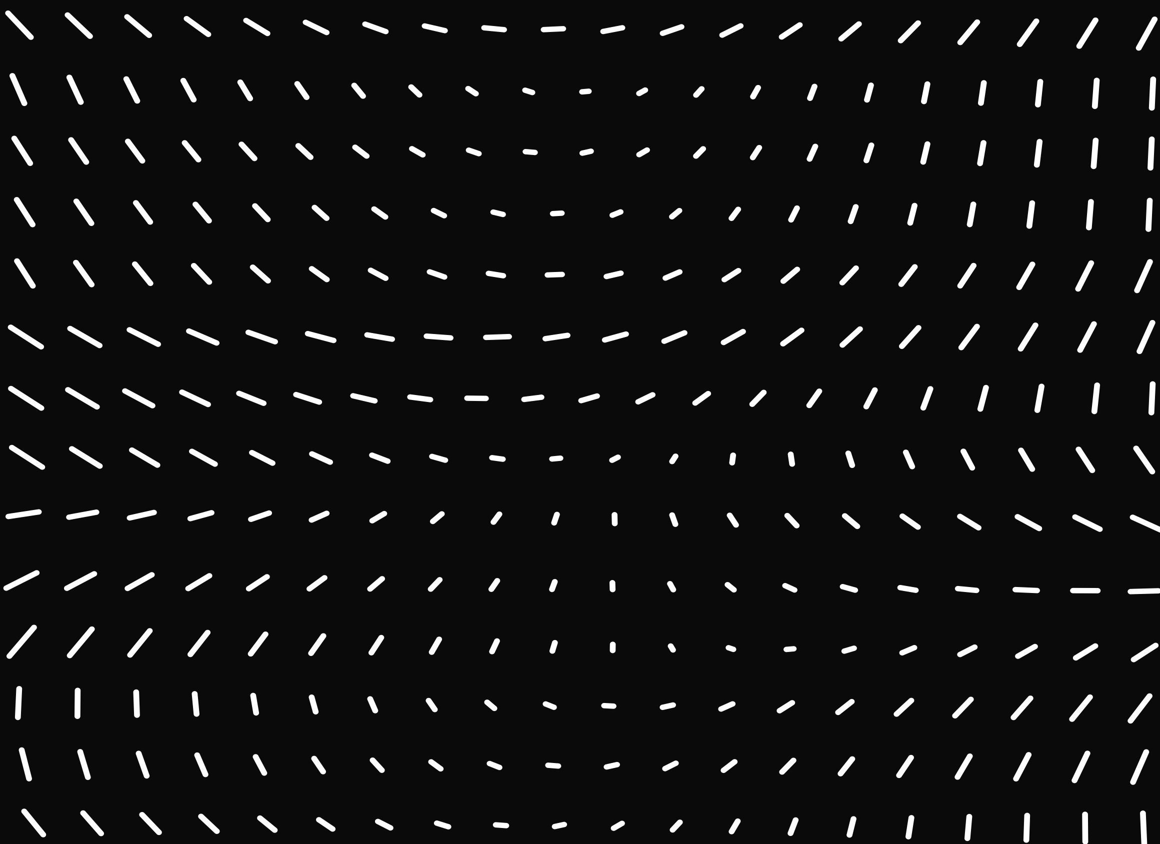
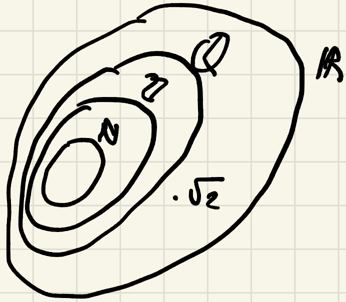
raffaella.servadei@uniurb.it



INSIEMI 20/02/2023 (AUDIO 1,2)



$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ numeri NATURALI

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n\}$ numeri INTERI

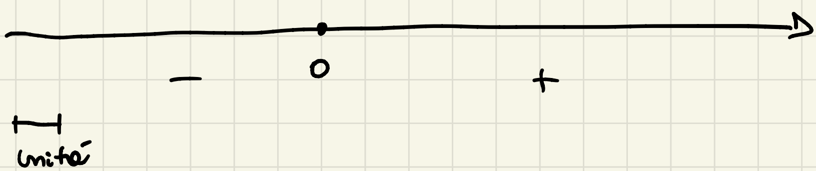
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ numeri RAZIONALI

$\leq$ é compatibile con la struttura algebrica in $\mathbb{Q}$

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad c > 0 \quad a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

i numeri si rappresentano su una retta



$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Dim: Supponiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

allora

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$

$2 = \frac{m^2}{n^2}$

$n^2 = 2m^2 \Rightarrow n^2 =$ PARI

n è PARI

$\cancel{2}k^2 = \cancel{2}m^2 \Leftarrow n = 2k$

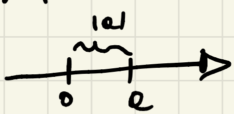
$a \in \mathbb{R}$

Si definisce modulo o valore assoluto di a, e si indica con $|a|$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

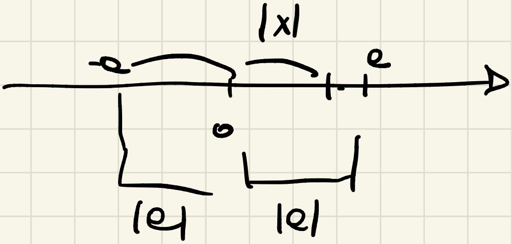
Proprietà

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad |a| \geq 0$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$



3) $\forall a > 0$

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$$

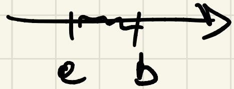


4) $|x+y| \leq |x| + |y|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

5) $\big||x|-|y|\big| \le |x-y|$

INTERVALLO in $\mathbb{R}$

SEGMENTI $\to$



Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$E \subseteq \mathbb{R}$

21/02/2023 (AUDIO 3)

NUMERI ILLIMITATI PERIODICI SEMPLICI E MISTI

$\downarrow$ $2,\overline{3}$ $\quad$ $\downarrow$ $2,17\overline{8}$ (RAZIONALI)

5,7832... (IRRAZIONALI)

a) $1+2+3+4+5 \to \sum_{n=1}^{5} n$

$7+ \dots + 1000 \to \sum_{n=1}^{1000} n \to \sum_{n=7}^{1000} n$

b) $1+4+9+16+ \dots + 144 \to \sum_{n=1}^{12} n^2$

$\sum_{n=1}^{\bar{n}} a_n$ $\to$ Termine generale della sommatoria

$\to$ indice della sommatoria

$n \in \mathbb{N}$, $1 \le n \le \bar{n}$

$$\sum_{n=1}^{\bar{n}} e_n = \sum_{k=1}^{\bar{n}} e_k$$

$$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$$

$$e_1 + \dots + e_{\bar{n}} \qquad e_1 + \dots + e_{\bar{n}}$$

PROPRIETÀ SOMMATORIE

① $\sum_{n=1}^{\bar{n}} (c \cdot e_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\bar{n}} e_n \quad \forall c \in \mathbb{R}$

② $\sum_{n=1}^{\bar{n}} c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{\bar{n}} = \bar{n} \cdot c$

$\downarrow$

$e_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

③ $\sum_{n=1}^{\bar{n}} e_n + \sum_{n=1}^{\bar{n}} b_n = \sum_{n=1}^{\bar{n}} (e_n + b_n)$ PER PROP. ASSOCIATIVA COMMUTATIVA

④ $\sum_{k=1}^{\bar{n}} e_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} e_{k-m}$ TRASLAZIONE

⑤ $\sum_{k=1}^{n} e_k = \sum_{k=1}^{n} e_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} e_{n-k}$

PROGRESSIONE GEOMETRICA

Si dice che

$e_1, e_2, \dots, e_n$ sono in progressione geometrica se:

$$\frac{e_k}{e_{k-1}} = q \in \mathbb{R} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Si ha che

$$a_k = q\, a_{k-1} \quad \forall\, k = 1, \dots, n$$

Quindi

$$a_1 = q\, a_0$$

$$a_2 = q\, a_1 = q \cdot (q \cdot a_0) = q^2 a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n = q\, a_{n-1} = q^n a_0$$

Quindi una progressione geometrica è una progressione del tipo

$$a_0,\ q a_0,\ \dots,\ q^n a_0 \qquad a_0 \neq 0$$

$q \to$ RAGIONE DELLA PROGRESSIONE

ES

$1+2+4+8+16$

PROPOSIZIONE

$$\sum_{n=0}^{\bar{n}} a_0 q^n \overset{*}{=} a_0 \, \frac{1-q^{\bar{n}+1}}{1-q}$$

Dim : Si ha

$$a_0 \sum_{n=0}^{\bar{n}} q^n \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\bar{n}} a_0 q^n$$

Per provare che $*$

$$\sum_{n=0}^{\bar{n}} q^n = \frac{1-q^{\bar{n}+1}}{1-q}$$

Consideriamo

$$(1-q)\sum_{n=0}^{\bar m} q^n = \sum_{n=0}^{\bar m}(1-q)\,q^n = \sum_{n=0}^{\bar m}\left(q^n - q^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\bar m} q^n - \sum_{n=0}^{\bar m} q^{\overset{t}{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\bar m} q^n - \sum_{t=1}^{\bar m+1} q^t = \underline{\sum_{n=0}^{\bar m} q^n} - \underline{\sum_{n=1}^{\bar m+1} q^n} = q^0 + \sum_{n=1}^{\bar m} q^n - \left(\sum_{n=1}^{\bar m} q^n + q^{\bar m+1}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \cancel{\sum_{n=1}^{\bar m} q^n} - \cancel{\sum_{n=1}^{\bar m} q^n} - q^{m+1}$$

$$1 - q^{m+1}$$

FATTORIALE E COEFFICIENTE BINOMIALE $\mathbb{N}$ (AUDIO 4)

$$n! = 1 \cdots (n-1)\cdot n$$

$$0! = 1$$

proprietà: $(n+1)! = (n+1)\,n!$

$$n, k \in \mathbb{N} \qquad k \le n$$

Si definisce coefficiente binomiale e si indica con il simbolo $\binom{n}{k}$ (si legge "n su k") il numero

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Esercizio 1

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Dim: Si ha

$$\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n)!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{(n)!}{(k)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)!} + \frac{n!}{k\,(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{(n-k+1)} + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\;\frac{\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1}{k\,(n-k+1)}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(k-1)!\,(n-k)!\,k\,(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

$\forall$ $n \geq \bar{n}$ vale la proprietà $P(n)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Per dimostrare l'affermazione (A) per induzione dobbiamo procedere per passi

PASSO 1 (BASE INDUTTIVA)

Vale $P(\bar{n})$

PASSO 2 (IPOTESI INDUTTIVA)

$P(n)$ vale $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vale

Formula binomio di newton : $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad *$$

Dim : (per induzione)

PASSO 1 $\quad n = 0$

$$1 = (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{1} \binom{0}{0} a^0 \cdot b^0 = 1$$

Supponiamo che $(*)$ vale

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Consideriamo

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) \Rightarrow (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{k} b^{m+1-k}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{m+1} \binom{m}{t-1} a^{t} b^{m+1-t} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{k} b^{m+1-k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} a^{k} b^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k-1} a^{k} b^{m+1-k}$$

$$\Rightarrow \sum_{\underline{k=1}}^{m} \binom{m}{k-1} a^{k} b^{m+1-k} + \binom{m}{m} a^{m+1} + \binom{m}{0} b^{m+1} + \sum_{\underline{k=1}}^{m} \binom{m}{k} a^{k} b^{m+1-k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \Big[\underbrace{\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}}_{\binom{m+1}{k}} \Big] a^{k} b^{m+1-k} + a^{m+1} + b^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{k} b^{m+1-k}$$

22/02/2023 (AUDIO 5)

$\boxed{\forall\ m \geq \bar{m} \text{ vale la proprietà } P(m) \quad m \in \mathbb{N}}$

Dim: per induzione

BASE INDUTTIVA (1)

Vale $P(\bar{m})$

IPOTESI INDUTTIVA ②

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

ES. PROVARE CHE

$2^n \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad P(n) = 2^n \geq 2n$

Per induzione

①

BASE $n = 1$ $\qquad 2 \geq 2$ OK!

②

IPOTESI INDUTTIVA: Supponiamo che $2^n \geq 2n$

$2^{n+1} \geq 2(n+1)$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{da ①}}{\geq} 2n \cdot 2 = 4n$$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = 2^n + 2^n$

$\geq 2n + 2^n$ → studiamo su un singolo membro

$\geq 2n + 2$ $\qquad$ poiché $2^n \geq 2 \quad \forall n$

$= 2(n+1)$

Es 2

Provare che il prodotto di due naturali consecutivi è pari

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists h \in \mathbb{N} \quad n(n+1) = 2h$

① base induttiva $1 \cdot 2 = 2$ ok $(n=1)$

②
ipotesi induttiva

Sia $m \in \mathbb{N} \mid \exists h \in \mathbb{N} \mid m(m+1) = 2h$

Dobbiamo provare che per $(m+1)(m+2)$ è pari

Si ha

per l'ipotesi induttiva
l'importante è ritornare alla $P(m)$

$$(m+1)(m+2) = \underline{(m+1) \cdot m} + (m+1) \cdot 2$$

$$= 2h + 2(m+1)$$

$$= 2(h+m+1) = 2k \quad , k \in K$$

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$$ FORMULA DI GAUSS

FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

$D \subseteq \mathbb{R}$

Si definisce FUNZIONE REALE di una variabile REALE

si indica con

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

$x \in D \subseteq \mathbb{R}$
↓
Variabile indipendente

una relazione che ha D ed $\mathbb{R}$ di che:

$\forall x \in D \mid \exists! \, y \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$ → variabile dipendente

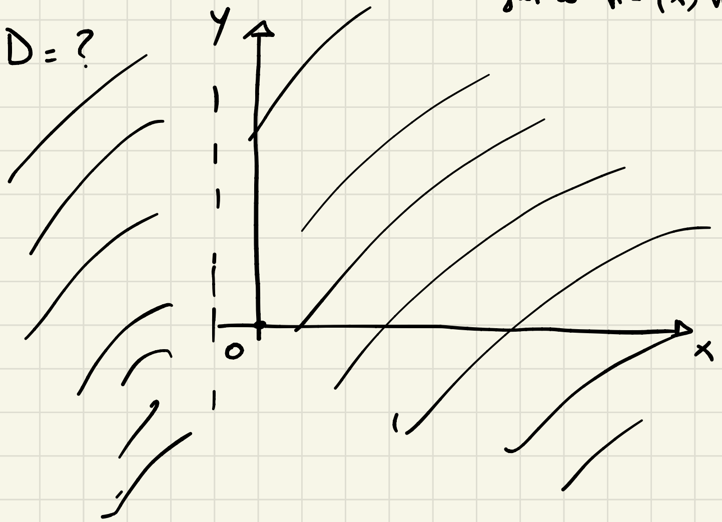
↓
dominio di f

$$f(D) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \text{ con } f(x) = y \} = \{ f(x) \mid x \in D \}$$

Grafico $f = (x, f(x) \mid x \in D)$

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$$

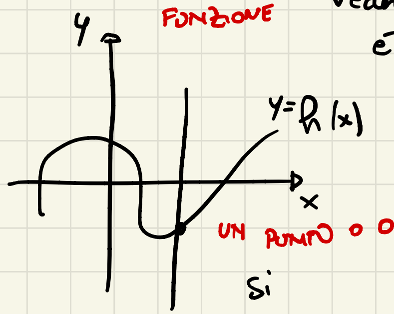
$D = ?$

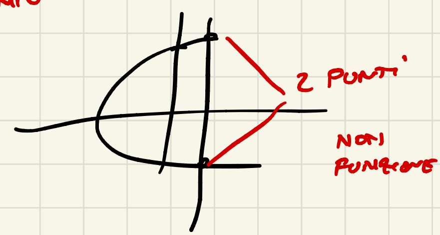


$x+1 \neq 0$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Vedere se un grafico è una funzione





(AUDIO 6)

es:

$$f : \underset{\subseteq \mathbb{R}}{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$(x-1)(x+1) \geq 0$$

$\rightarrow$ STUDIO DEL SEGNO

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

	-1		1	
$-$		$-$		$+$
$-$		$+$		$+$
$+$		$-$		$+$

$$x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 1$$

$$D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

es:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \qquad D = \mathbb{R}$$

27/02/2023 (AUDIO 7)

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

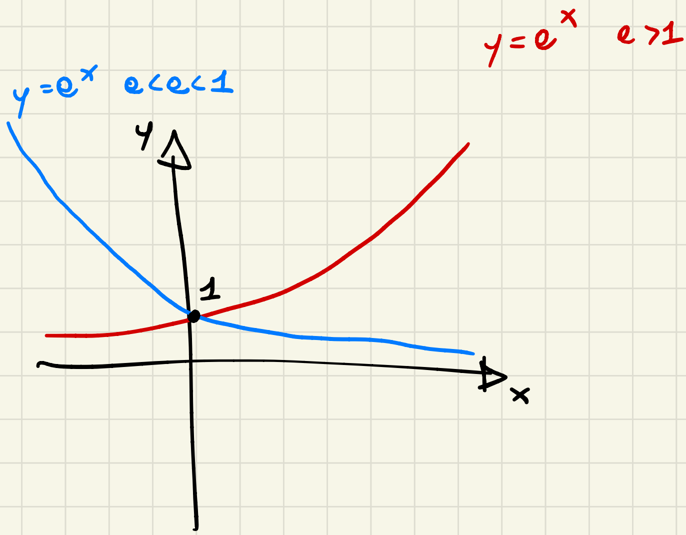
$$x \longmapsto y = f(x)$$

Esempio

FUNZIONE ESPONENZIALE

$$f(x) = e^{2x+3} \qquad e > 0, \; a \neq 1$$

$$D = \mathbb{R}$$



ESERCIZIO

$$f(x) = 2^{\frac{x^2+3}{x}}$$

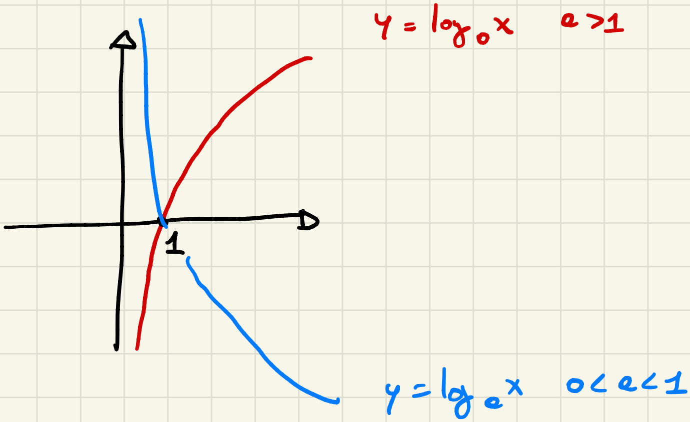
$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

③ $f(x) = \log(x-1)$

$y = \log x \qquad a>0,\ a\neq 1$

$D = \mathbb{R}^+$

$x-1>0 \Rightarrow x>1$



4) $y = \sin x$ $\qquad\qquad$ $y = \cos x$

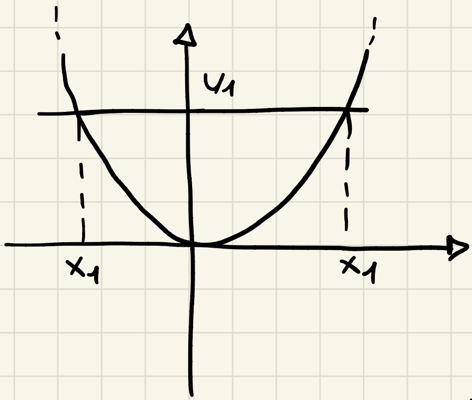
$y : D \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$

Si dice che f è INIETTIVA se $\forall x_1, x_2 \in D$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

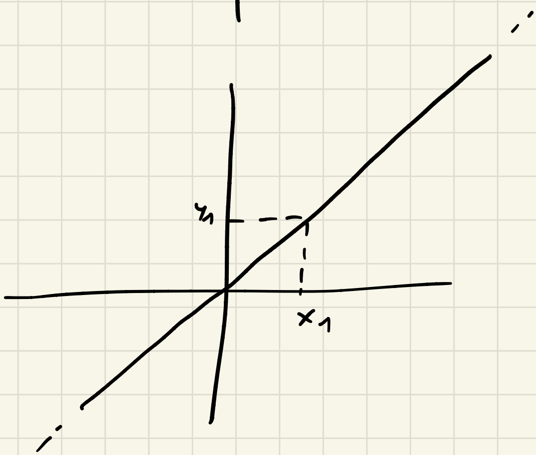
ESEMPIO

$f(x) = x^2$



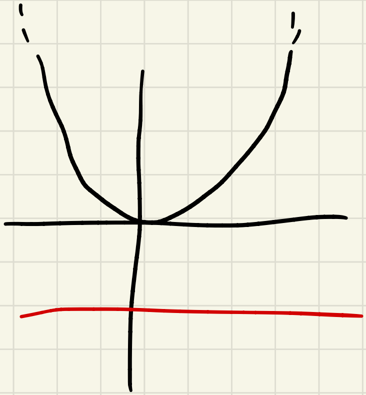
$\Rightarrow$ y_1 ho non ha due immagini distinti

$f(x) = x$



y_1 iniettiva

Si dice che f é suriettiva se $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in D\ f(x)=y$



$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)=x^2$$

IL GRAFICO NON VIENE INTERSECATO SU $\mathbb{R}$

DIVENTA SURIETTIVA SE RESTRINGIAMO IL CAMPO es $\mathbb{R}_0^+$ $[0,+\infty)$

Si dice che f é BIUNIVOCA se f é iniettiva e suriettiva

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists! x \in D \mid f(x)=y$$

Si dice che f é PARI se $f(x) = f(-x)\ \forall x \in D$

DISPARI se $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in D$

$D \subseteq \mathbb{R}$ simmetrico $(\forall x \in D$
$-x \in D)$

Esempio:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

$f(x)$ é pari

$$f(x) = (-x)^2$$
$$\parallel$$
$$f(x) = (x)^2$$

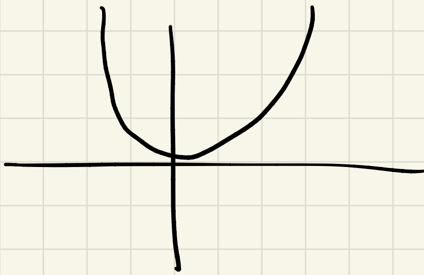


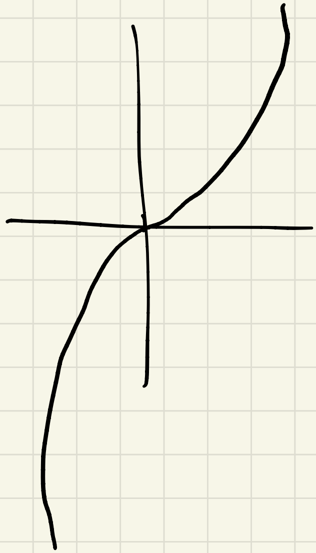
Grafico simmetrico rispetto all'asse y

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

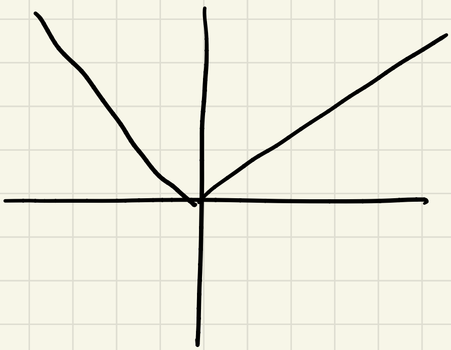
f DISPARI



3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = |x|$ Pari perché $|x| = |-x|$

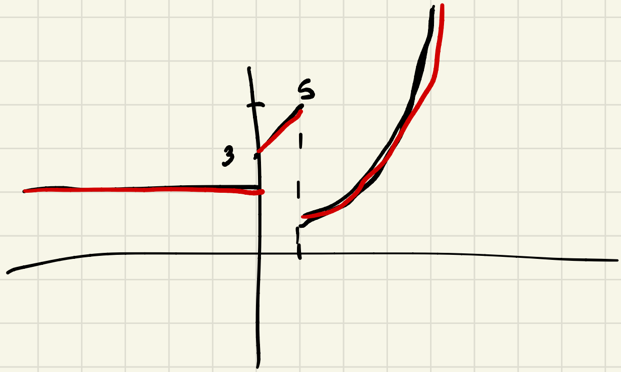
$y = |x|$



FUNZIONE DEFINITA A TRATTI

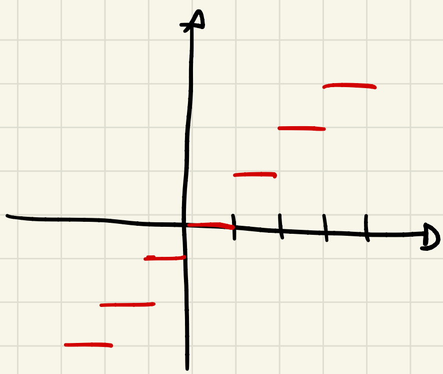
4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ 2x+3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$



3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = [x]$ FUNZIONE PARTE INTERA



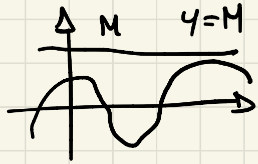
FUNZIONI SIMMETRICHE (PARI O DISPARI)

$f(x) = x^2 + 3x^3 - x$

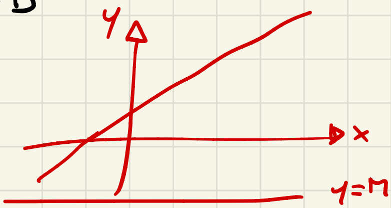
$f: D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$

Si dice che è
- LIMITATA SUPERIORMENTE
- LIMITATA INFERIORMENTE



$\exists M \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq M \quad \forall x \in D$



$\exists m \in \mathbb{R} \mid m \leq f(x) \leq M$

(AUDIO 8)

MONOTONA CRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 = f(x_1) \leq f(x_2)$

esempi

$y = x$

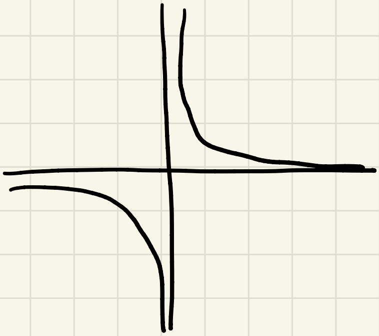
$y = e^x \qquad e > 1$

$y = \sqrt{x}$

$y = \log_e x \qquad e > 1$

MONOTONA DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 = f(x_1) \geq f(x_2)$

$y = \dfrac{1}{x}$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f NON COSTANTI

$x \longmapsto y = f(x)$

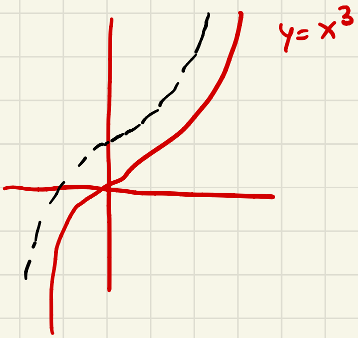
Si dice che f é PERIODICA di periodo T, $T>0$ se T é il più piccolo valore tale che

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

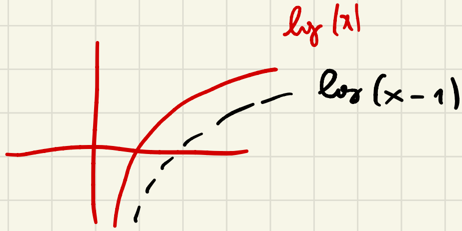
$x \longmapsto f(x) = x^3+1$

$y = x^3$



$f(x) = \log(x-1)$

$y = \log x$



OPERAZIONI TRA FUNZIONI

$$f : D_1 \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto y = f(x)$$

$$g : D_2 \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto y = g(x)$$

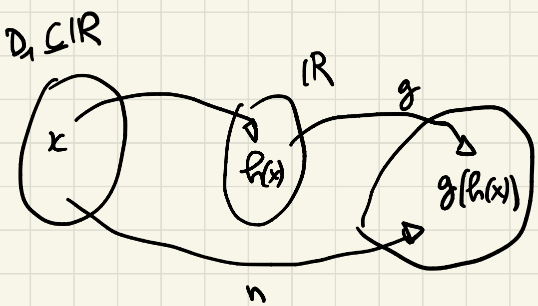
$$D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$$

$$f+g : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$f \cdot g : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\tilde{D} = \{ x \in D_1 \cap D_2 \mid g(x) \neq 0 \}$$



$$f(x) \in D_2 \quad \forall x \in D_1$$

$$f(D_1) \subseteq D_2$$

$$h : D_1 \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto h(x) = g(f(x))$$

h = FUNZIONE COMPOSTA

$$h = g \circ f$$

ESEMPIO

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x+3$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(x) = x^2$

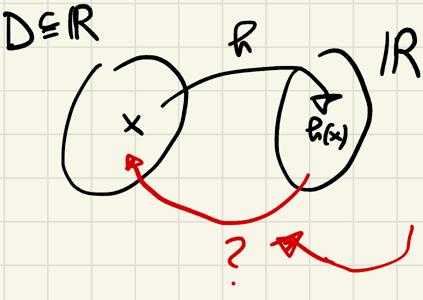
$h(x) = g(f(x)) = (x+3)^2$

$\tilde{h}(x) = f(g(x)) = x^2+3$

28/02/2023 (AUDIO 9)

$f : D \to \mathbb{R} \qquad D \subseteq \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$



SOLO SE È BIETTIVA
f può avere inversa f^{-1}

Si dice che f è invertibile in D solo se è suriettiva e iniettiva

$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists! \ x \in D \mid f(x) = y$ in questo caso si può definire

$f^{-1} : \mathbb{R} \to D \qquad y \longmapsto x = f^{-1}(y)$

A, B insiemi

$f: A \to B$

$\exists\, f^{-1}: B \to A$ tale che

$$f \circ f^{-1} = id_B$$

$$f^{-1} \circ f = id_A$$

dove $id_X : X \to X$

$$x \longmapsto x$$

identità di X

Esempi

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

IDENTITÀ

$x \longmapsto f(x) = x$

INVERTIBILE CON $f^{-1}(y) = y$

2) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

$x \longmapsto f(x) = x^2$

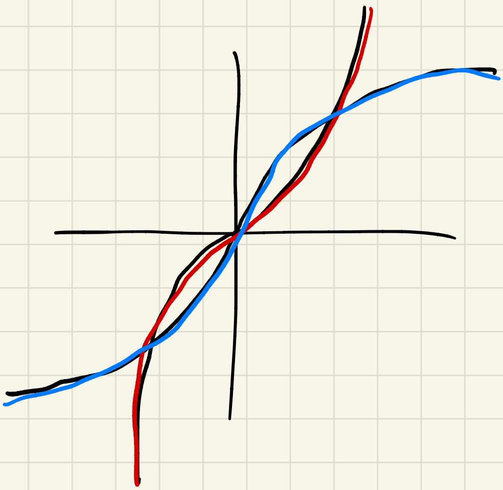
f è invertibile e

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^3$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$



f è invertibile

$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

$\Updownarrow$

$(x, y) \in graf(f)$
$(y, x) \in graf(f^{-1})$

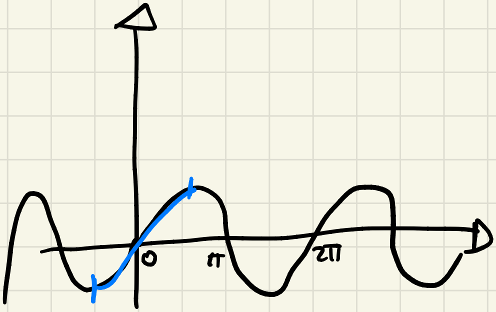
$\Big\}$ graf (f) e quello (f^{-1}) sono simmetrici alla retta $y = x$

TEOREMA $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

f strettamente monotona (crescente) (decrescente) $\Rightarrow$ f è invertibile f^{-1} è strettamente monotona (crescente) (decrescente)

3) $h(x) = \sin(x)$

$g : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

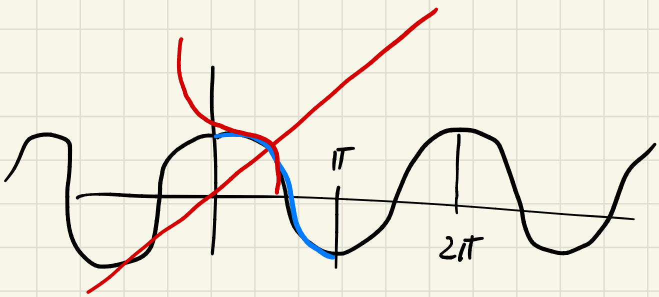


$h^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y \mapsto h^{-1}(y) = \arcsin y$

4) $h(x) = \cos(x)$

$h : [0, \pi] \to [-1, 1]$



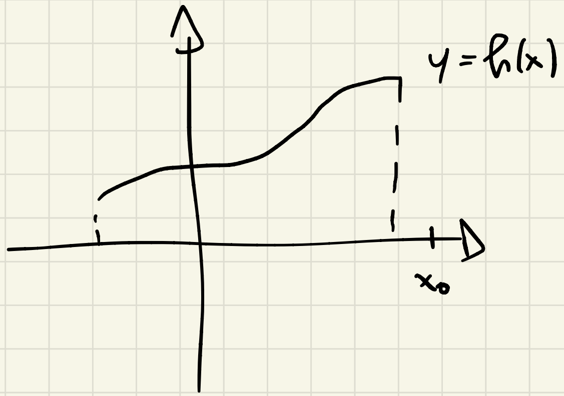
$\exists\, h^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ $\quad y \to h^{-1}(y) = \arccos y$

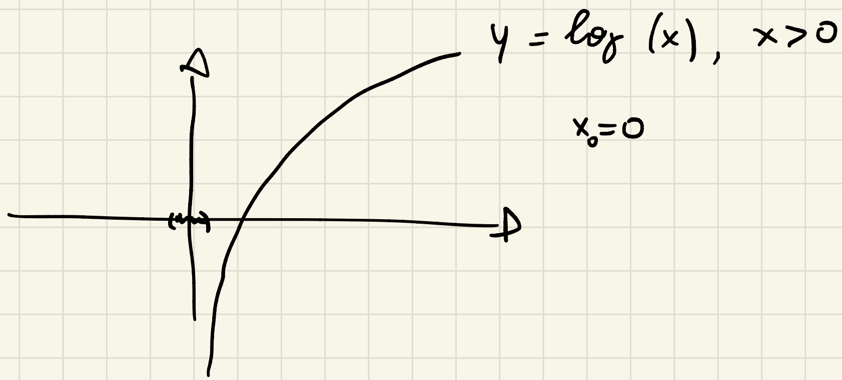
LIMITI DI FUNZIONI

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ "vicino ai punti del dominio D"

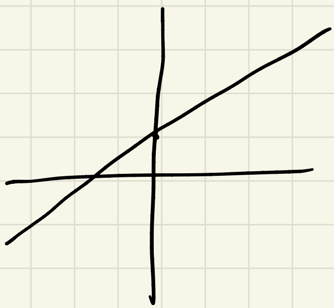
Problema: studiare il comportamento di f vicino ad x_0





Esempi

1) $h(x) = 1+x$ $\qquad x_0 = 0$



$x_0 \in \mathbb{R}$

Si definisce intorno (sferico) di x_0 di raggio r e si indica con

$I_r(x_0)$, l'insieme

$$I_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r \}$$

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

INTERVALLO APERTO

Un intorno di x_0 è un intervallo aperto contenente x_0

$E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Si dice x_0 è un punto di accumulazione per E se

$\forall I(x_0)$ intorno di x_0 $\quad E \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

$D(E) = \{$ insieme dei punti di accumulo per $E \}$

↳ derivato di E

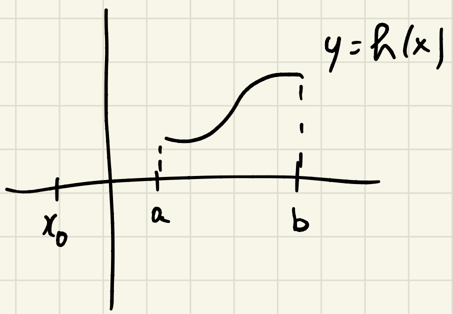
Un punto $x_0 \in E$ che non è di accumulazione per E si dice punto isolato di E

Esempi

1) $E = (a, b)$

$D(E) = [a, b]$

1/03/2023 (AUDIO 10)



$E \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

$E = \{a\}$ $a \in \mathbb{R}$

$D(E) = ? = \emptyset$

$E = \mathbb{R}$

TEOREMA : $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Se x_0 è un punto di accumulazione per E, allora in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di E.

Come conseguenza si ha che un insieme costituito da un numero finito di punti non ha punti di accumulazione.

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(E)$

Si dice che il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se possiamo prendere $f(x)$ vicino ad L quanto vogliamo pur di scegliere x abbastanza vicino ad x_0.

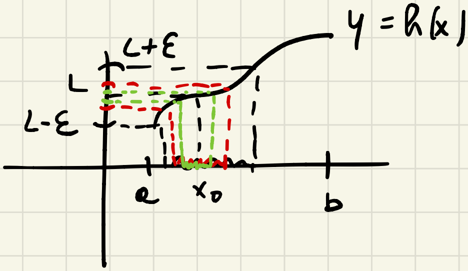
QUANTO $f(x)$ distante da x_0

Possiamo rendere $|f(x) - L|$ piccolo quanto vogliamo pur di scegliere $|x - x_0|$ abbastanza piccolo con $x \neq x_0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \; 0 < |x - x_0| < \delta$$

→ INSIEME MAI VUOTO

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



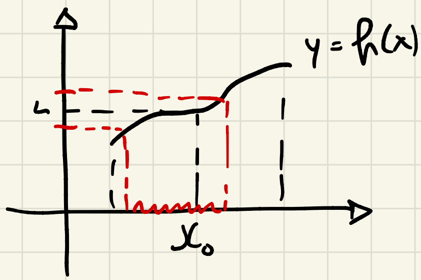
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

$\forall I_L$ intorno di L $\exists I_{x_0}$ intorno di x_0 |

$\forall x \in D \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I_L$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall x \in D \cap (I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I_L$



(AUDIO 11)

Teorema: $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(D)$

tali che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$f(x) \to L$ per $x \to x_0$

Allora

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

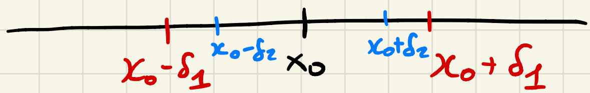
2) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

3 se $M \neq 0$, allora $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M}$

Dimost: Per ipotesi si ho che

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, \delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0 \mid \forall x\in D \quad 0<|x-x_0|<\delta_1$$
$$\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, \delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0 \mid \forall x\in D \quad 0<|x-x_0|<\delta_2$$
$$\Rightarrow |g(x)-M|<\varepsilon$$



Sia $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ e sia $x\in D \mid 0<|x-x_0|<\delta$

Allora

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| \le |f(x)-L|+|g(x)-M|$$
$$< \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$$

Teorema di unicità del limite:

$f: D \to \mathbb{R}$, $D\subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(D)$

Se $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$, allora tale limite è unico

Dim (per assurdo)

Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_2$

con $L_1\neq L_2$

Dalla definizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon$$

consideriamo

$$0 < |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad x \in D \mid 0 < |x - x_0| < \delta = \min(\delta_1; \delta_2)$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \quad |L_1 - L_2| < 2\varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$0 < |L_1 - L_2| < 2\varepsilon$$

$\downarrow$ il più piccolo numero positivo è 0

ma allora

$0 \leq$ $\rightarrow$ no per definizione di limite non possiamo quindi avere

NON ESISTENZA DEL LIMITE

$f(x) = \cos \frac{1}{x}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$?

Supponiamo che il limite $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} = L$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \quad 0 < |x| < \delta$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \cos(2k\pi) = 1$

$k \in \mathbb{Z}$

$f\left(\frac{1}{\pi + 2k\pi}\right) = \cos(\pi + 2k\pi) = -1$

TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(D)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$

Se $L \overset{<}{>} 0$, allora $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow f(x) > \frac{L}{2} \qquad f(x) < \frac{L}{2}$

e quindi in particolare f è positiva (negativa) in un intorno di x_0

f è DEFINITIVAMENTE POSITIVA vicino ad x_0

$L > 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Sia $\varepsilon = \frac{L}{2}$ $\left(> 0 \text{ perché } L > 0 \right)$ si ha

$$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$0 < \frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}$$

06/03/2023 (AUDIO 12)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Teorema

$f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in D(D)$

① $\exists\, I_{x_0}$ intorno di x_0 | $\forall x \in D \cap I_{x_0} \setminus \{x_0\}$

$$f(x) \underset{(<)}{\leq} g(x)$$

② $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$

$\Rightarrow \quad L \leq M$

Dim per assurdo, dal teorema si ha $0 < L - M = \lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$

Supponiamo che $L > M$

dal teorema della permanenza del segno

$f(x) - g(x) > 0$ def. per $x \to x_0$

ASSURDO

Nota: In particolare, se $f \equiv 0$ nel teorema ci ho che

$g(x) \geq 0$ (>) definitivamente per $x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = M \Rightarrow M \geq 0$

Teorema dei DUE CARABINIERI

$f, g, h : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D(D)$

$\exists I_{x_0} \mid \forall x \in D \cap I_{x_0} \setminus \{x_0\} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (1)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

Dim: (usiamo la definizione di limite) si ha che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \ 0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ e $|h(x) - L| < \varepsilon$

per ipotesi da (1)

$\exists \bar{\delta} > 0 \mid \forall x \in D \ 0 < |x - x_0| < \bar{\delta}$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Si ha $\bar{\bar{\delta}} = \min(\bar{\delta}, \delta)$ Allora $\forall x \in D \ 0 < |x - x_0| < \bar{\bar{\delta}}$

$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

Proposizione : $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(D)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

Dim :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D$$

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \implies |f(x)| < \varepsilon$$

$$(|f(x)| = ||f(x)| - 0| < \varepsilon)$$

Corollario del teorema dei due carabinieri

$f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(D)$

g é limitata in D ①

f é infinitesima per $x \to x_0$ $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \right)$ ②

$$\implies \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

Dim : si ha che $\exists M > 0 \mid |g(x)| \leq M \quad \forall x \in D$ *

Si ha $0 \leq |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |f(x)| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

da * $\forall x \in D$

da corollario

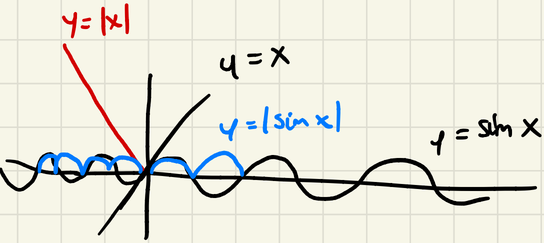
$$\lim_{x \to x_0} |f(x) \cdot g(x)| = 0 \implies \text{la tesi}$$

Esempi

① $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\underline{x} \, \underline{\sin \frac{1}{x}} \right) = 0$

$\Downarrow$ INFINIT per $x \to 0$ $\qquad$ $\Downarrow$ LIMITATA

② $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

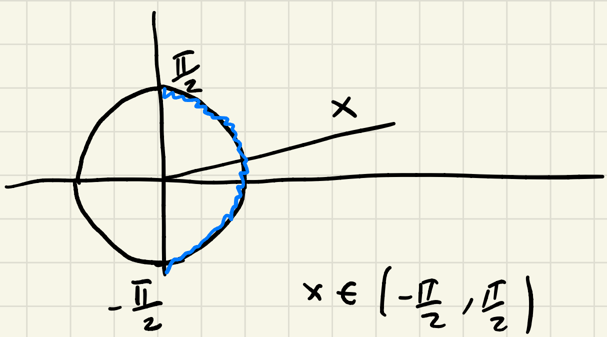


$$0 \le |\sin x| \le |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

per teorema dei carabinieri

$\lim\limits_{x \to 0} \cos x$



$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

$0 \le \cos x \le 1$

$$0 \leq 1-\cos x = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} \qquad\qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= \frac{\sin^2}{\underbrace{1+\cos x}_{\geq 1}}$$

$$\leq \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq 1-\cos x \leq \sin^2 x \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

per carabinieri:

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} (1-\cos x) = 0$$

Allora

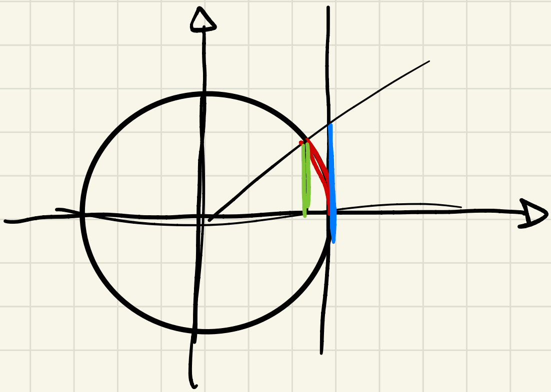
$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} (\cos x - 1 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (\cos x - 1) + \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

(AUDIO 13)

$$\lim_{x \to x_0} \cos \frac{1}{x} = \nexists$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ LIMITI NOTEVOLI



$\sin x \le x \le \tan x$

$x > 0$
vicino a 0

Dividiamo $\frac{\quad}{\sin x}$ $\quad x > 0$

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \ge \frac{\sin x}{x} \ge \cos x \quad \forall x \text{ vicino a } 0 \quad (x \to 0)$$

pari

5 $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ → TEOREMA DEI CARABINIERI

→ LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

ESEMPIO

① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} =$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \cdot \frac{x^2}{x^2} \right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{1-\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = 2$$

② $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x+x^2)}{x} = 1$

$$\left(\frac{\sin(x+x^2)}{x+x^2} \cdot \frac{\overset{1+x}{\cancel{x}+x^{\cancel{2}}}}{\cancel{x}} \right) = 1$$

$\downarrow$

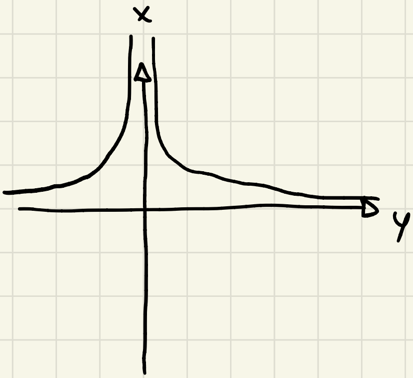
1

08/03/2023 (AUDIO 14)

LIMITI INFINITI

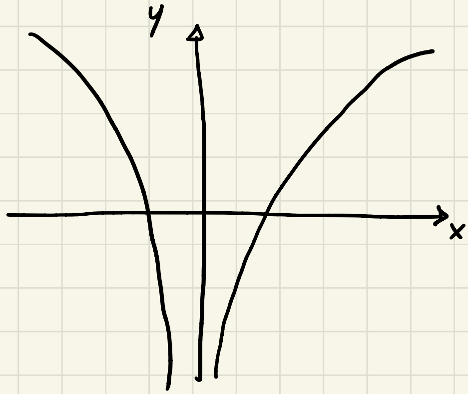
$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$D = R \setminus \{0\}$



$g(x) = \log |x|$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to x_0} \log |x| = -\infty$

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq R$, $x_0 \in D(D)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$

$\forall I_L \ \exists I_{x_0} \mid \forall x \in D \cap (I_{x_0} - \{x_0\})$

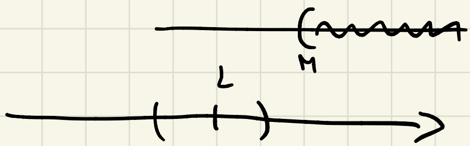
$\Rightarrow f(x) \in I_L$

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq R$, $x_0 \in D(D)$

Si dice che

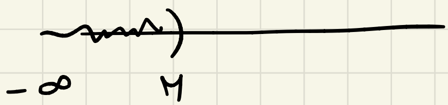
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

che cos'è un intorno di $+\infty$



1

$(M, +\infty)$



2

$(-\infty, M)$

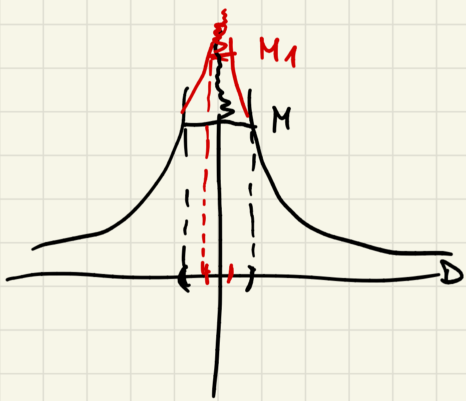
1

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta = \delta(M) > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x) > M$$



TUTTI I PUNTI CHE CADONO ALL'INTERNO DI M, M1 Sono maggiori di M, M1

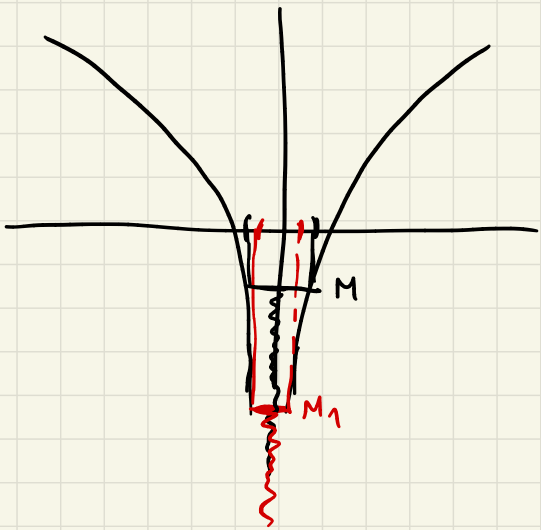
②

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\forall M > 0 \quad \exists \delta = \delta(M) > 0 \mid \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

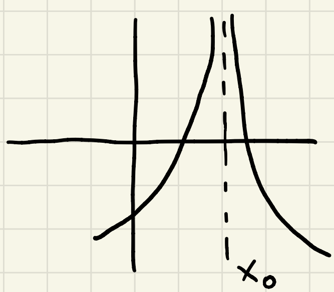
$\Rightarrow f(x) < -M$



TUTTI I PUNTI CHE CADONO ALL'INTERNO DI M, M_1 Sono minori di M, M_1

Si dice che ha un asintoto verticale di equazione $x = x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm \infty$$



$f(x): D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(D)$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} (f(x)+g(x))$
$L \in \mathbb{R}$	$M \in \mathbb{R}$	$L+M$
$L \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?

$f(x): D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(D)$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x))$
$L \in \mathbb{R}$	$M \in \mathbb{R}$	$L \cdot M$
$L \neq 0$	$\pm\infty$	$\underbrace{(\text{segno di } L)\infty}_{\text{prodotto dei segni}}$
$L = 0$	$\pm\infty$	?
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$

$f(x): D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(D)$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$
$L \in \mathbb{R}$	$M \neq 0$	$\frac{L}{M}$
$L > 0$	$M = 0$	$\begin{cases} +\infty & \text{se } g(x) > 0^* \\ -\infty & \text{se } g(x) < 0^* \\ \nexists & \text{se } g(x) \text{ cambia segno}^* \end{cases}$
$L < 0$	$M = 0$	$\begin{cases} -\infty & \text{se } g(x) > 0^* \\ +\infty & \text{se } g(x) < 0^* \\ \nexists & \text{se } g(x) \text{ cambia segno}^* \end{cases}$ REGOLA DEI SEGNI TRA L e segno di $g(x)$
$\pm\infty$	$M \neq 0$	$\underbrace{\pm\infty}_{\text{REGOLA DEI SEGNI}}$
$\pm\infty$	$M = 0$	$\pm\infty$
L	$\pm\infty$	0

FORME INDETERMINATE

Somma : $+\infty, -\infty$

Prodotto : $0 \cdot (\pm\infty)$

Quoziente : $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Potenze : $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

Esempi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3} = \frac{0}{0} \qquad +\infty$$

$$\Big(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to +\infty} \Big) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = \frac{\overbrace{x^2 - 1}^{\to -1}}{\underbrace{x^4}_{\to 0}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{|x|} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\cos x)}{x^2} = +\infty$$

(AUDIO 15)

$y = e^x$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

LIMITI ALL'INFINITO

$f: D \to R$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ILLIMITATO SUPERIORMENTE

si dice che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, M = M(\varepsilon) > 0 \mid \quad \forall x \in D, \ x > M(\varepsilon)$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$f: D \to R$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ILLIMITATO INFERIORMENTE

si dice che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, M = M(\varepsilon) > 0 \mid \quad \forall x \in D, \ x < -M(\varepsilon)$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Si dice che

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$

$\forall N > 0 \quad \exists M = M(N) > 0 \mid \forall x \in D \quad x > M(N) \; (x < -M(N))$

$\Rightarrow f(x) > N \quad (f(x) < -N)$

ASINTOTI

Si dice che $x = x_0$ é l'equazione di un asintoto verticale per f se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Se $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

si dice che la retta di equazione $y = L$ é un ASINTOTO ORIZZONTALE per f per $x \to \pm\infty$

che succede se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \; ?$$

Proposizione : $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ illimitato

f ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$ o $(x \to -\infty)$

① $\displaystyle\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

② $\displaystyle\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$

in questo caso, l'equazione dell'asintoto é data da $y = mx + q$

Esempio

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 = m$$

$$f(x) - mx = \lim \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = 0 = q$$

$y = x$ ASINTOTO OBLIQUO per $x \to +\infty$

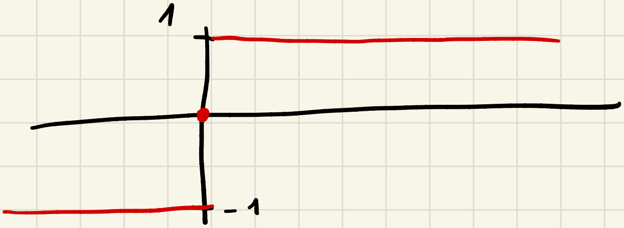
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \text{ se } \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$

09/03/2023 (AUDIO 16)

LIMITE DESTRO E SINISTRO

$$f(x) = \operatorname{seg} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} \operatorname{seg} x = \nexists$$

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{seg} x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{seg} x = -1$$

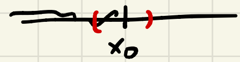
$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{+}{D}(D)$ → PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA DESTRA

$x_0 \in D^-(D)$ SINISTRA

Si dice che

$$\lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ x_0^-}} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

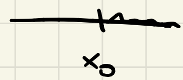
$$\iff$$



$(-\infty, x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;|\; \forall x \in D \quad x_0 < x < x_0 + \delta$$

$$x_0 - \delta < x < x_0$$



$(x_0, +\infty)$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

LIMITE DESTRO x_0^+, LIMITE SINISTRO x_0^-

Teorema: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D^+(D) \cap D^-(D)$

Allora

1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$$\iff$$

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e sono uguali a L

Esempi

① $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{|x|} \nexists$

$$\frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{\sin x}{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

② $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \geq 0 \\ 1+x & x < 0 \end{cases}$

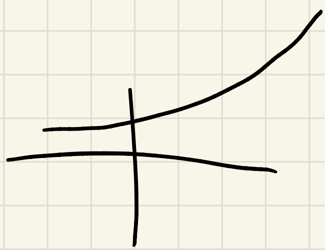
$$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} (1+x) = 1$$

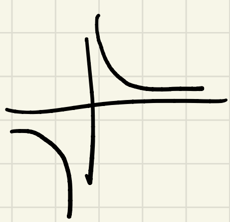
3) $\lim\limits_{x \to 0} 3^{\frac{1}{x}} \nexists$

$$\lim_{x \to 0^+} 3^{1/x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} 3^{1/x} = 0$$



4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \nexists$



Teorema: $f(a,b) \to \mathbb{R}$ MONOTONA

① $\forall x_0 \in (a,b)$

$\exists$ finiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

② negli estremi

$\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$

eventualmente infiniti

(AUDIO 17)

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+2}{5x-7} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(5-\frac{7}{x}\right)} = \frac{3}{5}$$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 2x}{2x+3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{x^{\cancel{3}} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x} \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = +\infty$$

LIMITE DEL RAPPORTO DI POLINOMI

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{P_m}{Q_m} & \text{se grado di } P = \text{al grado di } Q \\ 0 & \text{se } '' \ '' \ P < '' \ '' \ Q \\ \pm\infty & \text{se } '' \ '' \ P > '' \ '' \ Q \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^2}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x$$

CON LIMITE NOTEVOLE

$$e^{\log\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x} = e^{x \log\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$$

$$\lim_{x \to \boxed{+\infty}} \cancel{\frac{2\sin x^2}{x^2} = 1}$$

$$\lim_{y \to \boxed{0}} \frac{\sin y}{y} = 1$$

14/03/2023 (AUDIO 18)

GERARCHIA INFINITI

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \{\mathbb{R} \cup \pm\infty\}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$ INFINITESIMO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$ INFINITO

① $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\xrightarrow{e^x}$ $e > 1 \to +\infty$

② $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\xrightarrow{x^\alpha}$ $\alpha > 0 \to +\infty$

③ $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ $\xrightarrow{\log_e x}$ $\begin{cases} +\infty & e > 1 \\ -\infty & 0 < e < 1 \end{cases}$

$\to$ CONFRONTARE INFINITI

④ $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$

⑤ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$f, g : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in D(D)$

f, g infiniti per $x \to x_0$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} L \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{allora } f \text{ e } g \text{ sono dello stesso ordine} \\ 0 & \text{allora } f \text{ è un infinito di ordine inferiore a } g \\ \infty & \text{allora } f \text{ è un infinito di ordine superiore a } g \\ \nexists & \text{allora } f \text{ e } g \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

TH: siano $a > 1$ e $\alpha > 0$.

Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty,$$

cioè la funzione $y = a^x$ è un infinito di ordine superiore di $y = x^\alpha$, che è un infinito di ordine superiore di $y = \log_a x$ per $x \to +\infty$

$$\begin{cases} a > 1,\ \alpha > 0 \\ a^x,\ x^\alpha,\ \log_a x \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2^x + x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{5^x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \log x = 0$$

(AUDIO 19)

SUCCESSIONI NUMERICHE

Una successione numerica è una funzione

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a(n) = a_n$$

n → INDICE DELLA SUCCESSIONE

a_n → TERMINE GENERALE DELLA SUCCESSIONE

$$(a_n)_n \,,\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

ESEMPI

1) $a_n = n$ NON LIMITATA

$1, 2, 3, 4 \ldots$

2) $a_n = \frac{1}{n}$ LIMITATA

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$

3) $a_n = \frac{1}{n^2}$ LIMITATA

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9} \ldots$

4) $a_n = \frac{n}{n+1}$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

5) $a_n = (-1)^n$

$-1, 1, -1, 1$

6) $a_1 = a_2 = 1$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n > 1$

$n = 2 : \quad a_3 = a_2 + a_1 = 2$

$n = 3 : \quad a_4 = a_3 + a_2 = 2+1 = 3$

$n = 5 : \quad a_5 = a_4 + a_3 = 3+2 = 5$

FIBONACCI

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Una successione $(a_n)_n$ si dice:

- LIMITATA SUPERIORMENTE INFERIORMENTE
  se $\exists k \in \mathbb{R} \mid a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  $\geq$

- LIMITATA

se $\exists\, M>0 \mid |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- MONOTONA CRESCENTE DECRESCENTE

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $\quad (\geq)$

$n < n+1 \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$ $\quad (\geq) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1) $a_n = n \qquad 1, 2, 3, 4, \ldots$

2) $a_n = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

$\lim_{n \to +\infty} a_n$ e $\lim_{n \to -\infty}$

Si dice che

$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ $\qquad a_n$ CONVERGENTE AD L

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n}$

$\Leftrightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon$

Si dice che il $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \ (-\infty)$ $\quad a_n$ DIVERGE A $+\infty$ $-\infty$

$\forall M > 0 \quad \exists\, \bar{n} = \bar{n}(M) \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n}$

$\Rightarrow a_n > M \quad (a_n < M)$

Una successione si dice regolare se è CONVERGENTE O DIVERGENTE si dice irregolare o INDETERMINATA $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

NON SONO POLINOMI

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} (-1)^n = \nexists$$

(AUDIO 20)

TH = $(a_n)_n$

Se $(a_n)_n$ monotona, allora

$$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Inoltre se $(a_n)_n$ è limitata, allora tale limite è finito

Esempi

1) SUCCESSIONE GEOMETRICA

$a_n = q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{R}$ → RAGIONE DELLA SUCCESSIONE

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \;]\ \text{DIVERGE} \\ 1 & q = 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \end{cases} \Big]\ \text{CONVERGE}$$

$$\nexists \quad q \leq -1 \;]\ \text{INDETERMINATA}$$

2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Esempi

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{e} = \qquad e > 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\log n^{\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} = e^{\frac{1}{n} \log n \to 0} = \underline{1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \log n^{\frac{1}{n}} = 1$$

$1 < \log n < n \to$ propietà vale per n grande

↳ per dimostrare con il teorema dei carabinieri

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} n! = n(n-1) \dots 1 > n \to +\infty \Rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^n = e^{\log n^n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{\log_e n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{\infty}{\infty}$$

COSTRUZIONE SUCCESSIONE

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \; ? \; \Rightarrow \; = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot}_{n \cdot \text{volte}}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \cdots \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{n}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n}$$

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$$

$$\lim \frac{a^n}{n!} \qquad a \in \mathbb{R}$$

se $a = 0 \to 0$

se $a \neq 0$ $|a| \leq 1 \to 0$

se $|a| \geq 1$

$\Downarrow$

$\exists k \in \mathbb{N} \;/\; |a| < k$

$$\lim \frac{a^n}{n!}$$

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \frac{k^n}{n!}$$

$$\frac{k^n}{n!} = \frac{\overbrace{k \cdot k \cdot k \cdot}^{n \text{ volte}}}{n \cdot (n-1) \cdots 1}$$

Sia $n > k$

$$\frac{\overbrace{k \cdot k \cdots k}^{k \text{ volte}} \; \overbrace{}^{(n-k) \text{ volte}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots k}_{k} \underbrace{(k+1) \ldots n}_{n-k}} \to \frac{k^k}{k!} \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{<1} \cdots \frac{k}{n}$$

$$< \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{k}{n}$$

n^n

$n!$ $\to$ $x!$ Solo nei fattoriali

e^n

n^α

$\log_e n$

15/03/2023 (AUDIO 21)

FUNZIONI CONTINUE

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

Si dice che f é continua in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta$$
$$\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

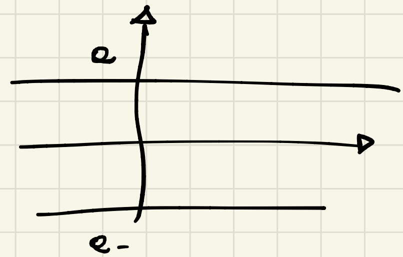
f é continua in D se f é continua in ogni punto di D.

① $x_0 \in D(D)$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

② $x_0 \in I_s(D)$

Esempi

$f(x) = c \,, \qquad c \in \mathbb{R}$



f é continua in $\mathbb{R}$? Sia $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0)$ $\quad f$ é continua in x_0

$f(x) = x^n \,, \qquad n \in \mathbb{N}$

N.B
NON HA SENSO STUDIARE IN $+\infty, -\infty$

f é continua in $\mathbb{R}$?

TEOREMA SULL ALGEBRA DEI LIMITI

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^n = \lim_{x \to x_0} (\underbrace{x \,\ldots\ldots\, x}_{n\text{-volte}}) = x_0^{\,n} = f(x_0)$

$\Rightarrow f$ é continua in x_0

$f(x) = \sin x$

f é continua in $\mathbb{R}$? Sia $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} \sin x \overset{?}{=} \sin x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) \overset{?}{=} 0$

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x-x_0}{2}$$

$$0 \leq \left| 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x-x_0}{2} \right| \leq 2 \rightarrow \text{non serve}$$

$$2 \underbrace{\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right|}_{\leq \left|\frac{x-x_0}{2}\right|} \left|\cos \frac{x-x_0}{2}\right|$$

poiché $|\sin y| \leq |y|$

$$\leq \cancel{2} \left| \frac{x-x_0}{\cancel{2}} \right| \left| \cos \frac{x-x_0}{2} \right|$$

poiché $y = \cos x$ é limitata da 1

$$\leq \underbrace{|x-x_0|}_{\substack{x \to x_0 \\ \downarrow \\ 0}}$$

$\Rightarrow \lim (\sin x - \sin x_0) = 0$ TH per due carabinieri

$\Rightarrow$ f é continua in x_0

4) $\cos x$ $\quad f$ é continue ?

$$\boxed{2 \sin \frac{x-x_0}{2} \sin \frac{x+x_0}{2}}$$

$f(x) = e^x$

f é contino in $\mathbb{R}$?

sia $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(e^x - e^{x_0}\right) = 0 \qquad e^{x_0}\left(e^{x-x_0} - 1\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x-x_0} \cdot (x - x_0)\right] = 0$$

$f(x) = \log x$

f é contino in $\mathbb{R}^+$?

$$\lim_{x \to x_0} \log x \quad (x - x_0 + x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \log \left[x_0 \left(\frac{x - x_0}{x_0} + 1\right)\right]$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\log x_0 + \log\left(\frac{x - x_0}{x_0} + 1\right)\right]$$

$$\lim_{x\to x_0} \log x_0 + \underbrace{\frac{\log\left(\frac{x-x_0}{x_0}+1\right)}{\frac{x-x_0}{x_0}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x-x_0}{x_0}}_{\to 0} = \log x_0$$

f é continua in x_0

TH algebra delle funzioni continue

$f : g : D \to$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

f, g continue in x_0

Allora

1) $f \pm g$ é continua in x_0

2) $f \cdot g$ é continua in x_0

3) se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ é continua in x_0

segue dal teorema sull'algebra dei limiti

Nota

1) $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$ continua $|x|$

$\lim_{x\to 0} |x| = 0$ opp. $\lim_{x\to 0^+} x = 0$

$\lim_{x\to 0^-}$

2) $f(x) = P(x)$, P polinomio

continua in $\mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$

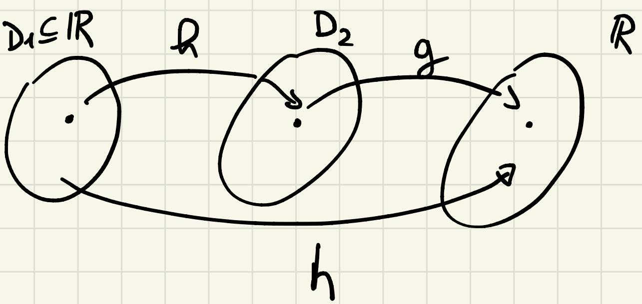
P, Q polinomi

continua nel suo dominio

Teorema continuità della funzione composta

$f: D_1 \to \mathbb{R},\ D_1 \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in D \qquad f(D_1) \subseteq D_2$

$g: D_2 \to \mathbb{R},\ D_2 \subseteq \mathbb{R}$



$h: D_1 \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto h(x) = g(f(x))$

f continua in x_0

g continua in $f(x_0)$

$\Rightarrow h$ è continua in x_0

Dim

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0) \quad e \quad \lim_{y \to h(x_0)} g(y) = g(h(x_0))$$

Consideriamo

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(\underbrace{h(x)}_{y}) \Rightarrow \lim_{x \to x_0}$$

$$y = h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} h(x_0) \quad \text{perché è continua}$$

$$\Downarrow$$

$$g(y) = g(h(x_0)) = h(x_0)$$

h è continua in x_0.

Esempi

16/03/2023 (AUDIO 22)

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

f é continua in x_0 se

$x_0 \in D(D)$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

opp.

$x_0 \in I_s(D)$

$f(x) \to f(x_0)$ se $x \to x_0$

Corollario del TH. di continuità della funzione composta

$f \cdot g$ continue nel loro dominio

$f > 0$ nel suo dominio

$$x \longmapsto f(x)^{g(x)}$$

continua nel suo dominio

Dim: Si ha che

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)}$$

$$= e^{g(x) \log(f(x))}$$

continua poiché composizione e prodotto di funzioni continue

Nota : Dal corollario

1) $f(x) = x^{e}$ $\quad x > 0$, $e \in \mathbb{R}$

In particolare $f(x) = \sqrt{x}$ é continua in $\mathbb{R}_0^+$ unico punto da studiare é lo 0

$\downarrow$

continua anche in 0 $\longleftarrow$ usando la definizione

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ continua in tutto $\mathbb{R}$ per analoga e simmetria

In generale $f(x) = x^{e}$ é continua nel suo dominio

TH (continuità della funzione inversa)

$f : I \to \mathbb{R}$, $\boxed{I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervallo}}$

f continua e invertibile in I

f^{-1} é continua nel suo dominio

Se f non é definita in un intervallo il TH in generale non vale

$f : [0,1) \cup [2,3] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ x-1 & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

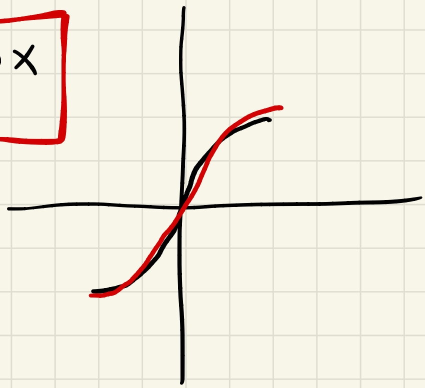
f é continua in $[0,1) \cup [2,3]$

f é invertibile poiché é strettamente crescente

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in [0,1) \\ y+1 & \text{se } y \in [1,2] \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{y \to 1} f^{-1}(y)$$

$f(x) = \sin x$

$\boxed{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni x}$



arcsen $[-1, 1]$

$\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y \longmapsto \text{arcsen}\, y = x$

è continua

$f(x) = a^x \quad , a > 0, a \neq 1$

Continua e invertibile in $\mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \log_a y \, , \; y > 0$

(AUDIO 23)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \; D \subseteq \mathbb{R} \; , \; x_0 \in D \cap D(D)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ → ESISTE IL LIMITE MA È DIVERSO DA $f(x_0)$
→ NON ESISTE IL LIMITE

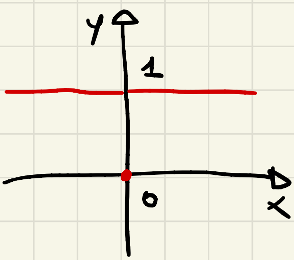
$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

$$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che f è DISCONTINUA in x_0 se in tale punto NON è continua

Esempi

1) $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(x_0) = 0$$

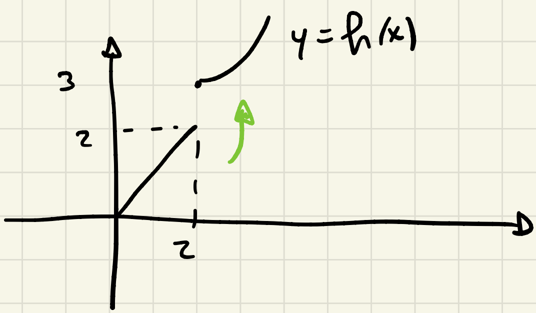
$x_0 = 0$ punto di discontinuità ELIMINABILE $\rightarrow$ $\bar{f}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

continua in tutto $\mathbb{R}$

possiamo eliminarla solo se esiste

SE NON ESISTE

$$\exists \text{ finite } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

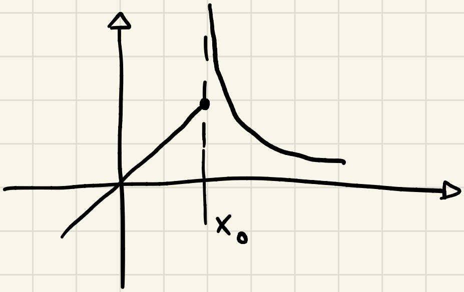


$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 2$$

SALTO o DI PRIMA SPECIE

b) $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e almeno uno é infinito



SECONDA SPECIE

c) $\nexists$ uno dei due limiti

TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO, PER FUNZIONI CONTINUE

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

f continua in D,

$f(x_0) > 0$ (c)

$\Rightarrow \exists I_{x_0}$ intorno di x_0, tale che $f(x) \overset{(c)}{>} 0 \quad \forall x \in D \cap I_{x_0}$

Nota (in GENERALE se f non é continua il teorema non vale

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

20 | 03 | 2023 (AUDIO 24)

TH. DI FUNZIONI DEFINITE SU UN INTERVALLO

T.H degli zeri

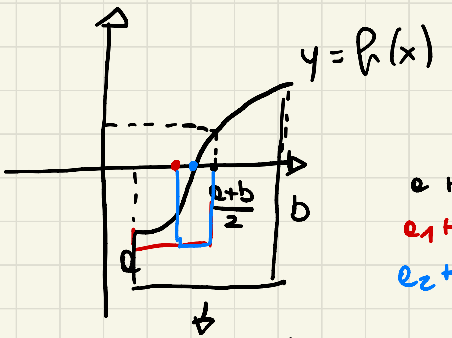
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f continua in $[a,b]$

$f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) \mid f(x_0) = 0$

Supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$



$a \mapsto b$

$a_1 \mapsto b_1$

$a_2 \mapsto b_2$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \begin{cases} = 0 \Rightarrow x_0 = \left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \neq 0 \end{cases}$$

$(a_n)_n, (b_n)_n$ tali che:

$a_n, b_n \in [a,b] \ \forall n \in \mathbb{N}$

a_n é monotona crescente $\quad \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

b_n é monotona decrescente $\quad \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = B \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Downarrow$

$A, B \in \mathbb{R}$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \Rightarrow B - A = \lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$$

$A = B = \ell$

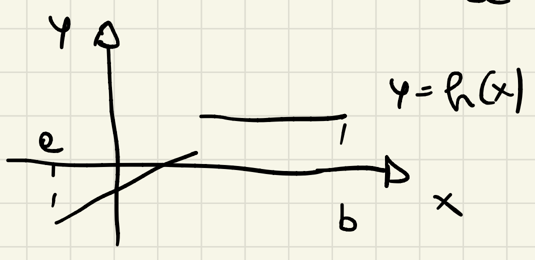
$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{f(a_n)}_{f(\ell)} \cdot \underbrace{f(b_n)}_{f(\ell)}) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \geq \lim_{n\to+\infty} (f(a_n) \cdot f(b_n)) = (f(\ell))^2 \geq 0$$

$f(\ell) = 0 \qquad x_0 = \ell$

Note

se f non é continua il teorema in generale non vale



$f(a) \cdot f(b) < 0$

f NON CONTINUA

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Teorema degli zeri hanno condizioni sufficienti

Applicazione esistenza della radice quadrata di un numero positivo

Sia $a \geq 0$. Vogliamo provare che $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad x_0^2 = a \quad x \geq 0$

$x_0 = \sqrt{a}$

Sia $a = 0$ allora $x_0 = 0$
sia $a = 1$ allora $x_0 = 1$

Sia $0 < a < 1$ e sia

$f(x) = x^2 - a$

f è continua in $\mathbb{R}$ (in particolare $[a, 1]$)

$f(1) = 1 - a > 0$
$f(a) = a^2 - a < 0$ poiché $0 < a < 1$

$\overset{\text{Th zeri}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, x_0 \in (a, 1) \mid f(x_0) = 0 \quad (x_0^2 = a)$

sia $a > 1$ e sia

$f(x) = x^2 - a$

f è continua $[1, a]$

$f(1) = 1 - a < 0$
$f(a) = a^2 - a > 0$ poiché $a > 1$ $\quad \overset{\text{Th zeri}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, x_0 \in (1, a)$
$f(x_0) = 0 \quad (x_0^2 = a)$

Proviamo che x_0 é UNICO Dimostr per assurdo

$\exists\, x_0, x_1 \quad x_0^2 = a \quad x_1^2 = a \quad | x_0 \neq x_1$

Allora

$$0 = a - a = x_0^2 - x_1^2$$
$$= (x_0 - x_1) \underbrace{(x_0 + x_1)}_{> 0}$$

$x_0 = x_1$ ASSURDO

Th di WEIERSTRASS

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

$\Rightarrow f$ ammette massimo é minimo assoluti in $[a,b]$

$\exists\, x_m, x_M \in [a,b] \mid f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a,b]$

Esempi

$$f(x) = e^{x \sin x} \qquad x \in [-2, 7]$$

$\exists$ max e min assoluti

Th. dei valori intermedi

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

$\Rightarrow \forall \lambda \in [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f] \ \exists \bar{x} \in [a,b] \mid f(\bar{x}) = \lambda$

Dim: Da Weierstrass $\exists x_m, x_M \in [a,b] \mid f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$

Sia $\lambda \in (m, M)$ e sia $g(x) = f(x) - \lambda$

Si ha che g è continua in $[a,b]$ poiché lo è

Inoltre
$$g(x_m) = f(x_m) - \lambda = m - \lambda < 0$$
$$g(x_M) = f(x_M) - \lambda = M - \lambda > 0$$

TH zeri

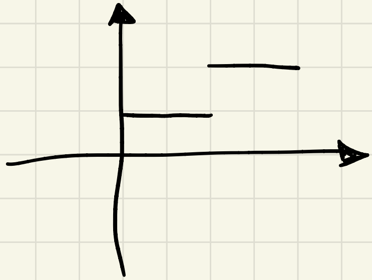
$$\Longrightarrow \exists \bar{x} \in (x_m, x_M) \mid g(\bar{x}) = 0$$

$$f(\bar{x}) - \lambda \Rightarrow f(\bar{x}) = \lambda$$

Vale anche per intervallo qualunque

$$\forall \lambda \in (\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f)$$

Nota Se I non è un intervallo il Th in generale non vale



Applicazione

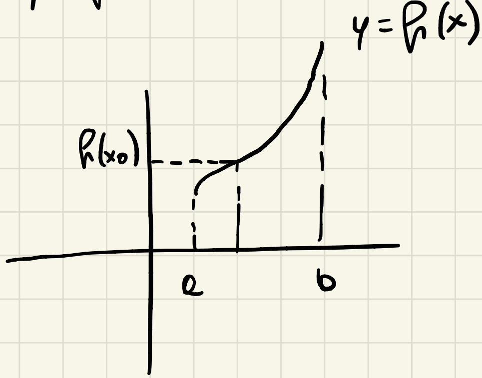
$P(x)$ = polinomio di grado dispari ammette uno zero reale

27/03/2023 AUDIO (25)

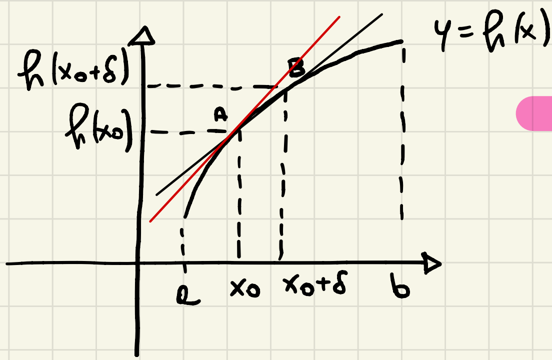
FUNZIONI DERIVABILI

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

$x \longmapsto y = f(x)$



Problema: stabilire se esiste la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ e, in caso affermativo, determinare la sua equazione



f continua in (a,b)

La retta secante per A e B ha l'equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} (x - x_0)$$

RAPPORTO INCREMENTALE di f in x_0

Se $\exists \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} = f'(x_0)$ in $\mathbb{R}$

Allora $\exists$ la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ e la sua equazione è data da

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$ EQUAZIONE TANGENTE

Si dice che f è DERIVABILE in x_0 se

$\exists$ in $\mathbb{R}$ $\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}$

e, in tal caso, si pone

$$f'(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}$$

$\downarrow$

Derivata prima di f in x_0

NOTA

$\delta = x - x_0$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

DERIVABILITÀ DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

① $f(x) = a$

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \frac{a-a}{\delta} = 0 \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = x$

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \frac{x+\delta - x}{\delta} = 1 \xrightarrow[\delta \to 0]{} 1$$

f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \frac{(x+\delta)^2 - x^2}{\delta} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{x^2 + 2\delta x + \delta^2 - x^2}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} (2x + \delta) = 2x$$

$f(x) = \sin x$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \frac{\sin(x+\delta) - \sin x}{\delta} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\delta) + \cancel{\cos(x)\sin(\delta)} - \sin x}{\delta}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\sin x \frac{\cos\delta - 1}{\delta} + \cos x \underbrace{\frac{\sin\delta}{\delta}}_{\to 1} \right]$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sin x \underbrace{\frac{\cos\delta - 1}{\delta^2}}_{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\delta}_{0} + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

f é derivabile in $\mathbb{R}$ $f'(x) = \cos x$

In modo analogo si prove che $f(x) = \cos x$

f é derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{e^{x+\delta} - e^x}{\delta} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{e^x (e^\delta - 1)}{\delta} \to 1 = e^x$$

$f(x) = \log x$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\log(x+\delta) - \log x}{\delta} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\log\left(\frac{x+\delta}{x}\right)}{\frac{\delta x}{x}} = \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $\mathbb{R}^+$

e $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x \geq 0$

f è derivabile in $x_0 = 0$?

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\sqrt{\delta} - 0}{\delta} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\delta}} = +\infty$$

f non è derivabile in $x_0 = 0$

Teorema: $f\,(a,b) \to \mathbb{R}$

f derivabile in (a,b)

$\Rightarrow$ f continua in (a,b)

Dim: sia $x_0 \in (a,b)$ Allora

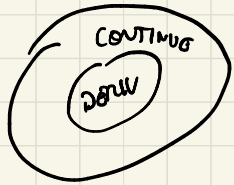
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))$$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0) \text{ perché } f \text{ é derivabile in } x_0} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} = 0 \quad f \text{ continua in } x_0$$

Nota

f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile

f non continua $\Rightarrow$ non derivabile



Th :

$f, g \; A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $x_0 \in A$

f, g derivabili in x_0

Allora

1 $f \pm g$ é derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

2 $f \cdot g$ é derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ é derivabile in x_0 e

3 $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Nota: $k \in \mathbb{R}$,

e) Da 2) si ha che $k \cdot g$ é derivabile e

$(k \cdot g)'(x) = k \cdot g'(x)$ operazioni lineari

operazione lineare

da 3) si ha che $\frac{1}{g}$ é derivabile e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

AUDIO (26)

c) $h(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$

Dimostrazione per induzione che h é derivabile in $\mathbb{R}$ e $h'(x) = m \cdot x^{m-1}$

Base: $m = 1$ $h(x) = x$ derivabile in $\mathbb{R}$

Supponiamo che $h(x) = x^{m-1}$ sia derivabile in $\mathbb{R}$

Si ha che

$x^m = x \cdot x^{m-1}$ derivabile da 2)

Inoltre

$$(x^m)' = 1 \cdot x^{m-1} + x \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}$$

$$= x^{m-1} + (m-1)\, x^{m-1} = m x^{m-1}$$

Im generale la funzione

$$g(x) = x^{\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

é derivabile in $\mathbb{R}$

e

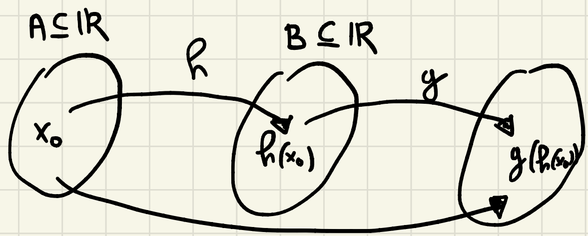
$$g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$(tg\, x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$P(x)$ = polinomio derivabile in $\mathbb{R}$

FUNZIONI DI DERIVABILITÁ, DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$h : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$, $h(A) \subseteq B$
$g : B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ aperto



h derivabile in x_0
g derivabile in $h(x_0)$

$$h : A \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto h(x) = g(h(x))$$

REGOLA DELLA CATENA

é derivabile in x_0 e $h'(x_0) = g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)$

Dim: Si ha che

$$\frac{h(x_0+\delta)-h(x_0)}{\delta} = \frac{g(f(x_0+\delta))-g(f(x_0))}{\delta}$$

$$= \frac{g(f(x_0+\delta))-g(f(x_0))}{\underbrace{f(x_0+\delta)-f(x_0)}_{K}} \cdot \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}$$

$K \Rightarrow f(x_0+\delta) = f(x_0)+K$

$$= \frac{g(f(x_0)+K)-g(f(x_0))}{K} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}}_{f'(x_0)} \xrightarrow[\delta\to 0]{}$$

$$\xrightarrow[\delta\to 0]{} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$K = f(x_0+\delta) - f(x_0) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$

poiché f è continua in x_0

Esempi

$h(x) = (\sin x)^3$

$f(x) = \sin x$

$g(x) = x^3$

$h(x) = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x$

$h(x) = \log(\cos x)$

$f(x) = \cos x$

$g(x) = \log x$

$h = -\frac{\sin x}{\cos x}$

e^{x^2} = derivabile composizioni di funz derivabili

$e^{x^2} \cdot 2x$

Th. di derivabilità della funzione inversa:

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ SU UN INTERVALLO

f derivabile e invertibile in (a,b) con inverse f^{-1}

Se $\exists\ x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} é derivabile

$f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Dim:

Sia $h \mid x_0+h$ vicino ad x_0

Poniamo $f(x_0+h) = \eta$. Allora $x_0+h = f^{-1}(\eta)$

$$\frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(f(x_0))}{\eta - f(x_0)}$$

$$= \frac{(x_0+h) - (x_0)}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} \xrightarrow[\substack{\eta \to f(x_0) \\ (h \to 0)}]{} \frac{1}{f'(x_0)} \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

poiché $f'(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$x_0 + h = f^{-1}(\eta) \to f^{-1}(f(x_0)) = x_0$$

$h \to 0$ $\searrow$ poiché f^{-1} è continua

poiché f è continua e invertibile in un intervallo

$\Rightarrow f^{-1}$ è derivabile in $f(x_0)$ e

$$(f^{-1})' f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Esempi

$f(x) = a^x$, $a>0$, $a \neq 1$

$$f(x) = a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$$

$a = e^{\log a}$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{x \log a} \cdot \log a = \log a \cdot a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x) = e^x$ derivabile in $\mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \log y$ derivabile in $\mathbb{R}^+$

$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{e^x|_{x=\log y}} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

$$f^{-1}(y) = \arcsin y \qquad y \in [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin x \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$$

Th $\Rightarrow$ si ha che f^{-1} è derivabile in tutti i punti $f(x) \mid f'(x) = \cos x \neq 0$

f^{-1} è derivabile in $(-1, 1)$

$$(f^{-1})'(y) = (\arcsin y)' = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \qquad \forall y \in (-1, 1)$$

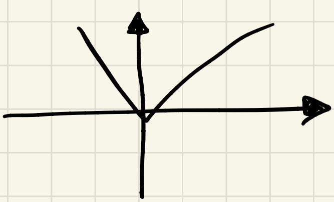
$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad \forall y \in (-1, 1)$$

In modo analogo si prova che le altre funzioni trigonometriche inverse sono derivabili $(\arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1, 1)$

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \dot{f}(x)$$

$$f(x) = |x|$$



PUNTO ANGOLOSO

$$\exists \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} \text{ in } \mathbb{R}$$

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

f continua in x_0

a) $\exists \lim_{\delta \to 0^+} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}$ e $\lim_{\delta \to 0^-} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}$

finiti e diversi tra loro

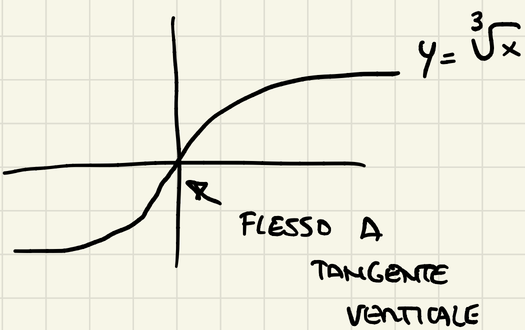
$\left(f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \ , \ f'_+(x_0), \ f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \right)$

é un PUNTO ANGOLOSO

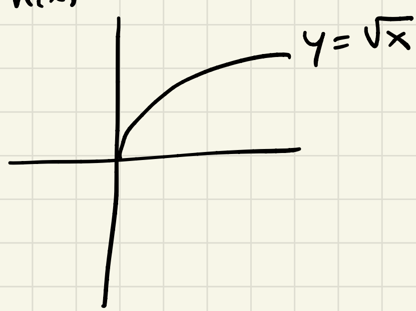
b) $\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} = +\infty \ (-\infty)$

x_0 é un punto di FLESSO a tangente verticale

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$



$f(x) = \sqrt{x}$ in $x_0 = 0$

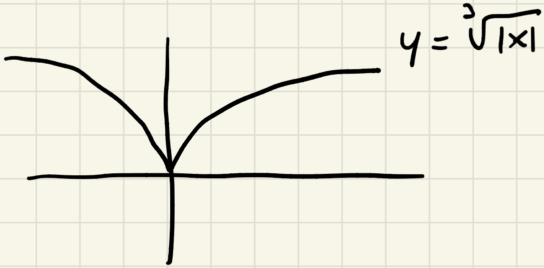


$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} = +\infty \ (-\infty)$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} = -\infty \ (+\infty)$$

x_0 é una CUSPIDE

$f(x) = \sqrt[3]{|x|}$

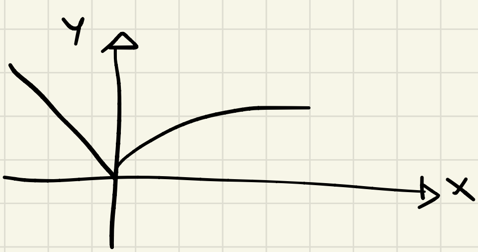


d) $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$

$f'_-(x_0) = \pm\infty$

(o viceversa)

x_0 é una CUSPIDE

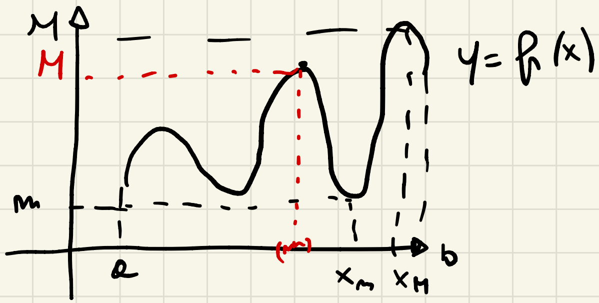


22/03/2023 (AUDIO 27)

MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$



MASSIMO ASSOLUTO

$f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

MASSIMO RELATIVO LOCALE

$\exists I_{x_0} \mid f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b] \cap I_{x_0}$

$M = f(x_0)$

$x_0 \in [a,b]$ si dice

MASSIMO MINIMO ASSOLUTO O GLOBALE

per f in $[a,b]$ se $\quad f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0) \quad \forall x \in [a,b]$

MASSIMO MINIMO RELATIVO O LOCALE

per $\exists I_{x_0}$ intorno di $x_0 \mid f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0) \quad \forall x \in [a,b] \cap I_{x_0}$

TH WEIERSTRASS PER CAPIRE SE AMMETTE MASSIMO E MINIMO

TH FERMAT:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f : derivabile in (a,b)

$x_0 \in (a,b)$ max / min locale per f

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

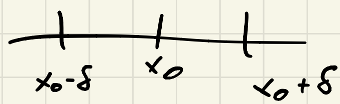
Dim: Supponiamo che x_0 sia massimo locale per f

Allora

$\exists\, \delta > 0 \mid f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in [a,b] \ |x - x_0| < \delta$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$|h| < \delta \Rightarrow x_0 + h \in I_{x_0,\delta}$



$$\frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\le 0}}{h} \begin{cases} \le 0 & \text{se } h > 0 \\ \ge 0 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h \to 0^+ & f'_+(x_0) \le 0 \\ h \to 0^- & f'_-(x_0) \ge 0 \end{cases}$$

Poiché f è derivabile in x_0, si ha che

$$= f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f derivabile in (a,b)

$x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$ si dice PUNTO CRITICO o STAZIONARIO per F

Fermat : x_0 max | min
locale per f

Dove cerchiamo i max | min locali di f ?

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

1 $\{ x \in \mathring{D} \mid f$ derivabile in x e $f'(x) = 0 \}$

2 $\{ x \in \mathring{D} \mid f$ non derivabile in $x \}$

3 $D \cap \partial D$
estremi del dominio

Esempi

$f(x) = x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 1 = 0$ $\quad x = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) \leq f(\frac{1}{2})$

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 \quad \text{in } [0,1]$

max e min assoluti di f in $[0,1]$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

$f'(x) = 9x^2 - 4x = 0$

$\iff x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{4}{9}$

$\uparrow$

NON ACC

perché $(0,1)$

max/min $= \left(0, 1, \frac{4}{9}\right)$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$f\left(\frac{4}{9}\right) = \text{min}$

TH rolle

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f : continua in $[a,b]$

f : derivabile in (a,b)

$f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = 0$

Dim:

Dal teorema di Weierstrass

$$\exists\ x_m, x_M \in [a,b] \mid f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$
$$\forall x \in [a,b]$$

Supponiamo che $x_m \in (a,b)$
$x_M \in (a,b)$

Fermat $\Rightarrow f'(x_m) = 0 \quad (f'(x_M) = 0)$

In alternativa $x_m = a$ e $x_M = b$
(oppure $x_m = b$ e $x_M = a$)

$$f(a) = f(x_m) \leq f(x) < f(x_M) = f(b)$$
$$\forall x \in [a,b]$$

$$f(x) = c \ , \ c \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

TH LAGRANGE o del valor medio

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f continua in $[a,b]$

f derivabile in (a,b)

$$\Rightarrow \exists\ x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Dim

$F(x) = f(x) - \lambda x \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

Si ho che F è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) poiché è f

$F_\lambda(a) = f(a) - \lambda a$

$F_\lambda(b) = f(b) - \lambda b$

$F_\lambda(a) = F(b) \iff$

$\lambda(b-a) = f(b) - f(a)$

$\iff \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Per $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, F_λ soddisfa le ipotesi del th di rolle

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) \mid F_\lambda'(x_0) = 0$

$$F_\lambda'(x_0) = f'(x_0) - \lambda$$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

27/03/2023 (AUDIO 28)

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI A DERIVATA NULLA IN UN INTERVALLO:

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

f continua in I
f derivabile in $\mathring{I}$ con $f'(x)=0 \quad \forall x \in \mathring{I}$

$\Rightarrow f(x) = c \quad , c \in \mathbb{R} \quad , \forall x \in I$

Nota: Se I non è un intervallo in generale la caratterizzazione non vale. Infatti basta considerare

f non costante
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 2 & x \in [2,3] \end{cases}$$

f è derivabile in $[0,1] \cup [2,3]$ con $f(x)' = 0 \quad \forall x \in [0,1] \cup [2,3]$

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI MONOTONE IN UN INTERVALLO

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

f è derivabile in I

Allora

f è crescente in $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

f è decrescente in $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

Note

a) L'implicazione $\Rightarrow$ é vera per $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, f derivabile in A

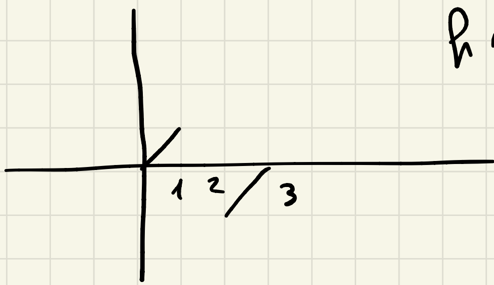
b) In generale $\Leftarrow$ l'implicazione non val se I non è un intervallo.

Basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ x-3 & x \in (0,3) \end{cases}$$

f derivabile in $(0,1) \cup (2,3)$

$f'(x) = 1 \quad \forall x \in (0,1) \cup (2,3)$



f non è monotona crescente

Come nel caso precedente

APPLICAZIONE : provare che

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

Sia $\quad f(x) = \sin x - x$

f è derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

poiché $\cos x \leq 1$

f è decrescente in $\mathbb{R}$

Quindi

$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) = 0$

$\Rightarrow \sin x - x \leq 0$

$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$

2) Provare che $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|\sin x| \leq x \qquad \forall x \geq 0$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{se } \sin x > 0 \\ -\sin x & \text{se } \sin x < 0 \end{cases}$$

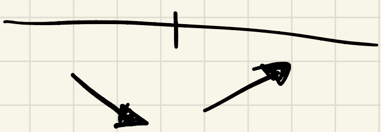
$$f(x) = \frac{1}{4-x^2}$$

max, min locali di f nel suo dominio

Dominio è $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot -2x}{(4-x^2)^2} = \frac{2x}{(4-x^2)^2} = 0 \qquad x = 0$$

$$f'(x) \geq 0 \qquad \frac{2x}{(4-x^2)^2} \geq 0$$



min locale

2) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ max e min locali in D

$D = \mathbb{R} \setminus - \{\pm 2\}$ Derivabile in D perché rapp di f derivabili

$$f'(x) = \frac{x^2-4-(x-2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$\frac{x^2-4-2x^4+4x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2+4x-4}{(x^2-4)^2} = \frac{-(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2} = 0$$

NON ESISTONO MASSIMI E MINIMI

f é derivabile in $x_0 \in I$

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$

$\exists$ in $\mathbb{R}$ $\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}$

PROPOSIZIONE 1

f derivabile in un intorno di x_0, tranne al più x_0 ⓐ

f continua in x_0 ⓑ

$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ ⓒ

$\Rightarrow$ f é derivabile in x_0 e $f'(x_0) = L$.

PROPOSIZIONE 2

f derivabile in un intorno di x_0, tranne al più x_0 ⓐ

$\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty \; (-\infty)$ ⓑ

$\Rightarrow$ f non é derivabile in x_0

Nota: PROP 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f é derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ poichè

$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

Se lim $f'(x)$ NON ESISTE LE PROPOSIZIONI NON CI AIUTANO

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f'(0+\delta) - f(0)}{\delta}$$

28.03.2023 (AUDIO 29)

Esercizi :

1) $f(x) = |\log x|$

Max e Min assoluti di f nel suo dominio D

$\Rightarrow \nexists$ max e ~~min ass di f~~ in $\mathbb{R}^+$ NO NON VA BENE

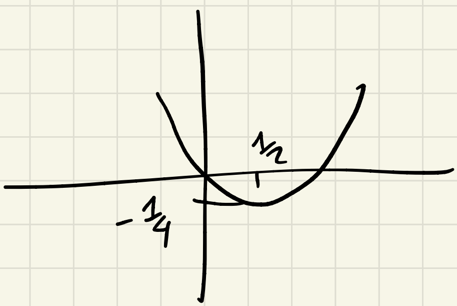
$$f(x) = \begin{cases} \log x & x \geq 1 \\ -\log x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$y = |\log x|$

f è derivabile $\forall x$ $x \neq 1$
poiché comp. di funz deriv.

$x = 1$

2) $f(x) = x^2 - x$

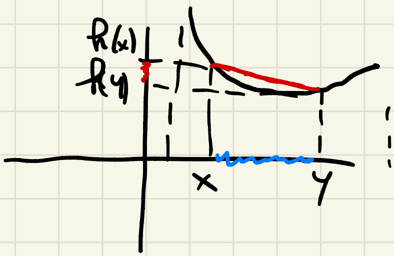


FUNZIONI CONCAVE E CONVESSE

$f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

(concava)

Si dice che f è convessa in I se $\forall x, y \in I$ il segmento di estremi $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ non ha punti sotto (sopra) il grafico di f



CONVESSE

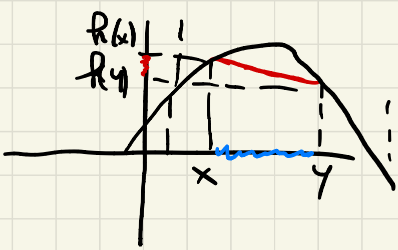
concava

f è convessa in I se $\forall x, y \in I$ $\forall t \in [0,1]$

$$\underline{f((1-t)x+ty)} \le \underline{(1-t)f(x)+tf(y)}$$

$\geq$

SI ROVESCIA



CONCAVA

Teorema: $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo f convessa o concava in I

Allora

a) f é continua in I tranne al più gli estremi di I

b) f ammette derivata destra e derivata sinistra in tutti i punti interni ad I

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b)

$f': (a,b) \to \mathbb{R}$ FUNZIONE DERIVABILE PRIMA

$x \longmapsto y = f'(x) = g(x)$

Se $g = f'$ é derivabile in (a,b), allora

$\exists\, g' = (f')' = f''$ DERIVATA SECONDA di f

$f \in C^m((a,b))$ $m \in \mathbb{N}$

si legge "f di CLASSE C^m in (a,b)"

f é derivabile fino all'ordine m con derivate continue in (a,b)

Teorema : $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

f sia derivabile due volte in (a,b)

Allora

f é convessa in $(a,b) \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

f é concava in $(a,b) \iff f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

Si dice che x_0 é un punto di FLESSO per f se :

a) $\exists$ una tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

b) a destra e a sinistra di x_0 la concavitá della funzione é opposta

Teorema : $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

f derivabile 2 volte in (a,b)

$x_0 \in (a,b)$ punto di flesso

$\Rightarrow f''(x_0) = 0 \qquad \not\Leftarrow \qquad f(x) = x^4$

Teorema: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$

f derivabile m-volte in x_0 $\qquad m \in \mathbb{N}$

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots f^{(m-1)}(x_0) = 0$, $f^{(m)}(x_0) \neq 0$

Allora

m PARI:
- $f^{(m)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min locale per f
- $f^{(m)}(x_0) < 0 = x_0$ max locale per f

m dispari $\Rightarrow x_0$ né max né min locale per f

(x_0 flesso per f)

1) $f(x) = x^4 + 1$

$f'(x) = 4x^3 = 0 \iff x = 0$

$f''(x) = 12x^2 = 0$

$f'''(x) = 24x = 0$

$f^{IV}(x) = 24 \neq 0 \qquad m = 4$ PARI $\to$ MIN LOCALE

POLI. (AUDIO 30)

FORME INDETERMINATE $\rightarrow \frac{0}{0}$, $\rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

Primo teorema di De L'hopital : $-\infty \le a < b \le +\infty$

$f, g : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

① $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in [a,b]$

② f e g derivabile in (a,b) con $g'(x) \neq 0$ vicino ad x_0

③ $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

$\hookrightarrow$ DA LAGRANGE

Esempio:

1) $\lim_{x \to 1} \frac{5x^3 - 8x^2 + 4x - 1}{x^2 - 3x + 2} \overset{H}{=} -3$

$\overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{15x^2 - 16x + 4}{2x - 3} = -3$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} =$

$1 - \cos x \neq 0$

$\cos x \neq 1$

$x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Secondo teorema di De L'hopital $\quad -\infty \leq a < b \leq +\infty$

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tali che

① $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty, \quad x_0 \in [a,b]$

② f e g derivabile in (a,b) con $g'(x) \neq 0$ vicino ad x_0

③ $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

$\to$ DA LAGRANGE

Esempio

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{\gamma x}} = 0 \qquad \gamma > 0$

$\lim_{x \to +\infty} = \frac{1}{e^{\gamma x} \cdot \gamma} = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \log x = \cancel{0 \cdot \infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x^2}{1 + x^2}$$

29.03.2023 (AUDIO 31)

STUDIO DEL GRAFICO DI f

1) Dominio
2) Simmetrie e periodicità
3) segno e intersezione con gli assi
4) limiti
5) derivabilità e max/min, monotonia
6) concavità flessi

1) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$

$D = \mathbb{R}$

segno e intersezione con gli assi

$f(x) \geq 0$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \geq 0$$

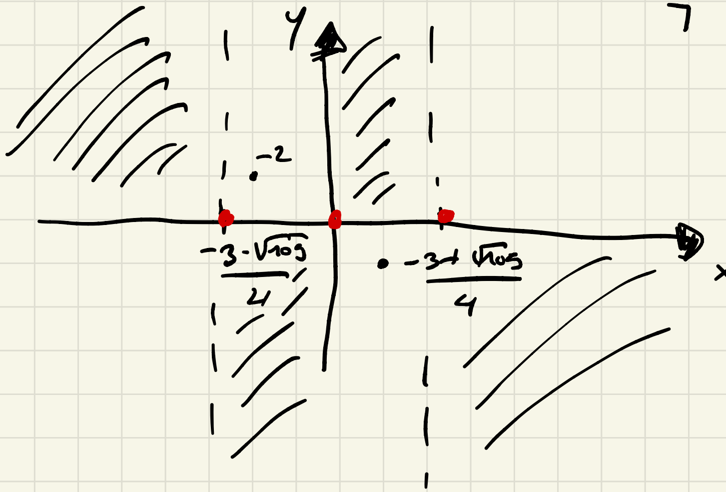
$$x\left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} - 2\right)$$

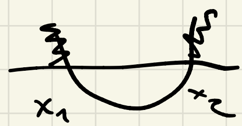
$$x\left(2x^2 + 3x - 12\right) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 12 \geq 0 \end{cases}$$

$$2x^2 + 3x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+96}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4}$$





$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \iff f(x) = 0$$

$x = 0,\ x = x_1,\ x = x_2$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$

limiti

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) = +\infty$$

∄ asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

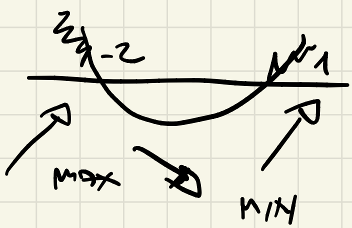
5) derivabilità e max/min, monotonia

f é derivabile in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = x^2 + x - 2 \quad \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$f'(x) \geq 0$$



6) flessi, concavità