limiti

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) = +\infty$$

$\nexists$ asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

5) derivabilità e max/min, monotonia

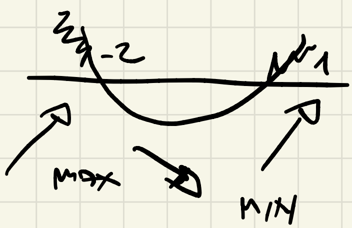
f é derivabile in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = x^2 + x - 2 \quad \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$f'(x) \geq 0$$



6) flessi, concavità

$f''(x) = 2x + 1$

$f''(x) = 0 \qquad 2x + 1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$ probabile flesso

$f''(x) \geq 0 \qquad 2x + 1 \geq 0$

$x \geq -\frac{1}{2}$

$-1/2$

$\cup \qquad \cap$

3/04/2023 (AUDIO 32)

$f(a, b) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x)$

f derivabile in (a, b)

$\downarrow$

$f' : (a, b) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f'(x) = F(x)$ primitiva di $f(x)$

$F(x) = x^2$

Trovare $f \mid f$ è derivabile e $f'(x) = F(x)$

$f(x) = \frac{1}{3} x^3$

$f'(x) = \frac{1}{3} 3x^2 = x^2 = F(x)$

$F(x) = 2x$

$f'(x) = x^2$

PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x)$

Si dice che $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f in (a,b) se

F è derivabile in (a,b) e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

Caratterizzazione delle primitive in un intervallo

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

F e G primitive di f in $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \mid F(x) = G(x) + c, \ \forall x \in [a,b]$

Poiché F e G sono primitive di f si ha che:

$$F'(x) = f(x) = G'(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$F'(x) = G'(x) \text{ in } [a,b]$$

$(F-G)'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ → Teorema di Lagrange

$\Rightarrow F - G = c \quad , \; c \in \mathbb{R}$

↓

della caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla in un intervallo

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

f continua in (a,b)

$\Rightarrow f$ ammette primitive

L'insieme delle primitive di f si indica con il simbolo:

$$\int f(x)\, dx$$

Si legge integrale indefinito di f

Sia F una primitiva di f

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \; , \quad c \in \mathbb{R}$$ insieme delle funzioni primitive

Esempi

1) $f(x) = 1$

$$\int 1\, dx = x + c \; , \quad c \in \mathbb{R}$$

2) $f(x) = x$

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c \,, \quad c \in \mathbb{R}$$

3) $f(x) = x^2$

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + c \,, \quad c \in \mathbb{R}$$

4) $f(x) = x^n$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \,, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{\cancel{n+1} \cdot x^n}{\cancel{n+1}} = x^n$$

5) $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + c$

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)\, x^{\alpha}$$

6) $\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$

$\alpha = 1/2$

7) $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + c \,, \quad c \in \mathbb{R}$

8)
$$\int x^{\alpha} \, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \,, \quad c \in \mathbb{R} & \text{se } \alpha+1 \neq 0 \\ & \alpha \neq -1 \\ \log|x| + c \,, \quad c \in \mathbb{R} & \alpha = -1 \end{cases}$$

9) $\int e^x \, dx = e^x + c \quad , c \in \mathbb{R}$

10) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad , c \in \mathbb{R}$

11 $\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad , c \in \mathbb{R}$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \Gamma(x) + C = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx$$

f, g continue

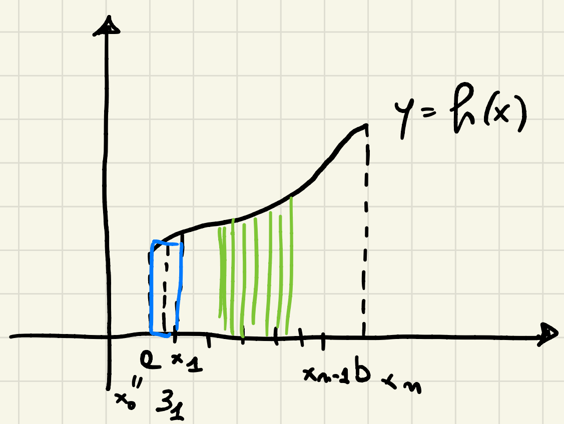
linearità dell'integrale indefinito

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ~~continua e non negativa in $[a,b]$~~

$x \mapsto y = f(x)$

LIMITATA



$P = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$

partizione di $[a,b]$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \; i = 1, \dots, n$

$A(R_i) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

Problema: calcolare, se ha senso, l'area della parte di piano compresa tra l'asse x e il grafico di $y = f(x)$ e delimitata dalle rette $x = a$ e $x = b$.

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\max_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1}) \longrightarrow 0$$

Se esiste

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1}) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$ SOMMA DI CAUCHY -RIEMANN

finito, ed è INDIPENDENTE DALLA SCELTA DEI PUNTI ξ_i, allora si definisce

$$A(R) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1}) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Si dice che f è integrabile in $[a,b]$

e si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1}) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$\Downarrow$

INTEGRALE DEFINITO di f in $[a,b]$

$h : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

h é limitata

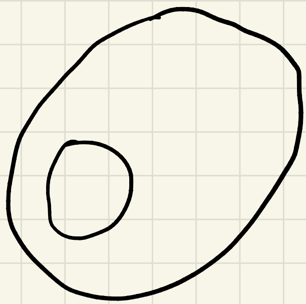
Ma non integrabile

04.04.2023 (AUDIO 32)

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{FUNZIONE INTEGRANDA}}\, dx$$

→ variabile di integrazione

estremi dell'intervallo di integrazione

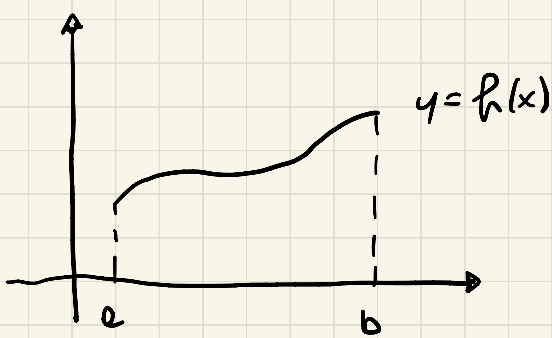


f limitata

Proprietà dell'integrale definito

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$



2) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall c \in [a,b]$

4) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

5) $f+g$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

LINEARITÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

6) $c \cdot f$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b (c \cdot f)(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

7) se $f(x) < g(x) \quad \forall x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

MONOTONIA DELL'INTEGRALE DEFINITO

In particolare se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'INTEGRABILITÀ SECONDO RIEMANN

Teorema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f continua in $[a,b]$

$\Rightarrow f$ è integrabile in $[a,b]$.

Teorema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f LIMITATA e MONOTONA in $[a,b]$

$\Rightarrow f$ è integrabile in $[a,b]$

Teorema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f limitata in $[a,b]$ $\to$ non ci devono essere punti di discontinuità che vadano ad ∞ (solo punti di salto)

f continua in $[a,b]$ tranne in un numero finito di punti $a < x_1 < \dots < x_n < b$

$\Rightarrow f$ è integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_n}^b f(x)\,dx$$

Esempio

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

f e' integrabile in $[-1,1]$?

$$\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{|x|}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{|x|}\,dx =$$

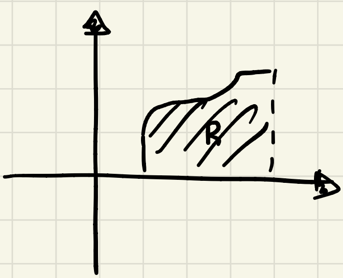
$$= \int_{-1}^{0} \frac{x}{-x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{x}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx$$

$$= -1 + 1 = 0$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e non negativa in $[a,b]$



$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$

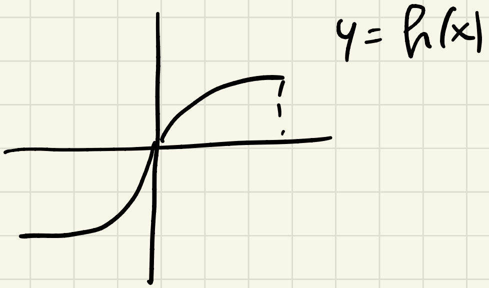
<u>f limitata</u>

f integrabile in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ continua

f DISPARI in $[-a, a]$



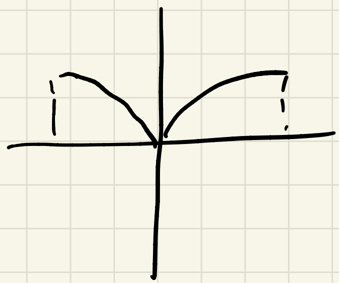
f limitata

f integrabile in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ continua

f PARI in $[-a,a]$



$y = f(x)$

3) $\int_6^2 (x+2)\,dx$

POM

DEF. INTEGRABILE

Teorema: della media

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a,b] \mid \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$

Dim: Dal teorema di Weierstrass, $\exists$

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x) \quad , \quad m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

Quindi $\forall x \in [a,b]$

$$m \le f(x) \le M$$

$$\underbrace{\int_a^b m\,dx}_{= m(b-a)} \le \int_a^b f(x)\,dx \le \underbrace{\int_a^b M\,dx}_{= M(b-a)}$$

Dividendo per $b-a$ (>0)

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

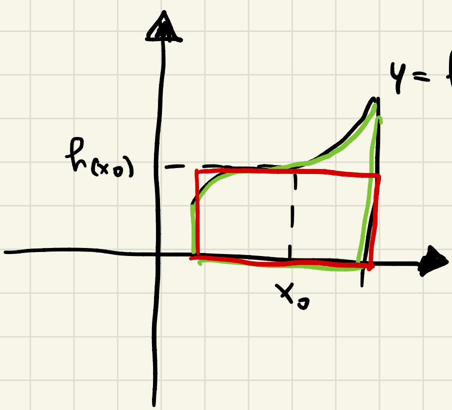
di f in $[a,b]$ VALORE MEDIO

TH valori intermedi $\Longrightarrow$ $\exists\, x_0 \in [a,b] \mid f(x_0) = \overbrace{\frac{1}{b-a}\int f(x)\,dx}$

segue la tesi

Significato geometrico del th della media

$f \geq 0$ in $[a,b]$



Nota: se f non è continua (NON VALE)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,3] \end{cases}$$ f integrabile in $[0,3]$

$$\int_0^3 f(x) = A(R_1) + A(R_2)$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

primitiva F

$\int f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata integrabile in $[a,b]$ continua

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$

F funzione INTEGRALE di f in $[a,b]$

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad F(a) = 0$$

Teorema: la funzione integrale F è continua in $[a,b]$

Dim: Sia $\bar{x} \in (a,b)$ e consideriamo

$$0 \le |F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})| = \left| \int_a^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - \int_a^{\bar{x}} f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^{\bar{x}} f(t)\,dt + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - \int_a^{\bar{x}} f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt \right|$$

$$\le K \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} 1\,dt \right|$$

Allora

F è derivabile in $[a,b]$

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

f integrabile $\quad$ continua

$\Downarrow$

F continua $\quad$ derivabile

cioè F è una primitiva di f in $[a,b]$.

Dim: Sia $\bar{x} \in (a,b)$

$$\frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - \int_a^{\bar{x}} f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt = \frac{0}{0}$$

Teorema della media

$$\Longrightarrow \frac{1}{h} \cdot f(x_h) \cdot h \quad \text{con } x_h \in (\bar{x}, \bar{x}+h) / (\bar{x}+h, \bar{x})$$

$$= f(x_h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(\bar{x}) \quad \text{perché continua}$$

$\Rightarrow$ F è derivabile in $\bar{x}$ e

$$F'(x) = f(\bar{x})$$

Si procede in modo analogo in $\bar{x} = a$ e $\bar{x} = b$.

Formula fondamentale del calcolo integrale

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

G primitiva di f in $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Dim:

$$= G(x)\Big|_a^b$$

Poiché f è continua la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva di f in $[a,b]$

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R} \mid G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$

$(*)$

Si ha che

$$\int_a^b f(x)\,dt = F(b) \overset{\text{poiché } F(a)=0}{=\!=} F(b) - F(a)$$

$$= G(b) - c - \big(G(a) - c\big) \text{ da } (*)$$

$$= G(b) \cancel{-c} - G(a) \cancel{+c}$$

$$= G(b) - G(a)$$

Formula di integrazione per SOSTITUZIONE

f continua

g derivabile con derivata continua

$x = g(t)$

Allora

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

Esempi

1) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx = \int \frac{1}{t-3} \cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t}{t-3}\,dt$$

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2 = g(t)$

$dx = (t^2)' = 2t\,dt$

$= 2\int \frac{t-3+3}{t-3}\,dt = 2\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right) dt$

$= 2\int 1\,dt + 6\int \frac{1}{t-3}\,dt$

$= 2t + 6\log|t-3| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$= 2\sqrt{x} + 6\log|\sqrt{x}-3| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

2) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}\,dt$

$e^x = t$

$= \int \frac{t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt$

$x = \log t$

$dx = \frac{1}{t}\,dt$

$= \operatorname{arctg} t + c$

$= \operatorname{arctg} e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

5.04.2023 (AUDIO 35)

ES.

$$\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx$$ → questi tipi di polinomi bisogna usare la formula di derivazione dell'arcotangente

$$\int \frac{1}{9\left(\frac{4}{9}x^2+1\right)}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{4}{9}x^2+1} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{6}\,\text{arctg}\, t + c\,,\ c\in\mathbb{R}$$

$$\frac{4}{9}x^2 = \left(\frac{2}{3}x\right)^2$$

$$\frac{2}{3}x = t$$

$$x = \frac{3}{2}t$$

$$dx = \frac{3}{2}$$

$$(\text{arctg})' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{6}\,\text{arctg}\left(\frac{2}{3}x\right) + c\,,\quad c\in\mathbb{R}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE PER L'INTEGRALE DEFINITO

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$g: I \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata continua

sia $x = g(t)$

Allora $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

dove $g(c)=a$ e $g(b)=d$ $\quad c,d \in I$

ESERCIZIO

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

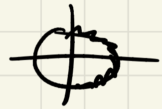
$x = \sin t \qquad x = \cos t$

$dx = \cos t \, dt$

bisogna cambiare estremi (IMPORTANTE)

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \, dt$$

$\sqrt{x^2} = |x|$



$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t \, dt$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$
$$= \cos^2 t - (1-\cos^2 t)$$
$$= 2\cos^2 t - 1$$
$$\Rightarrow \cos^2 t = \frac{\cos 2t - 1}{2}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t + 1 \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2t}{2} + t \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$A(C_r) = \pi r^2$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

f, g derivabili con derivate continue

Allora

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Dim: dalla formula di derivazione del prodotto $(f \cdot g)' = f' \cdot g - f \cdot g'$

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = \underbrace{f(b)\, g(a) - f(a) \cdot g(b)}_{= f(x) g(x) \big|_a^b} - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

Esempi

$$\int \log x \, dx = \int (\underset{f(x)}{\log x} \cdot \underset{g'(x) = x}{1})$$

$$f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \log x - x + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

2) $\int x \cos x \, dx$

a) $f(x) = x \quad g'(x) = \cos x$

b) $f(x) = \cos x \quad g'(x) = x$

b) $\frac{x^2}{2} \cos x - \int -\sin x \cdot \frac{x^2}{2} \, dx$ NON PORTA A NIENTE

a) $x \sin x - \int \sin x \, dx$

$\downarrow$

$x \sin x + \cos x + C$

3) $\int e^x \sin x \, dx$

a) $f(x) = e^x \quad , \quad g(x) = \sin x$

b) $f(x) = \sin x \quad , \quad g'(x) = e^x$

$f'(x) = \cos x \quad g(x) = e^x$

b) $\sin x \cdot e^x \int \cos x \cdot e^x \, dx$

a1) $f(x) = e^x \quad g(x)' = \cos x$

$f'(x) = e^x \quad g(x) = \sin x$

→ SCELTA CHE PORTA ALL' INTEGRALE DI PARTENZA

b1) $f(x) = \cos x \quad g(x)' = e^x$

$f'(x) = -\sin x \quad g(x) = e^x$

$$e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x \, dx \right]$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$$

INTEGRALE PER PARTI RICORSIVO

$$\int \operatorname{arctang} x \, dx$$

$$= \int (\operatorname{arctg} x \cdot 1) \, dx$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad g(x) = x$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log (x^2+1) + c$$

$$\int \cos^2 x \, dx$$

$$\int (\cos x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \int \left(\cos x \cdot (\sin x)' \right) dx$$

$$= \sin x \cos x - \int (-\sin) \cdot \sin x \, dx$$

$$= \sin x \cos x - \int \sin^2 x \, dx$$

$$= \sin x \cos x - \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

INTEGRALE RICORSIVO

$$\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

$x = t^6$ per togliere tutte le radici

$$x = t^6$$

$$dx = 6t^5 \, dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{t^3 - 1}{t^3 - t^2} \cdot \frac{1}{t^3} \cdot 6t^5 \, dt$$

$$= \int \frac{t^3 - 1}{\cancel{t^2}(t-1)} \cdot \frac{6\cancel{t^5}}{\cancel{t^3}} \, dt = 6 \int \frac{t^3 - 1}{t - 1} \, dt$$

$$= 6 \int \frac{\cancel{(t-1)}\,(t^2+t+1)}{\cancel{(t-1)}}\,dt$$

$$= 6 \int t^2+t+1 \;dt$$

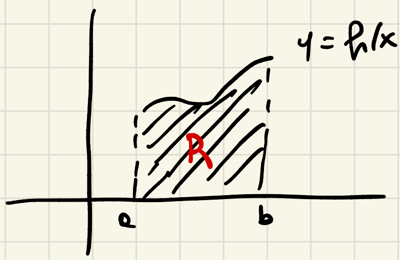
$$= 6 \;\; \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \;\; + C$$

$$= 2t^3 + 3t^2 + 6t \; + C$$

$$= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + C \;, \; C \in \mathbb{R}$$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata (AUDIO 36)

f continua e non negativa in $[a,b]$

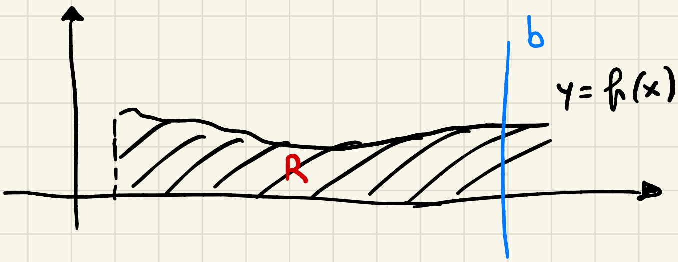


$$A = |R| = \int_a^b f(x)\,dx$$

INTEGRALI IMPROPRI

$f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua e non negativa

$(-\infty, b]$



$$A(R) \overset{?}{=} +\infty$$

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$ $\forall\, b > a$

Si dice che f è integrabile IN SENSO IMPROPRIO in $[a,+\infty)$ se

$(-\infty, b]$

$\exists \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ e si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Nota: se f é continua e non negativa in $[a,+\infty)$ $(-\infty, b]$ si definisce

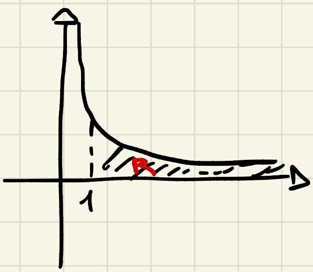
$$A(R) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$ l'area può essere infinita o finita

Se $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L \in \mathbb{R}$, allora si dice che l'integrale improprio di f in $[a,+\infty)$ é CONVERGENTE

Se $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = +\infty \; (-\infty)$ si dice che l'integrale improprio è DIVERGENTE a $+\infty \; (-\infty)$

Esempi

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in $[1,+\infty)$



$$A(R) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(2\sqrt{b} - 2\right) = +\infty$$

2 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in $[1, +\infty)$

$$A(R) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $x \in [1, +\infty)$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b & \alpha \neq 1 \\ \left.\log x\right|_1^b & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{b^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \log b & \text{se } = 1 \end{cases}$$

$\alpha < 1$ $+\infty$
$\alpha > 1$ 0

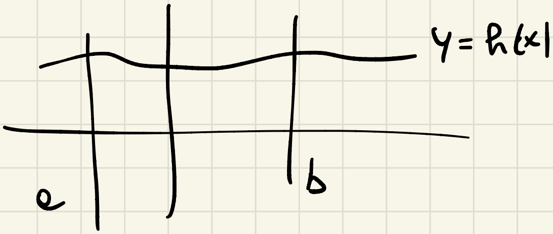
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \quad \text{CONVERGE} \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \quad \text{DIVERGE} \end{cases}$$

Quindi

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

$e > 0$

$f: (-\infty ; +\infty) \to \mathbb{R}$



$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\, dx$$

se tale limite esiste, allora $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\, dx$

ESEMPI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \arctan x \Big|_a^b$$

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} (\arctan b - \arctan a) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

SOLO SE LA FUNZIONE È POSITIVA POSSIAMO PARLARE ANCHE DI AREA

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ $\forall\, b > a$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$f(x) = \sin x$

f integrabile in $[1, +\infty)$?

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \cos x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b -\sin x\,dx = \lim_{b \to +\infty} (\cos 1 - \cos b) \nexists$$

CRITERIO DEL CONFRONTO E CONFRONTO ASINTOTIC

$f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue in $[a, +\infty)$

$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [a, +\infty)$

Allora

a) se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

b) se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, allora $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge

Esempio :

1) $\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge o diverge ? e^{-x^2} FUNZIONE GAUSSIANA

$\lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} e^{-x^2} dx$

CRITERIO DEL CONFRONTO

$e^{-x^2} \geq ?$ $\forall x \geq 1$

$\leq ?$

CONVERGE A S con estremi

con $0 < S' \leq \frac{1}{e}$

$x^2 \geq x$

$-x^2 \leq -x$

$e^{-x^2} \leq e^{-x}$

$\int_{1}^{+\infty} e^{-x} dx$

$\lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} e^{-x} dx$

$\lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-b} + e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$ CONVERGE

Esempi

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x(\cos^2\sqrt{x}+2)}$$ converge o diverge ?

$>0 \quad \forall x>0$

CRITERIO DEL CONFRONTO SOLO SU FUNZIONI POSITIVE DI SEGNO COSTANTE

$-1 \leq \cos\sqrt{x} \leq 1$

$0 \leq \cos^2\sqrt{x} \leq 1$

$2 \leq \cos^2\sqrt{x}+2 \leq 3$

$g(x)=\frac{1}{x^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

$0 < 2x \leq x\cos^2\sqrt{x}+2 \leq 3x$

$0 < \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x\cos^2\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2x}$

$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ DIVERGE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$f, g: [e,+\infty) \to \mathbb{R}$ continue in $[e,+\infty)$

$f(x) \geq 0, g(x)>0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \forall x \in [e,+\infty)$

$\to$ f e g sono asintotiche per $x \to +\infty$

Allora

a) $\int_e^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\iff$ $\int_e^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

b) $\int_e^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge $\iff$ $\int_e^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge

$\int_e^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_e^{+\infty} g(x)\,dx$ hanno lo stesso comportamento

Si scrive anche che $f \sim g$ per $x \to +\infty$ e si legge "f è ASINTOTICA a g" per $x \to +\infty$

Esempi

$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+2}\,dx$ converge o diverge? $\boxed{\text{converge}}$

>0

$$0 < \underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+2}}_{f(x)} \sim \frac{x^2}{x^4} = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)} \to \text{VERIFICA}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^4+2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ell x^2+1}{x^2} = \ell$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x^2+1)}{x^4+2} = 1$$

$\ell \neq 0$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ $\boxed{\text{convergente}}$

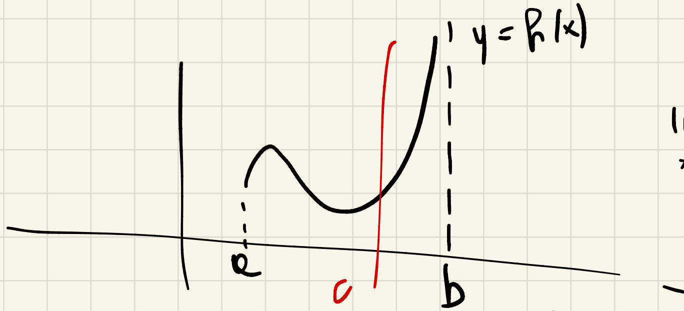
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ >0

Nota: vale la seguente proprietà:

$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,x$ converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \begin{cases} \to \text{converge} \\ \to \text{diverge} \end{cases}$$

$f: [a,b) \to \mathbb{R}$ continua, illimitata per $x \to b^-$



$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$$

$(a, b]$

Si dice che f è integrabile in $[a, b)$ se esiste il

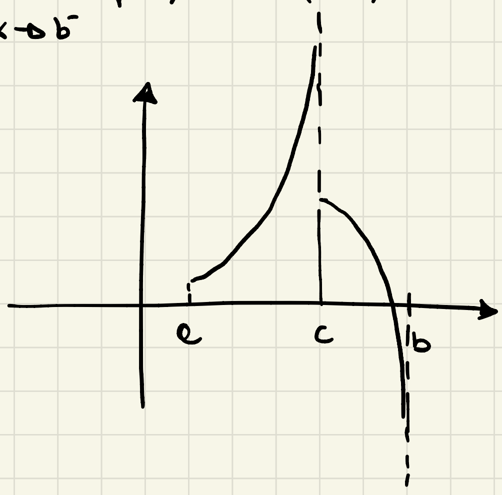
$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

in tal caso si pone $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$

(AUDIO 37) 19/04/2023

$f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty \; (-\infty)$$



$f_1 : [a, c) \to \mathbb{R}$

$f_2 : (c, b] \to \mathbb{R}$

CRITERIO DEL CONFRONTO per integrali impropri:

$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ continue, f, g illimitate per $x \to b^-$

$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b)$

Allora

a) $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge

b) $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO per integrali impropri:

$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ continue f, g illimitate per $x \to b^-$

$f(x) \geq 0, g(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b) \quad \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Allora

$\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Leftrightarrow \int_a^b g(x)$ diverge
converge converge

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge

ESEMPI:

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2 \frac{1}{x}\,dx$ converge o diverge?

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2 \frac{1}{x} \right) \qquad \text{CONVERGE}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2} \qquad \text{divergente}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx$$

$x^2+3x=0$ 2 soluzioni   a)

$x^2+1=0$ ∄ soluzioni   b)

$x^3+3x^2-2x=0$ 3 soluzioni   c)

NUMERI COMPLESSI

Un numero complesso è un numero della forma:

$$z = a+ib \qquad \text{(FORMA ALGEBRICA DI } z\text{)}$$

$\boxed{i \text{ Rinoto}}$

dove $a,b \in \mathbb{R}$ e i è l'unità immaginaria, che ha la proprietà

$$i^2 = -1$$

$z = 3+2i$

$z = -5+7i$

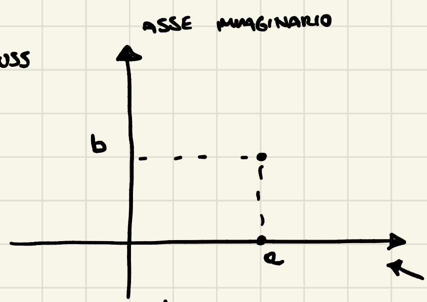
b) $x^2+1=0$ ∄ in $\mathbb{R}$

$x = i$ soluzione

$x = -i$ soluzione

RAPPRESENTAZIONE NUMERI COMPLESSI

PIANO DI ARGAND - GAUSS



$z = a+ib$

$\mathrm{Re}(z) = a$ → PARTE REALE

$\mathrm{Im}(z) = b$ → PARTE IMMAGINARIA

$z = (a,b)$ (COPPIA NUMERI REALI DI z)

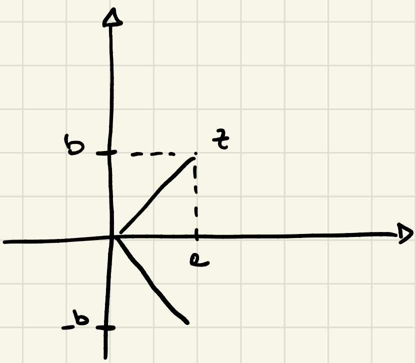
Nota : $x \in \mathbb{R}$

$x = x + i \cdot 0$ $\qquad (x, 0)$ $\qquad$ controparte $(0, x)$ immaginari puri

$x = 0 + i \cdot x$

$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ insieme dei numeri complessi

Dalla nota $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$



Si definisce MODULO DI z la quantità

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

é la distanza di $z = (a, b)$ dall'origine del piano Argand-Gauss

Si definisce CONIUGATO di z il numero complesso

$\bar{z} = a - ib$, ie $\bar{z}$ è tale che

si legge "CONIUGATO DI z" $\begin{cases} Re(\bar{z}) = Re(z) \\ Im(\bar{z}) = -Im(z) \end{cases}$

Proprietà :

1) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\quad (|z| \in \mathbb{R})$ DISTANZA

2) $|z| = 0 \iff z = 0$

3) $|z| = |\bar{z}| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

4) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

5) $z = -\bar{z} \iff z$ è IMMAGINARIO

Operazioni tra numeri complessi $\qquad (\mathbb{C}, +, \cdot)$ campo (complesso)

$z = a + ib$, $\qquad a, b \in \mathbb{R}$

$w = c + id$, $\qquad c, d \in \mathbb{R}$

Definiamo

$z \pm w = (a \pm c) + i (b \pm d)$

$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i (ad + bc)$

$= ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Proprietà: $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$

$z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$ 1

$(a+ib) + (a-ib) = 2a$

$z - \bar{z} = 2 \cdot Im(z)$ 2

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ 3

$\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$ 4

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$ 5

$(a+ib) \cdot (a-ib) = a^2 - iab + iab + b^2 = a^2 + b^2$

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ 6

In particolare se $z = \alpha \in \mathbb{R}$ si ha:

$\overline{\alpha \cdot w} = \bar{\alpha} \cdot \bar{w} = \alpha \cdot \bar{w}$

$w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, $w = c + id$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c+id} \cdot \frac{?}{?} = \frac{c-id}{c-id} = \frac{c-id}{c^2+d^2} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\neq 0$ perché $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$$

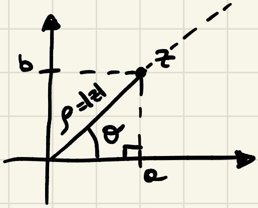
Proprietà

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad ①$$

RAPP. NUM. complessi

$z = a + ib$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$ FORMA ALGEBRICA

$z = (a, b)$ COPPIA DI NUMERI REALI



$a = \rho \cdot \cos\theta$

$b = \rho \cdot \sin\theta$

ARGOMENTO DI z $\quad \theta = \arg(z)$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ FORMA TRIGONOMETRICA

MODULO DI $z = |z|$

se θ si prende in $[0, 2\pi)$ o in $(-\pi, \pi]$ si parla di ARGOMENTO PRINCIPALE di z e si indica con $\theta = \arg(z)$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

FORMA ESPONENZIALE COMPLESSA

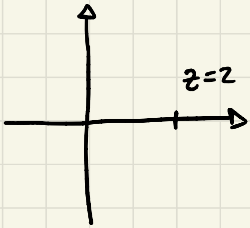
$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$ FORMULA DI EULERO

$z = \rho e^{i\theta}$ FORMA ESPONENZIALE COMPLESSA di z

COME PASSARE DA UNA FORMA ALL'ALTRA

Esempi

$z = 2$
$\rho = 2$
$\theta = 0$



2/05 (AUDIO 40)

PRODOTTO NUMERI COMPLESSI

$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$

$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \rho_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \sin\theta_2 + i \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 [\underbrace{(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i \underbrace{(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)}_{\sin(\theta_1+\theta_2)}]$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)]$$ FORMULA DI DE MOIVRE PER IL PRODOTTO

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

In modo analogo si prova che

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \right) \qquad z_2 \neq 0$$

FORMULA DI DE MOIVRE PER IL QUOZIENTE

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad e \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Come conseguenza della formula di Moivre per il prodotto

$$z_1^n = \rho_1^n \left(\cos(n\theta_1) + i \sin(2\theta_1) \right)$$

FORMULA DI DE MOIVRE PER LE POTENZE

$$|z_1|^n = |z_1|^n \quad e \quad \arg(z_1)^n = n \arg(z_1)$$

ESEMPI

1) $w = (1+i)^7$

Scrivere w in forma algebrica

$z = 1+i, \quad w = z^7$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = (\sqrt{2})^7 \left[\cos\left(7 \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(7 \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 8\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 8 - 8i$$

2) $w = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)^4$

$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$

$z \cdot i = (a + ib) \cdot i$

RADICI ENNESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

$w \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$

si definisce RADICE n-ESIMA (COMPLESSA) di w il numero complesso z tale che $z^n = w$

$$z^n = w$$

Teorema: Sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $n \in \mathbb{N}$

Allora esistono n radici ennesime di w, $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$

Date da $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ dove

$\rho_k = \rho^{1/n}$ e $\theta_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$

Dim: Segue dalla formula di de Moivre per le potenze

Esempi

1) $\sqrt[6]{i}$

$$w = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1$$

$$z_k = 1\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right)\right] \quad k = 0, \dots, 5$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right), \quad k = 0, \dots, 5$$

Teorema Fondamentale dell'algebra

Siano

03/05/2023 (AUDIO 41)

SERIE → NUMERO FINITO A NUMERO INFINITO DI ADDENDI é possibile?

SERIE NUMERICHE

$(a_n)_n$ successione in $\mathbb{R}$

Si definisce serie numerica di termine generale a_n e si indica con il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

La somma di tutti i termini della successione a_n, Quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n + \dots$$

Esempi

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots$ DIVERGE (SERIE ARMONICA)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots\dots$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 \dots\dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Si definisce successione delle ridotte della serie data la successione $(S_n)_n$ data da

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, si dice che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è CONVERGENTE ad S

$\Updownarrow$ REGOLARI

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty \, (-\infty)$, si dice che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è DIVERGENTE ad $+\infty (-\infty)$

Se $\nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$, si dice che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è INDETERMINATA

Esempi

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 5 = 5+5+5+ \dots$

$S_n = 5 + \dots + 5 = 5n$

$\sum_{n=1}^{\infty} 5 = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n$$
$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+1+ \dots$ SERIE INDETERMINATA

SOMME INFINITE LE PROPRIETÀ NON VALGONO PER LE SERIE FINITE

$\lim S_n = \nexists \to \begin{array}{l} S_{2n} = 0 \\ S_{2n+1} = -1 \end{array}$ $S_n = 0,-1,0,-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_n + \dots$$

$(S_n)_n$

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Dim: Per ipotesi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$

Dalla definizione di S_n si ha che

$$S_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n = S_{n-1} + a_n = a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} = S - S = 0$$

Dalla condizione necessaria si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ NON CONVERGE}$$

In particolare se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è REGOLARE, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

SERIE GEOMETRICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a q^n}_{a_n}, \quad a, q \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + aq + \dots + aq^n + \dots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a q^{n+1}}{a q^n} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$a, q \neq 0$

RAGIONE DELLA SERIE

$$S_n = a_0 + \dots + a_n$$

$$= a + aq + \dots + aq^n$$

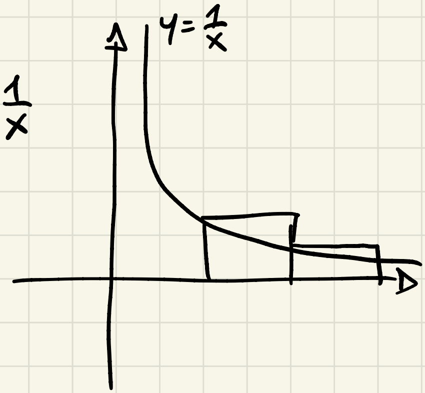
$$= \begin{cases} a \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ a(n+1) & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & \text{se } |q| = 1 \\ \infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$y = \frac{1}{x}$



$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n \geq \lim_{n \to +\infty} \int_1^n \frac{1}{x} \, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx = +\infty$$

↑ esiste monotona

$$= S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

→ diverge se $\alpha \leq 1$

→ converge se $\alpha > 1$

AUDIO 42) 08/05/2023

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n$$

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ é REGOLARE.

Dim: La successione $(S_n)_n$ é tale che $S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

i.e $(S_n)_n$ é monotona crescente $\Rightarrow \exists \lim_{x \to +\infty} S_n$

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ é divergente

CRITERIO DEL CONFRONTO

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tali che

$$\boxed{0 \leq a_n \leq b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Esempi

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ serie regolare $\Rightarrow$ CONVERGE

CRITERIO CONFRONTO

$$2^n+1 \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ geometrica di ragione $\rho = \frac{1}{2} \Rightarrow$ converge

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tali che $a_n \geq 0, b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Allora:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ serie regolare $\Rightarrow$ diverge

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \simeq \frac{1}{n} \qquad n \to +\infty$$

armonica generalizzata

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge

$\alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha \leq 1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{1+n^3} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ serie regolare $\Rightarrow$ converge

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{1+n^3} \simeq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, tale che esiste il

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

se $L < 1$, allora la $\sum_{n=1} a_n$ converge

se $L > 1$, allora la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ regolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[\lim_{n \to +\infty}]{} 0 < 1 \quad \text{converge}$$

CRITERIO DEL RADICE

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tale che esiste il

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

se $L < 1$, allora la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

se $L > 1$, allora la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n} > \forall n \in \mathbb{N}$ serie regolare

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$

CONVERGENZA ASSOLUTA

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE

ASSOLUTAMENTE se la sua serie dei moduli

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente

Teorema :

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e A.C, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge il viceversa NON vale

Basta considerare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ SERIE ARMONICA A SEGNI ALTERNATI

che é convergente

La sua serie dei moduli e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che é divergente

Esempi

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\lg(n))}{n^2 \lg n}$

Studiamo la serie dei moduli

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin(\lg(n))}{n^2 \lg n} \right|$$

CRITERIO DI LEIBNITZ : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$

Se

a) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

b) $(a_n)_n$ é monotona decrescente

allora la serie data converge

Inoltre, detta S somma della serie, si ha che $|S_n - S| \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

dove $(S_n)_n$ é la successione delle somme parziali della serie data

09/05/23 (AUDIO 42)

Esempi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$ serie a segni alterni

$$a_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$(a_n)_n$ é monotona decrescente? $\quad n! > (n+1)!$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{si}$$

Studiamo la convergenza della serie dei moduli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

Criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ CONVERGE}$$

$$\Downarrow \quad \text{A.C.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3}$ diverge

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n}$ NON A.C

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n} = 1$$

A.C

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} \quad \text{diverge}$$

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n} \quad \text{convergente}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = 0$$

$(a_n)_n$ monotona decrescente ?

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$$

$$f|_{\mathbb{N}} = a_n$$

f è derivabile $\forall x > 0$

$$f'(x) = \frac{x^2+x-(x-1)\,2x+1}{(x^2+x)^2} = \frac{x^2 \cancel{+x} - 2x^2 \cancel{-x} + 2x + 1}{(x^2+x)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+x)^2} \geq 0$$

$$-x^2+2x+1 \geq 0$$

$$x^2-2x-1 \leq 0$$

$$x^2-2x-1 \leq 0 \to 1 \pm \sqrt{2}$$

h è decrescente in $[1+\sqrt{2}, +\infty)$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \log(n+1)}$, $t \in \mathbb{R}^+$ serie dipendente da un parametro

$a_n \geq 0$

serie regolare

RAPP.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}\log(n+2)} \cdot \frac{\cancel{2^n}\log(n+1)}{\cancel{t^n}} = \frac{t}{2}\,\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = \frac{t}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x+1)}{\log(x+2)}$$

Thelopital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+2}} = \frac{x+2}{x+1} = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{t}{2} > 1 & \text{diverge} \\[2ex] \dfrac{t}{2} < 1 & \text{converge} \end{cases}$$

Se $\dfrac{t}{2} = 1$ allora la serie data

diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$$

$\log(n+1) < n+1$

$$\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{cases} t \geq 2 & \text{diverge} \\ 0 < t < 2 & \text{converge} \end{cases}$$

FUNZIONI ASINTOTICHE

$f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

Si dice che f e g sono ASINTOTICHE per $x \to x_0$

e si scrive

$$f \simeq \quad \text{per } x \to x_0$$

se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \cancel{\ell}\ 1}$$

La relazione $\simeq$ é una relazione di equivalenza:

1) riflessiva: $f \simeq f$ per $x \to x_0$

2) simmetrica: $f \simeq g$ per $x \to x_0$ $\Rightarrow$ $g \simeq f$ per $x \to x_0$

3) transitiva: $f \simeq g$ e $g \simeq h$ (per $x \to x_0$) $\Rightarrow$ $f \simeq h$ per $x \to x_0$

Proposizione: $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(D)$

$f \simeq g$ per $x \to x_0$

1) f e g ammettono lo stesso limite finito per $x \to x_0$
oppure

f e g divergono entrambe per $x \to x_0$
oppure

f e g non ammettono limite per $x \to x_0$

2) Se $f \simeq h$ e $g \simeq r$ per $x \to x_0$

$$f \cdot g \simeq h \cdot r \quad \text{e} \quad \frac{f}{g} \simeq \frac{h}{r} \quad \text{per } x \to x_0$$

Si dice che f è INFINITESIMA per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

e si scrive

$$f = o(1) \quad \text{per } x \to x_0$$

e si legge "f è un o piccolo di 1" per $x \to x_0$

Si dice che $f = o(g)$ per $x \to x_0$ se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

$$f \simeq g \quad \text{per } x \to x_0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$f = o(g) \quad \text{per } x \to x_0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Proposizione: $f \simeq g$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow f = g + o(g)$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \iff f - g = o(g) \text{ per } x \to x_0$$

LIMITI NOTEVOLI — ASINTOTICO (per $x \to 0$) — o-PICCOLO (per $x \to 0$)

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ — $\sin x \simeq x$ — $\sin x = x + o(x)$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\cdot 2$ — $\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$ — $1 - \cos x \simeq \frac{x^2}{2}$ — $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$ — $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ — $e^x - 1 \simeq x$ — $e^x - 1 = x + o(x)$

$e^x \simeq 1 + x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ — $\log(1+x) \simeq x$ — $\log(1+x) = x + o(x)$

POM. (AUDIO 44)

PROPRIETÀ DI o-piccolo. Per $x \to 0$ si ha:

a) $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

b) $c \cdot \underset{\underset{f}{\parallel}}{o}(x^n) = o(x^n)$, $c \in \mathbb{R}$

c) $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

d) $o(x^n) : x^m = o(x^{n-m}) \quad \forall n > m$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - \log(1+x) - x - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$e^{x} = 1 + x + \theta(x)$$

$$\log(1+x) = x + \theta(x) \quad \text{per } x \to 0$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \theta(-x) = 1 - x + \theta(x) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x + \theta(x) - (x + \theta(x)) - x - 1}{x}$$

$$R = \theta(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3x + \theta(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(-3 + \overset{0}{\frac{\theta(x)}{x}}\right) = -3$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\log x} = \frac{0}{0}$$

$$\sin(x-1) \cong x - 1 \quad \text{per } x \to 1$$

$$\log(x) = \log(1 + (x-1)) \cong x - 1 \quad x \to 1$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin(x)} = \frac{0}{0}$$

$$e^{x^2} \cong 1 + x^2$$

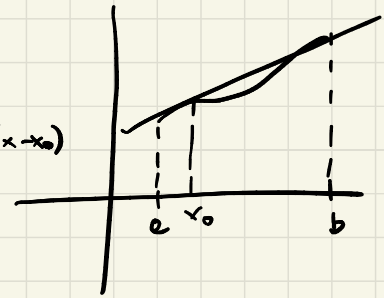
$$\sin x \cong x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 - 1}{x} = 0$$

$f : (a,b) \to \mathbb{R}\ ,\quad x_0 \in (a,b)$

Problema: possiamo approssimare f vicino ad x_0 con un polinomio di primo grado?
In altre parole possiamo LINEARIZZARE f vicino ad x_0?

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Se f è derivabile in x_0 allora la risposta è affermativa. Il polinomio è dato da

$P_{(x)} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Formula di Taylor con il resto di Peano

$f : (a,b) \to \mathbb{R}\ ,\quad x_0 \in (a,b)$

$f \in C^m(a,b)$

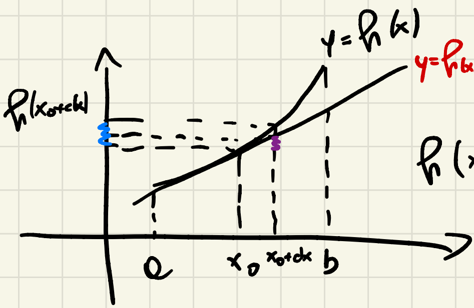
Allora

RESTO DI PEANO

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO } m \text{ centrato in } x_0} + \overbrace{o\left((x - x_0)^m\right)}^{\text{RESTO DI PEANO}} \quad \text{per } x \to x_0, \qquad (*)$$

POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO m centrato in x_0

dove $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, $0! = 1$ $\qquad P_{m,x_0}(x)$



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x_0 + dx)$ valore vero di f in $x_0 + dx$

$f(x_0) + f'(x_0)\,dx$ valore approssimato di f in $x_0 + dx$

Errore di approssimazione

$= f(x_0 + dx) - (f(x_0) + f'(x_0)\,dx)$

$$= \underbrace{f(x_0+dx) - f(x_0)}_{\Delta f(x_0)} - \underbrace{f'(x_0)\,dx}_{} = o(dx) \quad \text{per } x \to 0$$

$\Delta f(x_0)$: INCREMENTO sulla funzione

DIFFERENZIALE DI f in x_0: incremento sulla tangente

Derivabile in x_0 $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{dx\to 0} \frac{f(x_0+dx) - f(x_0)}{dx} = f'(x_0) \text{ in } \mathbb{R}$$

$$\lim_{dx\to 0} \frac{f(x_0+dx) - f(x_0) - f'(x_0)\,dx}{dx} = 0$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$

Dim (per induzione)

Base induzione: $n = 1$

$f \in C^1(a,b)$

Dobbiamo provare che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{per } x \to x_0 \qquad (1)$$

Poiché f è derivabile in x_0 si ha che

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

da cui segue (1)

Supponiamo che per $g \in C^{m-1}(a,b)$ si ha che

$$g(x) = P_{m-1,g}(x) + o\left((x-x_0)^{m-1}\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

Dobbiamo provare che vale *

$$\frac{h(x) - P_{m,g}(x)}{(x-x_0)^m} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

$\Downarrow$ o piccolo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - P_{m,g}(x_0)}{(x-x_0)^m} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h'(x) - P'_{m,h}(x)}{m(x-x_0)^{m-1}} = 0 \quad \text{si ha che per ipotesi induttiva}$$

$$P_{m,h}(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{h^{(m)}(x_0)}{m}(x-x_0)^m$$

$$\Rightarrow P'_{m,h}(x) = h'(x_0) + \frac{h''(x_0)}{2!} \cdot 2(x-x_0) + \dots + \frac{h^{(m)}(x_0)}{\underset{\underset{m(m-1)!}{\shortparallel}}{m!}} m(x-x_0)^{m-1}$$

$$= h'(x_0) + h''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{h^{(m)}(x_0)}{(m-1)!}(x-x_0)^{m-1}$$

$$= P_{m-1,h'}(x), \quad h' \in C^{m-1}(a,b)$$

(AUDIO 45) 10/05/2023

Formula di Taylor con il resto di peano:

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\in C^m(a,b)$, $x_0\in(a,b)$

Allora

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{P_m(x)}+o\left((x-x_0)^m\right)\quad \text{per } x\to x_0$$

→ QUANTITÀ CHE VA A 0 PIÙ VELOCEMENTE di $(x-x_0)^m$

$x_0=0$ SI PARLA DI POLINOMIO DI MCLAURIN

POLINOMI DI TAYLOR DI ALCUNE FUNZIONI

$f(x)=e^x$

$f\in C^\infty(\mathbb{R})$, $x_0=0$

$f'(x)=\ldots=f^{(m)}(x)=e^x \quad \forall m\in\mathbb{N}$

$f^{(m)}(0)=1 \quad \forall m\in\mathbb{N}$

$$P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}+o(x^m)\quad \text{per } x\to 0$$

$f(x)=\log(1+x)$ $\qquad x_0=0$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$

$f\in C^\infty(-1,+\infty)$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2} \Big|_{x=0} = -1 = -1!$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} = 2(1+x)^{-3}\Big|_{x=0} = 2 = 2!$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}\Big|_{x=0} = -6 = -3!$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k + o(x^m) \text{ per } x \to 0$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^m) \text{ per } x \to 0$$

$$f(x) = \sin x \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}) \qquad x_0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x\Big|_{x=0} = 1$$

$$f''(x) = -\sin x\Big|_{x=0} = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x\Big|_{x=0} = -1$$

$$f^{IV}(x) = \sin x\Big|_{x=0} = 0$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2m+1}\right) \text{ per } x \to 0$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2m}) \qquad \text{per } x \to 0$$

Esercizi

1) Approssimare $\sqrt{e} = e^{1/2}$
con un polinomio di grado 3

$f(x) = e^x$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Possiamo approssimare il valore approssimato di $\sqrt{e}$

$$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = \frac{72+3+2}{48} = \frac{77}{48}$$

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$

Allora $\forall x \in (a,b)\ \exists \bar{x} \in (x_0, x)$ $(o\ \bar{x} \in (x, x_0))$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Nota per $n = 0$ si ha $f \in C^1(a,b)$ $\exists \bar{x} \in (x_0, x)$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x - x_0) \qquad \text{Teorema di Lagrange}$$

Esercizio 2

Approssimare il valore e secondo dei polinomi

$x_0 = 1$

$$P_1(x) = 1 + x \qquad = 2$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \qquad = 2{,}5$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} \qquad = 2{,}\overline{6}$$

Esercizi

3) Approssimare $\sqrt{e}$ tale che l'errore di approssimazione sia inferiore a 10^{-2}

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}}_{P_m(x)} + \frac{e^{\bar{x}}}{(m+1)!} x^{m+1} \quad \text{con } \bar{x} \in (0, x)$$

$$\sqrt{e} = e^{1/2} \qquad x = \frac{1}{2}$$

Approssimiamo $\sqrt{e}$ con $P_m(\frac{1}{2})$. L'errore è dato da $\frac{e^{\bar{x}}}{(m+1)!} \frac{1}{2}^{m+1}$ con $\bar{x} \in (0, \frac{1}{2})$

Richiediamo che $\left| \frac{e^{\bar{x}}}{(m+1)!} \frac{1}{2}^{m} \right| < 10^{-2}$

$$\frac{e^{\bar{x}}}{(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m < \frac{e^{1/2}}{(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m < \frac{e^{1/2}}{(m+1)!} < \frac{\sqrt{3}}{(m+1)!} < 10^{-2}$$

$$\frac{(m+1)!}{\sqrt{3}} > 10^2$$

$(n+1)! > 10^2 \cdot \sqrt{3} \simeq 178$ se $n \geq 5$

FORMULA DI TAYLOR CON FORMULA INTEGRALE

$f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$

Allora $\forall x \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Per $n=0$ si ha che se $f \in C^1(a,b)$, allora

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$ formula fondamentale del calcolo integrale

POLINOMI DI TAYLOR DI ALCUNE FUNZIONI:

POLINOMIO DI GRADO 5 centrato in $x_0 = 2$
della funzione

$$f(x) = \log(x)$$

$$\log(1+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} y^k + o(y^n) \quad \text{per } y \to 0$$

$$f(x) = \log x = \log(x-2+2) = \log((x-2)+2)$$

$$\log\left[2\left(\frac{x-2}{2}+1\right)\right] = \log 2 + \log\left(\underbrace{\frac{x-2}{2}}_{=y}+1\right)$$

$y \to 0$ se $x \to 2$

$$\log x = \log 2 + \log\left(\frac{x-2}{2}+1\right)$$

$$= \underbrace{\log 2 + \sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{x-2}{2}\right)^k}_{P_5(x,2)} + o\left((x-2)^5\right) \quad \text{per } x \to 2$$

15/05/23 (AUDIO 46)

$f \in C^{\cancel{n}\,\infty}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\cancel{n}\,\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{} + \cancel{o\left((x-x_0)^n\right)} \quad \text{per } x \to x_0$$

SERIE DI TAYLOR

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

$f \in C^{\infty}(a,b)$

Si definisce serie di Taylor di f centrata in x_0 la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

dove

$f^{0}(x_0) = f(x)$ e $0! = 1$

Si dice che f é sviluppabile in serie di Taylor intorno ad x_0 se $\exists\, r>0$ tale che:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

Nota

$f \in C^{\infty}(a,b) \not\Rightarrow f$ sviluppabile in serie di Taylor

Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

$$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \qquad \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = \underset{f(x)}{\overset{\neq}{0}} \Leftarrow f'(0)=0$$

CRITERI DI SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR

1° CRITERIO

$f:(a,b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a,b)\ f \in C^{\infty}(a,b)$

f é sviluppabile in serie di Taylor intorno ad x_0
se e solo se

$$\exists\, r>0 \mid \lim_{n \to +\infty} R_n(x,x_0)=0$$

Dove $R_n(x,x_0)$ e il resto nella formula di Taylor

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{S_n \to_{n \to +\infty} \to f(x)} + R_n(x,x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$R_m(x,x_0) = f(x) - S_m(x)$$

Applicazione: La funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di Taylor intorno a 0

$$f(x) = e^x \quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

Dalla formula di Taylor si ha che

$$e^x = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\bar{x}} x^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{dove } \bar{x} \in (0,x)$$

$$\lim_{m \to \infty} \left| \frac{e^{\bar{x}} x^{m+1}}{(m+1)!} \right| \leq \frac{e}{(m+1)!} \to 0$$
se $|x| \leq 1$

Si dimostra

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{x!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Criterio 2:

$\exists M > 0$ tale che:

$$|f^{(m)}(x)| \leq M \quad \forall x \in (a,b) \ \forall m \in \mathbb{N}_0$$

$\Rightarrow f$ è sviluppabile in serie di Taylor intorno ad $x_0 \in (a,b)$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

Prendendo $x = 1$ in (A) si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$$

Esercizio scrivere il polinomio di Taylor centrato in 0 e di grado 4 della funzione

$$f(x) = x \cdot e^x$$

$$P_4(x) = \sum$$

17/05/23

STUDIO DI FUNZIONE

$f(x) = \sqrt[3]{x^2(1+x)}$

dominio tutto $\mathbb{R}$

segno e intersezioni

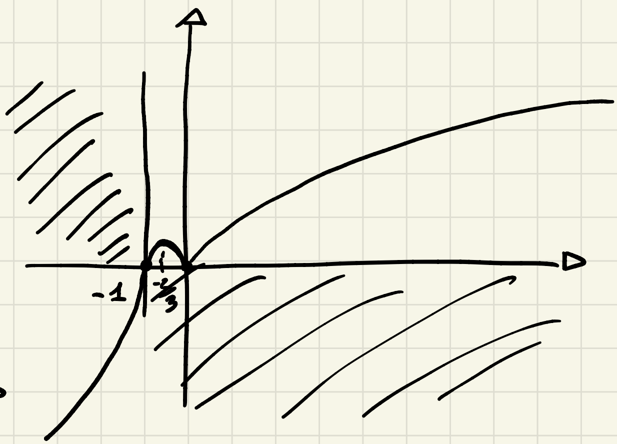
$f(x) = 0$

$\sqrt[3]{x^2(1+x)}$

$x^2(1+x) \geq 0$

$1+x \geq 0$

$x \geq -1$



$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \iff \sqrt[3]{x^2(1+x)} = 0$

$x^2(1+x) = 0$

$x = 0$

$1+x = 0$

$x = -1$

→ interseca l'asse x in $-1, 0$

$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0)$

limiti e asintoti

∄ asintoti orizzontali

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2(1+x)} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2(1+x)} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \varnothing \in \mathbb{R}$

OBLIQUI $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = L \quad L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\cancel{\lim_{x \to -1} f(x)}$

monotonia, massimi e minimi e derivabilità

$x_1 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

continua $\to$ derivabile

$\downarrow$

continua ok

$z \longmapsto \sqrt[3]{z}$ derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\downarrow$ in 0 non è un flesso perché c'è un flesso verticale

f è derivabile $x \in \mathbb{R} \mid x^2(1+x) \neq 0 \quad (x \neq 0, x \neq 1)$

perché comp di funzioni derivabili

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2(1+x)\right)^{1/3 - 1} \cdot \left(2x + 3x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{x(2+3x)}{\sqrt[3]{[x^2(1+x)]^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \frac{0}{0} = \frac{x\,(2+3x)}{x^{4/3}\sqrt[3]{(1+x)^2}} = \frac{1}{3}\,\frac{2+3x}{x^{1/3}\sqrt[3]{(x+1)^2}} = +\infty$$

$\downarrow$ $0^+ = +\infty$

$0^- = -\infty$

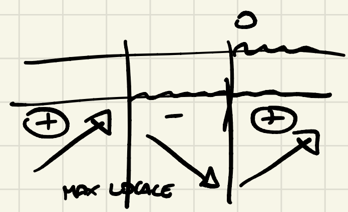
$>$ non derivabile perché il limite $f'(x)$ deve essere derivabile

$x = 0$ cuspide

$$\lim_{x \to -1} f'(x) = +\infty$$ flesso a tangente verticale

$$f'(x) = \frac{x\,(2+3x)}{3\sqrt[3]{x^2(1+x)^2}} \; \boxed{\geq 0}$$

$x(2+3x) \geq 0 \qquad x \geq 0 \qquad x \geq -\frac{2}{3}$



$f'(x)=0$

$x(2+3x)=0$

$x=0$ NON ACC

$x=-\frac{2}{3}$ MAX LOCALE

$$\int \frac{x}{(x+2)(x-1)} dx$$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

primitive di f in $[a,b]$

$F:[a,b] \to \mathbb{R}$ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

F derivabile in $[a,b]$
e tale che $F'(x)=f(x), \forall x \in [a,b]$

$$\int \frac{x}{x^2+x-2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+x-2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x-2}$$

$$\frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$A(x+1)+B(x+2)=x$

$(A+B)x-A+2B=x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2B-A=0 \end{cases}$ $A=1-B$

$\Downarrow$

$2B-1+B=0$

$3B=1$

$B = \frac{1}{3} \Rightarrow A = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$\int \frac{x}{(x+2)(x-1)}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x+2)}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)}\,dx$$

$$\frac{2}{3}\log|x+2| + \frac{1}{3}\log|x-1| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua

$$\int_0^3 \underbrace{\frac{x^2+3}{3\sin^2 x}}_{} \,dx \qquad > 0 \text{ in } (0,3]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+3}{3\sin^2 x} = +\infty \quad \text{INTEGRALE IMPROPRIO}$$

$$0 < \frac{x^2+3}{3\sin^2 x}$$

$$0 \le \sin^2 x \le 1$$

$$0 < \frac{1}{\sin^2 x} \ge 1$$

$$\frac{x^2+3}{3\sin^2 x} \ge \frac{x^2+3}{3}$$

4) $(z-i)^3 = 1$

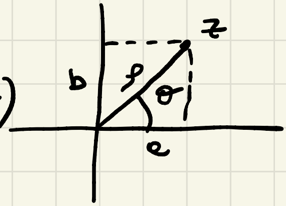
$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$i^2 = -1$ $\quad z = a + ib$

$z = (a, b)$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$



$z = \rho e^{i\theta}$

$(z-i)^3 = i$

$w = z - i$

$w^3 = i$

$w = \sqrt[3]{i}$

$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)$

$w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\exists$ n radici n-esime di w date da

$w_k = \rho_k \cos(\theta_k + i\sin\theta_k)$

dove $= \rho_k = \rho^{1/n}$ e $\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$

$k = 0, \dots, n-1$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^m |\beta-2|^{m+1}}{2m^2} \geq 0 \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{e^{\cancel{m+1}} |\beta-2|^{\cancel{m+2}}}{2(m+1)^2} \cdot \frac{2m^2}{\cancel{|\beta-2|^{m+1}} \cdot \cancel{e^m}} = e$$

$$e\,|\beta-2| \begin{cases} >1 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{ diverge} \\ <1 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{ converge} \\ =1 \end{cases}$$

Polinomio grado 10 Taylor

$x_0 = 0$

$f(x) = x^3 \log(1+2x)$

$$(z-2i)^4 = -4$$

$$w = z - 2i$$

$$w^4 = -4$$

$$w = \sqrt[4]{-4}$$

$$w_k = \sqrt[4]{|-4|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$k = 0, 3$$

$$w_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$w_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$
$$w_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$w_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$h(x) = \frac{\log(x+1)}{-2-\ln(x+1)}$$

$$D = (-1, e^{-2}-1) \cup (e^{-2}-1, +\infty)$$

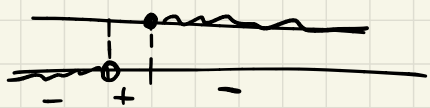
INTERSEZIONI ASSI E SEGNO

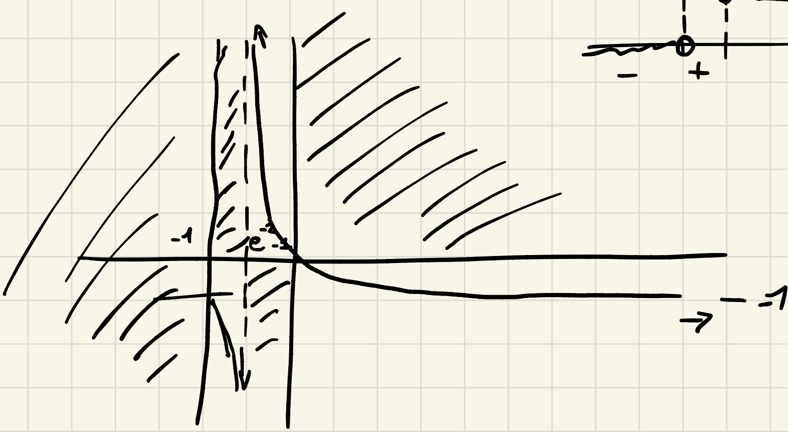
$h(x) \geq 0$

$$\frac{\ln(x+1)}{-2-\ln(x+1)} \geq 0$$

$\ln(x+1) \geq 0 \qquad x \geq 0$

$-2-\ln(x+1) > 0 \qquad x < e^{-2}-1$





$f(x) = x^3 e^{-x}$

DOMINIO

$D = \mathbb{R}$

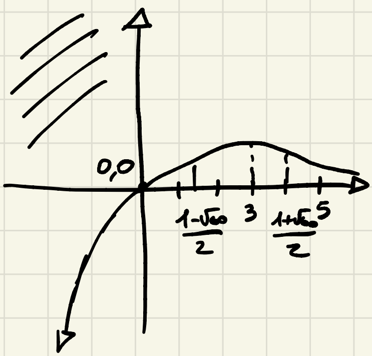
SIMMETRIE

$$f(-x) = f(x) \neq -x^3 e^x$$

$$f(-x) = -f(x) \neq -(x^3 \cdot e^{-x})$$

SEGNO INTERSEZIONE CON GLI ASSI

$x^3 \underbrace{e^{-x}}_{\text{sempre positivo}} \geq 0$



$x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$x^3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$

$x = 0$

$f(x) = 0$

LIMITI

GERARCHIA INFINITI

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot e^{-x} = \frac{x^3}{e^x} = 0$$

$\rightarrow$ ASINTOTO ORIZZONTALE

$\downarrow$

NESSUN ASINTOTO OBLIQUO

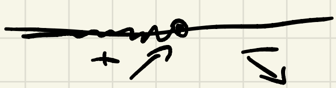
$$\lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot e^{-x} = -\infty$$

derivate

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot -e^{-x} = e^{-x}(3 - x)\,x^2$$

$$e^{-x}(3-x)x^2 \geq 0$$

$x \leq 3$



$$f''(x) = e^{-x}(3-x)x^2 = e^{-x}(3x^2-x^3)$$

$$= -e^{-x}(3x^2-x^3) + e^{-x}(6x-3x^2)$$

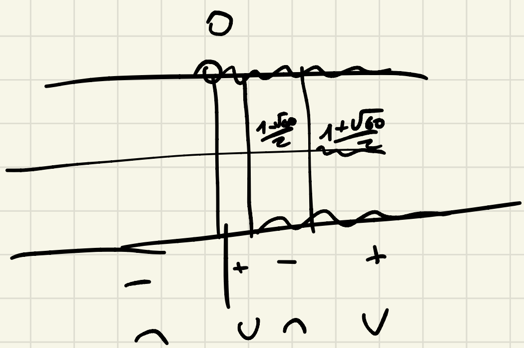
$$= e^{x}x(x^2+6x-6)$$

$$x = 0$$

$$x^2+6x-6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{36+24}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \frac{1+\sqrt{60}}{2} \\ \searrow \frac{1-\sqrt{60}}{2} \end{array}$$



$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x > 0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2\log(x)}{x^3}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{2\lg(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{c \to +\infty} 2 \int_1^c \frac{\lg(x)}{x^3}$$

$$f(x) \log(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$$

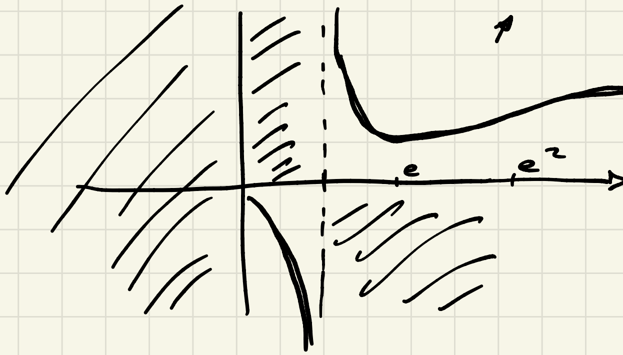
$$g'(x) \frac{1}{x^3} \to g(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\lim_{c \to +\infty} 2\left[\left[-\frac{\log(x)}{2x^2}\right]_1^c - \int_1^c -\frac{1}{2x^3}\,dx\right]$$

$$\lim_{c \to +\infty} 2\left[\left[-\frac{\log(x)}{2x^2}\right]_1^c - \left[\frac{1}{4x^2}\right]_1^c\right] =$$

$$\lim_{c\to+\infty} 2\left[0-\left[0-\frac{1}{4\,1^2}\right]\right] = \frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{x}{\log(x)}$$



DOMINIO

$$D=(0,1)\cup(1,+\infty)$$

SIMMETRIE

$f(x)\neq f(-x)$ $\Rightarrow$ NE PARI

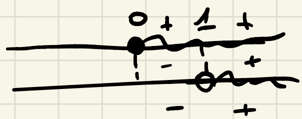
$f(x)\neq -f(x)$ $\Rightarrow$ NE DISPARI

STUDIO DEL SEGNO

$$\frac{x}{\log(x)}\geq 0$$

$x\geq 0$

$x>1$



$x>1$

LIMITI

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log(x)}=+\infty$$ $\rightarrow$ NO ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\log(x)}=\frac{0}{0}\overset{\text{THP}}{=}\frac{1}{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\log(x)}=+\infty$$

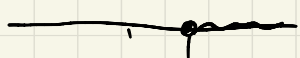
1 asintoto verticale

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\log(x)}=-\infty$$

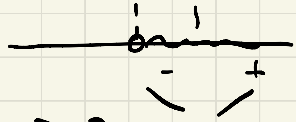
DERIVATE

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\log(x)}\right)'=\frac{1\cdot\log(x)-1}{(\log(x))^2}=\frac{\log(x)-1}{(\log(x))^2}\geq 0$$

$\log(x)\geq 1 \Rightarrow x\geq e$



$\log(x) > 0 \Rightarrow x > 1$



$$f''(x) = \frac{\log(x) - 1}{(\log(x))^2} = \frac{\log(x) - 2}{(\log(x))^3} \geq 0$$

$x = e^2$

$\cancel{x = 1}$ FLESSO A TANGENTE VERTICALE

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$$

DOMINIO

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

SIMMETRIA

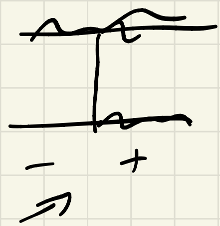
$f(x) \neq f(-x)$ NON PARI

$f(x) \neq -f(x)$ NON DISPARI

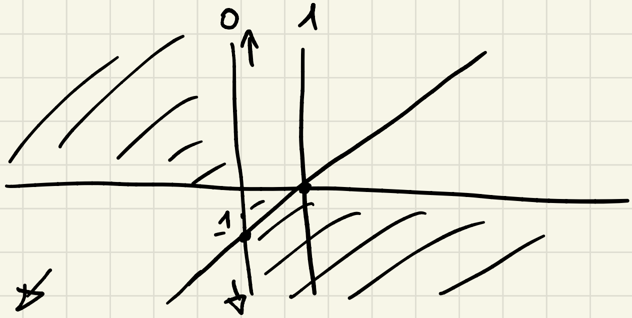
SEGNO E INTERSEZ. CON GLI ASSI

$(x-1)^2 \quad \forall x$

$x \quad x > 0$



$(1,0)$ INTERSEZ.



LIMITI

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x} \overset{THP}{=} \frac{2x-2}{1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{x} \overset{THP}{=} \frac{2x-2}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2-2x+1}{x^2} \overset{THP}{=} \frac{2x-2}{2x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2-2x+1}{x^2} \overset{THP}{=} \frac{2x-2}{2x} = 1 \quad (m)$$

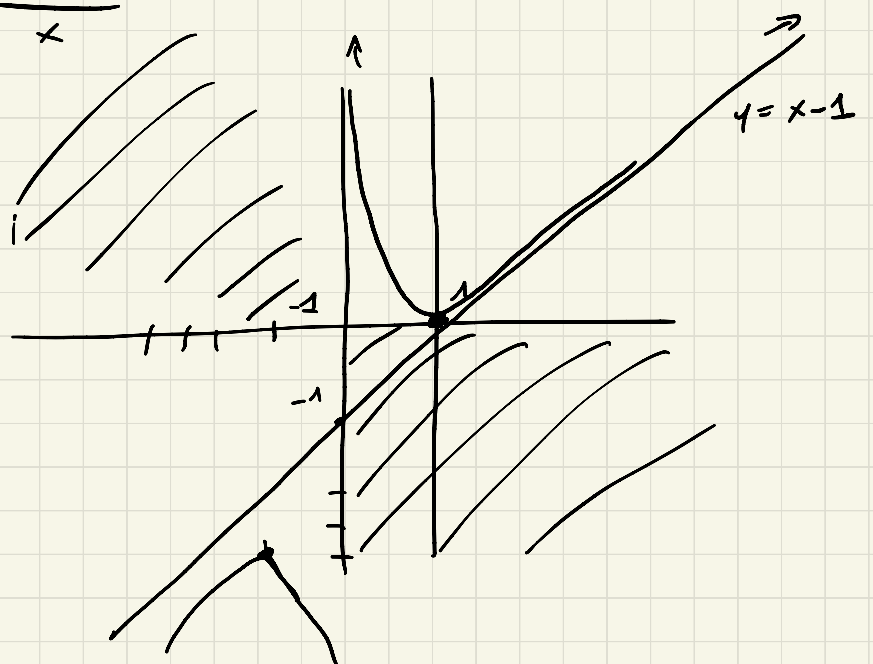
$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - 1\cdot x\right] = \frac{\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}}{x} = -1 \ (q)$$

$y = x-1$

x	y
0	-1
1	0

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x^2-2x+1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2-2x+1}{x} = +\infty$$



DERIVATE

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x} \qquad \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{g(x)^2}$$

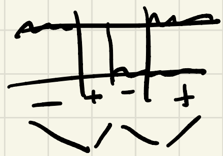
$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x^2-\cancel{2x} - \cancel{x^2}-\cancel{2x}+1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

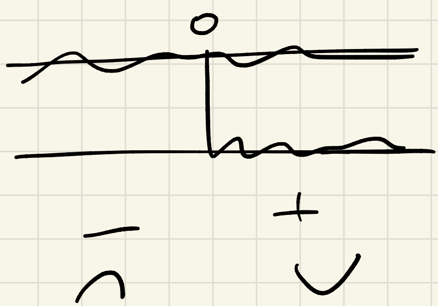
$x^2 \geq 1$ - $x \geq \pm 1$

$x > 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$



$$f''(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{2x\cdot x^2 - 2x\cdot(x^2-1)}{x^4} = \frac{\cancel{2x^3}-\cancel{2x^3}+2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}$$



$$= \frac{2}{x^3}$$

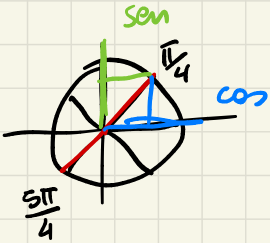
$\frac{2}{x^3} = 0$? $2 = 0$ IMP NO FLESSI

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{\cos x - \sin x} \qquad [0, 2\pi]$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$1+\cos x \geq 0$$

$$\cos x \geq -1$$

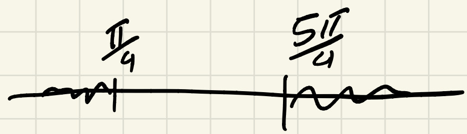


$$\cos x - \sin x \neq 0$$

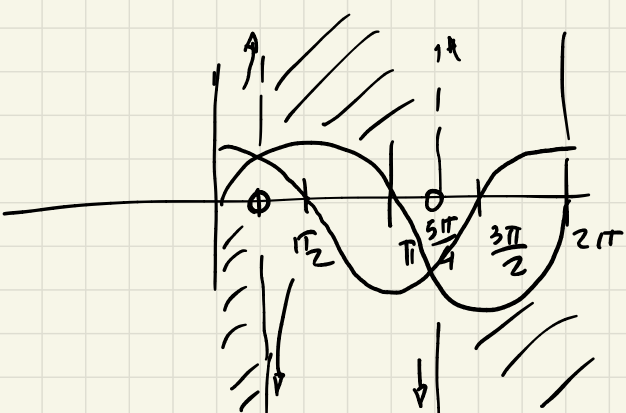
$$x \neq \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \cos x + 1 = 0 \end{cases} \quad \xrightarrow{y=0} x = \pi$$

$$\cos x > \sin x$$



$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{1+\cos}{\cos x - \sin x} = 2 \end{cases}$$



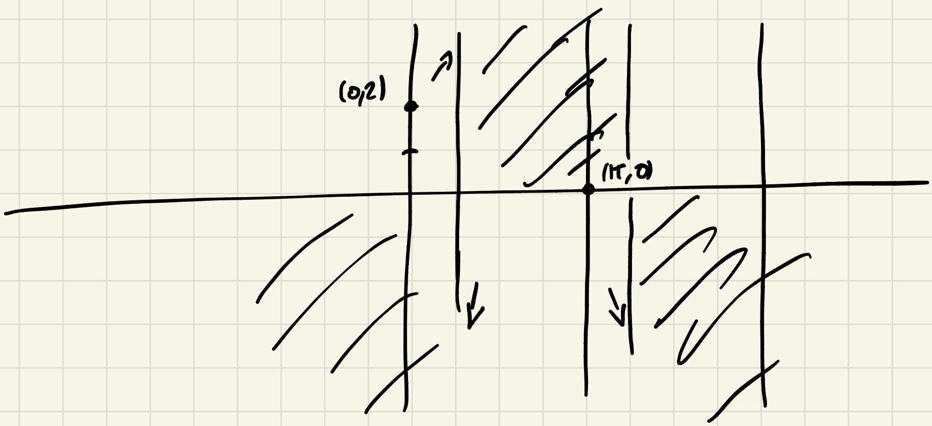
LIMITI

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \frac{1+\cos x}{\cos x - \sin x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{1+\cos x}{\cos x - \sin x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{5\pi}{4}^-} \frac{1+\cos x}{\cos x - \sin x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{5\pi}{4}^+} \frac{1+\cos x}{\cos x - \sin x} = +\infty$$



DERIVATE

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{\cos x - \sin x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot (\cos x - \sin x) - (-\sin x - \cos x)\cdot(1+\cos x)}{(\cos x - \sin x)^2}$$

$$= -\cancel{\sin x \cos x} + \sin x^2 + \sin x + \cancel{\cos x \sin x} + \cos x + \cos x^2)$$

$$= \frac{\cos x + \sin x + 1}{-2\cos x \sin x + 1}$$

$$t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\cos x + \sin x \geq -1$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1 \geq 0$$

$$\frac{1\cancel{-t^2} + 2t + 1\cancel{+t^2}}{1+t^2} \geq 0$$

$$\frac{2t+2}{1+t^2} \geq 0 \quad t \geq -1$$

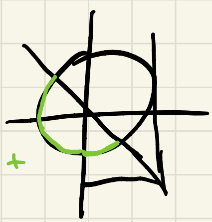
$$t \geq -1$$

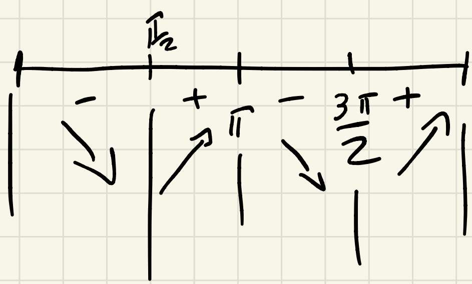
$$tg\left(\frac{x}{2}\right) \geq -1$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$f'(x) \geq 0 \qquad x > -\frac{\pi}{2} + k\pi$$





$$f(x) = |\sin(x)| + \sin(2x)$$

$$D = \mathbb{R}$$

NO SIMMETRIE

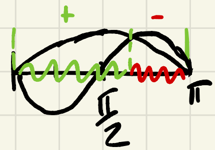
SEGNO

$$|\sin(x)| + \sin(2x) \geq 0 \qquad [0, \pi]$$

x	$y = \sin(2x)$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	-1
π	0

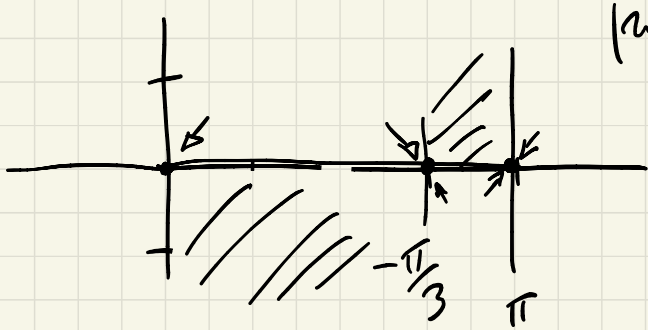
$$\frac{\overset{1}{\cancel{\sin(x)}}}{\cancel{\sin(x)}} \geq \frac{-2\cancel{\sin x}\cdot\cos x}{\cancel{\sin(x)}}$$

$$\cos x \geq -\frac{1}{2}$$



$$\sin(x) \neq \pi k \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$|\sin(x)| \geq \sin(2x)$$



$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{3}^+} |\sin(x)| + \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{3}^-} |\sin(x)| + \sin(2x) = 0$$

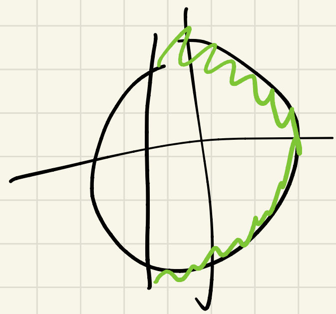
DERIVATE

$$f'(x) = \cos x\,|\sin(x)| + 2\cdot\cos(x)\cdot\sin(2x)$$

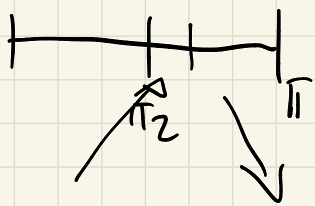
$$\frac{\cancel{\cos} x\,|\sin(x)|}{\cancel{\cos x}} \geq \frac{-4\cos^2 x\cdot\sin\cdot}{\cancel{\cos x}}$$

$$\cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos x \geq -\frac{1}{4}$$



$-\frac{1}{4}$



$$\int 2x^2 \log(2x)$$

Log

$$2\int x^2 \left(\ln(x) + \ln(2)\right)$$

sost

$$t = \ln(x)$$

$$e^t = x \qquad dx = e^t\,dt$$

$$2\int \left(t + \ln(2)\right) \cdot e^{3t}$$

parti

$$f(x) = (t + \ln(2)) \qquad f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^{3t} \qquad g(x) = \frac{e^{3t}}{3}$$

$$2\left(\frac{(t+\ln(2))e^{3t}}{3} - \int \frac{e^{3t}}{3}\right)$$

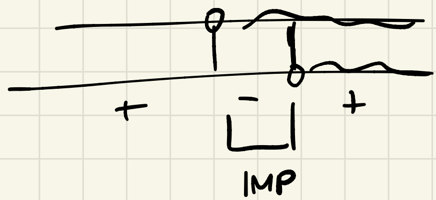
$$2\left(\frac{(t+\ln(2))e^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9}\right)$$

$$\frac{2\ln x\cdot x^3}{3} + \frac{2\ln(2)\cdot x^3}{3} - \frac{2x^3}{9} + C$$

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}}$$

$D = x<0 \vee x>1 \rightarrow x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

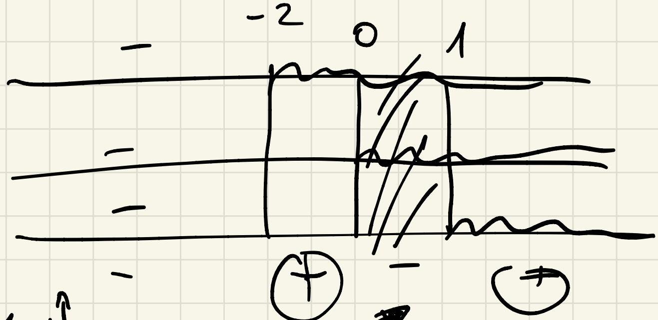
$x > 1$

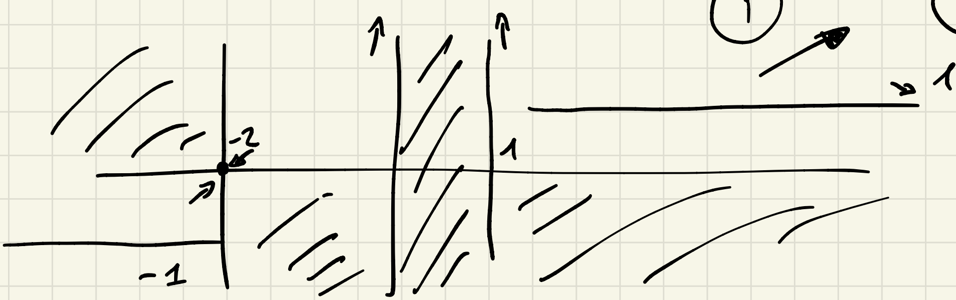


INT ASSI

$x = -2 \rightarrow y = 0$

SEGNO





$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} = 1$$

$$\sqrt{x^2\left(1-\cancel{\frac{x}{x^2}}^{\,0}\right)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} = -1$$

ASINTOTI ORIZZONTALI

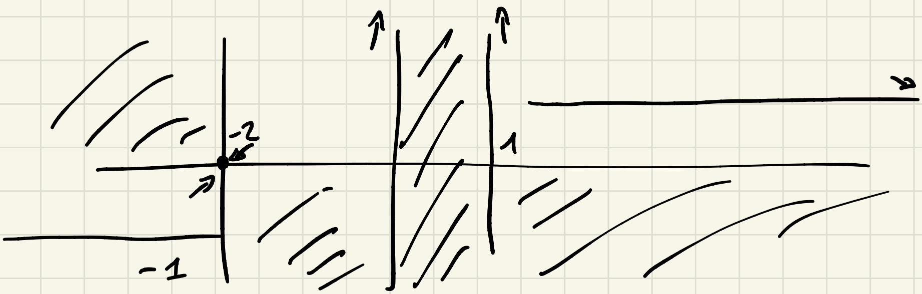
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{0}{4} = 0$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{0}{4} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2^-}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3^+}{0^+} = +\infty$$

ASINTOTI VERTICALI



DERIVATE

$$h(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x}} =$$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\, f(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-x} - (x+2)\dfrac{(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}}}{x^2-x} = \frac{x^2+\frac{3}{2}x-1}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$\left(\sqrt{x^2-x} - \frac{x^2+\frac{3}{2}x-1}{\sqrt{x^2-x}}\right) x^2-x =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-x}} - \frac{(x+2)(2x-1)}{2\sqrt[2]{(x^2-x)^3}}$$

$$(x+2)(x^2-x)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$(x^2-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(x^2-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x-1)\cdot(x+2)$$

$$(x^2-x)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{(2x-1)\cdot(x+2)}{(x^2-x)^2}\right)$$

$$\int \frac{e^{2x} - 2e^{x}}{e^{x}} = \int \frac{e^{\cancel{2}x}}{\cancel{e^{x}}} - \int \frac{2\cancel{e^{x}}}{\cancel{e^{x}}}$$

$$e^{x} - 2x + C$$

$$\log(\log(x)) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x \log(x)}$$

$$\int \frac{\log(\log(x))}{x}$$

$$h(x) = \log(lg(x)) \qquad h'(x) = \frac{1}{x \log(x)}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \log(x)$$

$$\log(\log(x)) \cdot \log(x) - \int \frac{\cancel{\log(x)}}{x\cancel{\log(x)}}$$

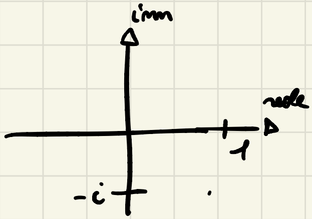
$$\log(\log(x)) \cdot \log(x) - \log(x) + C$$

$$\log(x) \cdot (\log(\log(x)) - 1) + C$$

Numeri complessi

① $(1-i)^{11} = \rho^n \left(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\right)$

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$



$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\rho = 2^5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{77\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{77\pi}{4}\right)\right)$

$32\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{77\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{77\pi}{4}\right)\right)$

$z = a + ib$

$a = 32\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{77\pi}{4}\right)$

$b = 32\sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{77\pi}{4}\right)$

② $\frac{2}{i} = \frac{2}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{2i}{-1} = -2i$ ($i^2 = -1$)

si semplifica l'espressione togliendo la i al denominatore

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}$$

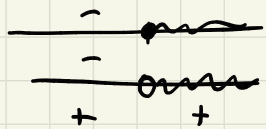
DOMINIO $\rightarrow$ $e^x - 1 \neq 0 \quad = e^x = 1 \rightarrow x \neq 0$

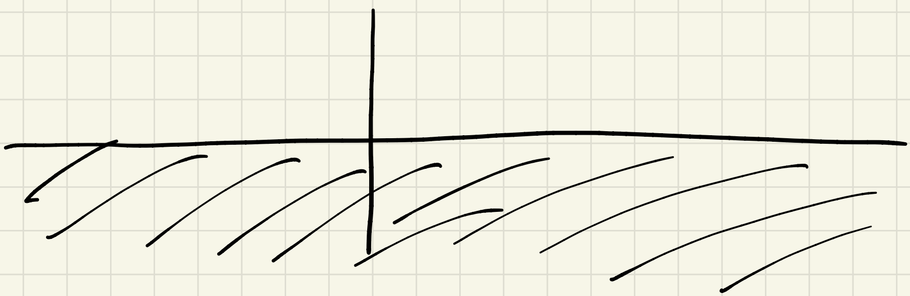
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) > 0$

$x e^x \geq 0 \quad x \geq 0$

$e^x - 1 > 0 \quad x > 0$





1

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x e^x}{e^x - 1} = \frac{\cancel{e^x}(1+x)}{\cancel{e^x}} = 1^+$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x e^x}{e^x - 1} = 1^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x e^x}{e^x - 1} = \frac{\cancel{e^x}(1+x)}{\cancel{e^x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{e^x - 1} = \frac{2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2}{\cancel{e^x}} \quad \cancel{e^x}(2x + x^2)$$

$= +\infty$

NO OBLIQUI

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x e^x}{e^x - 1} = 0 \qquad \frac{\frac{x}{e^{-x}}}{e^x - 1} \xleftarrow{\text{TH HOP}} \frac{\frac{1}{-e^{-x}} = -e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

DERIVATA

$$e^x(1+x) \cdot e^x - 1$$

$$e^x(\cancel{1}+x-\cancel{1}) - xe^x \cdot e^x$$

$$xe^x - xe^x \cdot e^x$$

$$xe^x - xe^{2x}$$

$$\frac{x(e^x - e^{2x})}{(e^x-1)^2} > 0$$

$x > 0$

$e^x - e^{2x} > 0$

−	
+	−
−	−