CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

ANALISI MATEMATICA 2

ESERCIZI SU

DOMINI E LIMITI IN COORDINATE POLARI PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Esercizio 1.
Determinare e rappresentare graficamente il dominio delle seguenti funzioni:

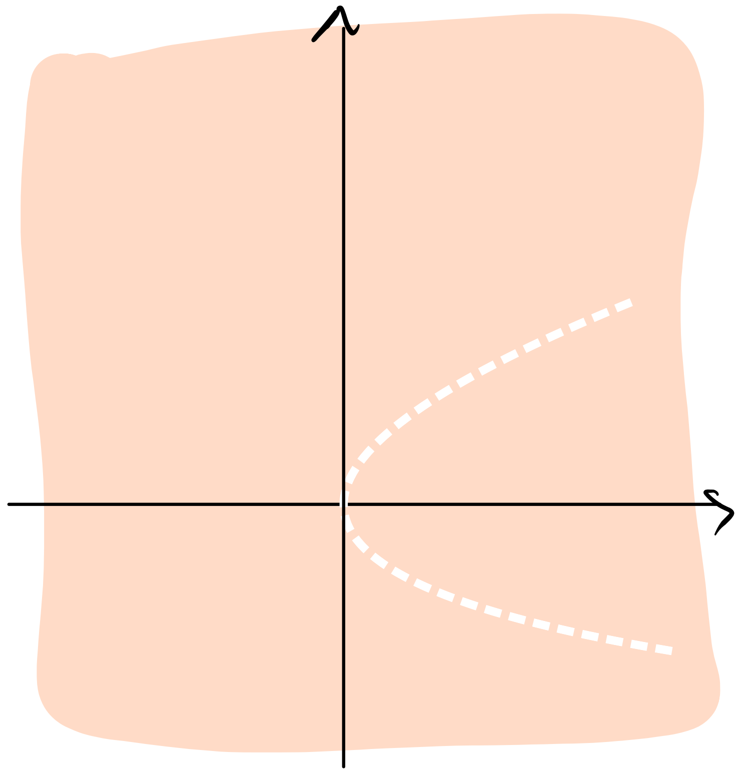
1. $f(x,y) = \dfrac{x-3y+7}{x-y^2}$
2. $f(x,y) = \arccos\left(\dfrac{x^2}{4} + y^2 - 2\right)$
3. $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2}$
4. $f(x,y) = \sqrt{xy-1} \cdot \log(5-2x-2y)$
5. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\log(1-x^2-y^2)}$
6. $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$
7. $f(x,y) = \sqrt[4]{\dfrac{y-x^2}{y-2x^2}}$

Esercizio 2.
Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2}}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^4+y^4)^2}$

① $f(x,y) = \dfrac{x-3y+7}{x-y^2}$

$x - y^2 \neq 0$



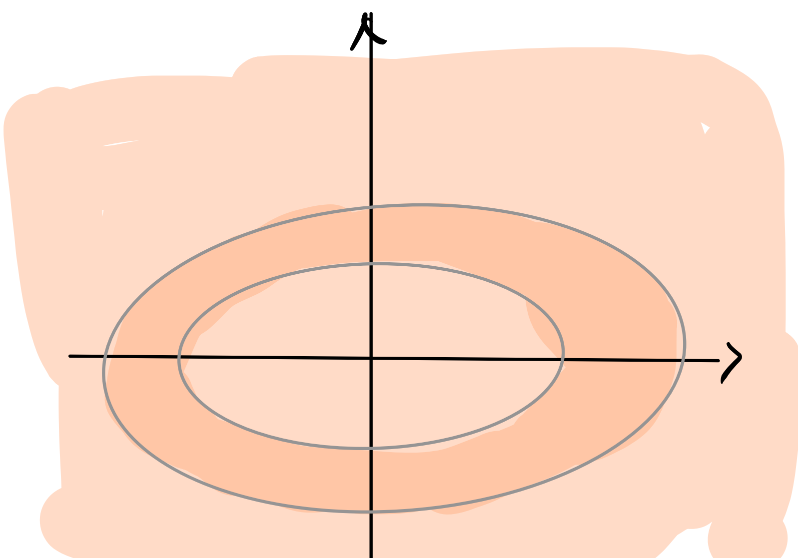
② $f(x,y) = \arccos\left(\dfrac{x^2}{4} + y^2 - 2\right)$

$-1 \le \dfrac{x^2}{4} + y^2 - 2 \le 1$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 \ge -1 \Rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 3 \end{cases}$$

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 \ge 1$

$\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{3} \le 1$

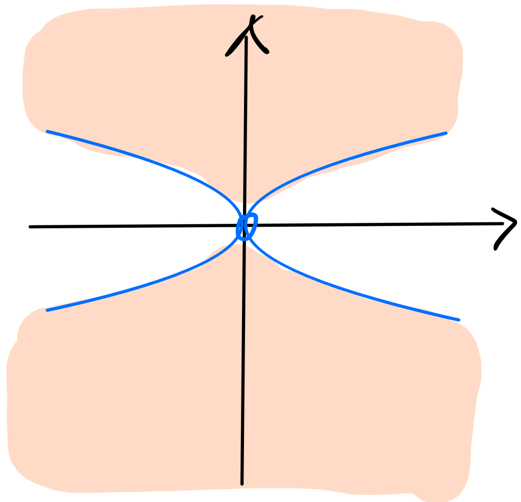


③ $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right)$ $\qquad y \neq 0$

$\frac{x}{y^2} \leq 1 \qquad \frac{x}{y^2} \geq -1$

$x \leq y^2 \qquad x \geq -y^2$

$x - y^2 = 0 \qquad x + y^2 = 0$



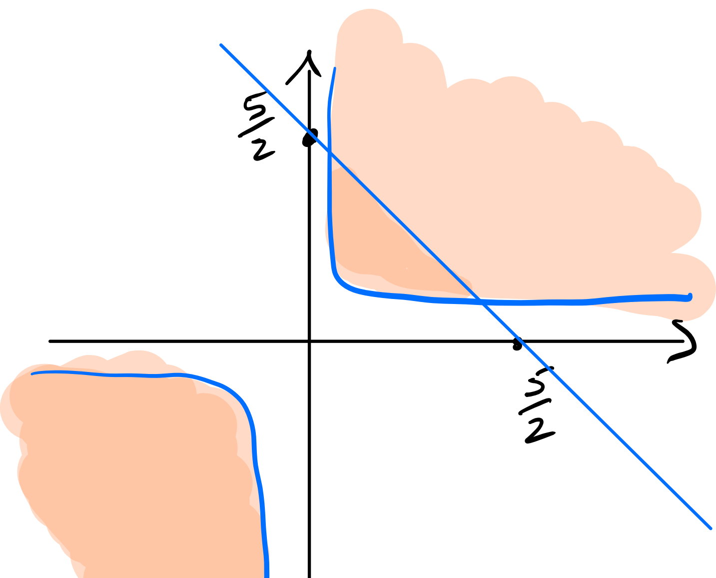
④ $f(x,y) = \sqrt{xy-1} \cdot \log(5-2x-2y)$

$$\begin{cases} xy-1 \geq 0 \\ 5-2x-2y \geq 0 \end{cases}$$

$xy \geq 1 \qquad x+y-\frac{5}{2} \leq 0$

$y - \frac{1}{x} \leq 0 \qquad x+y \leq \frac{5}{2}$

$y - \frac{1}{x} = 0 \qquad x+y = \frac{5}{2}$

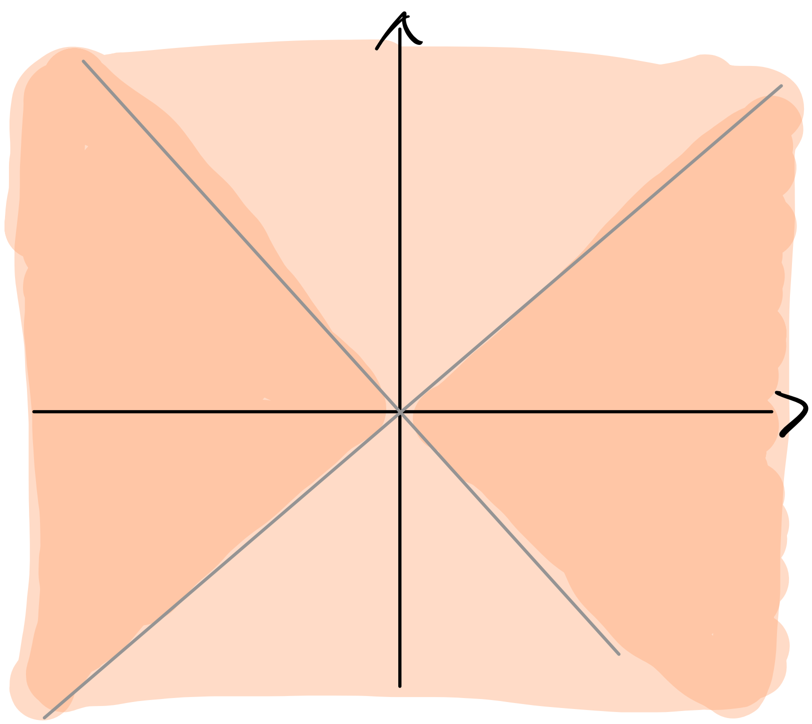


5

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\log(1 - x^2 - y^2)}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \ge 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \ge 0 \Rightarrow x \ge y \\ x^2 + y^2 \ge -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = -1 \end{cases}$$



(6)

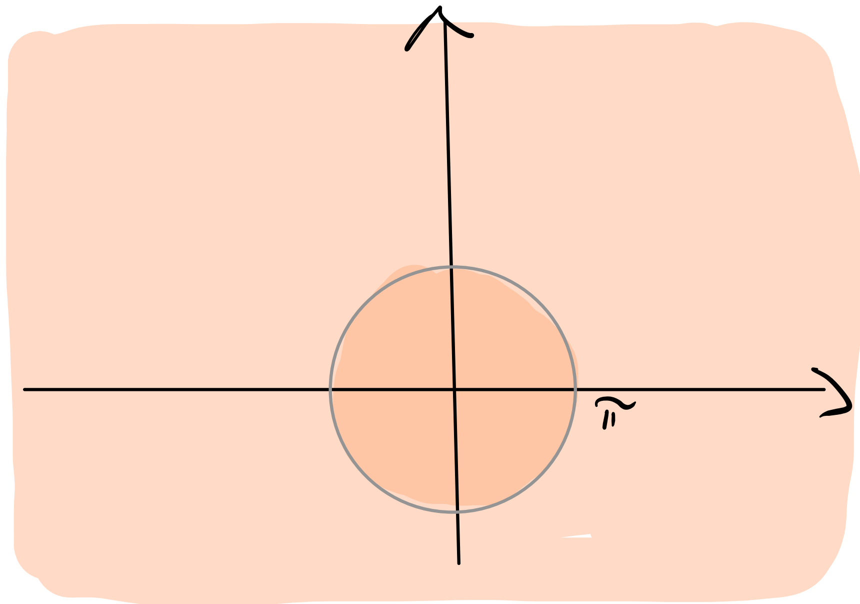
$\sin(x^2+y^2) \geq 0$

$f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

$0 \leq x^2 + y^2 \leq \pi$

$x^2+y^2 \geq 0$

$x^2+y^2 \leq \pi$



(7)

$y - 2x^2 \neq 0$

$\dfrac{y-x^2}{y-2x^2} \geq 0$

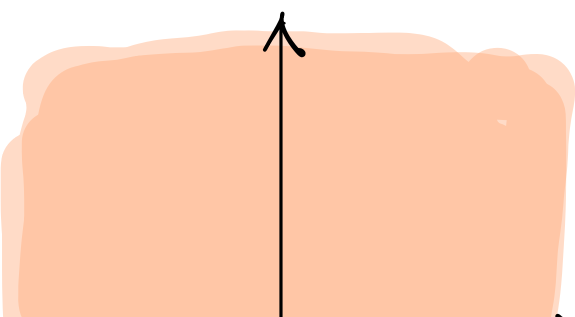
$f(x,y) = \sqrt[4]{\dfrac{y - x^2}{y - 2x^2}}$

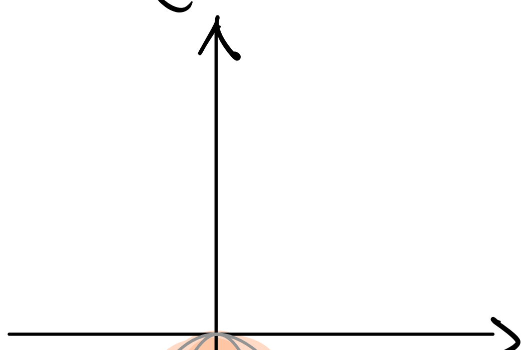
$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ y - 2x^2 \geq 0 \end{cases}$

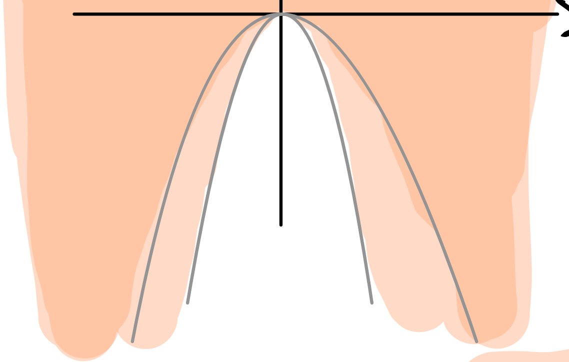
$\begin{cases} y - x^2 \leq 0 \\ y - 2x^2 \leq 0 \end{cases}$

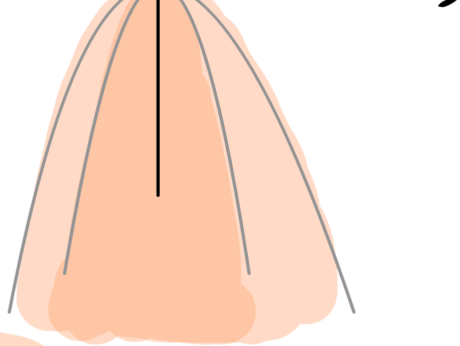
$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \geq 2x^2 \end{cases}$

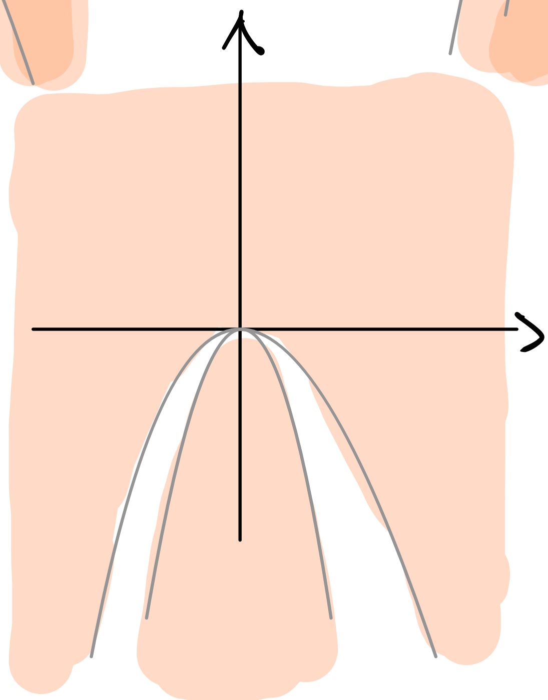
$\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \leq 2x^2 \end{cases}$











$D: x,y \neq (0,0)$

①

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^5 \cos^2\theta \cdot \sin^3\theta}{\rho^4} = \rho \cos^2\theta \cdot \sin^3\theta =$$

$$0 \leq \left| \rho \cos^2\theta \cdot \sin^3\theta \right| = |\rho| \cdot |\cos^2\theta| \cdot |\sin^3\theta| \leq |\rho| \xrightarrow{} 0 = 0$$

②

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(x-1)(y-1)+(y-1)^2}} =$$

$$\begin{cases} y = \rho\cos\theta + 1 \\ x = \rho\sin\theta + 1 \end{cases} \qquad \frac{\rho\sin^2\theta \cdot \rho^2\cos\theta}{\sqrt{\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\sin\theta\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta}}$$

$$\frac{\rho^3\sin^2\theta\cos\theta}{\rho\sqrt{\sin\theta\cos\theta+1}} = \frac{\rho^2\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta+1}}$$

$$0 \leq \left|\frac{\rho^2\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta+1}}\right| \leq \frac{\rho}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta+1}} \leq \sqrt{2}\,\rho^2 \searrow 0$$

$$\Rightarrow 0$$

(3)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\,\rho^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$0 \le \left|\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\sin\theta\cos\theta)\right|$$

$$\le \rho^2\underbrace{(|\cos^2\theta| + |\sin^2\theta|)}_{\le 2}\underbrace{(|\sin\theta|\cdot|\cos\theta|)}_{\le 1}$$

$$\le 2\rho^2 \to 0$$

$$\Rightarrow 0$$

(4)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^4+y^4)^2} = \lim_{\rho\to(0,0)} \frac{\cancel{\rho^4}\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}{\cancel{\rho^8}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)^2} = \lim_{\rho\to(0,0)} \frac{1\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}{\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)^2}$$

$$\theta = 0 \quad \lim_{\rho\to(0,0)} \frac{1\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}{\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)^2} \to 0$$

$$\Rightarrow \nexists$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \lim_{\rho\to(0,0)} \frac{1\cdot\frac{1}{4}}{\rho^4\left(\frac{1}{\rho}\right)^2} \to +\infty$$

Corso di Laurea in Informatica Applicata

Analisi Matematica 2

Esercizi su

Domini di funzioni di più variabili

1. Il dominio della funzione $f(x,y) = \log(1-x^2) - \log(9-y^2)$ è

   (A) limitato   (B) illimitato

   (C) $\emptyset$ (D) chiuso

2. Il dominio della funzione $f(x,y) = x\big(y - \log x\big)$ è

   (A) una retta   (B) un semipiano

   (C) un piano   (D) una semiretta

3. Il dominio della funzione $f(x,y) = \log(9x^2+y^2)$ è

   (A) $\mathbb{R}^2$ (B) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-3,0)\}$

   (C) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (D) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(3,0)\}$

4. Il dominio della funzione $f(x,y) = \log\sqrt{xy}$ è

   (A) illimitato   (B) limitato

   (C) nè aperto nè chiuso   (D) chiuso

5. Il dominio della funzione $f(x,y) = e^{\sqrt{4-x^2-4y^2}}$ è

   (A) $\mathbb{R}$ (B) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \geq 4\}$

   (C) $\mathbb{R}^2$ (D) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \leq 4\}$

6. Il dominio della funzione $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$ è

   (A) $\mathbb{R}$ (B) $\mathbb{R}^2$

   (C) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (D) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\}$

7. Il complementare del dominio della funzione $f(x,y) = \dfrac{x\sqrt[3]{x^2-y}}{y}$ è

   $\begin{cases} y \neq 0 \\ x^2 - y \geq 0 \end{cases}$

   (A) un punto   (B) $\emptyset$

   (C) una parabola   (D) una retta

8. Il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt[3]{y-x^2}$ è

   (A) $\mathbb{R}^2$ (B) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$

   (C) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ (D) $\mathbb{R}$

9. Se A e B sono, rispettivamente, i domini delle funzioni $f(x,y) = \log(x^2+9y^2-1)$ e $g(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+9y^2-1}}$, allora

   (A) $A \cap B = \emptyset$ (B) $A = B$

   (C) $B \subset A$ (D) $A \subset B$

10. Se A e B sono, rispettivamente, i domini delle funzioni $f(x,y) = e^{\frac{x-y}{2x-y^2}}$ e $g(x,y) = \sqrt{2x-y^2}$, allora

    (A) $A \subset B$ (B) $A = B$

    (C) $A \cap B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x > y^2\}$ (D) $B \subset A$

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

ANALISI MATEMATICA 2

ESERCIZI SU

CURVE DI LIVELLO, LIMITI E CONTINUITÀ PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Esercizio 1.
Determinare e rappresentare graficamente il dominio e le curve di livello delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \dfrac{2y^2}{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = ye^{-x}$
3. $f(x, y) = \dfrac{1 + xy}{x^2}$
4. $f(x, y) = x(y - \log x)$
5. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{12} - 1$
6. $f(x, y) = \log(x^2 - y^2)$
7. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x - y^2}}$
8. $f(x, y) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
9. $f(x, y) = \tan(x^2 - y + 3)$

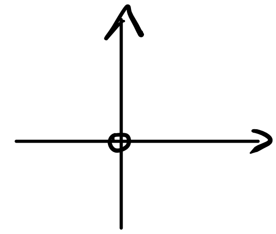
Esercizio 2.
Stabilire quale dei seguenti limiti esiste finito:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\log(2 - y)\sin^2 x}{x^2 + y^2 - 2y + 1}$

1. $f(x,y) = \frac{2y^2}{x^2+y^2}$

$x^2+y^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (0,0)$



$c = 0$

$$\frac{2y^2}{x^2+y} = 0 \iff y = 0$$

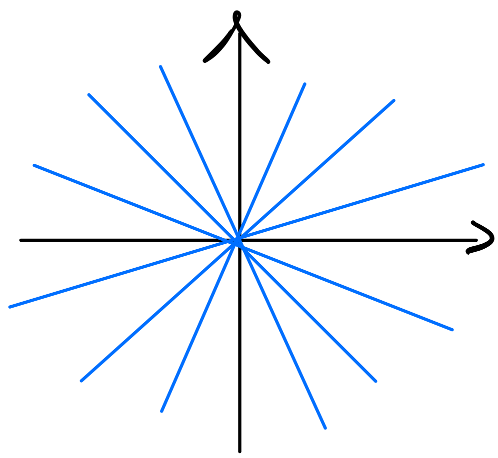
$c \neq 0$

$$\frac{2y^2}{x^2+y^2} = c \Rightarrow 2y^2 = (x^2+y^2)\cdot c \Rightarrow 2y^2 = cx^2 + cy^2$$

$$\Rightarrow cx^2 + (c-2)y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{y^2(c-2)}{c} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{y^2(c-2)}{c}}$$

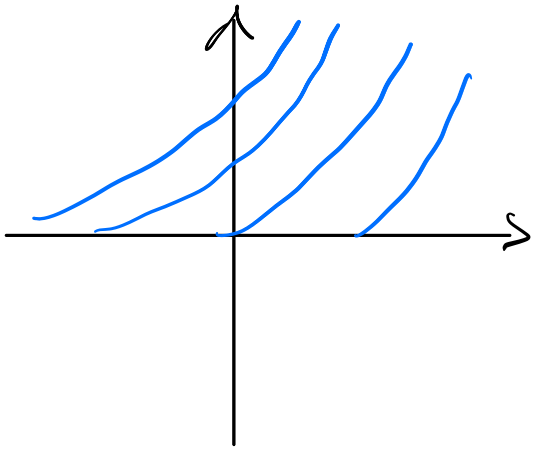
$$\Rightarrow x = \pm \frac{y\sqrt{c-2}}{\sqrt{c}}$$



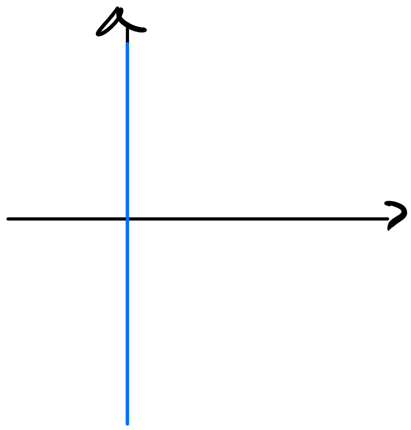
2 : $f(x,y) = ye^{-x}$ $\qquad D : \mathbb{R}^2$

$$z = c \Rightarrow c = y \cdot e^{-x} \Rightarrow y = c \cdot e^{x}$$

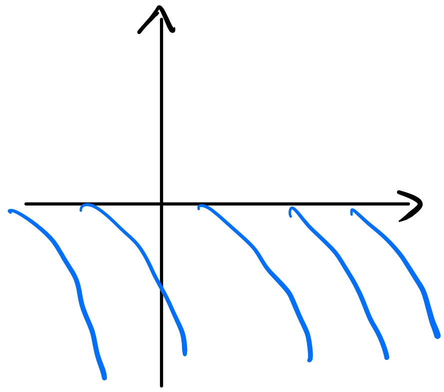
$c > 0$



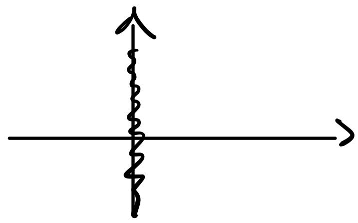
$c = 0$



$c < 0$



3. $f(x,y) = \dfrac{1+xy}{x^2}$ $\qquad x \neq 0$



$$\begin{cases} z = k \\ f(x,y) = \dfrac{1+xy}{x^2} \end{cases}$$

$$\frac{1+xy}{x^2} = k$$

$$1 + xy = kx^2$$

$$xy = kx^2 - 1$$

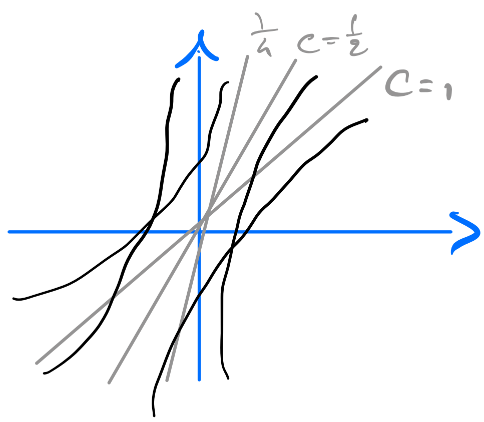
$k = 0$

$$xy = -1$$

$k \neq 0$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - cx \end{cases}$$

$$XY = -1$$

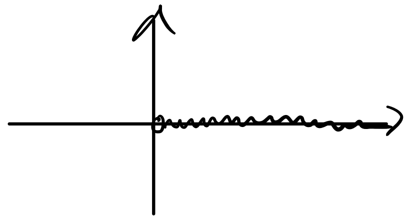


$$\begin{cases} x = 0 \\ y - cu = 0 \end{cases}$$

NUOVI ASSI DI RIFERIMENTO

4. $f(x,y) = x(y - \log x)$

$D: \quad x > 0$



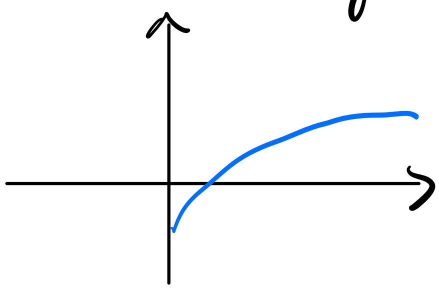
$$\begin{cases} z = k \\ f(x,y) = x(y - \log x) \end{cases}$$

$$x(y - \log x) = k$$

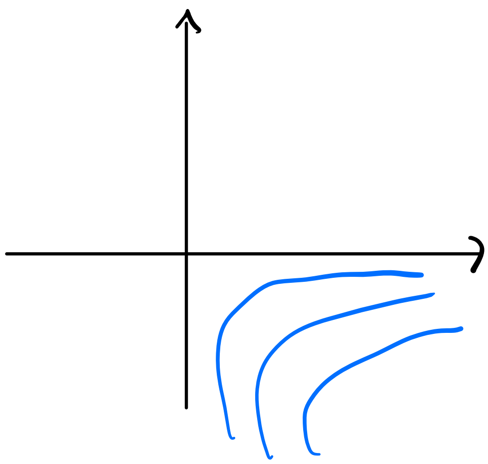
$$xy - x\log x = k$$

$$xy = x\log x + k$$

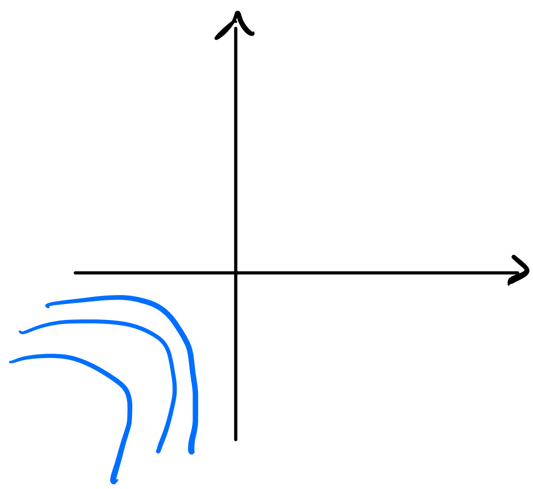
$k = 0 \qquad y = \log x$



$k > 0 \Rightarrow y > 0, \; x > 0$



$k < 0 \Rightarrow y < 0, \; x > 0$



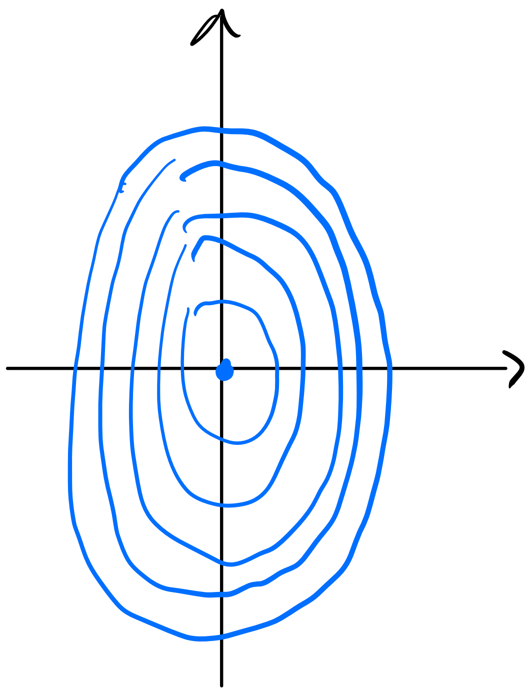
5. $f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} - 1$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} - 1 = k$$

$$\begin{cases} z = k \\ f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} - 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = k + 1$$

$$\frac{x^2}{9(k+1)} + \frac{y^2}{12(k+1)} = 1$$



$k > 1$ $$\frac{x^2}{\left(\sqrt{9(k+1)}\right)^2} + \frac{y^2}{\sqrt{12(k+1)}^2} = 1$$

$k = 1$ $(0, 0)$

$k < 1$ $\emptyset$

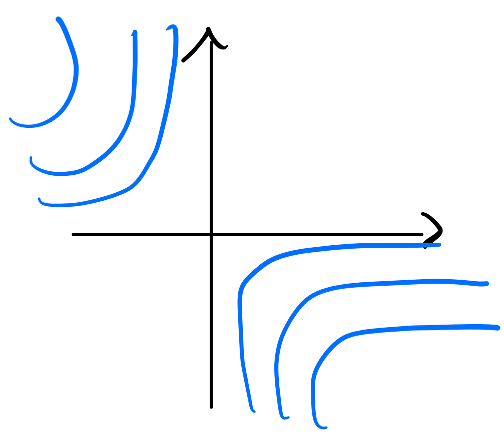
6. $f(x,y) = \log(x^2 - y^2)$

$x^2 - y^2 > 0$ $\quad x^2 > y^2$

$$\begin{cases} z = k \\ f(x,y) = \log(x^2 - y^2) \end{cases}$$

$$\log(x^2 - y^2) = k$$

$$x^2 - y^2 = e^k$$



$$\frac{x^2}{e^k} - \frac{y^2}{e^k} = 1$$

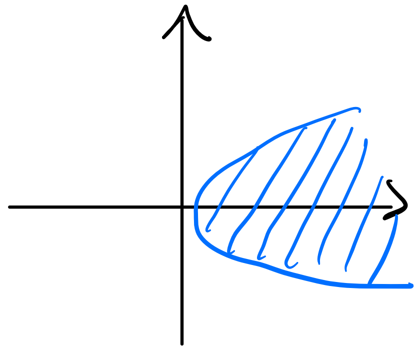
$$\frac{x^2}{(e^{\frac{k}{2}})^2} - \frac{y^2}{(e^{\frac{k}{2}})^2} = 1$$

7. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x - y^2}}$

$z > 0$

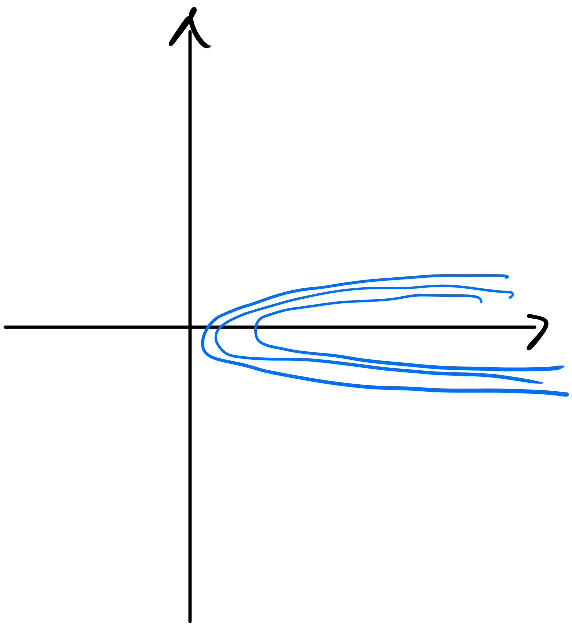
$x - y^2 > 0$

$x > y^2$



$$\begin{cases} z = k \\ f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x - y^2}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x - y^2}} = k$$



$\sqrt{x - y^2}\, k = 1$

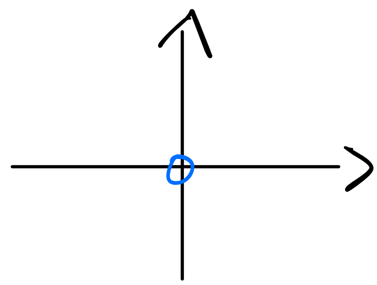
$(x - y^2) k^2 = 1$ $\qquad k^2 = h$

$x = y^2 + \dfrac{1}{k^2}$ $\qquad k \neq 0$

8. $f(x, y) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

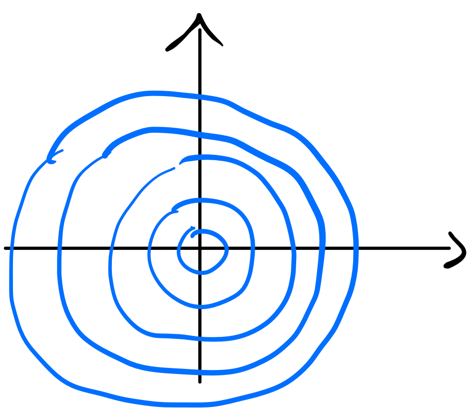
$z > 0$

$(x, y) \neq (0, 0)$



$$\begin{cases} z = k \\ f(x,y) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k$$

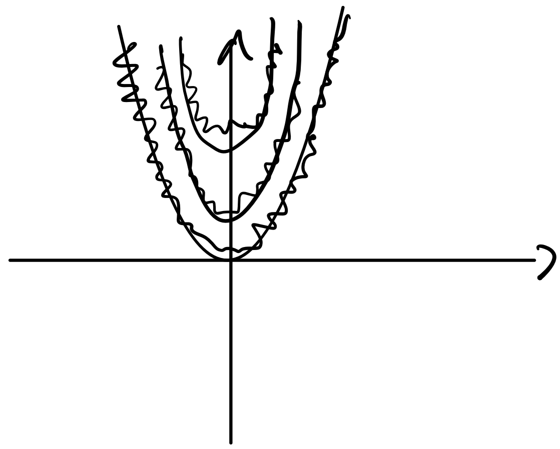


$3 = \sqrt{x^2 + y^2}\, k$

$9 = (x^2 + y^2) k^2$

$x^2 + y^2 = \left(\dfrac{3}{k}\right)^2$

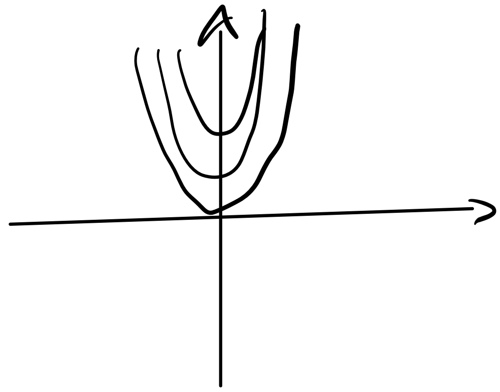
9. $f(x, y) = \tan(x^2 - y + 3)$



$$x^2 - y + 3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < c < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\tan(x^2 - y + 3) = c$$



$$x^2 - y + 3 = \arctan(c)$$

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$x = 0$ $\qquad \lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} 0 \to 0$

$y = x^2$ $\qquad \lim\limits_{(x,0)\to(x^2,0)} \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \nexists$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\log(2-y)\sin^2 x}{x^2+y^2-2y+1}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\log(2-y)\sin^2 x}{x^2+(1-y)^2}$$

$$\begin{cases} y = 1-\rho\cos\theta \\ x = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{\log(2-1-\rho\cos\theta)\cdot\sin^2(\rho\sin\theta)}{(\rho\sin\theta)^2+(\rho\cos\theta)^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\log(1-\rho\cos\theta)\cdot\sin^2(\rho\sin\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\log(1-\rho\cos\theta)\cdot\sin^2(\rho\sin\theta)}}{\cancel{\rho^2(-\cos\theta)}(\rho\sin\theta)^2}\, \frac{(-\cos\theta)(\rho\sin\theta)^2}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\log(1-\rho\cos\theta)\cdot\sin^2(\rho\sin\theta)}{\rho(-\cos\theta)\cdot(\rho\sin\theta)^2}\cdot -\rho\cos\theta\sin^2\theta \quad = 0$$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sqrt{|x^2-y^2|}}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|x^2-y^2|}}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\sin\theta\cdot\sqrt{|(\rho\sin\theta)^2-(\rho\cos\theta)^2|}}{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}\cdot\rho\cdot\sin\theta\sqrt{|\cos(2\theta)|}}{\rho^{\cancel{2}}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}}\cdot\sin\theta\sqrt{|\cos 2\theta|} \qquad \nexists$$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^x - y}{x - y + 1}$

$x = 0$ $\qquad \dfrac{1-y}{1-y} = 1$

$\Rightarrow \nexists$

$y = e^x$ $\qquad \dfrac{e^x - e^x}{x - e^x + 1} = 0$

3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|x^2-y^2|}}{x^2+y^2}$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^x-y}{x-y+1}$$

Esercizio 3.
Stabilire se le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio:

1. $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(y-\sin x)}{e^{y-\sin x}-1} & y>\sin x; \\ 1 & y\le \sin x. \end{cases}$$

2. $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0); \\ \frac{1}{2} & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

3. $$f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & y\neq 0; \\ 0 & y=0. \end{cases}$$

4. $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0); \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(y-\sin x)}{e^{y-\sin x}-1} & y > \sin x; \\ 1 & y \le \sin x. \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y-\sin x)}{e^{y-\sin x}-1} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{\sin(y-\sin x)}{y-\sin x}}^{\to 1} \cdot \overbrace{\frac{y-\sin x}{e^{y-\sin x}-1}}^{\to 1} = 1$$

$\Rightarrow$ CONTINUA

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0); \\ \frac{1}{2} & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1-\cos\rho}{\rho^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ CONTINUA

3. $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & y \neq 0; \\ 0 & y = 0. \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{y}\right) \le 1$$

$$-y^2 \le y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) \le y^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0 \Rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ CONTINUA

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^3}{x^2+y^2} =$$

?

Corso di Laurea in Informatica Applicata

Analisi Matematica 2

Esercizi su

Curve di livello di funzioni di due variabili

1. Le curve di livello della funzione $f(x, y) = x^2$ sono

   (A) circonferenze (B) ellissi

   (C) rette (D) iperboli

2. Le curve di livello della funzione $f(x, y) = (x + y)^2$ al livello $c = -4$ sono

   (A) la retta $y = 2 - x$ (B) le rette $y = \pm x$

   (C) $\emptyset$ (D) la retta $y = -x$

3. Le curve di livello della funzione $f(x, y) = \log(1 + x^2 y^2)$ al livello $c = 0$ sono

   (A) una retta (B) due iperboli

   (C) $\emptyset$ (D) due rette

4. Le curve di livello della funzione $f(x, y) = x(y - 2)$ sono

   (A) parabole (B) circonferenze

   (C) iperboli (D) ellissi

5. Le curve di livello della funzione $f(x, y) = \sqrt[3]{2(x-1)^2 + y^2}$ al livello $c = 1$ sono

   (A) un punto (B) un'ellisse

   (C) una circonferenza (D) $\emptyset$

6. La curva di livello della funzione $f(x, y) = 3x^2 - y$ al livello $c = 0$ NON è

   (A) una parabola con concavità verso il basso (B) una parabola con vertice in $(0, 0)$

   (C) una parabola con concavità verso l'alto (D) una parabola passante per il punto $(1, 3)$

7. Le curve di livello della funzione $f(x, y) = xy^2 + 1$ al livello $c = 1$ sono

   (A) gli assi cartesiani (B) la parabola $x = y^2$

   (C) due rette parallele (D) $\emptyset$

8. Le curve di livello della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 - x - y}$ al livello $c = -1$ sono

   (A) una retta (B) una parabola con vertice in $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$

   (C) $\emptyset$ (D) una parabola con concavità verso il basso

9. Tutte le curve di livello della funzione $f(x, y) = x + y$ sono

   (A) rette passanti per il punto $(0, 0)$ (B) rette perpendicolari alla retta $y = -x$

   (C) rette parallele alla retta $y = -x$ (D) rette perpendicolari alla retta $y = 2x$

10. Le curve di livello della funzione $f(x, y) = x^2 - 9y^2$ al livello $c = 0$ sono

    (A) $\emptyset$ (B) due rette

    (C) una circonferenza (D) un punto

Corso di Laurea in Informatica Applicata

Analisi Matematica 2

Esercizi su

Limiti e continuità

1. Sia $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{|x|^{2a}+y^2}$, $a\geq 0$, se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$. Allora la funzione f è continua in $(0,0)$ per

   (A) $a\geq 0$ (B) $a<2$
   (C) nessun valore di a (D) $a\geq 4$

2. Sia $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$. Allora $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

   (A) vale -1 (B) $\nexists$
   (C) vale 1 (D) vale 0

3. Siano $f(x,y)=2x^2+y^2+3xy$ e $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$. Allora

   (A) $\nexists$ massimo e minimo di f in E (B) $\exists$ massimo e minimo di f in E
   (C) $\nexists$ massimo e $\exists$ minimo di f in E (D) $\exists$ massimo e $\nexists$ minimo di f in E

4. Siano $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ e $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x^2\,, 0\leq x\leq 1\}$. Allora

   (A) $\nexists$ massimo e minimo di f in E (B) $\exists$ massimo e minimo di f in E
   (C) $\nexists$ massimo e $\exists$ minimo di f in E (D) $\exists$ massimo e $\nexists$ minimo di f in E

5. Siano $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ e $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq x\,, 0\leq x\leq 1\}$. Allora

   (A) $\nexists$ massimo e $\exists$ minimo di f in E (B) $\exists$ massimo e $\nexists$ minimo di f in E
   (C) $\exists$ massimo e minimo di f in E (D) $\nexists$ massimo e minimo di f in E

6. Sia $f(x,y)=\dfrac{x^2\sin y}{x^2+|y|^a}$ con $a\geq 0$. Allora $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

   (A) vale 0 solo per $a=0$ (B) $\nexists$ per ogni $a\geq 0$
   (C) vale 0 per ogni $a\geq 0$ (D) vale 0 solo per $a>0$

7. Siano $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2y^2}}$ e $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1\,, -2\leq y\leq 1\}$. Allora

   (A) $\exists$ massimo e $\nexists$ minimo di f in E (B) $\exists$ massimo e minimo di f in E
   (C) $\nexists$ massimo e $\exists$ minimo di f in E (D) $\nexists$ massimo e minimo di f in E

8. Sia $f(x,y)=\dfrac{x^2\sin y}{x^4+y^2}$. Allora $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

   (A) vale 0 (B) $\nexists$
   (C) vale -1 (D) vale $\frac{1}{2}$

9. Sia $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x}$. Allora $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

   (A) vale 0 (B) $\nexists$
   (C) vale 3 (D) vale 1

10. Sia $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{(x-1)^2 + y^2}$. Allora $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$

(A) vale -1
(B) $\nexists$
(C) vale 0
(D) vale 1

11. Sia $f(x,y) = \dfrac{(x-1)y}{(x-1)^2 + y^2}$. Allora $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$

(A) vale $\cos\theta \sin\theta$
(B) vale 0
(C) $\nexists$
(D) vale 1

12. Siano $f(x,y) = e^{x^2+3y^2}$ e $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \le 2\}$. Allora

(A) $\exists$ massimo e minimo di f in E
(B) $\nexists$ massimo e minimo di f in E
(C) $\nexists$ massimo e $\exists$ minimo di f in E
(D) $\exists$ massimo e $\nexists$ minimo di f in E

13. Siano $f(x,y) = \dfrac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ e $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 3\}$. Allora

(A) $\exists$ massimo e minimo di f in E
(B) $\nexists$ massimo e minimo di f in E
(C) $\nexists$ massimo e $\exists$ minimo di f in E
(D) $\exists$ massimo e $\nexists$ minimo di f in E

14. Sia $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$. Allora $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y)$

(A) vale 1
(B) vale 0
(C) vale ∞
(D) $\nexists$

15. Sia $f(x,y) = \dfrac{e^{xy^2} - 1}{x^2 + 2y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 1$. Allora è FALSO che

(A) $(0,0)$ è un punto di discontinuità eliminabile per f
(B) f è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$
(C) f non è continua in $(0,0)$
(D) f è continua in $(0,0)$

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

ANALISI MATEMATICA 2

ESERCIZI SU

DERIVATE PARZIALI, DIFFERENZIABILITÀ, PIANO TANGENTE, DERIVATE DIREZIONALI E POLINOMIO DI TAYLOR

Esercizio 1.
Stabilire se la funzione
$$f(x,y) = \sqrt[5]{y^3 \sin^2 x}$$
è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2.
Calcolare le derivate direzionali in $(0,0)$ della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

Esercizio 3.
Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & (x,y) = (0,0); \end{cases}$$
Allora
1. f è continua in $(0,0)$?
2. f è differenziabile?
3. f ammette derivate direzionali in $(0,0)$ lungo qualunque direzione?

Esercizio 4.
Data la funzione $f(x,y) = x^2 y + x e^y$ scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto $(e,1)$

Esercizio 5.
Data la funzione $f(x,y) = x^2 y + y^3 - 2xy^2 + x^3 - y$ stabilire il massimo valore delle derivate direzionali calcolate nel punto $(2,1)$; qual è la direzione corrispondente alla derivata trovata?

Esercizio 1.
Stabilire se la funzione
$$f(x,y)=\sqrt[5]{y^3\sin^2 x}$$
è differenziabile in $(0,0)$.

DIFF. TOTALE

$$\nabla f = \left\{ \frac{y^3 \sin(2x)}{5\left(y^3\cdot \sin^2(x)\right)^{\frac{4}{5}}},\ \frac{3y^2\cdot \sin^2(x)}{5\left(y^3\cdot \sin^2(x)\right)^{\frac{4}{5}}} \right\} \Rightarrow \text{DIFFERENZIABILE IN } D.$$

Esercizio 2.
Calcolare le derivate direzionali in $(0,0)$ della funzione
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0);\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

$v=(\cos\theta,\sin\theta)\qquad \theta\in[0,2\pi]$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h\cos\theta, h\sin\theta)-f(0,0)}{h}=\frac{h^2\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta}{\cancel{h}}=h\cos\theta\cdot\sin\theta \to 0$$

$0\leq |h\cos\theta\sin\theta|\leq |h| \to 0$

3

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0);\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y}{x^4+y^2}$$

$x=0 \to 0$

$y=x^2 \to \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \nexists$ NON CONTINUA

$$\nabla f = \left\{ \frac{3y(-2x^5+2xy^2)}{(x^4+y^2)^2},\ \frac{3x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2} \right\} \Rightarrow \text{DIFF. TOT.} \Rightarrow \text{DIFFERENZ.}$$

Esercizio 6.
Calcolare, se esiste, il piano tangente delle seguenti funzioni nel punto a fianco indicato:

1. $f(x,y) = \sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$ $\qquad P = (0,3)$
2. $f(x,y) = x^2 e^{x^2}\sqrt{y}$ $\qquad P = (1,0)$
3. $f(x,y) = e^x \sin y$ $\qquad P = (1,\pi)$
4. $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + x^3 y$ $\qquad P = (1,1)$
5. $f(x,y) = \sin(xy) + y^5$ $\qquad P = (0,1)$
6. $f(x,y) = e^{-7xy} + 7y^2$ $\qquad P = (0,1)$
7. $f(x,y) = 5x^3 + \sin(5y)$ $\qquad P = (1,0)$
8. $f(x,y) = 5x^4 + e^{-5y}$ $\qquad P = (1,0)$
9. $f(x,y) = 3x^2 y + \sin[3(y-1)]$ $\qquad P = (1,1)$
10. $f(x,y) = 3y^3 + e^{-3\sin x}$ $\qquad P = (0,1)$
11. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+3y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\qquad P = (1,1)$
12. $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{2}$ $\qquad P = (1,0)$
13. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+xy-y} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\qquad P = (1,2)$
14. $f(x,y) = x\sin(y)\text{arctg}(x^2+y^2+7xy-3)$ $\qquad P = (0,0)$.

Esercizio 7.
Sia

$$f(x,y) = e^{3x}\frac{\sqrt{y}}{x}.$$

1. Calcolare il gradiente di f nel punto $P = (1,1)$;
2. Determinare l'equazione della curva di livello C di f passante per P e calcolare il coefficiente angolare della retta tangente a C in P;
3. Verificare che il gradiente di f è perpendicolare a C in P.

Esercizio 8.
Supponiamo che il rilievo di una regione abbia la forma data in prima approssimazione dal grafico della funzione

$$f(x,y) = -3x^2 - e^{-2y} + 16.$$

Se un individuo si trova sulla superficie in corrispondenza del punto $P = (1,0,12)$ in che direzione e verso a partire da P dovrà spostarsi per perdere quota il più rapidamente possibile?

1. nella direzione della tangente alla curva di livello passante per il punto $(1,0)$.

1. $f(x,y) = \sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$ $\qquad P=(0,3)$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$$

$$f_x = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{|h|(h^2+9-4)}}{h} \quad \nexists$$

2. $f(x,y) = x^2 e^{x^2} \sqrt{y}$ $\qquad P=(1,0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 \cdot e^{(1+h)^2} \cdot 0}{h} = 0 \qquad \lim_{h \to 0} \frac{e \cdot \sqrt{h}}{h} \quad \nexists$$

3. $f(x,y) = e^x \sin y$ $\qquad P=(1,\pi)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{(1+h)} \cdot 0}{h} = 0 \qquad \lim_{h \to 0} \frac{e \cdot \sin(\pi+h)}{h} \overset{H}{=} -e$$

$$z = 0 + 0 + -e$$

2. nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (-6, 2)$
3. nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (-6, -2)$
4. nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (6, 2)$
5. nella direzione e verso del vettore $\vec{v} = (6, -2)$

Esercizio 9.
La temperatura nel piano xy è data da $T(x, y) = x^2 - y^2$.

1. Disegnare alcune curve isoterme
2. In quale direzione deve muoversi una formica che si trova nella posizione $(2, -1)$ se desidera raggiungere il caldo il più rapidamente possibile?
3. In quale direzione deve muoversi affinché percepisca una variazione nulla della temperatura?

Esercizio 10. Calcolare il polinomio di Taylor di secondo ordine nel punto $(2, 3)$ della funzione di due variabili

$$f(t, y) = (4t + 12y - t^2 - 2y^2 - 6)^{\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 12. Calcolare lo sviluppo di McLaurin arrestato al quarto ordine della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \exp(x - y).$$

Suggerimento: si utilizzino gli sviluppi noti per funzioni di una variabile.

Esercizio 13. Calcolare la variazione percentuale della frequenza naturale di un sistema massa-molla espressa come

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

se la massa m viene aumentata del 2% e la rigidezza k della molla viene diminuita dello 0.6%.

Esercizio 14. Un parallelepipedo rettangolo ha la dimensione dei suoi spigoli pari a

$$a = 1; \quad b = 2; \quad c = 5;$$

dove ogni misura è espressa in metri.

Il metro introduce un errore (sistematico) $\Delta m = \mp 1$ cm. La densità di volume del materiale di cui è costituito il parallelepipedo è pari a

$$\rho = 10 \mp 0,001 \ \text{Kg/m}^3.$$

Calcolare la massa del parallelepipedo considerato e l'errore (massimo) commesso.
Suggerimento: si utilizzi la formula di Taylor arrestandosi al primo ordine.

Corso di Laurea in Informatica Applicata

Analisi Matematica 2

Esercizi su

Derivabilità e differenziabilità per funzioni di più variabili

1. Il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \sin\sqrt{xy}$ in (0,0,0)

   (A) ha equazione $z = x$ (B) ha equazione $z = y$

   (C) ha equazione $z = 0$ (D) $\nexists$

2. La funzione $f(x,y) = \sqrt{x}e^y$ è

   (A) differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ (B) derivabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

   (C) continua in $\mathbb{R}^2$ (D) differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

3. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x + xy^2$ in (0,0,0) è

   (A) $z = x$ (B) $x = y$

   (C) $z = 0$ (D) $z = x + y$

4. La derivata parziale rispetto ad x della funzione $f(x,y) = \log(2x + y)$ in $(1,1)$ vale

   (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$

   (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

5. La funzione $f(x,y) = |x - 1|y$ nel punto (1,1)

   (A) è continua (B) è differenziabile

   (C) ammette derivate parziali rispetto ad x e ad y (D) è derivabile rispetto ad x

6. Il gradiente della funzione $f(x,y) = y(x + 1)$ è

   (A) $(y, x + 1)$ (B) $(y, 0)$

   (C) (y, x) (D) $(0, x)$

7. Il gradiente della funzione $f(x,y) = \cos x \sin y$ è

   (A) $(\sin x, -\cos y)$ (B) $(\sin x \sin y, \cos x \cos y)$

   (C) $(-\sin x \sin y, \cos x \cos y)$ (D) $(-\sin x, \cos y)$

8. La derivata parziale rispetto ad y della funzione $f(x,y) = \log(xy^2)$ è

   (A) $\dfrac{2}{xy}$ (B) $\dfrac{2}{y}$

   (C) $\dfrac{1}{xy^2}$ (D) $\dfrac{2x}{y^2}$

9. La funzione $f(x,y) = e^{\sqrt{y-x^2}}$

   (A) è derivabile in $(0,0)$ (B) ammette piano tangente in $(0,0)$

   (C) non è continua in $(0,0)$ (D) non è differenziabile in $(0,0)$

10. Il gradiente della funzione $f(x,y) = x\sqrt{y}$ è

    (A) $(\sqrt{y}, \dfrac{x}{2\sqrt{y}})$ (B) $(\sqrt{y}, \dfrac{1}{2\sqrt{y}})$

    (C) $(\sqrt{y}, \dfrac{x}{\sqrt{y}})$ (D) $(1, \dfrac{x}{2\sqrt{y}})$

Corso di Laurea in Informatica Applicata

Analisi Matematica 2

Esercizi su

Operatori differenziali

1. L'operatore divergenza trasforma un campo vettoriale in un

(A)	vettore	(B)	campo scalare
(C)	campo vettoriale	(D)	nessuna delle risposte precedenti

2. La divergenza del campo vettoriale $F(x,y) = (2xy + e^y, x^2 + xy)$ è data da

(A)	$(2x + e^y, 2x + y)$	(B)	$e^y - y$
(C)	$2y + x$	(D)	$(2y, x)$

3. L'operatore gradiente trasforma un campo scalare in un

(A)	campo scalare	(B)	numero
(C)	campo vettoriale	(D)	nessuna delle risposte precedenti

4. Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = (x, y, -2z)$, allora

(A)	$\operatorname{div} F = 0$ e $\operatorname{rot} F \neq \mathbf{0}$	(B)	$\operatorname{div} F \neq 0$ e $\operatorname{rot} F = \mathbf{0}$
(C)	$\operatorname{div} F \neq 0$ e $\operatorname{rot} F \neq \mathbf{0}$	(D)	$\operatorname{div} F = 0$ e $\operatorname{rot} F = \mathbf{0}$

5. Sia f una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Allora

(A)	∇f è un vettore	(B)	∇f è uno scalare
(C)	nessuna delle risposte precedenti	(D)	$\nabla f = f_x^2 + f_y^2$

6. Sia F un campo vettoriale di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Allora NON ha senso calcolare

(A)	$\operatorname{rot}\big(\operatorname{div} F\big)$	(B)	$\nabla\big(\operatorname{div} F\big)$
(C)	$\operatorname{div} F$	(D)	$\operatorname{div}\big(\operatorname{rot} F\big)$

7. Sia f una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. Allora ha senso calcolare

(A)	nessuna delle risposte precedenti	(B)	∇f
(C)	$\operatorname{div} f$	(D)	$\operatorname{rot} f$

8. Sia f una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. Allora NON ha senso calcolare

(A)	$\operatorname{rot}\big(\nabla f\big)$	(B)	$\operatorname{div}\big(\nabla f\big)$
(C)	nessuna delle risposte precedenti	(D)	$\operatorname{div} f$

9. Sia F un campo vettoriale di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Allora NON ha senso calcolare

(A)	$\operatorname{div} F$	(B)	nessuna delle risposte precedenti
(C)	$\operatorname{rot} F$	(D)	∇F

10. Siano u un campo scalare e G un campo vettoriale di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Allora $\operatorname{div}(uG)$ è uguale a

(A)	$\nabla u \cdot G + u \operatorname{div} G$	(B)	$\nabla u \cdot G$
(C)	$u \operatorname{div} G$	(D)	$\operatorname{div} G + u$

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

ANALISI MATEMATICA 2

ESERCIZI SU

MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI

Esercizio 1.
Determinare i punti critici e gli eventuali massimi, minimi relativi o selle delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = (x^2+2x+1)(x^2-y) + \frac{1}{2}(y^2+x^2) - xy$
2. $f(x,y) = |y|(1-x^2-y)$
3. $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$
4. $f(x,y) = x^2 y e^{-x^2-y^2}$
5. $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2 + 3x$
6. $f(x,y) = 3x^2[y^2 + \log\left(x^2 + \frac{3}{2}\right)]$
7. $f(x,y) = \log\left(\frac{x-y}{xy}\right)$
8. $f(x,y) = \sin(xy)$
9. $f(x,y,z) = xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$
10. $f(x,y,z) = z^2 - 18x^2 + 6xy - 4y^2 z\,.$

Esercizio 2.
Determinare i punti critici e gli eventuali massimi, minimi relativi o selle della funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione f nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}\,.$$

Esercizio 3.
Determinare i punti critici e gli eventuali massimi, minimi relativi o selle della funzione

$$f(x,y) = y(x^2+y^2-2y)\,.$$

1. $f(x,y) = (x^2+2x+1)(x^2-y) + \frac{1}{2}(y^2+x^2) - xy$ $\qquad D : \mathbb{R}^2$

$$x^4 - x^2y + 2x^3 - 2xy + x^2 - y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - xy$$

$$\nabla f \left(4x^3 + 6x^2 + 2x - 2xy - 3y \, , \; -x^2 - 3x + y - 1 \right)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 4x^3 + 6x^2 + 2x - 2xy - 3y = 0 \\ -x^2 - 3x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

2. $f(x,y) = |y|(1 - x^2 - y)$ =

NON E' DERIVABILE IN $y=0$ $\quad D: \mathbb{R}^2$

$$\nabla f = \left\{ -2|y|x \, , \, \frac{y(1-x^2-y)}{|y|} = \frac{y - yx^2 - y^2}{|y|} \right\}$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} -2|y|x = 0 \\ \dfrac{y - yx^2 - y^2}{|y|} = 0 \end{cases} \quad ?$$

3. $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$ $\qquad D: x \neq 0, y \neq 0$

$x^2 + 8y - xy^2$

$$\nabla f : \{ 2x - y^2 , 8 - 2xy \}$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ 8 - 2xy = 0 \end{cases} \qquad x = \frac{y^2}{2} \qquad x = \frac{4}{y} \qquad \frac{y^2}{2} = \frac{4}{y} \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$$

$(2,2) \in D \Rightarrow$ CRITICO

$$dH = \begin{vmatrix} 2 , & -2y \\ -2y , & -2x \end{vmatrix} = -4x - 4y^2 = -4(x + y^2)$$

SEGNO DET ?

Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione f nel dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}\,.$$

Esercizio 4.
Determinare i punti critici e gli eventuali massimi, minimi relativi o selle delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \dfrac{y^2 + x^2y + 8x}{xy}$
2. $f(x, y) = x^2 + \cos^2 y - 4\cos y + 4$
3. $f(x, y) = (x - 1)^2(2y^2 - 8y + 9 - x)\,.$

Determinare, inoltre, gli eventuali massimi e minimi assoluti di tali funzioni nel loro dominio.

Esercizio 5.
Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = \arccos\sqrt{4x + 5 - x^2 - y^2}$$

nel suo dominio.

Esercizio 6.
Un'azienda cinematografica deve decidere a quali prezzi (espressi in migliaia di Euro) x e y vendere due pellicole di film. Il ricavo previsto è descritto dalla funzione

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x^2y - 3x - y.$$

Nessuna pellicola viene ceduta gratuitamente e il prezzo x, che deve essere maggiore o uguale a y, può al massimo essere uguale a 5. Stabilire i prezzi che massimizzano il ricavo.

Esercizio 7.
Una ditta deve spendere una cifra di denaro pari a 90 euro per acquistare delle macchine di tipo A al prezzo di 3 euro l'una e delle macchine di tipo B al prezzo di 5 euro l'una. Supponiamo che acquisti x macchine A e y macchine B. Per avere la massima utilità, il prodotto xy deve essere massimo. Quante macchine di ogni tipo deve acquistare?

Esercizio 8.
Trovare il punto dell'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ più vicino alla retta $x + y - 4 = 0$.

Esercizio 9.
Tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio unitario, determinare:

1. quello di area massima
2. quello di perimetro massimo.

Esercizio 10.
Sia $a = (a_1, ..., a_n)$ un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$. Stabilire quali sono i punti di massimo o minimo su $\mathbb{R}^n$ di

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j x_i x_j\,.$$

Esercizio 11.
Determinare la distanza minima dell'origine dalla superficie $x^2yz = 2\,.$

Esercizio 12.
Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = x - y + z$ sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Esercizio 13.
Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = 4 - y$ sull'ellisse data dall'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 8$ con il piano $x + y + z = 1$.

Esercizio 14.
Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = xy^2 + z$ sotto i vincoli $x^2 + y^2 = 2$ e $z = x$.

Corso di Laurea in Informatica Applicata

Analisi Matematica 2

Esercizi su

Curve in $\mathbb{R}^n$

1. Una parametrizzazione della curva cartesiana di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4$ percorsa in senso antiorario è data da

(A)	$(2 + 3\cos t, 1 + 3\sin t)\,,\ t \in [0, 2\pi]$	(B)	$(3\sin t, 3\cos t)\,,\ t \in [0, 2\pi]$
(C)	$(3\cos t, 3\sin t)\,,\ t \in [0, 2\pi]$	(D)	$(\cos t, \sin t)\,,\ t \in [0, 2\pi]$

2. L'equazione della retta tangente alla curva di equazione parametrica $(t, t^3 + 1)\,,\ t \in [0, 2]\,,$ nel punto $(1, 2)$ è data da

(A)	$y = 3x$	(B)	$t = 3$
(C)	$(1, 3t^2)$	(D)	$y = 3x - 1$

3. Data la curva di equazione parametrica $(t, 2t, t^2)\,,\ t \in [0, 4]\,,$ è FALSA l'affermazione che

(A)	la curva è regolare	(B)	la curva non è chiusa
(C)	la curva è chiusa	(D)	la curva è semplice

4. Una parametrizzazione del ramo di parabola $y = x^2 - 1$, $x \in [-2, 4]\,,$ è data da

(A)	$(t, t^2)\,,\ t \in [-2, 4]$	(B)	$(1, t^2 - 1)\,,\ t \in [-2, 4]$
(C)	$(t, t^2 - 1)\,,\ t \in [-2, 4]$	(D)	$t = t^2 - 1$

5. La curva di equazione parametrica $(3\cos t, 2\sin t)\,,\ t \in (0, 2\pi)\,,$ è

(A)	un punto	(B)	un segmento
(C)	un'ellisse	(D)	una circonferenza

6. Una parametrizzazione del segmento del piano xy che congiunge i punti $(0, 1)$ e $(0, 5)$ è data da

(A)	$(t, 0)\,,\ t \in [1, 5]$	(B)	$x = 0$
(C)	$(0, t)\,,\ t \in [1, 5]$	(D)	$(0, t)$

7. Data la curva di equazione parametrica $(\cos t, \sin 2t)\,,\ t \in [0, 2\pi]\,,$ è FALSA l'affermazione che

(A)	la curva è chiusa	(B)	la curva è regolare
(C)	la curva non è chiusa	(D)	la curva è semplice

8. Un vettore tangente alla curva di equazione parametrica $\big(2e^t, -(t^2 + \log t)\big)$ è dato da

(A)	$(2e^t, \dfrac{2t^2+1}{t})$	(B)	$\sqrt{4e^{2t} + (t^2 + \log t)^2}$
(C)	$(2e^t, -\dfrac{2t^2+1}{t})$	(D)	$\nexists$

9. Una parametrizzazione del segmento del piano xy che congiunge i punti $(3, -1)$ e $(-1, 9)$ è data da

(A)	$(-1, t)\,,\ t \in [0, 9]$	(B)	$(t, -1)\,,\ t \in [-1, 3]$
(C)	$10x + 4y - 26 = 0$	(D)	$(3 - 4t, -1 + 10t)\,,\ t \in [0, 1]$

10. Il grafico della funzione $y = x^2$ con $x \in [-1, 1]$

(A)	non è una curva regolare	(B)	è una curva regolare
(C)	è una curva chiusa	(D)	non è una curva

Corso di Laurea in Informatica Applicata

Analisi Matematica 2

Esercizi su

Massimi e minimi per funzioni di più variabili

1. L'insieme dei punti stazionari della funzione $f(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2$ è costituito da

   (A) un unico punto (B) infiniti punti

   (C) solo tre punti (D) nessun punto

2. La funzione $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+y^2}$ nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 0\}$

   (A) ammette minimo assoluto diverso da 0 (B) non ammette minimo assoluto

   (C) ammette minimo assoluto pari a 0 (D) ammette massimo assoluto e non ammette minimo assoluto

3. L'insieme dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^3 + 2x^2y$ è costituito da

   (A) infiniti punti (B) nessun punto

   (C) un unico punto (D) solo due punti

4. L'insieme dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{y^3+xy^2}$ è

   (A) $\emptyset$ (B) una retta

   (C) una parabola (D) un punto

5. Il punto $(0,0)$ per la funzione $f(x,y) = x^2 + 6xy + 9y^2$ è un punto di

   (A) sella (B) massimo assoluto

   (C) minimo relativo (D) minimo assoluto

6. La funzione $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \geq 0\,, 0 \leq x \leq 1\}$

   (A) non ammette minimo assoluto (B) ammette minimo assoluto diverso da 0

   (C) non ammette massimo e minimo assoluti (D) ammette minimo assoluto pari a 0

7. La funzione $f(x,y) = x^2 \sin y$ nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$

   (A) ammette massimo e minimo assoluti (B) è illimitata

   (C) non ammette massimo assoluto (D) non ammette minimo assoluto

8. La funzione $f(x,y) = \log(1 + x^2y^2)$ nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,, y \geq 0\}$

   (A) non ammette massimo e minimo assoluti (B) ammette massimo assoluto

   (C) è limitata (D) ammette minimo assoluto

9. La funzione $f(x,y) = e^{xy}$ in $\mathbb{R}^2$

   (A) ammette massimo assoluto (B) non ammette minimo assoluto

   (C) ammette minimo assoluto (D) è limitata

10. Il punto $(0,0,0)$ per la funzione $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2$ è un punto di

   (A) minimo relativo (B) massimo assoluto

   (C) sella (D) massimo relativo

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

ANALISI MATEMATICA 2

ESERCIZI SU

INTEGRALI DOPPI

Esercizio 1.
Calcolare i seguenti integrali doppi:

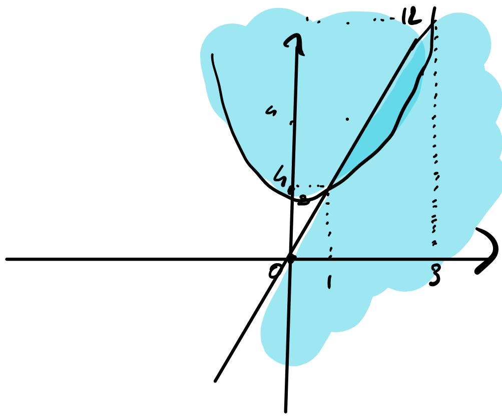
1. $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+3\le y\le 4x\right\}$
2. $\displaystyle\iint_D \frac{x}{2\sqrt{y}}\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le x\le 1, x^2\le y\le e^{2x}\right\}$
3. $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le y\le 1, 0\le x\le y^3\right\}$
4. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\ge 0, y\le 0, x^2+y^2\ge \tfrac{1}{2}, x\le 1+y\right\}$
5. $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad D=A\backslash B, \quad \text{con}$

   $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 4\right\} \quad \text{e} \quad B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$
6. $\displaystyle\iint_D x\cos|x^2-y|\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$
7. $\displaystyle\iint_D x(x^2+y^2)\,dx\,dy \;\text{dove}\; D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\ge 0, y\ge 0, x-1\le y\le x+1, x^2+y^2-5\le 0\right\}$
8. $\displaystyle\iint_D (y^2-x^2)\sin(x+y)\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | |y|\le x\le 2-|y|\right\}$
9. $\displaystyle\iint_D y\frac{\arcsin\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,dx\,dy$

   dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \frac{1}{4}\le (x-1)^2+(y-1)^2\le \frac{3}{4}\right\}$
10. $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x}{y}}\frac{2x-y}{y\sin^2(y-2x)}\,dx\,dy \quad \text{dove} \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y\le x\le 2y,\ 2x-\tfrac{\pi}{4}\le y\le 2x-\tfrac{\pi}{6}\right\}$
11. $\displaystyle\iint_D \frac{(x-y)\cos(x^2+y^2-2xy)}{(x+y)^2+3}\,dx\,dy$

    dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}+x\le y\le\sqrt{\pi}+x,\ \sqrt{3}-x\le y\le 3-x\right\}.$

1. $\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+3 \le y \le 4x\}$



$$\begin{cases} y = x^2+3 \\ y = 4x \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y = x^2+3 \\ y = 4x \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = 3 \quad y = 12 \\ x = 1 \quad y = 4 \end{array}$$

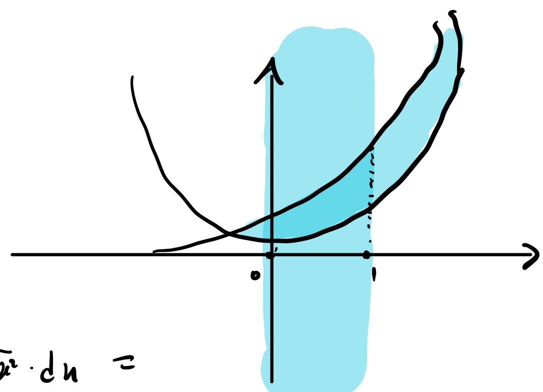
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,3],\ x^2+3 \le y \le 4x\}$$

$$\int_1^3 \left(\int_{x^2+3}^{4x} x \cdot \frac{1}{y}\, dy \right) dx = \int_1^3 x \log y \Big|_{x^2+3}^{4x} dx = \int_1^3 x \left(\log(4x) - \log(x^2+3) \right) dx =$$

$$= \int_1^3 x \log 4x\,dx - \int_1^3 x \log(x^2+3)\, dx = -\log(2) - 2 + \frac{9}{2} \log(12) - \left(\frac{1}{2} \left(12\log(12) - 8 - 8\log(2) \right) \right) =$$

$$= -\log(2) - 2 + \frac{9}{2} \log(12) - 6\log(12) + 4 + 4\log(2) = -\frac{3}{2}\log(12) + 2\log(2) + 2$$

2. $\iint_D \frac{x}{2\sqrt{y}}\,dx\,dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le e^{2x}\}$

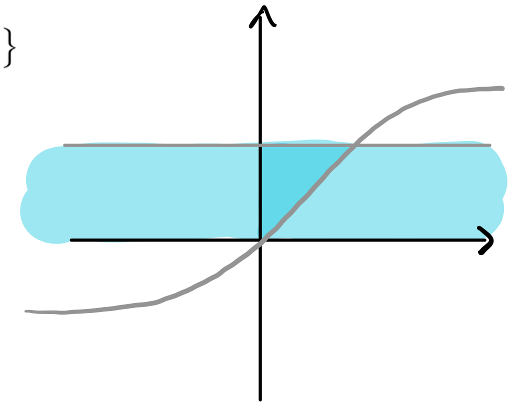


$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ x^2 \le y \le e^{2x}\}$$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{e^{2x}} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy \right) dx = \int_0^1 \cancel{\tfrac{1}{2}} x \cdot \cancel{2}\sqrt{y} \Big|_{x^2}^{e^{2x}} dx = \int_0^1 -x \cdot \sqrt{e^{2x}} + x\sqrt{x^2} \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 -x \cdot e^x + x^2\, dx = \int_0^1 -x e^x dx + \int_0^1 x^2 dx = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

3. $\iint_D e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y^3\}$



$y \in [0,1]$ $\quad 0 \le x \le y^3$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{y^3} e^{\frac{x}{y}}\, dx \right) dy = \int_0^1 y\left(e^{y^2} - 1\right) dy = \frac{e-2}{2}$$

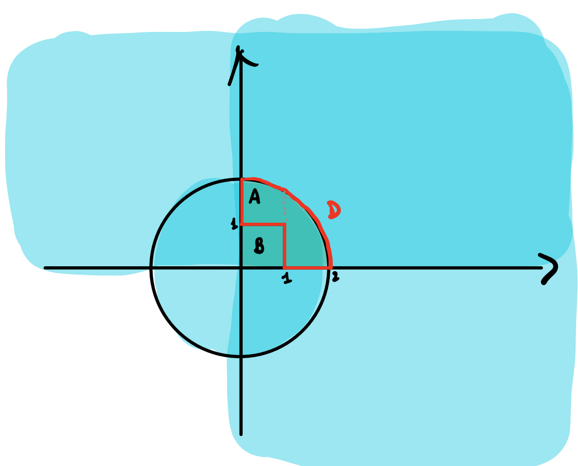
$t = \frac{x}{y}$ $\quad dt = \frac{1}{y}\, dx$ $\quad dx = y\, dt$

$$\int_0^{y^2} e^t \cdot y\, dt = y\left(e^{y^2} - 1\right)$$

. $\iint_D y\, dx\, dy$ dove $D = A \setminus B$, con

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 4\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

$$\begin{cases} y = \sin\theta \\ x = \cos\theta \end{cases}$$



$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\rho - \int_0^1 \left(\int_0^1 y\, dy \right) dx$$

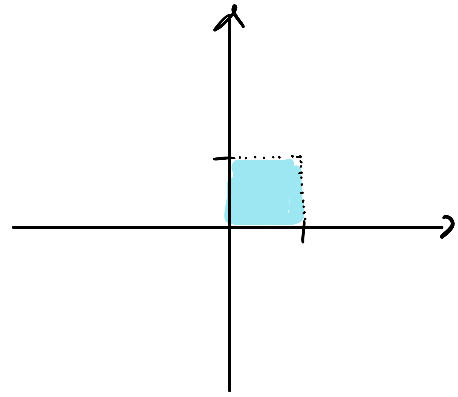
$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\rho = \int_0^2 \rho^2 \cdot -\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_0^2 \rho^2\, d\rho = 4$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 y\, dx \right) dy = \int_0^1 xy \Big|_0^1 = \int_0^1 y\, dy = 1$$

$$\Rightarrow 4 - 1 = 3$$

6. $\iint_D x\cos|x^2-y|\,dx\,dy$ dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

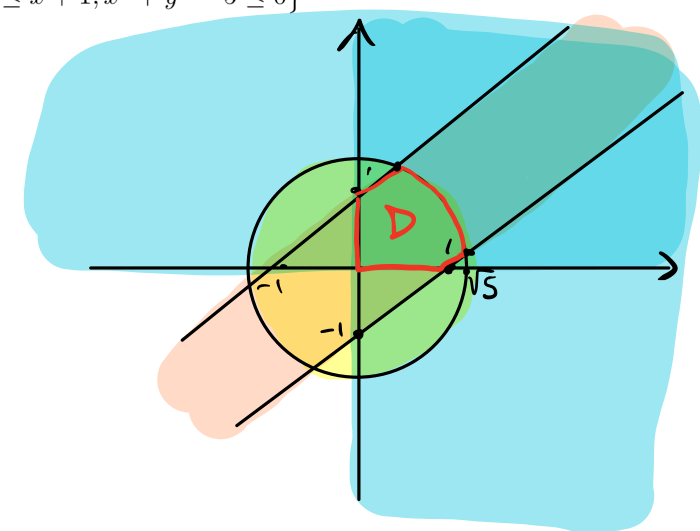
$x \in [0,1] \quad y \in [0,1]$



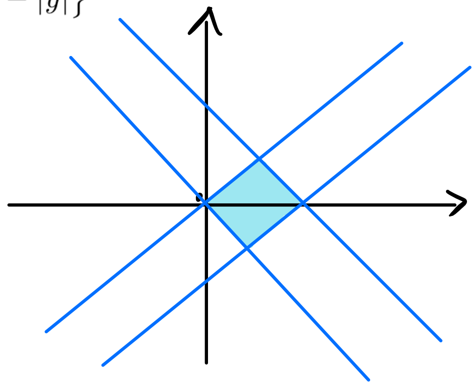
$$\int_0^1\left(\int_0^1 x\cos|x^2-y|\,dx\right)dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\sin(x^2-y)\,dy\,\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(1-y)-\sin(-y)\,dy = \frac{1}{2}\left(\cos(1-y)+\cos(-y)\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(1)\right)$$

7. $\iint_D x(x^2+y^2)\,dx\,dy$ dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\ge 0, y\ge 0, x-1\le y\le x+1, x^2+y^2-5\le 0\}$

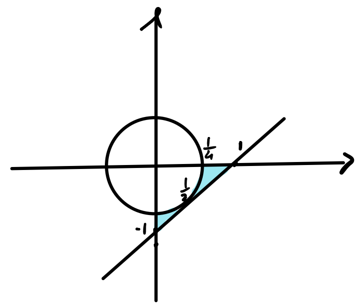


8. $\displaystyle\iint_D (y^2 - x^2)\sin(x+y)\,dx\,dy$ dove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y| \le x \le 2-|y|\}$



$0 \le y + x \le 2$

4. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ dove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \le 0, x^2+y^2 \ge \frac{1}{2}, x \le 1+y\}$



$x \in [0,1]$ $\qquad x - 1 \le y \le -\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}$

$$\int_0^1 \int_{x-1}^{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx =$$

Esercizio 2.
Calcolare i seguenti integrali impropri:

1. $\displaystyle\iint_D \frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}(4+x^2+y^2)}\,dx\,dy$ dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y\ge 0, x^2+y^2\le \frac{\pi^2}{4}, y\ge x\right\}$
2. $\displaystyle\iint_D (y+x)(x-y)^2 e^{(x-y)^3}\,dx\,dy$ dove
$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\ge 0, y\ge 0, x-1\le y\le x+1, y\ge 1-x\right\}$
3. $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+2}\,dx\,dy$ dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\ge 1, 0\le y\le 3, xy\le 9, x^2+y^2\ge 9\right\}$.

Esercizio 3.
Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono:

1. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+\cos^2 x)^3}\,dx\,dy$ dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\ge 4\right\}$
2. $\displaystyle\iint_D y e^{-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\,dx\,dy$ dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\ge 0, 0\le y\le x\right\}$
3. $\displaystyle\iint_D \frac{4}{(x^4+y^2)^4}\,dx\,dy$ dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\ge 16\right\}$
4. $\displaystyle\iint_D \arctan(1+x^2y^2)\sin\frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy$ dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\ge 1\right\}$.

Esercizio 4.
Calcolare il volume del solido che giace sotto la superficie $z=4-x^2-y^2$, sopra il piano xy e dentro il cilindro $(x-1)^2+y^2=1$.

Esercizio 5.
Sia $D=D_1\cup D_2$, dove

$D_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4\le x^2+y^2+z^2\le 8\right\}$ e $D_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 2, -\frac{5}{3}\le z\le\frac{5}{3}\right\}$.

Calcolare il volume di D.

Esercizio 6.
Dato il dominio

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le -|y|,\ 0\le z\le 9\right\},$$

calcolarne il volume.

Esercizio 7.
Calcolare il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse z compreso tra il piano $z=0$ e la superficie di equazione $z=x(x^2+y^2-1)$, che si proietta verticalmente nel disco di raggio 1 centrato nel punto $C=(1,0)$.

Esercizio 8.
Si consideri il solido

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4x^2+4z^2-1<y^2,\ 0\le y\le 2\right\}.$$

Si disegni Ω e se ne calcoli il volume.

Esercizio 9.
Calcolare l'area della regione di piano $D = \left\{ \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2, \frac{y^2}{2} \leq x \leq y^2 \right\}$.

Esercizio 10.
Calcolare l'area della regione di piano $D = \left\{ 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 2 \right\}$.

Corso di Laurea in Informatica Applicata

Analisi Matematica 2

Esercizi su

Integrali per funzioni di più variabili

1. Con il cambiamento di variabili $x = 2u + 5v$, $y = 4u + 3v$, l'elemento di area $dxdy$ diventa
   - (A) 0
   - (B) $14\,dudv$
   - (C) $-14\,dudv$
   - (D) $14uv\,dudv$

2. L'integrale della funzione $f(x, y) = 1$ esteso al dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1\,, 0 \le x \le \sqrt{y}\}$ è pari a
   - (A) $\sqrt{y}$
   - (B) 0
   - (C) -1
   - (D) $\frac{2}{3}$

3. Sia f una funzione continua in un rettangolo D. Allora
   - (A) $\int\int_D f(x, y)\,dxdy$ è l'area di D
   - (B) f non è integrabile in D
   - (C) $\int\int_D f(x, y)\,dxdy = +\infty$
   - (D) f è integrabile in D

4. L'integrale della funzione $f(x, y) = xy^2$ esteso al triangolo di vertici $(-3, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, 3)$ è pari a
   - (A) $\frac{81}{4}$
   - (B) $\frac{27}{5}$
   - (C) 27
   - (D) 0

5. L'integrale della funzione $f(x, y) = x - y$ esteso al dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$ è pari a
   - (A) $\frac{4}{5}$
   - (B) $\frac{9}{10}$
   - (C) 0
   - (D) $\frac{14}{15}$

6. Sia f una funzione continua in $[0, 1] \times [2, 3]$. Allora l'uguaglianza $\int_0^1 dx \int_2^3 f(x, y)\,dy = \int_2^3 dy \int_0^1 f(x, y)\,dx$
   - (A) dipende da f
   - (B) è falsa
   - (C) è vera solo se f è costante
   - (D) è vera

7. Sia D un dominio limitato e regolare di $\mathbb{R}^2$. Allora l'integrale della funzione $f(x, y) = 2$ esteso a D
   - (A) è un numero negativo
   - (B) è il doppio dell'area di D
   - (C) $\nexists$
   - (D) vale 0

8. Dati la funzione $f(x, y) = xy$ e il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le x^2\}$ è vero che
   - (A) $\nexists \int\int_D xy\,dxdy$
   - (B) $\int\int_D xy\,dxdy = \int_0^{x^2} dy \int_0^1 xy\,dx$
   - (C) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy\,dy = \int_0^{x^2} dy \int_0^1 xy\,dx$
   - (D) $\int\int_D xy\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy\,dy$

9. Il volume del solido compreso tra il piano xy e il grafico della funzione $f(x, y) = (x + y)^2$ in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 1\,, 0 \le y \le x\}$ è dato da
   - (A) 0
   - (B) $\int\int_D \Big((x + y)^2 - xy\Big)\,dxdy$
   - (C) $+\infty$
   - (D) $\int\int_D (x + y)^2\,dxdy$

10. L'integrale della funzione $f(x, y) = x^2y$ esteso al dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\,, 1 \le y \le 2\}$
    - (A) è uguale a $\int_1^2 dx \int_0^1 x^2y\,dy$
    - (B) $\nexists$
    - (C) è diverso da $\int_1^2 dy \int_0^1 x^2y\,dx$
    - (D) è uguale a $\int_0^1 dx \int_1^2 x^2y\,dy$

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

ANALISI MATEMATICA 2

ESERCIZI SU

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Esercizio 1.
Date le seguenti equazioni differenziali, stabilire qual è il loro ordine e se sono lineari o meno (nel caso in cui l'equazione risultasse lineare, dire se è omogenea/non omogenea e se è a coefficienti costanti/variabili):

1. $y' = xy(\log^2 y)$
2. $y'' + 2y' + 5y = e^x$
3. $e^x y'' + 5\sqrt{y} = 0$
4. $y' - \dfrac{y}{x} = x \cos x$
5. $yy' + 5 = 0$
6. $xy'' + y^2 = x$
7. $x^2 y'' + xy' - y = 0$
8. $y''' + 3y' = 0$
9. $(y')^2 + 3y' = 0$
10. $(\cos x) y^{(IV)} + y' = 0\,.$

Esercizio 2.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

1. $y' = e^{-y} \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $y' = y^2 + 2y - 3\,.$

Esercizio 3.
Risolvere il seguente problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale a variabili

1. $y' = xy(\log^2 y)$

2. $y'' + 2y' + 5y = e^x$

OMO: $\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0$ $\alpha_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i$

$y = c_1 \cdot e^{-x} \cdot \sin 2x + c_2 \cdot e^{-x} \cdot \cos 2x$

PAR :

$y = Ae^x$ $Ae^x + 2Ae^x + 5Ae^x = e^x$

$y' = Ae^x$ $8Ae^x = e^x$

$y = Ae^x$ $A = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{8}e^x$

GEN: $y = c_1 \cdot e^{-x} \cdot \sin 2x + c_2 \cdot e^{-x} \cdot \cos 2x + \frac{1}{8}e^x$

3. $e^x y'' + 5\sqrt{y} = 0$

$y'' = -\frac{5}{e^x} \cdot \sqrt{y}$ $\int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = -5 \int \frac{1}{e^x}\, dx$

$\Rightarrow 2\sqrt{y} = 5 \cdot \left(\frac{1}{e^x} + c\right) \Rightarrow y = \left(\frac{5\left(\frac{1}{e^x} + c\right)}{2}\right)^2$

4. $y' - \frac{y}{x} = x\cos x$ $\qquad y' = \frac{1}{x}\cdot y + x\cos x$

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int x\cos x\, e^{-\int \frac{1}{x}dx}\,dx + c\right] = x\cdot\left[\int x^2\cos x\,dx + c\right] = x\left[x^2\sin x - 2\int x\cos x\,dx + c\right] =$$

$$= x\left[x^2\sin x - 2\left(x\sin x + \cos x\right) + c\right] = x^3\sin x - 2x^2\sin x - 2x\cos x + xc$$

5. $yy' + 5 = 0$ $\qquad y=0$ NON È SOLUZIONE

$$y' = -5\frac{1}{y} \Rightarrow y' = -5x^0\frac{1}{y} \Rightarrow \int y\,dy = -5\int 1\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -5x \Rightarrow y = \sqrt{-10x}$$

6. $xy'' + y^2 = x$

$x=0 \Rightarrow y=0$

$x \neq 0$

$$y'' = -\frac{1}{x}y^2 + 1$$

$x=0$ È INCLUSA

$$y = e^{\int -\frac{1}{x}dx}\cdot\left[\int e^{\int \frac{1}{x}dx}\,dx + c\right] \Rightarrow -x\cdot\left[\frac{x^2}{2} + c\right] \Rightarrow -\frac{x^3}{2} - xc$$

7. $x^2y'' + xy' - y = 0$

8. $y''' + 3y' = 0$

$\alpha^3 + 3\alpha = 0$ $\alpha(\alpha^2 + 3) = 0$ $\alpha = 0\ ,\ \alpha = \pm 3i$

$y = C_1 \cdot \sin(3x) + C_2 \cos(3x) + C_3$

9. $(y')^2 + 3y' = 0$ $y' \leq 0$

$y' = 0$ $y = c$

$y' \neq 0$ $y' + 3 = 0$ $y' = -3$

$\int 1\, dy = \int -3\, dx$

$y = -3x + c$

10. $(\cos x)y^{(IV)} + y' = 0$.

Esercizio 2.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

1. $y' = e^{-y}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $y' = y^2 + 2y - 3\,.$

① $y' = e^{-y} \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int e^y \, dy = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \qquad \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x \, dx \\ \frac{1}{-2x} \, dt = dx \end{array} \qquad = 2 \cdot -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = -2\sqrt{x}$$

$$e^y = -2\sqrt{x}$$

$$y = \log(|-2\sqrt{x}|)$$

② $y' = y^2 + 2y - 3$

$$\int \frac{1}{y^2 + 2y - 3} \, dy = \int 1 \, dx$$

$$-\int \frac{1}{-y^2 - 2y + 3} \, dy = -\int \frac{1}{-y^2 - 2y - 1 + 4} \, dy = -\int \frac{1}{-(y+1)^2 + 4} \, dy = \quad ?$$

CAUCHY

$$\begin{cases} y' = (1+y)\dfrac{\cos x}{1+\sin x} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

$1 + y = 0 \qquad y = -1$

$y' = 0 \iff \cos x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\int \frac{1}{(1+y)}\,dy = \int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$$

$$\log|1+y| = \log|1+\sin x| \Rightarrow y = \sin x + c$$

C=0 RISPETTA IL PROBLEMA DI CAUCHY

$y = \sin x \qquad x = \arcsin(y)$

Esercizio 4.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

1. $y' = \dfrac{y}{x} + x^3 + x$
2. $(x \log x)y' = -y + x\,.$

(1) $y' = \frac{1}{x} \cdot y + x^3 + x$

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx} \cdot \left[\int (x^3+x)e^{-\int \frac{1}{x}dx}\,dx + c\right] = 1 \cdot \left[\int x^3 + x\,dx + c\right] = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

(2) $(x \log x)\,y' = -y + x$

SE $x = 1 \quad y = 1 \qquad$ SE $x = 0 \quad y = 0$

$x \neq 0,\ x \neq 1$:

$y' = -y \cdot \frac{x}{x \log x} \qquad y(y) = 0 \iff y = 0$

$$-\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{\log x}\,dx \qquad \frac{1}{x \cdot \log x} + \frac{1}{\log x} + c = \frac{x+1}{\log x} + c$$

$$-2\sqrt{y} = \frac{x+1}{\log x} + c \qquad y = \left(\frac{x+1}{-2\log x}\right)^2 + c$$

Esercizio 5.
Risolvere il seguente problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\begin{cases} y' + y\cos x = e^{-\sin x} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

$$y' = -y\cos x + e^{-\sin x}$$

$$e^{-\int \cos x\,dx}\left[\int e^{-\sin x} \cdot e^{\int \cos x\,dx}\,dx + c\right] = e^{-\sin x} \cdot \left[\int e^{-\sin x} \cdot e^{\sin x}\,dx + c\right] =$$

$$= e^{-\sin x} \cdot x + e^{-\sin x} \cdot c$$

RISPETTATO PROBLEMA SE $C=0$

separabili

$$\begin{cases} y' = (1+y)\dfrac{\cos x}{1+\sin x} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

1. $y' = \dfrac{y}{x} + x^3 + x$
2. $(x \log x)y' = -y + x\,.$

Esercizio 5.
Risolvere il seguente problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\begin{cases} y' + y\cos x = e^{-\sin x} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 6.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

1. $y'' - 4y' + 4y = x^2$
2. $y'' + 4y' + 5y = 2e^{3x}$
3. $y'' - y' - 2y = e^{-x}$
4. $y'' + y = \cos 2x$
5. $y''' + 3y'' - 4y = e^x$
6. $y'''' + 18y'' + 81y = \sin 3x$
7. $y'' - 4y' + 3y = xe^{-x} + x^2$
8. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}\,.$

Esercizio 7.
Risolvere il seguente problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = xe^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \dfrac{4}{25}\,. \end{cases}$$

1. $y' = \frac{y}{x} + x^3 + x$

2. $(x \log x)y' = -y + x\,.$

① $y' = \frac{1}{x}y + x^3 + x$

$$e^{\int \frac{1}{x}dx} \cdot \left[\int (x^3+x)\, e^{-\int \frac{1}{x}dx} + c \right] = x\left[\int \frac{x^3+x}{x}dx + c \right] = x\left[\int x^2+1\, dx + c \right] = x\left(\frac{x^3}{3} + x + c \right) = \frac{x^4}{3} + x^2 + cx$$

② $(x \log x)y' = x - y$

?

CAUCHY

$$\begin{cases} y' + y\cos x = e^{-\sin x} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x} \Rightarrow y' = -y\cos x + e^{-\sin x} \Rightarrow e^{\int \cos x\, dx}\left[\int e^{-\sin x} \cdot e^{-\int \cos x\, dx} + c \right]$$

$$\Rightarrow e^{\sin x}\left[\int e^{-\sin x} \cdot e^{-\sin x} dx + c \right] = e^{\sin x}\left[\int e^{-2\sin x} dx + c \right] = \, ?$$

① $y'' - 4y' + 4y = x^2$ • $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ $\alpha_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

• $y = c_1 x e^{2x} + c_2 e^{2x}$

$y = Ax^2 + Bx + C$

$y' = 2Ax + B$

$y'' = 2A$

$2A - 4(2Ax+B) + 4(Ax^2+Bx+C) = x^2$

$2A - 8Ax - 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2$

$4Ax^2 + (-8A+4B)x + 2A - 4B + 4C = x^2$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ -8A + 4B = 0 \\ 2A - 4B + 4C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ -2 + 4B = 0 \quad B = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 2 + 4C = 0 \quad C = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

$$y = c_1 x e^{2x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

(2) $y'' + 4y' + 5y = 2e^{3x}$

- $\alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0 \qquad \alpha_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i$

$y = -2C_1\cos(x) - 2C_2\sin(x)$

- $y = 2Ae^{3x} \qquad y' = 6A \cdot e^{3x} \qquad y'' = 18A \cdot e^{3x} \qquad e^{3x}(18A + 24A + 10A) = 2e^{3x} \qquad 52A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{26}$

$y = \frac{1}{13} \cdot e^{3x}$

$y = e^{-2x}\left(C_1\cos(x) - C_2\sin(x)\right) + \frac{1}{13} \cdot e^{3}$

(3) $y'' - y' - 2y = e^{-x}$

- $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \qquad \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \qquad y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 e^{2x}$

- $y = Axe^{-x} \qquad y' = Ae^{-x} - Ax \cdot e^{-x} \qquad y'' = -2Ae^{-x} + Ax \cdot e^{-x}$

$e^{-x}\left(-2A + Ax - A + Ax - 2Ax\right) = e^{x} \qquad -3A = 1 \qquad A = \frac{1}{3}$

$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3} x e^{-x}$

(4) $y'' + y = \cos 2x \qquad \alpha^2 + \alpha = 0 \qquad \alpha_{1,2} = \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -1 \end{cases} \qquad y = C_1 + C_2 \cdot e^{-x}$

- $y = A\sin 2x + B\cos 2x \qquad y' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x \qquad y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$

$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + A\sin 2x + B\cos 2x = \cos 2x \qquad \begin{cases} -3A = 0 \\ -3B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad y = -\frac{1}{3}\cos 2x$

$y = C_1 + C_2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{3}\cos 2x$

(5) $y''' + 3y'' - 4y = e^{x}$

$\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4\alpha = 0 \qquad \alpha(\alpha^2 + 3\alpha - 4) = 0 \qquad \alpha_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases} \qquad y = C_1 + C_2 \cdot e^{-4x} + C_3 e^{x}$

$y = xAe^x \qquad y' = Ae^x + Axe^x \qquad y'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x \qquad y''' = Ae^x + Ae^x + Ae^x + Axe^x$

$$e^x\left(Ax + 3A + 3(2A + Ax) - 4(Ax)\right) = e^x\left(Ax + 3A + 6A + 3Ax - 4Ax\right) = e^x(9A) \Rightarrow A = \frac{1}{9} \qquad y = \frac{1}{9}xe^x$$

$$y = c_1 + c_2 \cdot e^{-4x} + c_3 e^x + \frac{1}{9}xe^x$$

6 $y'''' + 18y'' + 81y = \sin 3x$

$\alpha^4 + 18\alpha^2 + 81 = 0 \qquad (\alpha^2+9)^2 = 0 \qquad \alpha = \pm 3i \qquad y = c_1\cos(3x) + \sin(3x) + c_2 x\left(\cos(3x) + \sin(3x)\right)$

TLDR

7 $y'' - 4y' + 3y = xe^{-x} + x^2$

$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \qquad \alpha_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \qquad y = c_1e^x + c_2e^{3x}$

$y = Axe^{-x} + Be^{-x} \qquad y' = Ae^{-x} - Axe^{-x} - Be^{-x} \qquad y'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} + Be^{-x}$

$-Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} + Be^{-x} - 4(Ae^{-x} - Axe^{-x} - Be^{-x}) + 3(Axe^{-x} + Be^{-x})$

$-2Ae^{-x} + Axe^{-x} + Be^{-x} - 4Ae^{-x} + 4Axe^{-x} + 4Be^{-x} + 3Axe^{-x} + 3Be^{-x}$

$xe^{-x}(A + 4A + 3A) + e^{x}(-2A + B - 4A + 4B + 3B) = xe^{-x}$

$\begin{cases} 8A = 1 \\ -6A + 8B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = \frac{6}{64} = \frac{3}{32} \end{cases}$

$y = \frac{1}{8}xe^{-x} + \frac{3}{32}e^{-x}$

$y = Ax^2 + Bx + C \qquad y' = 2Ax + B \qquad y'' = 2A$

$2A - 8Ax - 4B + 3Ax^2 + 3Bx + 3C = x^2$

$\begin{cases} 3A = 1 \\ -8A + 3B = 0 \\ 2A - 4B + 3C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{8}{9} \\ 3C = \dfrac{-\frac{2}{3} + \frac{32}{9}}{3} = \frac{26}{27} \end{cases}$

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{1}{8}xe^{-x} + \frac{3}{32}e^{-x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}$$

⑧ $y'' + y = \cos x^{-1}$

$\alpha^2 + 1 = 0 \qquad \alpha = \pm i \qquad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y = x\left(A \cos^{-1} x + B \sin^{-1} x\right) \qquad y' = x\left(A \sec x \cdot \tan x - B \cot x \csc x\right) + \left(A \sec x + B \csc x\right)$

Esercizio 8.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali di Bernoulli:

1. $y' = \frac{y}{x} + y^2$

2. $xy' = 2y + 4x^3\sqrt{y}$.

① $y' = \frac{1}{x} y + y^2 \qquad z = y^{-1} \qquad y = \frac{1}{z} \qquad y' = -z' \frac{1}{z^2}$

$-z' \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \Rightarrow z' = -\frac{1}{x} z - 1 \Rightarrow e^{-\int \frac{1}{x} dx}\left[\int - e^{\int \frac{1}{x} dx} + c\right] \Rightarrow \frac{1}{x}\left[-\frac{x^2}{2} + c\right] = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} c$

$y = \dfrac{1}{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} c} = \dfrac{2x}{-x^2 + c}$

② $xy' = 2y + 4x^3 \cdot \sqrt{y} \qquad z = y^{1-\frac{1}{2}} \qquad z = y^{\frac{1}{2}} \qquad z^2 = y$

$y = z^2 \qquad y' = 2z \cdot z' \Rightarrow 2xz \cdot z' = 2z^2 + 4x^3 \cdot z \Rightarrow z' = \frac{\cancel{2z^2} + 4x^3 \cancel{z}}{2x\cancel{z}} = z \cdot \frac{1}{x} + x^2 \Rightarrow e^{\int \frac{1}{x} dx}\left[\int x^2 \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + c\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow x\left[\int x \, dx + c\right] \Rightarrow x\left[\frac{x^2}{2} + c\right] = \frac{x^3}{2} + x c$

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} + y^2 x \log x \\[2ex] y(1) = \dfrac{1}{2} \,. \end{cases}$$

$y' = -\frac{1}{x} y + y^2 x \log x \qquad z = \frac{1}{y} \qquad y = \frac{1}{z} \qquad y' = -z' \frac{1}{z^2}$

$-z' \frac{1}{z^2} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \cdot x \log x \Rightarrow z' = \frac{1}{x} z - x \log x \Rightarrow e^{\int \frac{1}{x} dx}\left[\int - x \log x \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + c\right] \Rightarrow$

$x\left[\int -x \log x \cdot \frac{1}{x} dx + c\right] \Rightarrow$

Esercizio 8.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali di Bernoulli:

1. $y' = \frac{y}{x} + y^2$
2. $xy' = 2y + 4x^3\sqrt{y}\,.$

Esercizio 9.
Risolvere il seguente problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale di Bernoulli

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} + y^2 x \log x \\ \\ y(1) = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Esercizio 10.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali di Eulero:

1. $x^2y'' - 3xy' - 5y = 0$
2. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4\,.$

Esercizio 11.
Risolvere il seguente problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale di Eulero

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0 \\ \\ y(1) = 1 \\ \\ y'(1) = 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 12.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee:

1. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2, \quad x \neq 0$
2. $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x, \quad x \neq 0\,.$

Esercizio 13.
Risolvere il seguente problema di Cauchy associato ad una equazione omogenea

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 + xy}{xy + y^2} \\ \\ y(1) = 2\,. \end{cases}$$

Esercizio 8.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali di Bernoulli:

1. $y' = \frac{y}{x} + y^2$

2. $xy' = 2y + 4x^3\sqrt{y}\,.$

① $y' = \frac{y}{x} + y^2 \qquad z = \frac{1}{y} \qquad y = \frac{1}{z} \qquad y' = -z' \frac{1}{z^2}$

$-z' \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \Rightarrow -z' = \frac{1}{x} z + 1 \Rightarrow z' = -\frac{1}{x} z - 1 \Rightarrow e^{\int -\frac{1}{x} dx} \left[\int - e^{\int \frac{1}{x} dx} + c \right]$

$\Rightarrow \frac{1}{x} \left[\int -x \, dx + c \right] = \frac{1}{x} \left(-\frac{x^2}{2} + c \right] = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{x} c$

② $xy' = 2y + 4x^3 \cdot \sqrt{y}$

$x = 0 \qquad y = 0$

$x \neq 0 \qquad y' = \frac{2}{x} y + 4x^2 \sqrt{y} \qquad z = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} \qquad y = z^2 \qquad y' = 2z \cdot z'$

$2z \cdot z' = \frac{2}{x} \cdot z^2 + 4x^2 \cdot z$

$z' = \frac{1}{x} z + 2x^2 \Rightarrow z = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int 2x^2 \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} + c \right] \Rightarrow x \left(2\frac{x^2}{2} + c \right) = 2\frac{x^3}{2} + xc$

$y = \left(2\frac{x^3}{2} + xc \right)^2$

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} + y^2 x \log x \\ \\ y(1) = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

$y' = -\frac{1}{x} y + y^2 \cdot x \log x \qquad z = \frac{1}{y} \qquad y = \frac{1}{z} \qquad y' = -z' \cdot \frac{1}{z^2}$

$-z' \cdot \frac{1}{z^2} = -\frac{1}{xz} + \frac{1}{z^2} \cdot x \log x \Rightarrow z' = \frac{1}{x} z - x \log x \Rightarrow e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot \left[\int -x \log x \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} + c \right]$

$-x \cdot \log x + \int -\frac{1}{x} dx = -x \log x - x$

$\Rightarrow x \left[\int -\log x \, dx + c \right) = -x^2 \log x - x^2 + xc$

$$y = -x^2 \log x - x^2 + xC \qquad \frac{1}{2} = -1 + c \qquad c = -\frac{1}{2}$$

CAUCHY:

$$y = -x^2 \log x - x^2 - \frac{1}{2}x$$

Esercizio 10.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali di Eulero:

1. $x^2y'' - 3xy' - 5y = 0$
2. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4$.

(1) $x^2y'' - 3xy' - 5y = 0 \qquad y(x) = z(\log x) \qquad y'(x) = z'(\log(x)) \cdot \frac{1}{x}$

$$y'' = z''(\log(x))\frac{1}{x^2} - z'(\log(x))\frac{1}{x^2}$$

$$x^2\left(\frac{z''}{x^2} - \frac{z'}{x^2}\right) - 3\cancel{x}z' \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - 5z = 0$$

$$z'' - z' - 3z' - 5z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha^2 - 4\alpha - 5 = 0$$

$$z'' - 4z' - 5z = 0 \qquad \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

$$y = c_1 \cdot e^{5\log x} + c_2 e^{-\log x} = c_1 \cdot x^5 + c_2 \cdot \frac{1}{x}$$

(2) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4 \qquad x = e^s \qquad 2x^4 = 2e^{4s}$

$$x^2\left(\frac{z''}{x^2} - \frac{z'}{x^2}\right) - 4x\left(\frac{z'}{x}\right) + 6z = 2e^{4s} \Rightarrow z'' - z' - 4z' + 6z = 2e^{4s}$$

$$z'' - 5z' + 6z = 2e^{4s}$$

OMOG. : $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$ $z = c_1 \cdot e^{3s} + c_2 e^{2s}$

NON OM. : $z = A e^{4s}$ $z' = 4Ae^{4s}$ $z'' = 16Ae^{4s}$

$e^{4s}\left(16A - 20A + 6A\right) = 2e^{4s}$ $2A = 2$ $A = 1$ $z = e^{4s}$

$z = C_1 \cdot e^{3s} + C_2 e^{2s} + e^{4s}$

$y = C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^2 + x^4$

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + y' \frac{1}{x} + y \frac{1}{x^2} = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

$y'' x^2 + y' x + y = 0$

$x^2\left(\frac{z''}{x^2} - \frac{z'}{x^2}\right) + x\left(\frac{z'}{x}\right) + z = 0$

$z'' - z' + z' + z = 0 \Rightarrow z'' + z = 0$

$\alpha^2 + 1 = 0$ $\alpha = \pm i$

$y = c_1 \cos\left(\log(x)\right) + c_2 \sin\left(\log(x)\right)$

Esercizio 12.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee:

1. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2, \quad x \neq 0$

2. $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y \cos\dfrac{y}{x} - x, \quad x \neq 0\,.$

1 $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ $y = tx$ $y' = (tx)' = t + t'x$

$t + t'x = \frac{t^2 x^2}{x^2} - 2$ $t' = (t^2 - t - 2)\frac{1}{x}$ $\int \frac{1}{t^2 - t - 2} = \int \frac{1}{x}$

$-\frac{\log\left(\frac{1+t}{-2+t}\right)}{3} = \log(x) + C_1 \Rightarrow t = \frac{2e^{-3c}}{x^3 - e^{-3c}} - \frac{x^3}{x^3 - e^{-3c}}$

$$y = x\left(\frac{2e^{-3c}}{x^3 - e^{-3c}} - \frac{x^3}{x^3 - e^{-3c}}\right)$$

Esercizio 13.
Risolvere il seguente problema di Cauchy associato ad una equazione omogenea

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 + xy}{xy + y^2} \\ y(1) = 2\,. \end{cases}$$

Esercizio 14.
Risolvere le seguenti equazioni differenziali abbassandone l'ordine:

1. $y'' + 2y' = e^{3x}$
2. $(x^2 - 1)y'' + 2xy' = 2, \quad x \neq \pm 1\,.$

Esercizio 15.
Dopo averle classificate, risolvere le seguenti equazioni differenziali:

1. $(x^2 - 1)y' = y\big(y\sqrt{x^2 - 1} - x\big)\,, \quad x \neq \pm 1$
2. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
3. $y' = x(y - y^3)$
4. $y' = xe^{x^2}y^2 + 2xe^{x^2}$
5. $2xy' + y^3 + y = 0, \quad x \neq 0$
6. $y'' - y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
7. $xy' + (3x - 1)y = 0$
8. $y' - xy = x^3y^2$
9. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$
10. $xy^{(IV)} + 5y''' = 24, \quad x \neq 0$
11. $y' - 4\dfrac{y}{x} = x\sqrt{y}, \quad x \neq 0$
12. $y'' + 2y' - 3y = 2e^x + x + 3$
13. $y'' - y' + y = x^3 + 6$
14. $x^2y'' - xy' + y = 4x^3$
15. $xy' + y^2\log x + 2y = 0$
16. $2y'' + 5y' = \cos^2 x$
17. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
18. $y' - xy^2 = 3xy$
19. $(xe^y + e^x)y' + e^y + ye^x = 0$
20. $y^{(V)} + y''' = x^2 - 1$
21. $(x^2y^2 + x)y' + y = 0, \quad x \neq 0$

22. $2xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0, \quad x \neq 0\,.$

Esercizio 16.
Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

1. $\begin{cases} y' = y - (x^2+x+1)y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' = e^{-y}\log x \\ y(1) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y \cdot y' \cos y = x \\ y(1) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

4. $\begin{cases} y' = \dfrac{\sin x(1+y^2)}{2y} \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} \\ y(1) = \left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

6. $\begin{cases} y' = -xy + e^x(x+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y^{(IV)} - 2y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \\ y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y'' + 4y = x^2 + e^x \\ y(0) = \frac{1}{5}, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y'' + y = \tan x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} (x^2-1)y'' + 2xy' = 1 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = -2\,. \end{cases}$

Esercizio 17.
Stabilire se la funzione $y(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$4(x^2 + x + 1)^2 y'' = 3y\,.$$

Esercizio 18.
Stabilire se la funzione $y(x) = e^{-x^2}$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0\,.$$

Esercizio 19.
Scrivere un'equazione differenziale del secondo ordine il cui integrale generale è

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 20.
Scrivere un'equazione differenziale del secondo ordine il cui integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 21.
Scrivere un'equazione differenziale del primo ordine che ha come soluzione la funzione

$$y(x) = xe^{x}\,.$$

Esercizio 22.
Scrivere un'equazione differenziale del secondo ordine che ha come soluzione la funzione

$$y(x) = x^2 \log x\,.$$

Esercizio 23.
Data l'equazione differenziale

$$y'' - 9y' + 14y = 0\,,$$

stabilire se

1. esiste una soluzione $y = y(x)$ tale che
$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$$
2. esiste una soluzione $y = y(x)$ tale che
$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 3\,.$$

Esercizio 24.
Data l'equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = \sin x\,,$$

stabilire se

1. esiste una soluzione $y = y(x)$ limitata nel suo dominio e, in tal caso, determinarla
2. esiste una soluzione $y = y(x)$ tale che
$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$$
e, in tal caso, determinarla.

Esercizio 25.
Data l'equazione differenziale

$$y' - y = 3 - x - x^2\,,$$

stabilire se

1. esiste una soluzione $y = y(x)$ limitata nel suo dominio e, in tal caso, determinarla
2. esiste una soluzione $y = y(x)$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$$

   e, in tal caso, determinarla.

Esercizio 26.
Data l'equazione differenziale

$$y''' - 2y'' - 7y' - 4 = 0\,,$$

stabilire se

1. esiste una soluzione $y = y(x)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} y(x) < +\infty$$

2. esiste una soluzione $y = y(x)$ tale che $y < 0$ in $(0, +\infty)$.

Esercizio 27.
Data l'equazione differenziale

$$y' = xy^2\,,$$

stabilire se

1. esiste una soluzione decrescente in $\mathbb{R}$ e, in tal caso, determinarla
2. esiste una soluzione $y = y(x)$ crescente in $(0, +\infty)$ e, in tal caso, determinarla.

Esercizio 28.
Data l'equazione differenziale

$$y'' + 4y' - 5y = -3e^x,$$

determinare, se esistono, le soluzioni con limite finito per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 29.
Data l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{1+x}{2x}y + \frac{e^x}{2xy}\,,$$

determinare, se esiste, una soluzione che soddisfa la condizione

$$\lim_{x\to 0} y(x) \in (0, +\infty)\,.$$

Esercizio 30.
Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(1+y)^2}{x} \\[2ex] y(1) = 2 \end{cases}$$

e specificare qual è il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

Esercizio 31.
Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y' + (2x - 8x^2)y = 0 \\ \\ y(1) = 12 \end{cases}$$

e specificare qual è il più ampio intervallo in cui la soluzione è definita.

Esercizio 32.
Data l'equazione differenziale

$$2xy'' + (y')^3 + y' = 0 \qquad x \neq 0\,,$$

1. stabilire se ammette una soluzione costante
2. risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2xy'' + (y')^3 + y' = 0 \\ \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 0\,. \end{cases}$$

Corso di Laurea in Informatica Applicata

Analisi Matematica 2

Esercizi su

Equazioni differenziali ordinarie e problema di Cauchy

1. L'equazione differenziale $y'' + 4y = 0$
   - (A) ammette solo soluzioni costanti
   - (B) non ammette soluzioni
   - ~~(C)~~ ammette solo soluzioni limitate
   - (D) ammette soluzioni illimitate

   $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

2. La soluzione del problema di Cauchy $e^{x+y}y' + x = 0$, $y(0) = 0$
   - (A) è $y(x) = x \log(x + 1 + e^x)$
   - ~~(B)~~ è $y(x) = -x + \log(x + 1)$
   - (C) è $y(x) = \log(x + 1)$
   - (D) $\nexists$

3. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'' - y = \sin x$ è data da
   - (A) $y(x) = \frac{1}{2}\big(\cos x - \sin x\big)$
   - (B) $y(x) = \cos x$
   - (C) $y(x) = -\sin x$
   - ~~(D)~~ $y(x) = -\frac{1}{2}\sin x$

4. Data l'equazione differenziale $y' - 2y = 0$, stabilire quale tra le seguenti funzioni NON è una sua soluzione
   - (A) 0
   - ~~(B)~~ $2e^x$
   - (C) $3e^{2x}$
   - (D) e^{2x}

5. La soluzione del problema di Cauchy $y' = x^2e^y$, $y(1) = 0$
   - (A) è crescente
   - (B) $\nexists$
   - ~~(C)~~ è decrescente
   - (D) è strettamente positiva

   $y = -\log\left(-\frac{x^3}{3} - c\right)$ $\quad -\frac{1}{3} - c = 1$ $\quad c = -\frac{4}{3}$

6. Le funzioni $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = 1$ risolvono l'equazione differenziale
   - (A) $y' - y = 0$
   - (B) $y'' - y = 0$
   - ~~(C)~~ $y'' - y' = 0$
   - (D) $y'' = 0$

7. Sia $y = y(x)$ una generica soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y = 0$. Allora
   - (A) $y = 0$
   - (B) y è costante
   - (C) y non è derivabile in $\mathbb{R}$
   - ~~(D)~~ y è continua in $\mathbb{R}$

8. Le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = xe^y$ nel loro dominio sono
   - ~~(A)~~ decrescenti
   - (B) concave
   - (C) convesse
   - (D) crescenti

   $-\log\left(-\frac{x^2}{2} - c\right)$

9. Siano $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ due soluzioni dell'equazione differenziale $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$. Allora è FALSA l'affermazione che
   - (A) $y_1 - 7y_2$ risolve l'equazione
   - (B) $3y_1 + y_2$ risolve l'equazione
   - (C) $y_2 - y_1$ non risolve l'equazione
   - (D) $y_2 - y_1$ risolve l'equazione

10. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'y = 1$ è data da
    - (A) $y(x) = \frac{1}{x}$
    - (B) $y(x) = \sqrt{x}$
    - (C) $y(x) = 2\sqrt{x}$
    - ~~(D)~~ $y(x) = \sqrt{2x}$