FUNZIONI DI DUE O PIÚ VARIABILI

IN ANALISI 1 ABBIAMO VISTO CHE:

$$f: A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

$$\forall x \in A \ \exists! \ y \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$$

ABBIAMO PARLATO DI UNA FUNZIONE REALE DI UNA VARIABILE REALE

UNA FUNZIONE REALE DI UNA O PIÚ VARIABILI REALI É UNA CORRISPONDENZA

$$f: A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n, \ n \in \mathbb{N}, \ n > 1)$$

$$\forall \underbrace{x}_{= x_1, x_2} \in A \ \exists! \ y \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$$

NOTAZIONE:

$n = 2 : (x, y)$

$n = 3 : (x, y, z)$

$n \geq 4 : (x_1, x_2 \ldots x_n)$

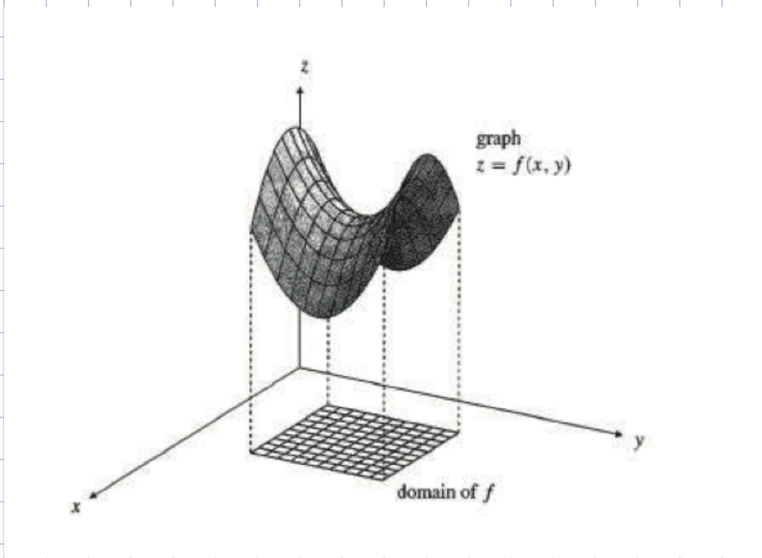
DUNQUE PER $n = 2$

$$f: A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$$

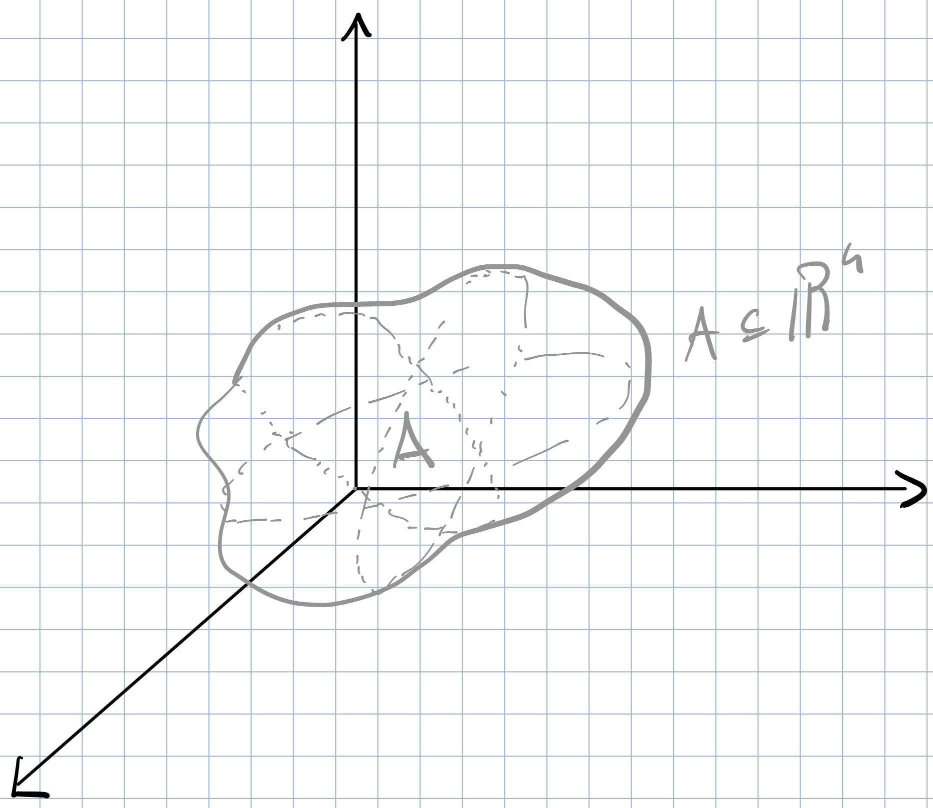
$$(x_1, x_2) \to y = f(x_1, x_2)$$

IL GRAFICO DI f:

$$\text{Graf} : \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A,\ z = f(x,y) \right\}$$
$$= \left\{ (x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in A \right\}$$



IN $\mathbb{R}^4$ SIAMO CAPACI DI DISEGNARE SOLO IL DOMINIO.



Esempio

$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

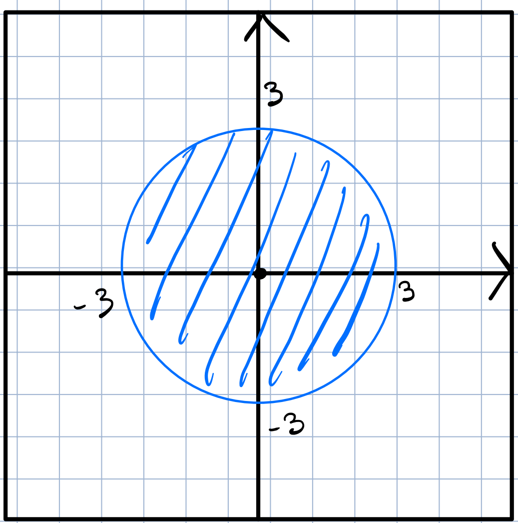
$D :=$ $9 - x^2 - y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 = 9$

CENTRATO IN $(0,0)$

$r = 3$

$x^2 + y^2 \leq 9$

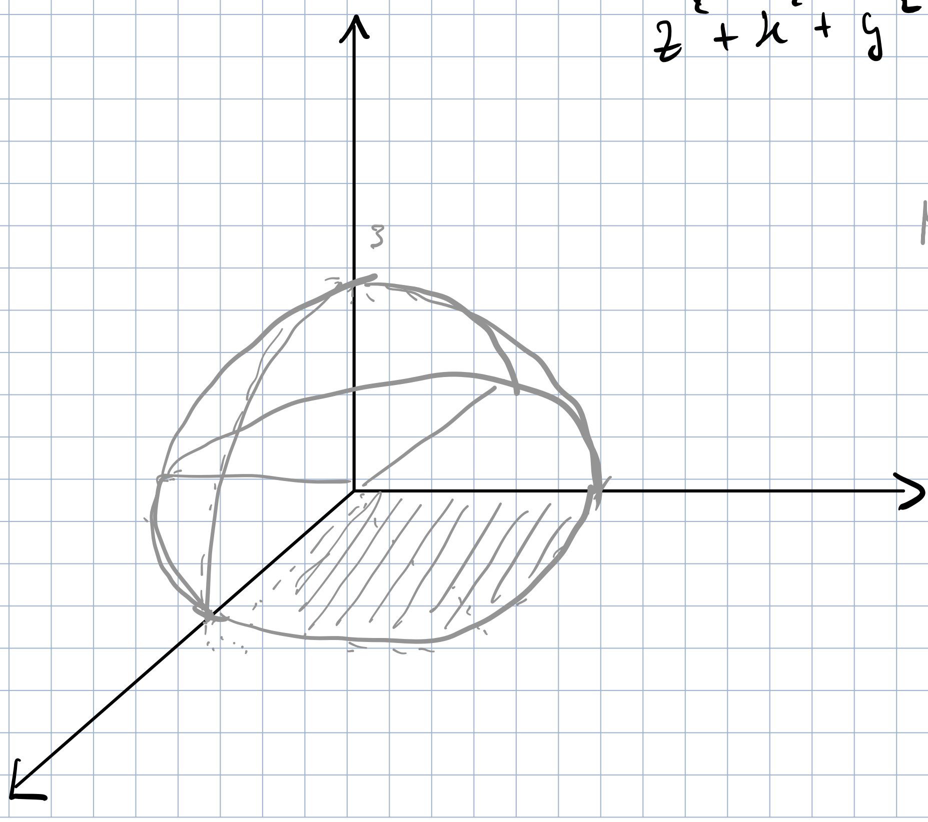


$D : \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9 \}$

$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$z^2 = 9 - x^2 - y^2$

$z^2 + x^2 + y^2 = 9$ SFERA



MA $z \geq 0$

QUINDI È

UNA SEMISFERA

DISTANZA TRA 2 PUNTI IN $\mathbb{R}^n$ $\quad d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots (x_n-y_n)}$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to f(x,y) = x^2 + y^2$

METODO DELLE CURVE DI LIVELLO

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad x = x_1, \dots, x_n$

SI DEFINISCE CURVA DI LIVELLO DI f
LA CURVA DI EQUAZIONE

$$f(x) = c$$

DUNQUE:

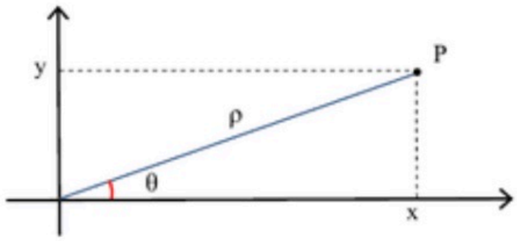
$f(x,y) = c$

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases}$$

$c < 0$: $\emptyset$		
$c = 0$	$(0,0)$	PUNTO
$c > 0$	$x^2 + y^2 = c$	CIRCONFERENZA

Coordinate polari ed Equazioni di curve notevoli

coordinate polari

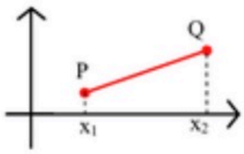
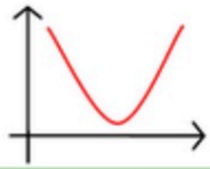
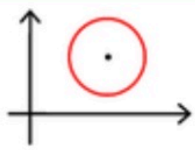
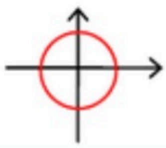
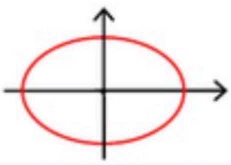
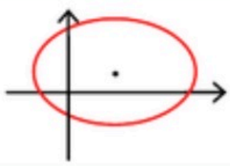


$P(x,y)$	coordinate cartesiane del punto P
$P(\rho,\theta)$	coordinate polari del punto P
$\rho = modulo$	distanza di P dall'origine
$\theta = anomalia$	misura dell'angolo orientato in senso antiorario formato da ρ con il semiasse positivo delle x

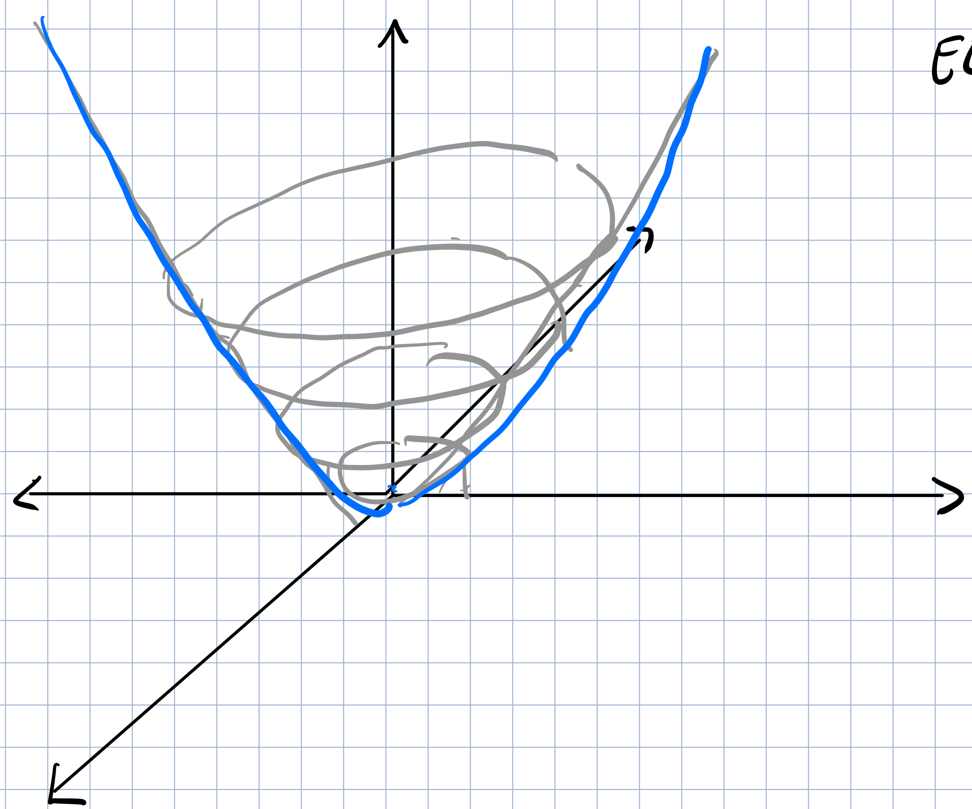
passaggio di coordinate

da cartesiane a polari	da polari a cartesiane
$P(x,y) \rightarrow \begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sen\theta \end{cases} \rightarrow P(\rho,\theta)$	$P(\rho,\theta) \rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ cos\theta = \frac{y}{\rho}\ ;\ sen\theta = \frac{x}{\rho} \end{cases} \rightarrow P(x.y)$

equazione cartesiana parametrica e polare di curve notevoli

grafico	equazione cartesiana	equazione parametrica	equazione polare
	retta $y = mx + q$	$\begin{cases} x = t \\ y = mt + q \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$	$\rho(sen\theta - mcos\theta) - q = 0$
	segmento di estremi $P(x_1,y_1)$ e $Q(x_2,y_2)$ $y = mx + q$ con $x_1 < x < x_2$	$\begin{cases} x = x_1(1-t) + x_2 t \\ y = y_1(1-t) + y_2 t \end{cases}$ con $0 \le t \le 1$	$\rho(sen\theta - mcos\theta) - q = 0$ con $\rho_P \le \rho \le \rho_Q$ e $\theta_P \le \theta \le \theta_Q$
	parabola con asse parallelo all'asse y $y = ax^2 + bx + c$	$\begin{cases} x = t \\ y = at^2 + bt + c \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$	$\rho(sen\theta - a\rho cos^2\theta - bcos\theta) = c$
	circonferenza di centro $C(\alpha,\beta)$ e raggio r $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$	$\begin{cases} x = \alpha + r\cos t \\ y = \beta + r\, sen\, t \end{cases}$ con $0 \le t \le 2\pi$	$\rho^2 + \rho(acos\theta + bsen\theta) + c = 0$
	circonferenza di centro l'origine e raggio r $x^2 + y^2 = r^2$	$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\, sent \end{cases}$ con $0 \le t \le 2\pi$	$\rho = r$
	ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\, sen\, t \end{cases}$ con $0 \le t \le 2\pi$	$\rho^2(b^2cos^2\theta + a^2sen^2\theta) = a^2b^2$
	ellisse traslata di centro $O'(\alpha,\beta)$ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\, sen\, t \end{cases}$ con $0 \le t \le 2\pi$	$b^2(\rho\cos\theta - \alpha) + a^2(\rho sen\,\theta - \beta) = a^2b^2$

PARABOLOIDE
ELLITTICO



PER DISEGNARE I "COLLEGAMENTI" TRA LE CIRCONFERENZE STUDIAMO INTERSEZIONE CON ZX E ZY

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = k \end{cases}$$

$z = x^2 + k^2$ PARABOLA SUL PIANO $y = k$

IN QUESTO CASO POSSIAMO STUDIARE SOLO UNO DEI DUE IN QUANTO SONO UGUALI

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

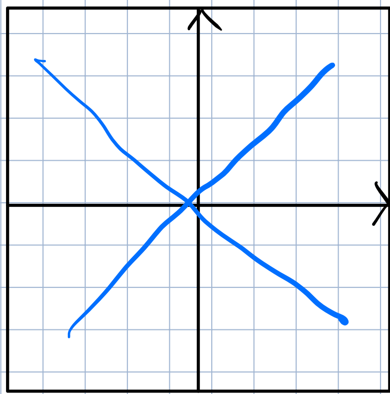
(3) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\boxed{\text{IPERBOLE} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (-1)}$

CURVE DI LIVELLO

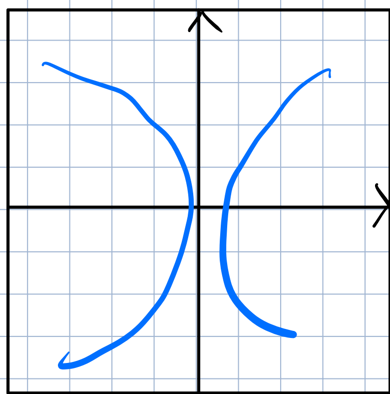
$C = 0$

$$x^2 - y^2 = 0$$
$$(x+y)(x-y) = 0$$
$$y = \pm x$$



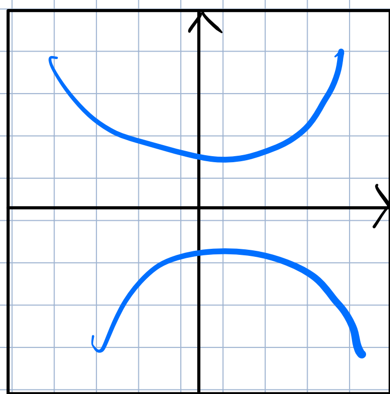
$C > 0$:

$$x^2 - y^2 = c$$
$$\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{c} = 1$$



$C < 0$

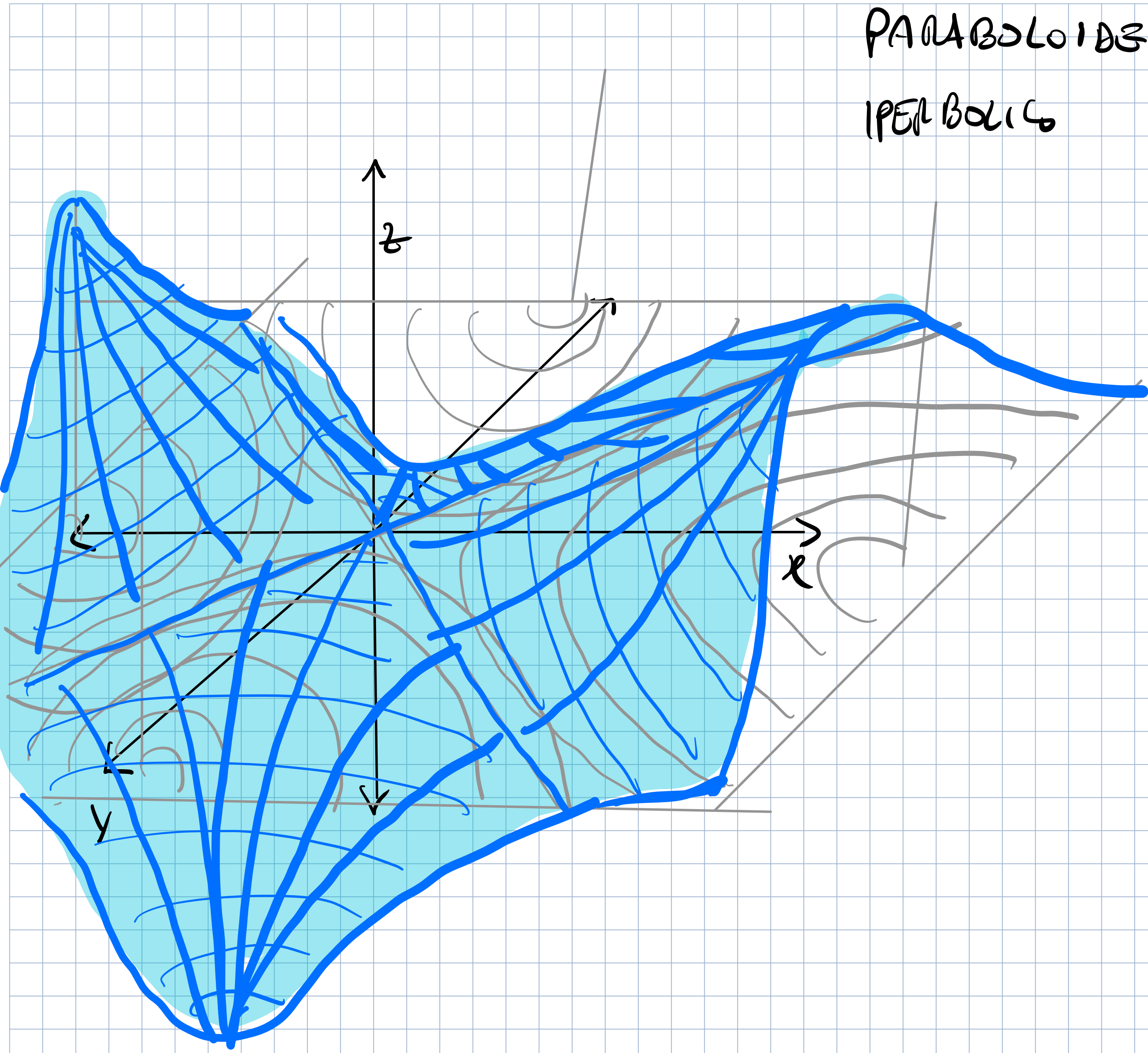
$$\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{c} = -1$$



CALCOLANDO ORA IL "COLLEGAMENTO", STUDIAMO L'INTERSEZIONE CON IL PIANO xz E yz

$$\begin{cases} z = x^2 - k^2 \\ y = k \end{cases}$$ PARABOLA VERSO L'ALTO

$$\begin{cases} z = k^2 - y^2 \\ x = k \end{cases}$$ PARABOLA VERSO IL BASSO



TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$

$E \subseteq \mathbb{R}^n \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n$

Si dice che x_0 è un punto interno ad E se:

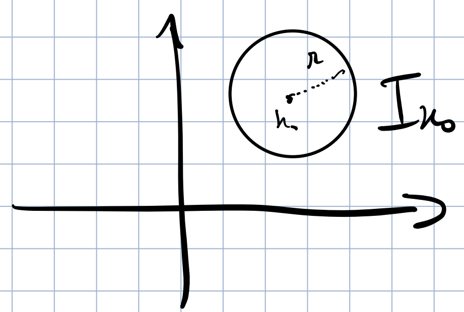
$$\exists\, I_{x_0} : I_{x_0} \subset E$$

$$I_r := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r \} \quad r > 0$$

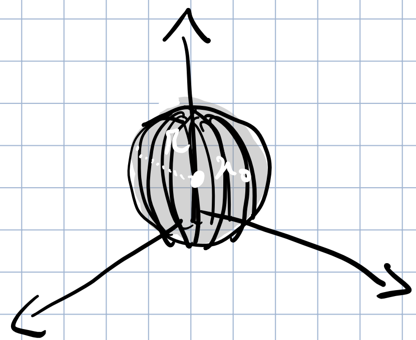
$$\|x - x_0\| = d(x, x_0) = \sqrt{(x_1 - x_{0_1})^2 + \dots + (x_n - x_{0_n})^2}$$

DISTANZA IN $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^2$:



In $\mathbb{R}^3$:



DISTANZA IN $\mathbb{R}^n$

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(P, Q) \longmapsto d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

DOVE $P(x_1, \dots, x_n)$ e $Q(y_1, \dots, y_n)$

VALGONO:

1. $d(P, Q) \geq 0$
2. $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$
3. $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R) \quad \forall\, P, Q, R \in \mathbb{R}$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

④ $d(P,Q) = d(Q,P)$

x_0 È **PUNTO ESTERNO** AD E SE x_0 È UN PUNTO INTERNO AL COMPLEMENTARE DI E

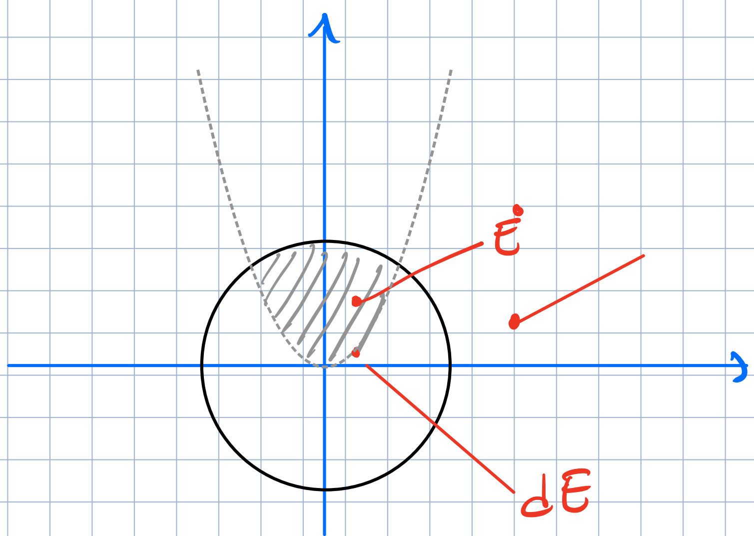
$$\exists I_{x_0} \mid I_{x_0} \subset E^c$$

x_0 È **PUNTO DI FRONTIERA** SE

$$\forall I_{x_0},\ I_{x_0} \cap E \neq \emptyset \ \text{e} \ I_{x_0} \cap E^c \neq \emptyset$$

ESEMPI

① $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ y > x^2\}$



$\mathring{E}$ = INTERNO DI E

∂E = PUNTO DI FRONTIERA

$\bar{E}$: CHIUSURA DI E $\qquad \bar{E} = E \cup \partial E$

NOTA

① $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ x_0 O È INTERNO, O ESTERNO, O DI FRONTIERA PER E.

$E \subseteq \mathbb{R}^n$

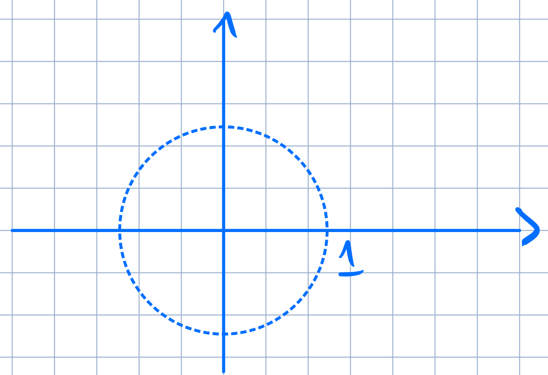
SI DICE CHE E È APERTO SE $E = \mathring{E}$

$$\forall x_0 \in E, \exists I_{x_0} : I_{x_0} \subset E$$

E È CHIUSO SE E^c È APERTO

ESEMPI

① $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$



$E = \mathring{E}$

$\Rightarrow$ E APERTO

$$\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

② $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y=0\}$

③ $E = \mathbb{R}^2$ È SIA APERTO CHE CHIUSO

PROPRIETÀ

$(A_n)_n$ DI APERTI

$(C_n)_n$ DI CHIUSI

1) $\bigcup_n A_n$ È APERTO

2) $\boxed{\bigcap_{i=1}^{k}} A_i$ È APERTO

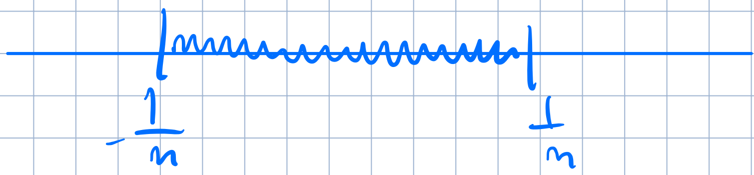
3) $\bigcap_n C_n$ È CHIUSO

4) $\boxed{\bigcup_{i=1}^{k}} C_n$ È CHIUSO

FINITA

ESEMPIO in $\mathbb{R}$

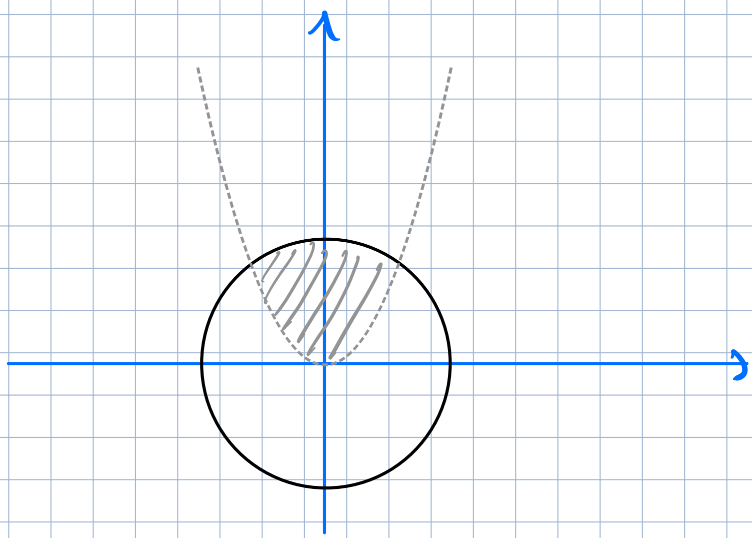
$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad n \in \mathbb{N}$$



A_n È APERTO

$$\bigcap_n A_n = \bigcap \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$ È CHIUSO

(3)



E
NON È
NÉ APERTO
NÉ CHIUSO

NOTA

(1) E È APERTO SSE NON CONTIENE LA FRONTIERA

(2) E È CHIUSO SSE CONTIENE LA SUA FRONTIERA

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

$E \subseteq \mathbb{R}^n \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n$

x_0 È DI ACCUMULAZIONE PER E SE PER OGNI INTORNO DI x_0 CADONO INFINITI PUNTI DI E.

LIMITI PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

$f: A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (x_0, y_0) \in \mathcal{D}(A)$

$$\lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x,y) = L \quad \pm\infty$$

$|(x,y)-(x_0-y_0)|$

$\parallel$

SE $\forall \overset{M}{\varepsilon} > 0 \; \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall (x,y) \in A \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$

$$\Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

$$f(x,y) \lesseqgtr M$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x)$$

SE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall (x,y) \in A \mid |x| < \delta$

$$\Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

ESERCIZI

① $$\lim_{x,y \to 1,2} x^2 y = 2$$

② $$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ $D: \mathbb{R}^2 - \{0,0\})$

$$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

③ $$\lim_{x,y \to (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

METODO DELLE RESTRIZIONI

$$y=0: \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x}} \begin{cases} 1 & \text{SE } x>0 \\ -1 & \text{SE } x<0 \end{cases}$$

$$x=0: \frac{0}{\sqrt{y^2}} = 0$$

$\nexists$

(4) $$\lim_{x,y \to (0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^4+x^4}}$$

$y = mx$

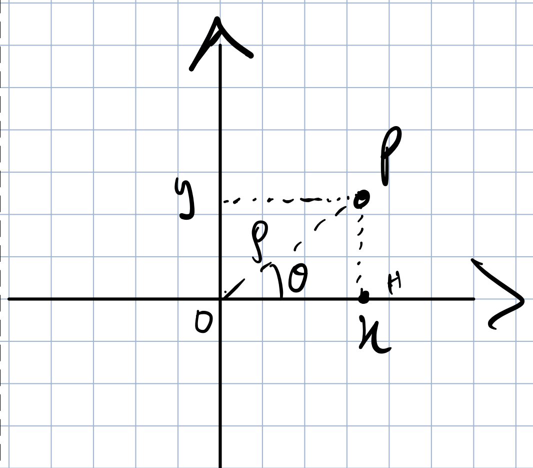
$$f(x, mx) = \frac{2x \cdot mx}{\sqrt{x^4 + m^4 x^4}} = \frac{2mx^2}{\sqrt{x^4(1+m^4)}} = \frac{2mx^2}{x^2\sqrt{1+m^4}}$$

$$= \frac{2m}{\sqrt{1+m^4}}$$

$$\Rightarrow \nexists$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 y}{x^2+y^2}$$

METODO DELLE COORDINATE POLARI



$PH = \rho \cdot \sin\theta$

$OH = \rho \cdot \cos\theta$

$x = \rho \cdot \cos\theta$

$y = \rho \cdot \sin\theta$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{2(\rho\cos\theta)^2 \cdot (\rho\sin\theta)}{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\cdot\sin\theta)^2}$$

$$= \frac{2\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = 2\rho\cos^2\theta\sin\theta \Rightarrow 0 \quad \forall\theta$$

$$0 \leq |2\rho\cos^2\theta\sin\theta| \leq 2\rho$$

$$\rho \to 0 \qquad \searrow 0$$

⑥ $$\lim_{|(x,y)| \to \infty} xy\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$= \lim_{\rho \to +\infty} \rho^2\cos\theta\sin\theta\, e^{-(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{\rho \to +\infty} \rho^2\cos\theta\sin\theta\, e^{-\rho^2} = \lim_{\rho \to +\infty} \left(\frac{\rho^2}{e^{\rho^2}}\cos\theta\sin\theta\right) = 0$$

$$0 \le \left| \rho^2 \cos\theta \sin\theta\, e^{-\rho^2} \right| \le \rho^2 \cdot e^{-\rho^2} \to 0$$

(7) $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2 \cdot \sin \pi x}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

$$x = 2 + \rho\cos\theta$$

$$y = 1 + \rho\sin\theta$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\sin\theta)^2 \cdot \sin(\pi x)}{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2}$$

$$\sin^2\theta \cdot \sin\left(\pi \cdot (2+\rho\sin\theta)^2\right) \to 0$$

$$0 \le \left| \sin^2\theta \cdot \sin(\pi(2+\rho\cos\theta)) \right|$$

$$= \underbrace{\left|\sin^2\theta\right|}_{\le 1} \left| \sin(\pi(2+\rho\cos\theta)) \right|$$

$$= \sin(2\pi + \pi\rho\cos\theta) = \sin(\pi \cdot \rho\cos\theta)$$

$$\le |\pi\rho\cos\theta| = \pi\rho|\cos\theta| \le \pi\rho \to 0$$

(8) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\sqrt{|\rho^2\cos\theta\sin\theta|}}{\sqrt{\rho^2(\sin^2+\cos^2\theta)}} = \frac{\cancel{\rho}\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}}{\cancel{\rho}}$$

$$= \sqrt{|\cos\theta\sin\theta|} \qquad \nexists$$

(9) $$\lim_{|x,y|\to\infty} xy\cdot e^{x^2+y^2}$$

$$\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot e^{\rho^2(\sin^2\theta+\cos^2)} = \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot e^{\rho^2}$$

$$\begin{cases} \infty & x \quad \cos\theta\sin\theta\neq 0 \\ 0 & x \quad \cos\theta\sin\theta = 0 \end{cases}$$

ESEMPI

① $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\lim_{x,y \to (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

$\Rightarrow$ f CONTINUA IN D

TEOREMA: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA

ALLORA GLI INSIEMI

Ⓐ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$ $\quad$ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$ $\quad$ SONO APERTI

③ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0\}$ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$

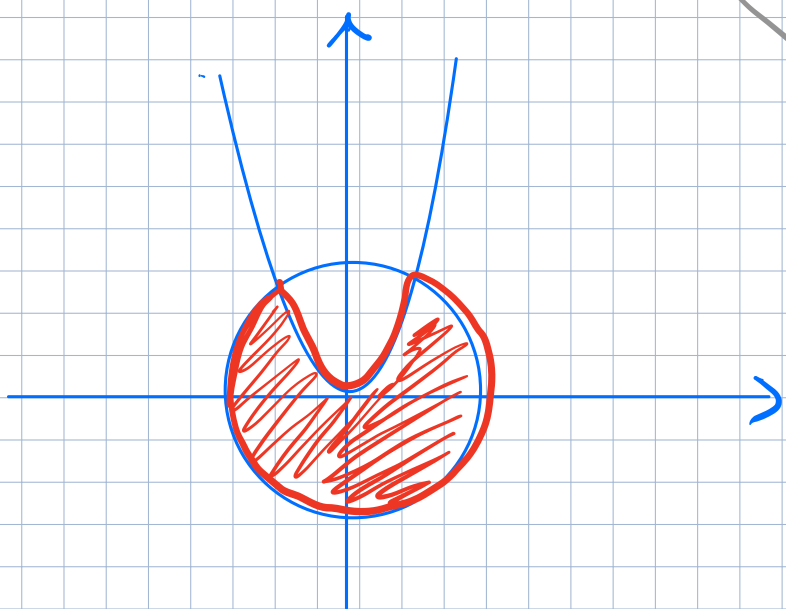
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$ SONO CHIUSI

ESERCIZI

f CONTINUA

① $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2 \,,\, x^2+y^2 \leq 1\}$

E CHIUSO

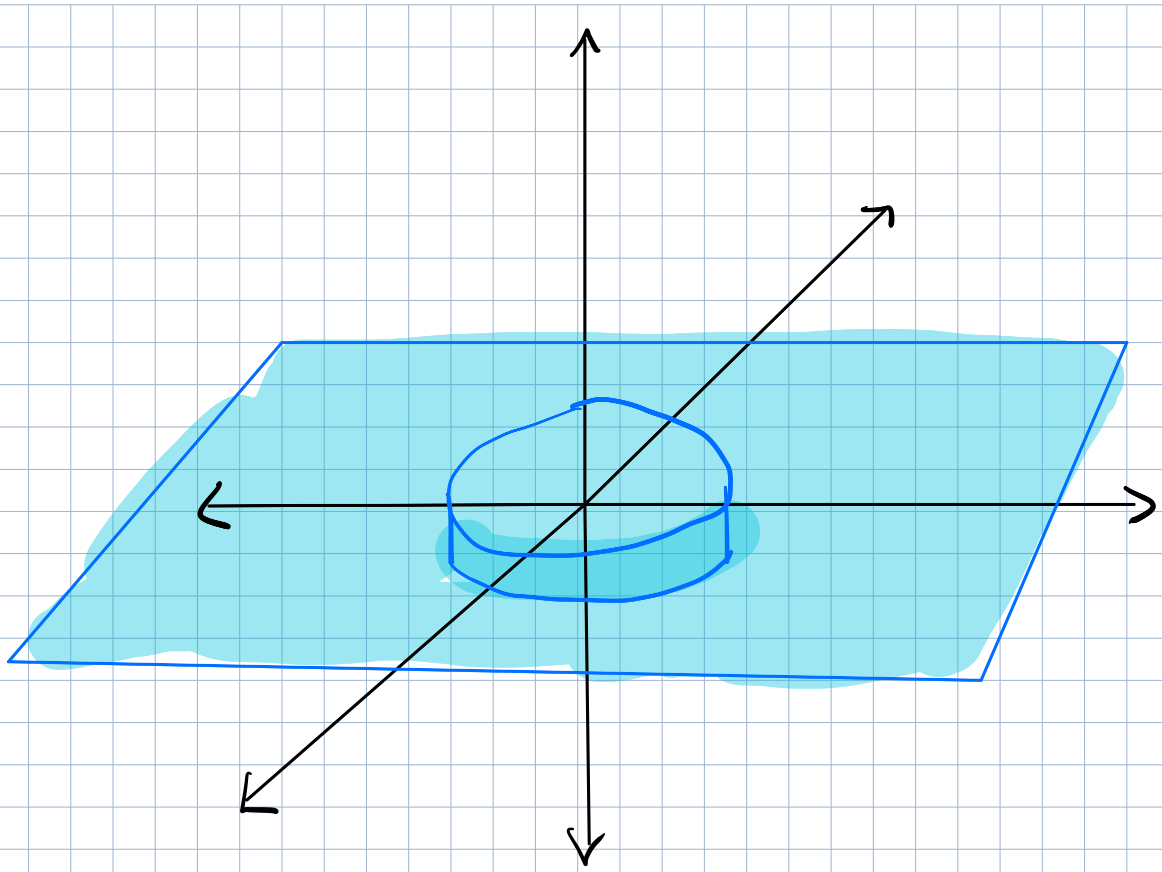


LA CONTINUITÀ È FONDAMENTALE:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2+y^2 \leq 1 \\ -1 & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

f NON CONTINUA

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}$ IN TEORIA APERTO ?



PERO' $f(x,y) > 0 \iff \underbrace{x^2+y^2 \geq 1}$

CHIUSO ?

ASSURDO

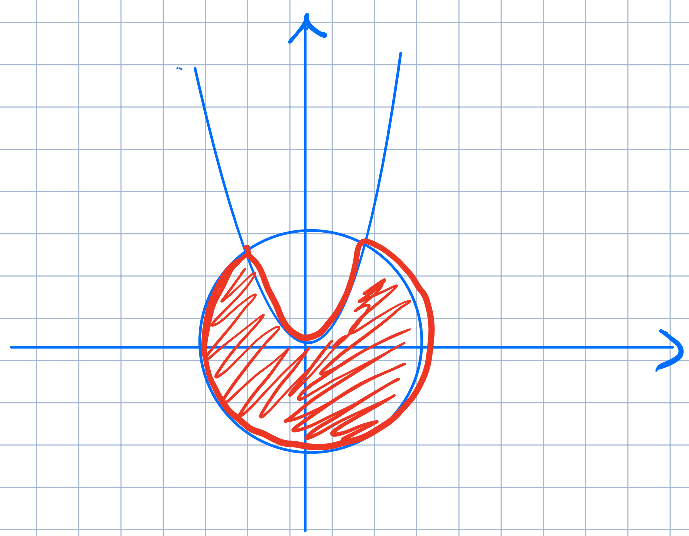
INSIEME LIMITATO

$E \subseteq \mathbb{R}^n$

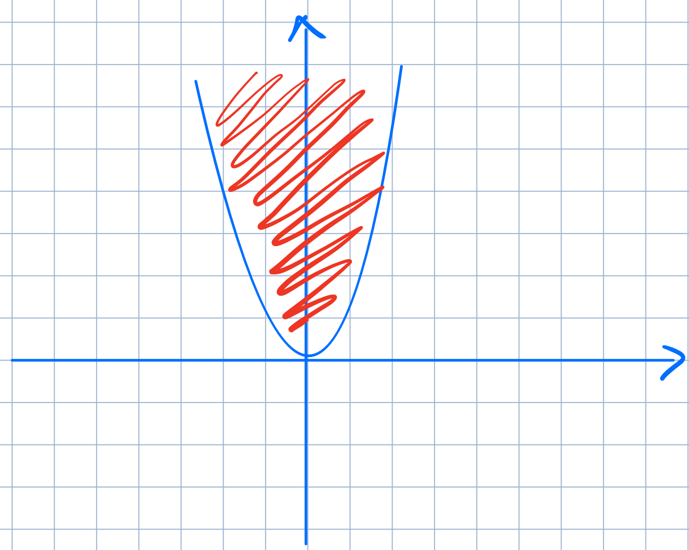
SI DICE CHE E È LIMITATO SE

$$\exists\ r>0 \mid E \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\} = S_r$$

LIMITATO:



ILLIMITATO:

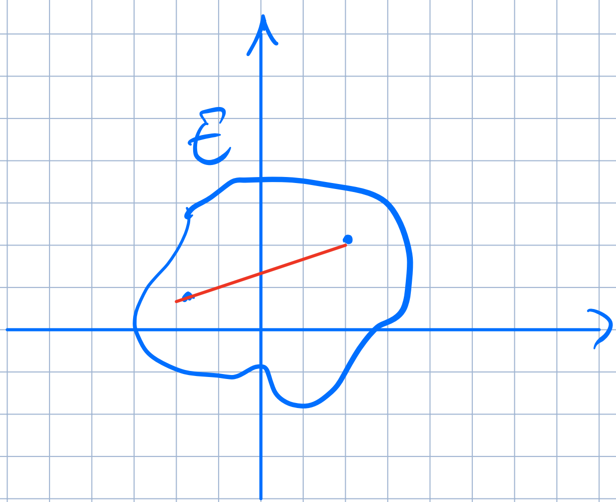


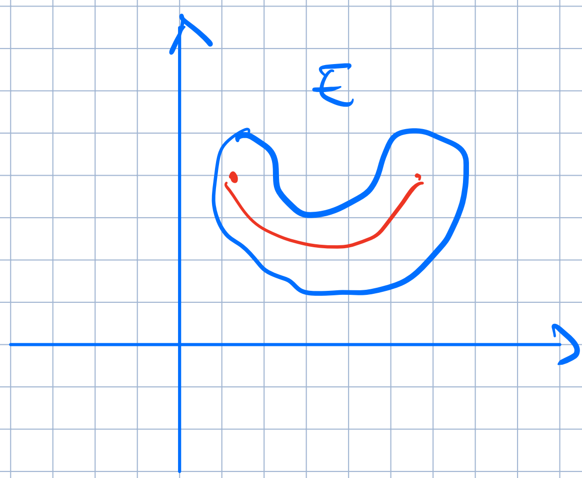
INSIEME CONNESSO

SI DICE CHE E È CONNESSO SE:

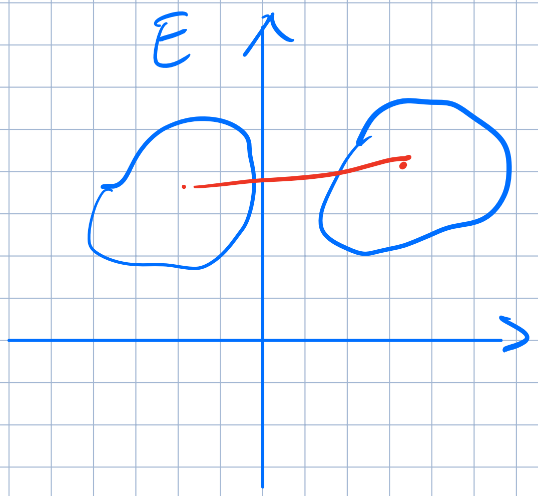
$\forall\ x, y \in E$ ESISTE UNA CURVA CONTINUA CONTENUTA IN E CHE HA PER ESTREMI x e y

CONNESSO:





NON CONNESSO



INSIEME COMPATTO

SE E È CHIUSO E LIMITATO

TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f: A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ COMPATTO

f CONTINUA

$\Rightarrow \exists$ MAX E MIN ASSOLUTI DI f IN A.

TEOREMA DEGLI ZERI

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ CONNESSO, f CONTINUA

$\exists\, x_1, x_2 \in A \mid f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

$\Rightarrow \exists \; x_3 \in A \mid f(x_3) = 0$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ COMPATTO E CONNESSO

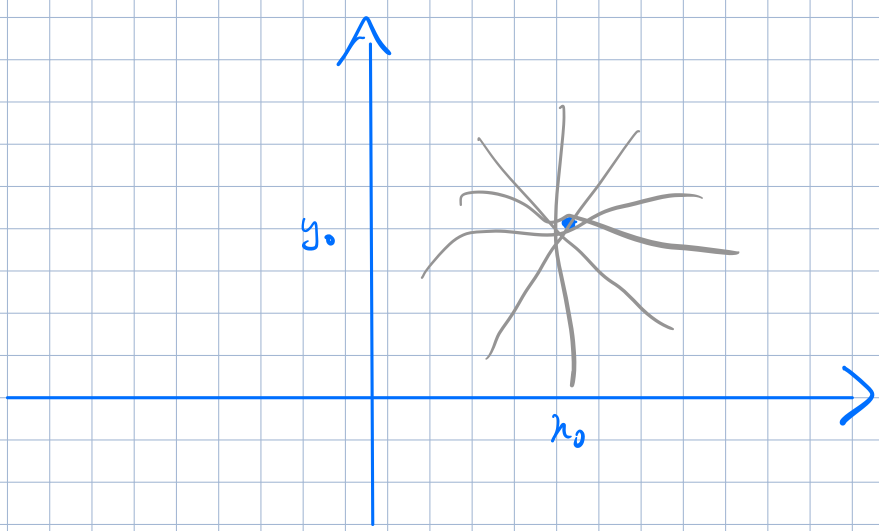
$\Rightarrow \forall \; \lambda \in [\min, \max] \; \exists \; x \in A : f(x) = \lambda$

ESEMPIO

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ $(x_0, y_0) \in A$

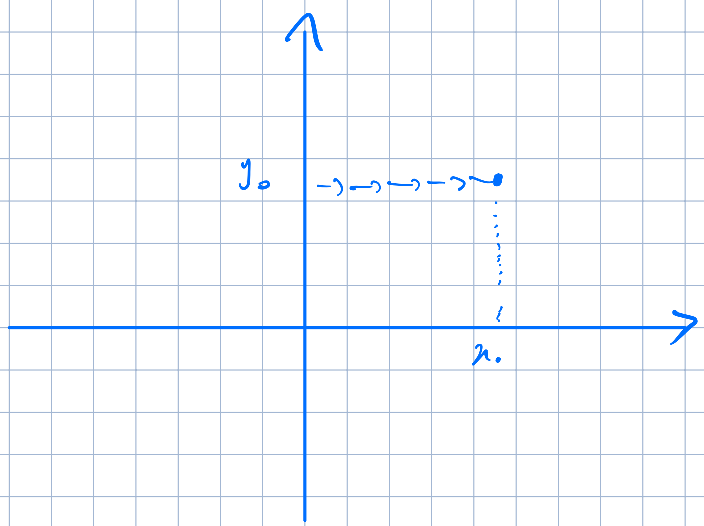
f È CONTINUA IN (x_0, y_0) $(\in \mathcal{D}(A))$ SE

$$\lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$



SE PRENDO

$x \mapsto f(x, y_0)$ $\qquad \lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$



EX

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow f \text{ NON CONTINUA IN } (0,0)$$

f È CONTINUA SEPARATAMENTE RISPETTO A $(0,0)$?

$f(x,0) = 0$ CHE È CONTINUA IN $(0,0) \Rightarrow$ SÌ

DERIVABILITÀ PER FUNZIONI DI 2 VARIABILI

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $(x_0, y_0) \in A$

SI DICE CHE f È DERIVABILE IN (x_0, y_0)

SE $\exists$ in $\mathbb{R}$ $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

E SI PONE

FUNZIONE DERIVATA

$$= \frac{df}{dx}(x_0, y_0)$$

PUNTO DI DERIVAZIONE

DERIVATA RISPETTO AD x

SI DICE CHE f È DERIVABILE IN (x_0, y_0) SE È DERIVABILE SIA RISPETTO RISPETTO A x CHE y.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{df}{dx}(x_0, y_0), \frac{df}{dy}(x_0, y_0) \right)$$

"∇" SI LEGGE "NABLA"

ESEMPIO

$$f(x,y) = xy^2 \qquad \nabla f(x,y)?$$

$$\frac{df}{dx}(x_0,y_0) = y^2$$

$$\frac{df}{dy}(x_0,y_0) = 2xy$$

$$\nabla f(x,y) = \left(y^2, 2xy\right)$$

LEGAME CONTINUITÀ - DERIVABILITÀ

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ CONTINUA IN $\mathbb{R}^2$

DERIVABILITÀ IN 0

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} < \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \quad \nexists$$

$\Rightarrow f$ NON DERIVABILE IN $(0,0)$

(2) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

PER SIMMETRIA $\exists \dfrac{df}{dy}(0,0) = 0$

È CONTINUA IN $(0,0)$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y)\Big|_{y=x} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{NON CONTINUA}$$

f DERIVABILE $\not\Leftarrow$ $\not\Rightarrow$ f CONTINUA

DIFFERENZIABILITÀ

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO IN $(x_0, y_0) \in A$

f É DIFFERENZIABILE IN (x_0, y_0) SE

A) f É DERIVABILE IN (x_0, y_0)

B) $$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

INTERSEZIONE COL PIANO

DIFFERENZIALE

$$z = f(x_0,y_0) + \boxed{f_x(x_0,y_0)(\underbrace{x-x_0}_{h}) + f_y(x_0,y_0)(\underbrace{y-y_0}_{k})} =$$

$$= f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0) \rangle$$

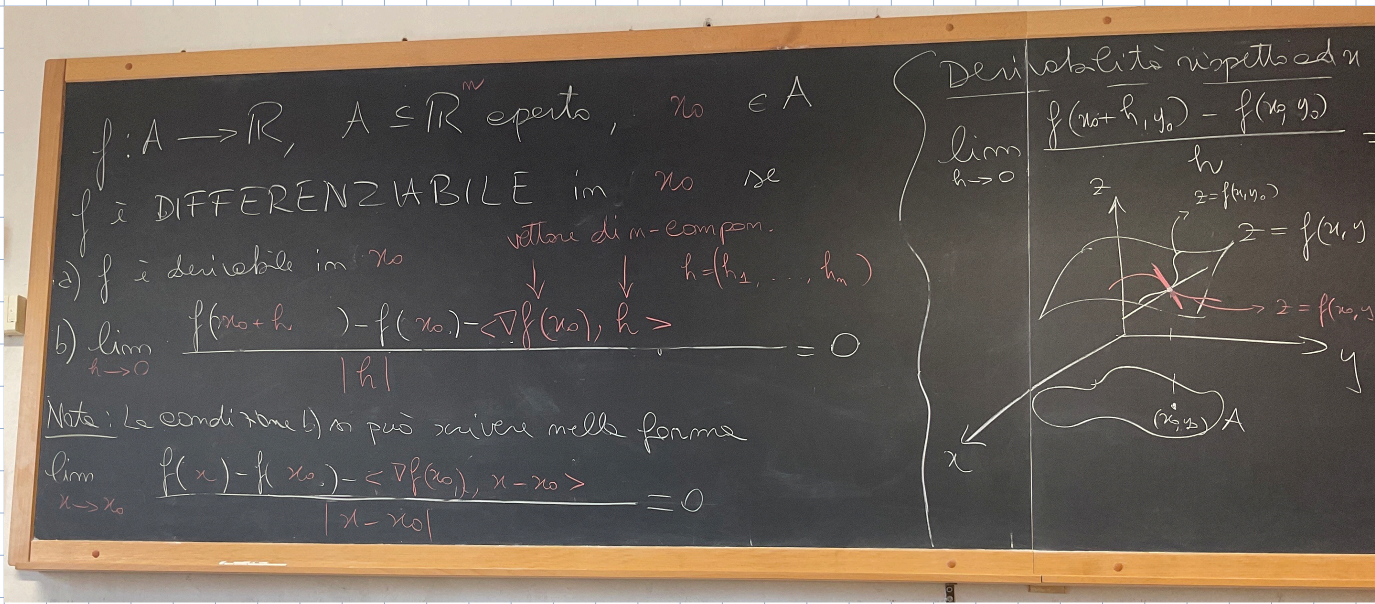
DOVE $\langle , \rangle$ É IL PRODOTTO SCALARE DEFINITO DA (PER $m>1$): $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{m} u_i v_i$

EQUAZIONE DEL PIANO PASSANTE PER $((x_0,y_0), f(x_0,y_0))$ É INDIVIDUATO DALLE RETTE TANGENTI TROVATE DAL GRADIENTE.

<u>NOTA</u> SI PUÓ RISCRIVERE NEL SEGUENTE MODO

$$\lim_{(x_0,y_0) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

NEL CASO DI $n>1$ SI PUÓ DARE LA DEFINIZIONE TRAMITE VETTORI



$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO, $x_0 \in A$

f DIFFERENZIABILE IN x_0

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow$$

f CONTINUA IN x_0

PERCHÉ CONTINUA $\not\Rightarrow$ DIFFERENZIABILE

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ CONTINUA IN $(0,0)$

DERIVABILE IN $(0,0)$? $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0$

DERIV. PER SIMMETRIA

NON DIFFERENZIABILE (È CALCOLABILE).

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

$f: A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $(x_0, y_0) \in A$

f DERIVABILE IN UN' INTORNO DI (x_0, y_0) CON DERIVATE CONTINUE IN (x_0, y_0)

$\Rightarrow f$ È DIFFERENZIABILE IN (x_0, y_0)

PER DIMOSTRARE LA TESI BASTA PROVARE

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

$x \to f(x, y_0+k)$ $\qquad$ $y \to f(x_0+h, y)$

- DERIVABILE IN (x_0, x_0+h) $\qquad$ $f_y(x_0, \bar{y})k$ CON $\bar{y} \in (y_0, y_0+k)$
- CONTINUA IN $[x_0, x_0+h]$

|| LAGRANGE

$$\Downarrow$$

$$\exists\ \bar{x} \in (x_0, x_0+h) : \quad \begin{gathered} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) \\ \| \\ f_x(\bar{x}, y_0+k)\cdot h \end{gathered}$$

ALLORA:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{f_x(\bar{x}, y_0+k) + f_y(x_0, \bar{y}) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| =$$

$$= \left| \left(f_x(\bar{x}, y_0+k) - f_x(x_0, y_0) \right) \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} + \left(f_x(x_0, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0) \right) \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \right|$$

PERCHÉ $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$

$$\leq \underbrace{\left| f(\underbrace{\bar{x}, y_0+k}_{(x_0,y_0)}) - f_x(x_0, y_0) \right|}_{0} + \underbrace{\left| f(\underbrace{x_0, \bar{y}}_{(x_0,y_0)}) - f_y(x_0, y_0) \right|}_{0}$$

MODULO DELLA SOMMA È ≤ DELLA SOMMA DEI MODULI

$$\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

PER TEO DEI CARABINIERI

∎

TEOREMA (FUNZIONI A GRADIENTE NULLO IN UN CONNESSO)

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, CONNESSO

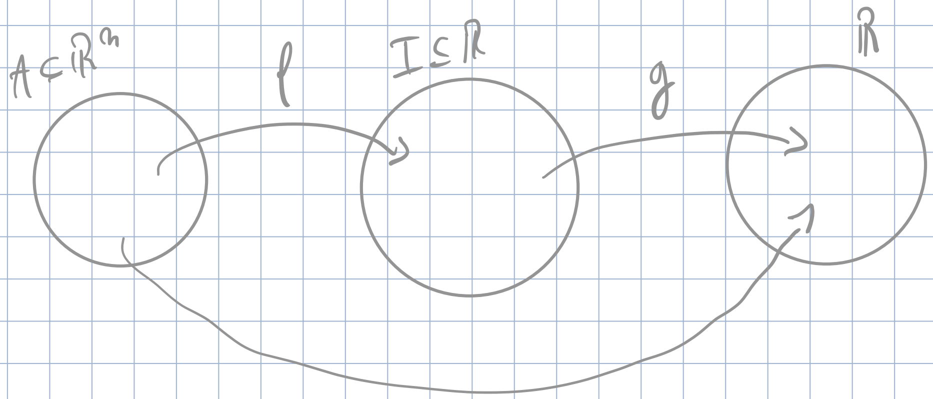
f DIFFERENZIABILE IN A CON $\nabla f \equiv 0$ IN A

$\Rightarrow$ f COSTANTE IN A

TEOREMA DELLA DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, $f(A) \subset I$

$g: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$



SUPPONIAMO CHE f DIFFERENZIABILE IN x_0,

g DERIVABILE IN x_0

ALLORA h È DIFFERENZIABILE IN x_0 E

$$\nabla h(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \nabla f(x_0)$$

$$\frac{dh}{dx_i}(x_0) = g'(f(x_0))\frac{df}{dx_i}(x_0) \qquad i=1,\dots,n$$

FUNZIONI RADIALI

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

SI DICE CHE h È UNA FUNZIONE RADIALE

$$h(x) = g(|x|)$$

DOVE $g: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

SIA $f(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ $\qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f È DIFFERENZIABILE IN $\mathbb{R}^n$?

$\exists \frac{df}{dx_i}$ POICHÉ f È COMP. DI FUNZIONI DERIVABILI

$$\frac{df}{dx_1}(x) = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+\dots x_n^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}$$

CONSIDERANDO x_i

$$\frac{df}{dx_i}(x) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+\dots x_n^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} = \frac{x_i}{|x|} \qquad \forall x \neq 0$$

$$\nabla f(x) = \frac{x}{|x|} \quad \forall\ x \neq 0$$

SE g È DERIVABILE IN $[0, +\infty)$ ALLORA $h(x) = g(|x|)$ È DIFFERENZIABILE IN $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ E:

$$\nabla h(x) = g'(f(x)) \cdot \frac{x}{|x|} \quad \forall\ x \neq 0$$

IN PARTICOLARE SI HA:

$$|\nabla h(x)| = |g'(|x|)| \quad \forall\ x \neq 0$$

DERIVATE DIREZIONALI

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, $x_0 \in A$

$v \in \mathbb{R}^n$ $|v| = 1$ (v DIREZIONE)

SI DICE CHE f È DERIVABILE NELLA DIREZIONE v IN x_0 SE

$$\exists \text{ in } \mathbb{R} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

IN DUE DIM: $\frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h}$

E SI PONE:

$$\frac{df}{dv}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

NOTE

1) SIA $v = (0, \dots, 1, \dots 0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_{01} + \dots x_{0i} + h, \dots x_{0n}) - f(x_{01}, \dots x_{0n})}{h} =$$

$$= \frac{df}{dx_i}(x_0)$$

2) SIA $g(h) = f(x_0 + hv)$

ALLORA:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0)$$

SE $\exists$ IN $\mathbb{R}$ IL LIMITE

QUINDI

f È DERIVABILE NELLA DIREZIONE v $\Leftrightarrow$ g DERIVABILE IN x_0 IN x_0

ESEMPIO

1) $f(x,y) = x e^{xy}$

f È DERIVABILE NELLA DIREZIONE $(0,0)$

$v = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h\cos\theta, 0 + h\sin\theta) - f(0,0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h\cos\theta \cdot e^{h\cos\theta\sin\alpha}}{h} = \cos\theta$$

$\Rightarrow$ f È DERIVABILE $\quad \frac{df}{dv}(0,0) = \cos\theta$

TEOREMA FORMULA DEL GRADIENTE

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $x_0 \in A$

f DIFFERENZIABILE IN x_0

$\Rightarrow$ f É DERIVABILE IN OGNI DIREZIONE $v \in \mathbb{R}^n$
$|v| = 1$, IN x_0 E SI HA CHE

$$\frac{df}{dv}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

VALE IL VICEVERSA? NO!:

$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y} \quad$ in $(0,0)$

$$v = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h\cos\theta, 0+h\sin\theta) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3\cos^2\theta\sin\theta}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \exists \quad \frac{df}{dv}(0,0) = \sqrt[3]{\cos^2\theta\sin\theta}$$

f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$?

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\underbrace{\frac{df}{dx}(x,y)}_{\theta=0}, \underbrace{\frac{df}{dy}(x,y)}_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right)$$

SE f FOSSE DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

$$\frac{df}{dv}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v \rangle = 0$$

ASSURDO PERCHÉ $\frac{df}{dv}(0,0) = \sqrt[3]{\cos^2\theta\sin\theta}$

DIREZIONI DI MASSIMA E MINIMA CRESCITA

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $x_0 \in A$

f DIFFERENZIABILE IN x_0

ALLORA LA FUNZIONE

$$v \in \mathbb{R}^n, \ |v|=1 \longmapsto \frac{df}{dv}(x_0)$$

a) ASSUME IL VALORE max (min) IN $v = \nabla f(x_0)$ $(v = -\nabla f(x_0))$
SE $\nabla f(x_0) \neq 0$

b) È IDENTICAMENTE NULLA $\nabla f(x_0) = 0$

DIM

b) $$\frac{df}{dv}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0$$

a) DALLA FORMULA DEL GRADIENTE SI HA CHE

$$\left| \frac{df}{dv}(x_0) \right| = \left| \langle \nabla f(x_0), v \rangle \right| \leq |\nabla f(x_0)| \underbrace{|v|}_{1} = |\nabla f(x_0)|$$

$$\Rightarrow -|\nabla f(x_0)| \leq \frac{df}{dv}(x_0) \leq |\nabla f(x_0)|$$

SI HA:

$$\frac{df}{dv}(x_0) \Big|_{v = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}} = \langle \nabla f(x_0), \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \rangle = |\nabla f(x_0)|$$

DERIVATE SUCCESSIVE

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $\quad f \in C(A)$ ($\exists \nabla f$ in A)

$$f_x, f_y : A \to \mathbb{R}$$

SE f_x, f_y SONO DERIVABILI IN A, SI DICE CHE f È DERIVABILE DUE VOLTE IN A.

SE f_x DERIVABILE IN A

$\exists (f_x)_x$ e $\exists (f_x)_y$

$$f_{xx} = \frac{d^2 f}{d x^2} \qquad f_{xy} = \frac{d^2 f}{dx\,dy}$$

SE f_y DERIVABILE IN A

$\exists (f_y)_x$ e $\exists (f_y)_y$

$$f_{yx} = \frac{d^2 f}{dy\,dx} \qquad f_{yy} = \frac{d^2 f}{dy^2}$$

DERIVATA PURA RISPETTO AD x

DERIVATE SECONDE MISTE

DERIVATA PURA RISPETTO AD y

$f \in C^2(A)$ SE ESISTE LA MATRICE HESSIANA DEFINITA:

$$D^2 f(x,y) = \begin{array}{c} \nabla f_x \\ \nabla f_y \end{array} \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

MATRICE QUADRATA DI ORDINE

- DIAGONALE PRINCIPALE
- DIAGONALE SECONDARIA

ESEMPIO

① $$f(x,y) = x \sin y^2$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\sin y^2 ,\ 2xy \cos y^2 \right)$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y\cos y^2 \\ 2y\cos y^2 & 2x(\cos y^2 - 2y^2 \sin y^2) \end{pmatrix}$$

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

② $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

DATO CHE $f(x,y) = -f(x,y) \Rightarrow \exists \begin{matrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{matrix} = 0$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2+y^2)} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_y(y,x) = -f_x(x,y)$$

$\exists\, f_{xy}(0,0)$? $\Rightarrow$ $\exists \lim_{h\to 0} \dfrac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h}$?

$$= \frac{\frac{-h^5}{h^4}}{h} = -1$$

$\exists\, f_{yx}(0,0) = 1$ $\qquad D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} ? & -1 \\ 1 & ? \end{pmatrix}$

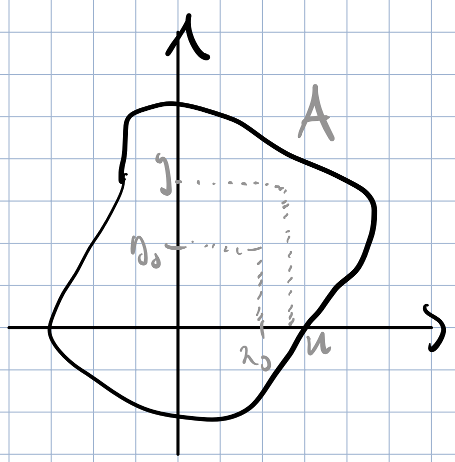
IN GENERALE $\quad f_{xy} \neq f_{yx}$

TEOREMA DI SHARZ

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, APERTO, $(x_0,y_0)\in A$, $f \in C^2(A)$

$\Rightarrow f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

DIM:



SIA $(x,y) \in A$ VICINO AD (x_0,y_0)

CON $(x,y) \neq (x_0,y_0)$

SIANO:

$F(x) = f(x,y) - f(x,y_0) \Rightarrow$ CONTINUA IN $[x_0,x]$ DERIVABILE IN (x_0,x)

$G(y) = f(x,y) - f(x_0,y)$

PER LAGRANGE:

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (x_0,x) \mid F(x) - F(x_0) = F'(\bar{x})(x-x_0)$

$F'(\bar{x}) = f_x(\bar{x},y) - f_x(\bar{x},y_0)$

$\Rightarrow F(x) - F(x_0) = [f_x(\bar{x},y) - f_x(\bar{x},y_0)](x-x_0)$

$t \longmapsto f_x(\bar{x},t)$ DERIVABILE IN (y_0,y) CONTINUA IN $[y_0,y]$

PER LAGRANGE:

$\Rightarrow \exists\, \bar{y} \in (x_0,y) \mid f_x(\bar{x},y) - f_x(\bar{x},y_0) = f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(y-y_0)$

$$F(x)-F(x_0)=\left[f_x(\bar{x},y)-f_x(\bar{x},y_0)\right](x-x_0)=f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(y-y_0)(x-x_0)$$

IN MODO ANALOGO SI PROVA CHE:

$\exists\ \tilde{x}\in(x_0,x)$ e $\tilde{y}\in(y_0,y)$

$$G(y)-G(y_0)=f_{yx}(\tilde{x},\tilde{y})(x-x_0)(y-y_0)$$

CONSIDERIAMO

$$F(x)-F(x_0)=f(x,y)-f(x,y_0)-(f(x_0,y)-f(x_0,y_0))$$

$$G(y)-G(y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)-(f(x,y_0)-f(x_0,y_0))$$

QUINDI

$$f_{xy}(\bar{x},\bar{y})\cancel{(x-x_0)}\cancel{(y-y_0)}=f_{yx}(\tilde{x},\tilde{y})\cancel{(x-x_0)}\cancel{(y-y_0)}$$

$x\neq x_0$
$y\neq y_0$

$$f_{xy}(\bar{x},\bar{y})=f_{yx}(\tilde{x},\tilde{y})$$

ESSENDO CONTINUE GRAZIE A $f\in C^2$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_{xy}(\bar{x},\bar{y})=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_{yx}(\tilde{x},\tilde{y})$$

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

■

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $\quad x_0 \in A$

$f \in C^1(A)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), h \rangle}{|h|} = 0$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), h \rangle = o(|h|)$$

$$f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle}_{\text{EQ IPERPIANO TANGENTE}} + o(|h|) \quad \text{PER } h \to 0$$

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO

$f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, $x_0 \in A$

ALLORA

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(x_0) \cdot h, h \rangle + \overbrace{o(|h|^2)}^{\text{RESTO DI PEANO}} \quad h \to 0$$

PRODOTTO TRA MATRICI

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE

$f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, $x_0 \in A$

ALLORA $\exists\, \alpha \in (0,1)$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \underbrace{\frac{1}{2}\langle D^2 f(x_0+\vartheta h)\cdot h, h\rangle}_{\text{RESTO DI LAGRANGE}}$$

$\forall h \in \mathbb{R}^n$

MATRICI

K CAMPO

UNA MATRICE SUL CAMPO K È UNA TABELLA DEL TIPO:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

CHE SI INDICA ANCHE CON $A = (a_{ij})_{ij}$

CON $a_{ij} \in K \quad \forall \, \substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}$

E SI SCRIVE:

m = n° DI RIGHE

n = n° DI COLONNE

$A \in M_{m,n}(K)$ = INSIEME DELLE MATRICI $m \times n$ AD ELEMENTI IN K

LA MATRICE È DETTA **QUADRATA** SE $m = n$ E SI INDICA:

$$A \in M_n(K)$$

$A, B \in M_{m,n}(k)$, $A = (a_{ij})_{ij}$, $B(b_{ij})_{ij}$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$$

$\lambda \in k$ $\qquad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{ij}$

$(M_{m,n}(k), +, \cdot)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE $m \times n$

$+$: SOMMA

$\cdot$: PRODOTTO PER UNO SCALARE

MATRICE NULLA $\quad 0 = (0)_{ij}$

MATRICE OPPOSTA $\quad -A = (-a_{ij})_{ij}$

PRODOTTO TRA MATRICI

$A \in M_{m,n}(k)$, $B\, M_{n,p}(k)$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

- ASSOCIATIVO
- NON COMMUTATIVO $(A \cdot B \neq B \cdot A)$

È DISTRIBUTIVO RISPETTO A $+$

$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

NELLE MATRICI QUADRATE HA SENSO PARLARE DI ANELLO:

$(M_n(K), +, \cdot)$ ANELLO UNITARIO

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ MATRICE IDENTITÀ

SI DICE CHE $A \in M_n(K)$ È INVERTIBILE SE

$\exists\, B \in M_n(K)$:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

E SI PONE

$$B = A^{-1}$$ MATRICE INVERSA DI A

PROPRIETÀ:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- A e B INVERTIBILI:
  - $A \cdot B$ È INVERTIBILE E:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

TRASPOSTA DI UNA MATRICE

$A \in M_{mn}(k)$

LA MATRICE TRASPOSTA DI A SI INDICA CON A^T
HA COME RIGHE LE COLONNE DI A E COME COLONNE LE RIGHE DI A

QUINDI $A^T \in M_{nm}$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- SE $A \in M_n(k)$ È INVERTIBILE ALLORA:

  A^T È INVERTIBILE

  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

UNA MATRICE SI DICE **SIMMETRICA** SE

$A \in M_n(K)$ $\qquad A = A^T$

DETERMINANTE

$A \in M_n(K)$ $\qquad \det A$ o $|A|$

$\det(A) \in K$

ESEMPI

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\det A = 2 \cdot 7 - (-1 \cdot 3) = 14 + 3 = 17$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$A = \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ESEMPIO

$$A = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{matrix} = (1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot -2 + 7 \cdot 4 \cdot -1) - (0 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot -1 + 7 \cdot 1 \cdot -2)$$

$$= -28 + 17 = -11$$

TEOREMA DI LAPLACE

$A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(K)$

ALLORA

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad i = 1 \dots n$$

DOVE A_{ij} È LA MATRICE OTTENUTA DA A ELIMINANDO LA i-ESIMA RIGA E LA j-ESIMA COLONNA.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i = 1$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

$$\det A = -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

NOTA:

LO STESSO TEOREMA VALE FISSANDO LE COLONNE

PROPOSIZIONE: $A \in M_n(K)$

A È INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ $A \neq 0$

NOTA: $A \in M_n \qquad \det(A) = \det(A^T)$

TEOREMA: $A \in M_n(K)$ INVERTIBILE

ALLORA:

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} (A_{ji})_{ji} = (\det A)^{-1} (A_{ij})_{ij}^T$$

DOVE $A_{ji} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$

TEOREMA DI BINET

$A, B \in M_n(K)$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

NOTA: $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$

PRESA $A \in M_n(K)$ SI DICE CHE A È **ORTOGONALE**

$$A^T \cdot A = I_n$$

PROPOSIZIONE: $A \in M_n(K)$

$$A^T \cdot A = I_n$$

$$\det(A^T \cdot A) = \det(I_n)$$

$$\det(A^T) \cdot \det(A) = \det(I_n)$$

$$(\det A)^2 = 1 \implies A$$ INVERTIBILE

$$\Downarrow$$

$$\exists B : \quad A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

$$A^T \cdot A = I_n$$

$$(A^T \cdot A)^T = I_n^T$$

$$A \cdot A^T = I_n$$

DA BINET $\quad \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

SE A È INVERTIBILE

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

QUINDI: $\quad 1 = \det I_n = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$

$$= \det(A^{-1}) \cdot \det A \implies \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

RANGO DI UNA MATRICE

$A \in M_{m,n}(k)$

SI DEFINISCE MINORE DI A DI ORDINE $p \leq \min\{m,n\}$ IL DETERMINANTE DI OGNI MATRICE QUADRATA DI ORDINE p ESTRATTA DA A.

SI DEFINISCE RANGO DI A $\underbrace{\text{L'ORDINE}}_{\in \mathbb{N}}$ MASSIMO DEI MINORI NON NULLI,
(SI INDICA CON $\text{rg} A$)

TEOREMA DI KRONECKER

$A \in M_{m,n}(k)$

SE UN MINORE DI ORDINE $q \neq 0$ DI A È TUTTI I MINORI DI ORDINE $q+1$ DI A SONO NULLI, ALLORA IL RANGO DI A È q.

ESEMPI

1. $$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4 & 6 \\ -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{matrix} = 0 + 18 + 6 - (0 + 12 + 12) = 0$$

$$\Rightarrow \text{rg} A < 3$$

$$\det \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A = 2$$

2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg\,A \leq 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 \neq 0 \qquad rg\,A = 2$$

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

$$\left.\begin{array}{l} f : A \to \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R} \\ g : A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \text{ PASSATO!}$$

UNA FUNZIONE A VALORI VETTORIALI (DI UNA O PIÙ VARIABILI REALI) È UNA FUNZIONE.

$$f : A \to \mathbb{R}^m, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n \qquad n, m \in \mathbb{N} \quad m > 1$$

$$f : A \to \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

f_i = COMPONENTE i-ESIMA DI f

$$f_i : A \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_i(x) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

CAMPO VETTORIALE : $f: A \to \mathbb{R}^m$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$

CURVE NEL PIANO (SPAZIO) $f: I \to \mathbb{R}^{2}$ ^{3} $I \subseteq \mathbb{R}$

SUPERFICIE NELLO SPAZIO $f: A \to \mathbb{R}^3$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$

LIMITI

$f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, $L \in \mathbb{R}^m$

$L = (L_1, \dots, L_m)$

SI DICE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{SE} \quad \lim_{x \to x_0} f_i(x_0) = L_i \quad \forall\, i = 1, \dots, m$$

SIA $x_0 \in A$ SI DICE CHE f È CONTINUA IN x_0 SE

f_i È CONTINUA IN x_0 $\forall\, i = 1, \dots, m$

SI DICE CHE f È DERIVABILE IN $x_0 \in A$, A APERTO SE

f_i È DERIVABILE IN x_0 $\forall\, i = 1, \dots, m$

$\exists \nabla f_i(x_0)$

$f_i : A \to \mathbb{R}$

$x \to f_i(x)$

MATRICE JACOBIANA

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x_0) & \cdots & \frac{df_1}{dx_n}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{df_m}{dx_1} & \cdots & \frac{df_m}{dx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$f : A \to \mathbb{R}^m \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

SI DICE CHE f È **DIFFERENZIABILE** IN $x_0 \in A$, A APERTO, SE f_i È DIFFERENZIABILE IN x_0 $\forall i = 1, \dots, m$.

$$\exists \; \nabla f_i(x_0) \;\; e \;\; f_i(x_0+h) = f_i(x_0) + \nabla f_i(x_0) \cdot h + o(h) \quad h \to 0$$

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI

IN ALTRE PAROLE SE:

$$\exists \; Df(x_0) \;\; e \;\; f(x_0+h) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot h$$

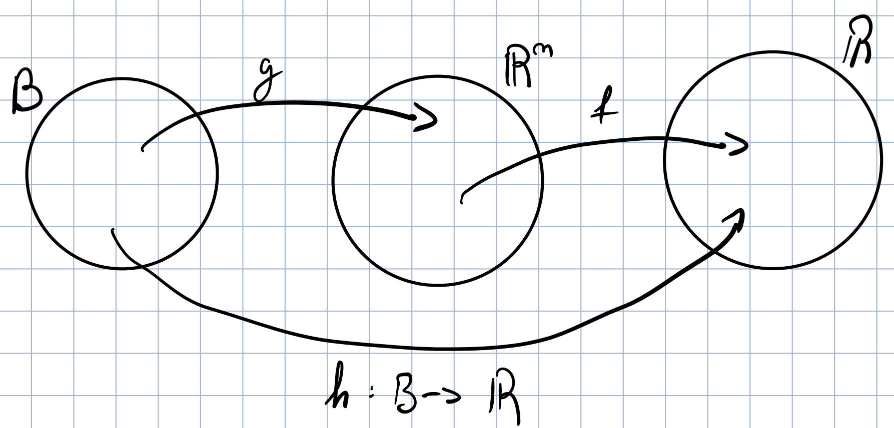
PRODOTTO TRA MATRICI

VALGONO TUTTI I TEOREMI COME IL DIFFERENZIALE TOTALE.

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

$f : A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

$g : B \to \mathbb{R}^n \quad B \subseteq \mathbb{R}$ APERTO



SE g E' DERIVABILE IN x_0

SE f E' DIFFERENZIABILE IN $g(x_0)$

h È DERIVABILE IN $h'(x_0)$

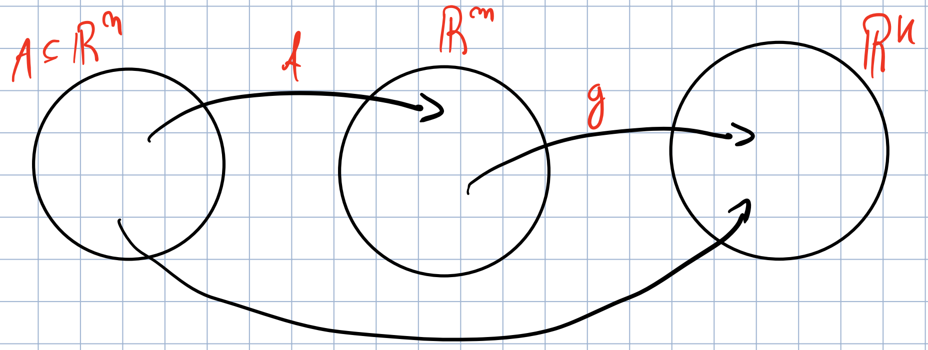
$$h'(x_0) = \nabla f(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{df}{x_i} \cdot g_i(x) \right)$$

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI IN $\mathbb{R}^n$

TEOREMA DI DIFFERENZIABILITÀ DELLE FUNZIONI COMPOSTE

$f: A \to \mathbb{R}^m$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $\quad x_0 \in A$

$g: B \to \mathbb{R}^k$ $\quad B \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO $\quad f(A) \subseteq B$



$h: A \to \mathbb{R}^k$

$x \in A \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto h(x) = g(f(x))$

SE g E' DIFFERENZIABILE IN $f(x_0)$

SE f E' DIFFERENZIABILE IN $g(x_0)$

h È DIFFERENZIABILE IN x_0

$$\underset{k \times n}{D h(x_0)} = \underset{k \times m}{D g(f(x_0))} \cdot \underset{m \times n}{D f(x_0)}$$

CURVE NEL PIANO (SPAZIO) [IN $\mathbb{R}^n$]

24/10/22

UNA CURVA NEL PIANO (NELLO SPAZIO) [$\mathbb{R}^n$]
É UNA FUNZIONE CONTINUA

$\varphi : I : \mathbb{R} (\mathbb{R}^3) [\mathbb{R}^n]$ DOVE I É UN' INTERVALLO DI $\mathbb{R}$

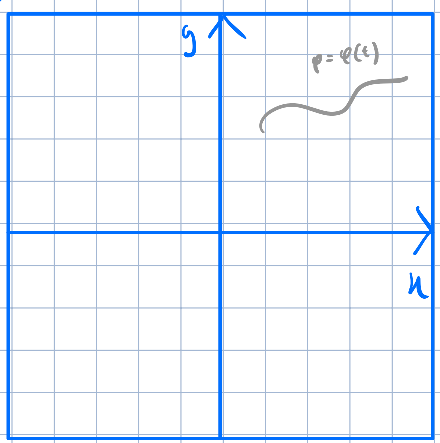
φ É CONTINUA IN I, DETTA PARAMETRIZZAZIONE DELLA CURVA
$\varphi \in C(I)$

$\varphi : I \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$

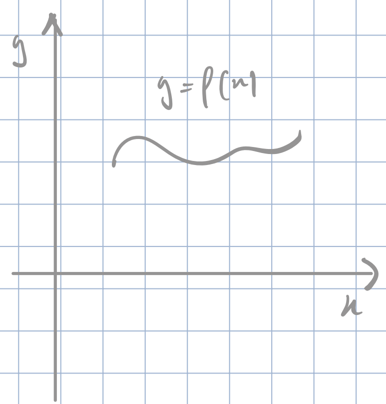
LE EQUAZIONI
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$
SI CHIAMANO EQUAZIONI PARAMETRICHE CURVA φ

$\varphi(I)$ É DETTO SOSTEGNO o IMMAGINE DELLA CURVA

1



$\neq$

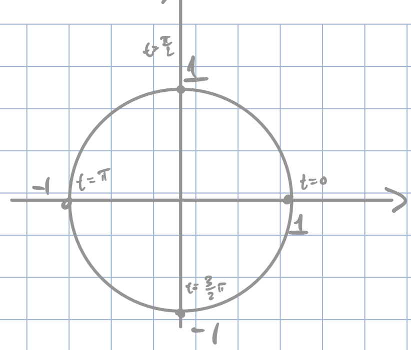


PER POTERLA CHIAMARE CURVA:
$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

PRESO UN PUNTO NEL PIANO NON SAPPIAMO IL VALORE DI t.

2

$$\varphi : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad t = [0, 2\pi]$$



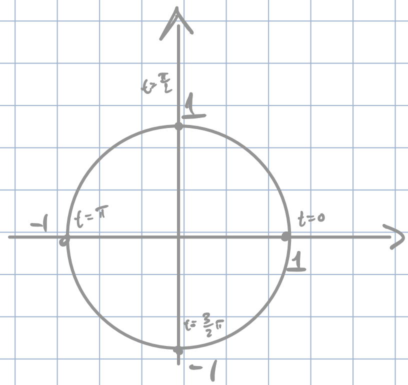
$$x^2(t) + y^2(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$$\varphi_2 : \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \qquad t = [0, 2\pi]$$

IDENTIFICANO LA STESSA CURVA

3

$$\varphi_3 : \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \qquad t = [0, 4\pi]$$



4

$$\varphi_4 : \begin{cases} x(t) = a \cdot \cos(t) \\ y(t) = a \cdot \sin(t) \\ z(t) = bt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

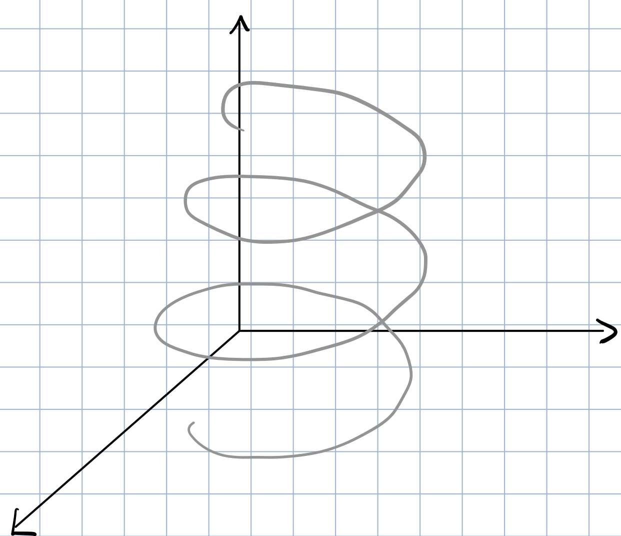
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\varphi \in C(\mathbb{R})$

DOVE $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \neq 0$

ELICA

CILINDRICA



SIA $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, I INTERVALLO IN $\mathbb{R}$, UNA CURVA IN $\mathbb{R}^n$

SI DICE CHE:

a) φ È **SEMPLICE** SE:

$$\forall\, t_1, t_2 \in \mathring{I},\ t_1 \neq t_2 : \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$$

b) SIA $I = [a, b]$. SI DICE CHE φ È **CHIUSA** SE:

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

NOTA: IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE CONTINUA DI UNA VARIABILE È UNA CURVA IN $\mathbb{R}^2$, IL VICEVERSA NON VALE.

CURVE REGOLARI

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^2 \qquad I = [a, b]$$

$$t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t))$$

SI DICE CHE φ È **REGOLARE** IN $[a, b]$ SE

$$\varphi \in C^1([a, b]) \quad \text{E} \quad \varphi'(t) \neq (0, 0)\ \forall\, t \in (a, b)$$

TUTTE LE COMPONENTI SONO DERIVABILI CON DERIVATE CONTINUE

$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t))$ È DETTO **VETTORE TANGENTE** DI φ

POICHÉ $\varphi(t) \neq (0,0)$ SI PUÒ DEFINIRE IL VERSORE TANGENTE a φ DATO DA:

$$T(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

$\forall t \in (a,b)$

NELLE FUNZIONI:

$$\varphi : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad \varphi'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0)$$

$$T(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \frac{(1, f'(t))}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}$$

ESEMPI

(1) $\varphi_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$

φ_1 É REGOLARE IN $[0, 2\pi]$?

- É DI CLASSE C^1? SÍ $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$
- $\varphi' \neq (0,0)$? SÍ PERCHÉ $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$
- $T(t) = \dfrac{(-\sin t, \cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = (-\sin t, \cos t)$

(2) $\varphi_2 : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$

$\varphi_2' = (3t^2, 2t) \Rightarrow \varphi_2 \in C^1([-1,1])$

$\varphi_2' \neq (0,0) \iff t \neq 0 \in [-1,1]$ NON REGOLARE IN $[-1,1]$

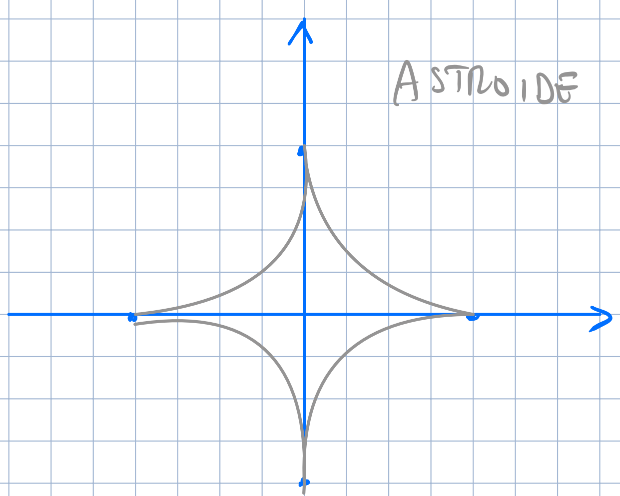
$\varphi_3 : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1,0] \qquad \varphi_4 : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$\varphi_2 = \varphi_3 \cup \varphi_4$ REGOLARE A TRATTI

SI DICE CHE UNA CURVA È REGOLARE A TRATTI SE UNIONE DI UN NUMERO FINITO DI CURVE REGOLARI.

(3) $\varphi_5 : \begin{cases} x(t) = (\cos t)^3 \\ y(t) = (\sin t)^3 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$

φ_5 È REGOLARE A TRATTI



$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO $\varphi \in C(I)$

OGNI PARAMETRIZZAZIONE φ DI C INDUCE UN' ORIENTAZIONE SU UNA CURVA C DEFINITA NEL SEGUENTE MODO

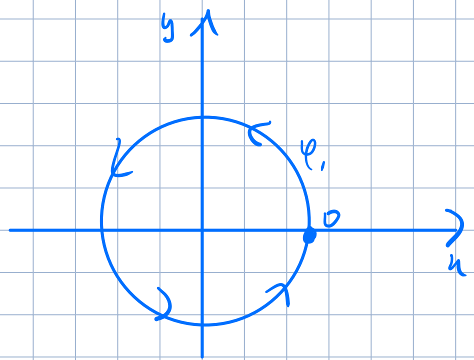
$$P_1 = \varphi(t_1) \quad \text{PRECEDE} \quad P_2 = \varphi(t_2)$$

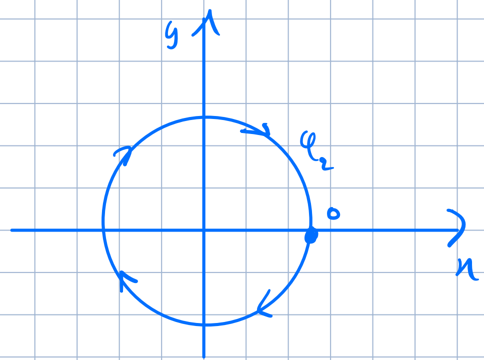
NEL VERSO INDOTTO DAL PARAMETRO t (θ DELLE CRESCENTI)

SE $t_1 < t_2$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \varphi_2 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t \end{cases}$$





DEFINISCONO LA STESSA CURVA MA CON VERSO DI PERCORRENZA DIVERSO.

ORTOGONALITÀ DEL GRADIENTE DI UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE CON LE SUE CURVE DI LIVELLO

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE

$(x,y) \to z = f(x,y)$

$f(x,y) = c \qquad c \in \mathbb{R}$ CURVE DI LIVELLO DI f

SUPPONIAMO CHE SIANO REGOLARI:

$$\exists \ \varphi : I \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi \in C^1(I) : \ \varphi'(t) \neq (0,0) \quad \forall\, t \in \mathring{I} \subseteq \mathbb{R}$$

INTERVALLO

$\varphi(t) = (x(t), y(t))$

SIA $g : I \to \mathbb{R}$

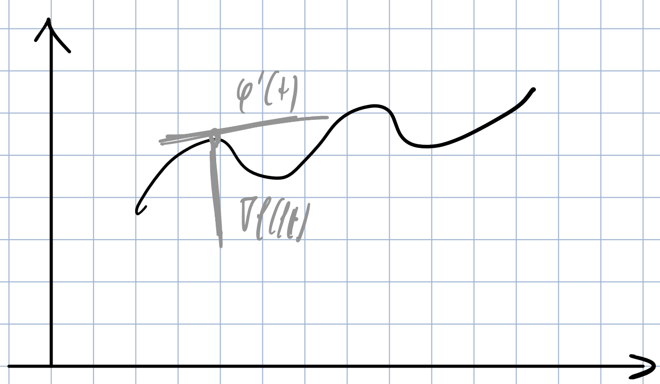
$t \mapsto g(t) = f(\varphi(t)) = f(x(t), y(t))$

SI HA CHE g È DERIVABILE IN I e

$$g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

MA $\quad g(t) = f(x(t), y(t)) \qquad g'(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$$



MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

25/10/22

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$

UN PUNTO $x_0 \in A$ É UN PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) LOCALE SE:

$$\exists I_{x_0} \mid \forall x \in I_{x_0} \cap A \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\geq)$$

MASSIMO (MINIMO) ASSOLUTO SE

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\geq) \quad \forall x \in A$$

TEOREMA (ANALOGO A FERMAT)

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$

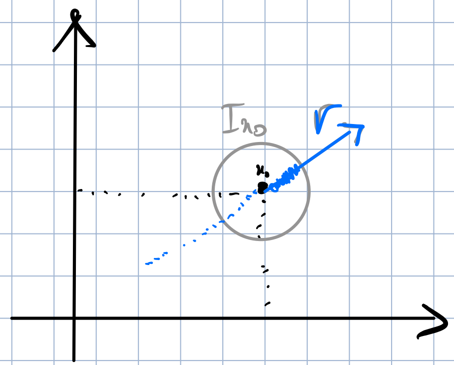
x_0 MAX O MIN RELATIVO PER f DERIVABILE NELLA DIREZIONE v. $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, in x_0

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{dv}(x_0) = 0$$

DIM: SIA $g(t) = f(x_0 + tv)$, $t \in \mathbb{R}$

SUPPONIAMO CHE x_0 SIA MAX. REL. PER f.

$$\exists I_{x_0} \mid \forall x \in A \cap I_{x_0} \quad f(x) \leq f(x_0)$$



IN PARTICOLARE SI HA CHE

$\underbrace{f(x_0+tv)}_{g(t)} \le \underbrace{f(x_0)}_{g(0)}$ PER t

SUFFICIENTEMENTE PICCOLO $|t|<\delta,\ \delta>0$

$\Rightarrow \exists\, \delta>0 \mid \forall t\ \ |t|<\delta \quad g(t)\le g(0)$

$\Rightarrow$ 0 È MAX LOCALE PER g, INOLTRE g È DERIVABILE IN x_0 (POICHÉ f È DERIVABILE NELLA DIREZIONE v IN x_0)

$\xRightarrow{\text{FERMAT}} \underbrace{g'(0)}_{\frac{df}{dv}(x_0)}=0 \Rightarrow \frac{df}{dv}(x_0)=0$ ■

IN PARTICOLARE SI HA CHE $f: A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $x_0\in\mathring{A}$

x_0 MAX o MIN LOCALE PER f, f DERIVABILE IN x_0 $[\exists f(x_0)]$

$\Rightarrow \nabla f(x_0)=0=(0,0)$

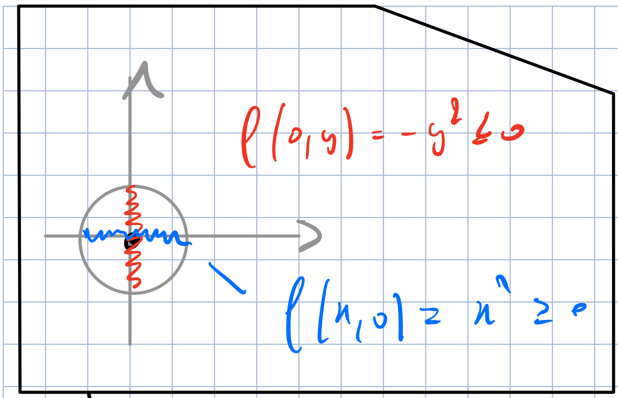
NOTA: $f: A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $x_0\in A$, f DERIVABILE IN A

SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO CRITICO o STAZIONARIO PER f se $\nabla f(x_0)=0$

CONTROESEMPIO

$f(x,y)=x^2-y^2$

$\nabla f=(2x,-2y)=(0,0) \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$



$\exists\ I_{(0,0)} \mid \forall (x,y) \in I_{(0,0)}$
$f(x,y) \leq f(0,0) = 0$?

A CAUSA DI QUESTO $(0,0)$ NON È MAI NÈ UN MASSIMO NÈ UN MINIMO.

DEFINIZIONE: SIA A UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE n.

SI DICE CHE:

a) A È DEFINITA POSITIVA (NEGATIVA) SE

$$\langle A \cdot v, v \rangle \overset{(<)}{>} 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

PRODOTTO TRA MATRICI

b) A È SEMI DEFINITA POSITIVA (NEGATIVA) SE

$$\langle A \cdot v, v \rangle \overset{\leq}{\geq} 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

c) A È INDEFINITA SE:

NON È NÈ DEFINITA, NÈ SEMI DEFINITA.

TEOREMA CONDIZIONE NECESSARIA DEL SECONDO ORDINE

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in C^2(A)$, $x_0 \in A$ MAX (MIN) LOC. PER f.

$\Rightarrow$ ① $\nabla f(x_0) = 0$

② LA MATRICE HESSIANA $D^2 f(x_0)$ É SEMI DEFINITA NEGATIVA (POSITIVA)

TEOREMA CONDIZIONE SUFFICIENTE DEL SECONDO ORDINE

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$, $x_0 \in A \mid \nabla f(x_0) = 0$

SI HA:

① SE $D^2 f(x_0)$ É DEFINITA POSITIVA NEGATIVA ALLORA x_0 É MINIMO MASSIMO LOCALE PER f.

② SE $D^2 f(x_0)$ É INDEFINITA x_0 NON É NE' MAX NE' MIN LOCALE.

TEOREMA CONDIZIONE SUFFICIENTE DEL SECONDO ORDINE IN $\mathbb{R}^2$.

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(A)$, $(x_0, y_0) \in \mathring{A} \mid \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$

SI HA:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

a) SE $\det D^2 f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ É MIN LOCALE

c) SE $\det D^2 f(x_0,y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$

$\Rightarrow (x_0,y_0)$ È MAX LOCALE

d) SE $\det D^2 f(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ NON È NÉ MAX NÉ MIN LOCALE

ESEMPIO :

① $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 1 \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$\nabla f(x,y) = (3x, 6y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det D^2 f(x,y) = 12 > 0 \qquad f_{xx}(0,0) = 2 > 0$

$\Rightarrow (0,0)$ MIN LOCALE

② $f(x,y) = x^4 + y^4 \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$\nabla f(x,y) = (4x^3, 4y^3) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \qquad D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det D^2 f(0,0) = (0,0)$ NON POSSIAMO DIRE NULLA

$\exists\, I_{(0,0)} \mid \forall (x,y) \in I_{(0,0)} \quad f(x,y) \geq f(0,0)$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

TEOREMA DI WEISTRASS

$f: A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}^n$ CHIUSO E LIMITATO (= COMPATTO)

f CONTINUA IN A

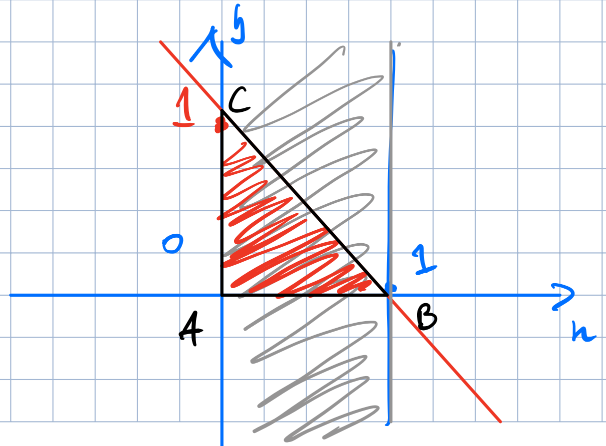
$\Rightarrow \exists$ MAX E MIN ASSOLUTI DI f IN A.

ESEMPI

① $f(x,y) = y^2 + xy - 2x^2$

$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{0 \leq x \leq 1},\ \underline{0 \leq y \leq -x+1} \}$

STABILIRE SE f AMMETTE MAX E MIN ASS., IN QUEL CASO DETERMINARLI:



E È CHIUSO E LIMITATO

$\Rightarrow$ WEISTRASS

f È DERIVABILE

$$\nabla f(x,y) = (y-4x,\ 2y+x)$$

$$\begin{cases} y-4x=0 \\ 2y+x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=4x \\ 8x+x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \text{NON INTERNO AD } E$$

$\Rightarrow$ NON CI SONO MAX E MIN ASS NEI PUNTI INTERNI

STUDIAMO IL BORDO

$$\varphi_{AB}: \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} \quad t\in[0,1] \qquad f_{AB}=f(\varphi_{AB}(t)) = -2t^2$$

CON FERMAT:

$$f'_{AB} = -4t = 0 \iff t=0 \notin (0,1)$$ NON CI SONO CANDIDATI IN P

$$\varphi_{BC}: \begin{cases} x=t \\ y=-t+1 \end{cases} \quad t\in[0,1] \qquad f_{BC}=f(\varphi_{BC}(t)) = (-t+1)^2 + t\cdot(-t+1) - 2t^2$$

$$= -2t^2 - t + 1$$

$$f'_{BC} = -4t-1 = 0 \iff t = -\frac{1}{4} \notin (0,1)$$

$$\varphi_{AC} = \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad f_{AC} = f(\varphi_{AC}(t)) = t^2$$

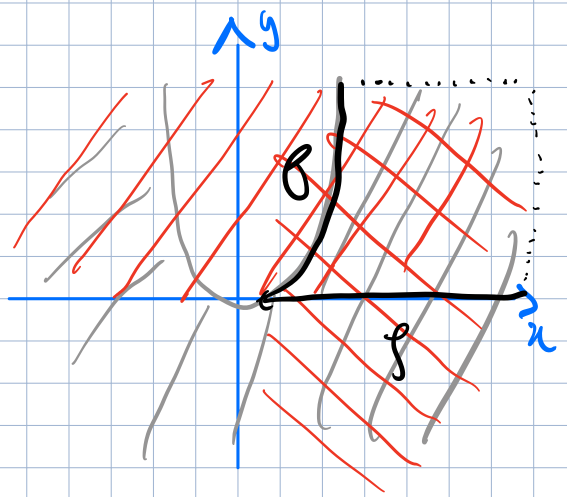
$$f'_{AC} = 2t = 0 \iff t=0 \notin (0,1)$$

RIMANGONO SOLO A, B, C :

$$f(A) = 0 \qquad \underbrace{f(B) = -2}_{\text{MIN ASS}} \qquad \underbrace{f(C) = 1}_{\text{MAX ASS}}$$

② $f(x,y) = x^2 + xy - 1$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$$



$f \in C(\mathbb{R}^2)$

CHIUSO, NON LIMITATO

$\Rightarrow$ NO WEISTRASS

f È DERIVABILE IN $\mathbb{R}^2$

$\nabla f(x,y) = (2x+y, x) = (0,0) \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \notin \mathring{E}$

$\beta : \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} \quad t \in [0,+\infty) \qquad f_\beta = t^2+t^3-1$

$f'_\beta = 3t^2+2t = 0 \iff t=0, \; t=-\frac{2}{3} \notin (0,+\infty)$

$\gamma : \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} \quad t \in [0,+\infty) \qquad f_\gamma = t^2-1$

$f'_\gamma = 2t = 0 \iff t=0 \notin (0,+\infty)$

MANCA SOLO $(0,0)$

$f(0,0) = -1 \qquad f(x,y) \geq -1 \quad \forall (x,y) \in A$

$\implies -1$ MIN ASS.

8/11/22

① $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad D: (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Ⓐ MAX E MIN NEL DOMINIO

$f(x,y) \geq \underbrace{f(0,0)}_{\text{MIN ASS.}} \geq 0$

È ILLIMITATA SUPERIORMENTE :

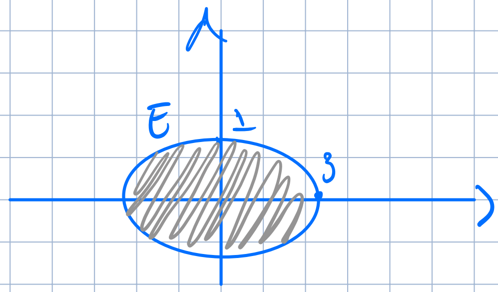
$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$

OPPURE

$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) \to +\infty$

$\Rightarrow$ NO MAX ASS.

② $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + y^2 \le 1 \right\}$$

$\Rightarrow$ WEISTRASS

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x, 2y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = 0$$

$\Updownarrow$

$(x,y) = (0,0)$

STUDIAMO ∂E:

$$\partial E : \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$f_{|\partial E} = \sqrt{9\cos^2 t + \sin^2 t} = h(t)$$

h È DERIVABILE IN $(0, 2\pi)$

$$h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{9\cos^2 t + \sin^2 t}} \cdot -18\cos t \sin t + 2\sin t \cos t$$

$$= \frac{-8\sin t \cos t}{\sqrt{9\cos^2 t + \sin^2 t}} = 0 \iff \begin{array}{ll} \sin t = 0 & t = \cancel{0}, \pi \\ \cos t = 0 & t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \end{array}$$

1 CANDIDATI SONO: $t = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

$(3,0)\ (-3,0)\ (0,1)\ (0,-1)\ (3,0)$

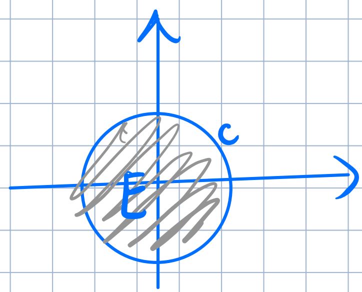
$f(0,0) = 0$ — MIN

$f(3,0) = f(-3,0) = 3$ — MAX

$f(0,1) = f(0,-1) = 1$

3 $\quad f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 = 1 - (x^2 + y^2)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$



$f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2) \leq 1 = f(0,0)$ MAX

$f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2) \geq 1 - 4 = -3 = f(C)$ MIN

4 $\quad f(x,y) = 2 + e^{xy}$

$f(x,y) = 2 + e^{xy} > 2$ — ESTREMO INF $\Rightarrow$ NON ESISTE MIN

MINIMI E MASSIMI VINCOLATI

$f: A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}^2$

$g: B \to \mathbb{R} \qquad B \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathcal{V} = \{(x,y) \in B \mid g(x,y) = 0\}$ VINCOLO

UN PUNTO $(x_0, y_0) \in A \cap \mathcal{V}$ È DETTO MASSIMO MINIMO ASSOLUTO VINCOLATO PER f RISPETTO AL VINCOLO $\mathcal{V}$ SE:

$$f(x,y) \overset{\geq}{\leq} f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in A \cap \mathcal{V}$$

ESERCIZI

1. $f(x,y) = x + y^2 - 1$

$\mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$

$f_{|\mathcal{V}} = f(x,x) = x^2 + x - 1$ (PARABOLA)

MIN ASS: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. $f(x,y) = x + y$

$\mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad f_{|\Gamma} = f(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t = h(t)$$

$$h' = -\sin t + \cos t \qquad \sin t = \cos t \qquad t = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

CANDIDATI: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, 2\pi$

$$h(0) = h(2\pi) = 1$$

$$h\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} \quad \text{MIN}$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad \text{MAX}$$

(3) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2$

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$$

$$f_{|\Gamma} = x^4 + x^3 - 2 = h(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

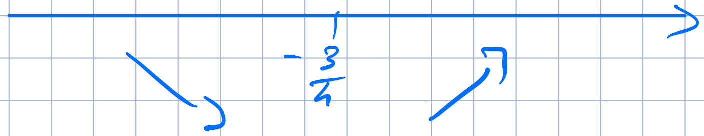
$$h' = 4x^3 + 3x^2 = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$4x^3+3x^2 \geq 0$$

$$x^2(3+4x) \geq 0$$

$$3+4x \geq 0$$

$$x \geq -\frac{3}{4}$$



$\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)$ MIN LOCALE VINCOLATO PER f V

TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$f, g \in C^1$ $\quad V = \{(x,y) \in A \mid g(x,y) = 0\}$

Se $(x_0, y_0) \in \mathring{A} \cap V$ È UN MAX / MIN LOCALE VINCOLATO PER f RISPETTO AL VINCOLO V TALE CHE:

$$\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$$

ALLORA $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$

(TEOREMA DI LAGRANGE PER MAX E MIN VINC.)

DOVE CERCHIAMO MAX / MIN VINCOLATI:

1. $\{(x,y) \in \mathring{A} \cap V \mid f,g \in C^1(A),\ \nabla g(x,y) \neq (0,0),\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \nabla f(x,y) = \lambda g(x,y)\}$

(2) $\{(x,y) \in \mathring{A} \cap V \mid f, g \in C^1(A),\ \nabla g(x,y) = (0,0)\}$

(3) $\{(x,y) \in \mathring{A} \cap V \mid f \notin C^1(A)$ OPPURE $g \notin C^1(A)\}$

(4) $\{(x,y) \in \partial A \cap V\}$

LA FUNZIONE

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

DETTA LAGRANGIANA

(LA PRIMITIVA DELLA TESI)

SI HA

$$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0$$

$$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0$$

$\nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = (0,0)$

$$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = -g(x,y) = 0$$

$(x,y) \in V$

LAGRANGE APPLICATO AL MACHINE LEARNING

(1) $X = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \{x_i = 1,\ x_i > 0 \quad \forall i = 1 \dots n\}$$

$f: X \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = -\sum_{i=1}^{n} c_i \log x_i$ FUNZIONE DI COSTO

PROBLEMA: DATO $(c_1 \dots c_n) \in X$ MINIMIZZARE AL VARIARE DI $x \in X$, f.

ABBIAMO ESCLUSO GLI INSIEMI 4,3,

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i - 1$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x_1 + \dots x_m - 1 \\ \nabla g(x) = (1 \dots 1) \neq (0,0) \end{array}\right\} \text{ESCLUDO } 2$$

$$\begin{cases} \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = (0, \dots, 0) \\ g(x) \end{cases}$$

$$f(x) = -c_1 \log x_1 \dots - c_m \cdot \log x_m$$

$$\nabla f(x) = -\frac{c_1}{x_1} \dots -\frac{c_m}{x_m}$$

$$\begin{cases} -\frac{c_1}{x_1} - \lambda = 0 \\ \vdots \\ -\frac{c_m}{x_m} - \lambda = 0 \\ x_1 + \dots + x_m - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{c_1}{\lambda} \\ \vdots \\ x_m = -\frac{c_m}{\lambda} \\ -\frac{c_1}{\lambda} \dots -\frac{c_m}{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda = -c_1 \dots c_m = -1 \end{cases}$$

ORA CHE SAPPIAMO CHE CON $\lambda = -1$ C'È UN PUNTO CHE POTREBBE ESSERE MAX / MIN

VERIFICHIAMO SE È UN MIN.

$$f(x_1, \dots, x_m) \geq f(c_1, \dots, c_m)$$

$$\Vert$$

$$- \sum_{i=1}^{n} c_i \log x_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \log c_i \geq 0$$

$$- \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\log x_i - \log c_i \right) \geq 0$$

$$- \sum_{i=1}^{n} c_i \log \frac{x_i}{c_i} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \log \frac{x_i}{c_i} \leq 0 \iff \underline{e^{\sum_{i=1}^{n} c_i \log \frac{x_i}{c_i}} \leq 1}$$

PROVIAMO QUESTO

$$e^{\sum_{i=1}^{n} c_i \log \frac{x_i}{c_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\log \frac{x_i}{c_i}} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{x_i}{c_i} = 1$$

PER DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONVESSA

$\Rightarrow (c_1 \dots c_n)$ È MIN VINCOLATO PER f.

ESERCIZI:

① $f(x,y) = xy$

$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \}$$

MAX | MIN VINCOLATI ASSOLUTI DI f RISPETTO A V

$f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\nabla g(x,y) = (2x-y, -x+2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \notin \Gamma$$

$$\nabla f = (y, x)$$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \lambda(2x - y) = 0 \\ x - \lambda(-x+2y) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy - \lambda x^2 + \lambda xy = 0 \\ xy + \lambda xy + 2\lambda y^2 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(y^2 - x^2) = 0 \\ x - \lambda(-x+2y) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ x - \lambda(-x+2y) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x - \lambda(-x+2y) = 0 \\ y^2 - y^2 + y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y \\ x - \lambda(-x+2y) = 0 \\ y^2 + y^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ x - \lambda(-x+2y) = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y \\ x - \lambda(-x+2y) = 0 \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$x = y = 1$

$1 - \lambda(-1+2) = 0$

$\lambda = 1$

$x = y = -1$

$-1 - \lambda(1-2) = 0$

$\lambda = 1$

$x = \sqrt{\frac{3}{3}}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} - \lambda\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\lambda = -\frac{1}{3}$

$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{3} - \lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

$\lambda = -\frac{1}{3}$

$(1, 1) \qquad (-1, -1) \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

$x^2 - xy + y^2 = 1$

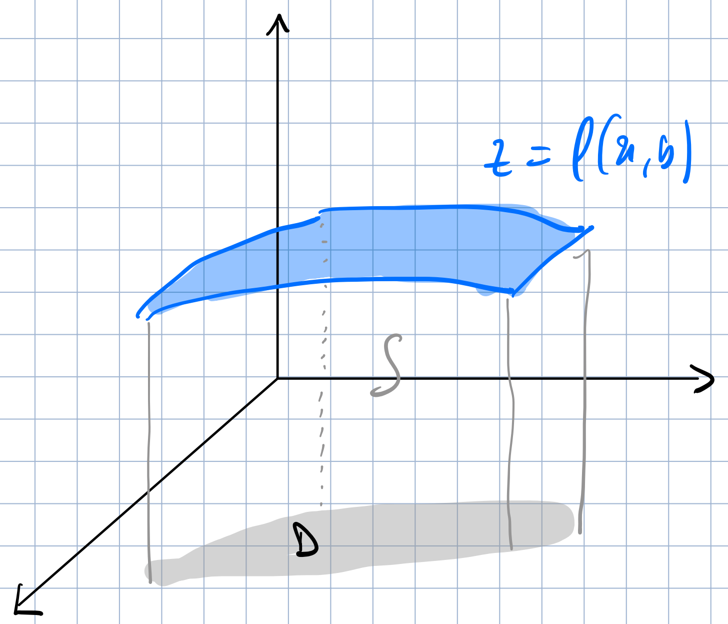
$\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + y = 1$

$\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$ ELLISSE $\Rightarrow$ LIMITATO e CHIUSO

$\Rightarrow$ WEIERSTRASS

FUNZIONE INTEGRABILE

$f : D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad f$ CONTINUA E POSITIVA IN D

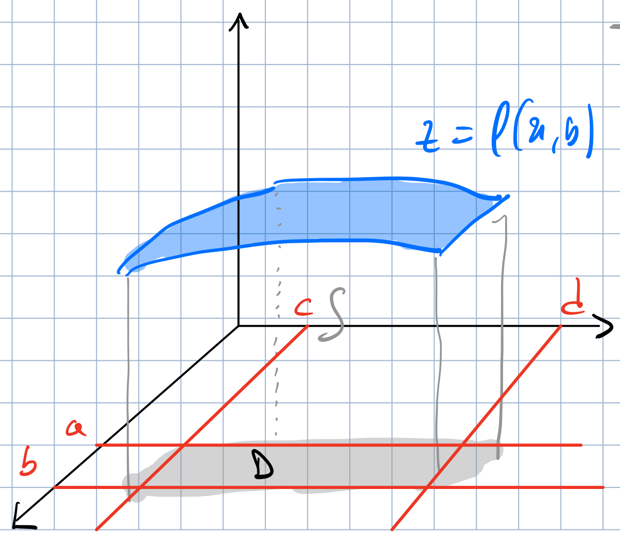


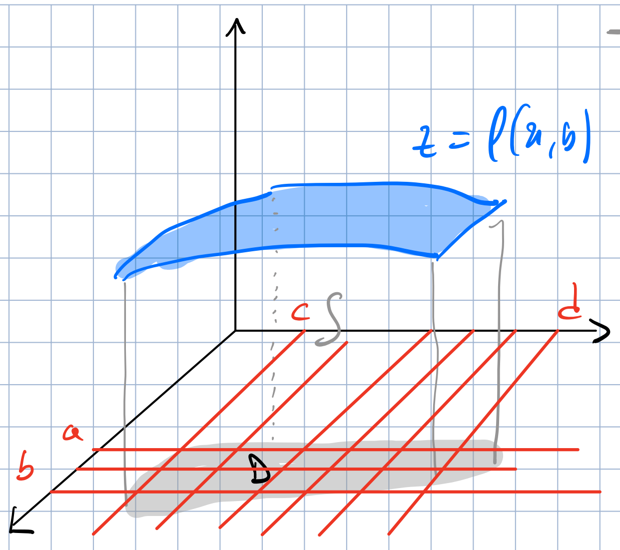
PROBLEMA: CALCOLARE IL VOLUME DELLA PARTE DI SPAZIO COMPRESA TRA IL PIANO xy E IL GRAFICO DELLA FUNZIONE f E DELIMITATA DAL CILINDRO PARALLELO ALL'ASSE z E E PASSANTE PER IL BORDO D.

CERCHIAMO DI DIVIDERE IL GRAFICO IN TANTI PARALLELEPIPEDI.

$D = [a,b] \times [c,d]$ RETTANGOLO

IMMAGINIAMO CHE IL DOMINIO SIA UN RETTANGOLO





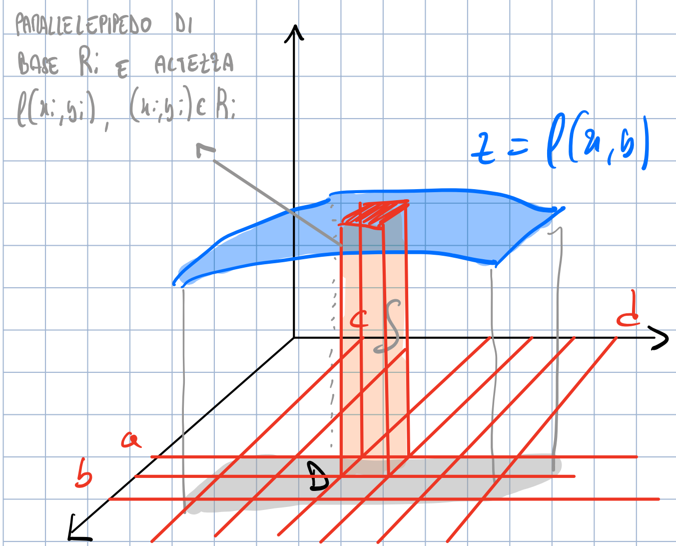
DIVIDENDO IL DOMINIO IN TANTI SOTTO INTERVALLI E OTTENIAMO UNA PARTIZIONE DI D.

$$P = \{R_1, \dots R_m\}$$

$$\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} R_i = [a,b] \times [c,d]$$

COME ALTEZZA IL PARALLELEPIPEDO AVRÀ UN VALORE SCELTO A CASO NEL QUADRATINO ASSUNTO DALLA FUNZIONE.



$$Vol(S_i) = Q(R_i) \cdot f(x_i, y_i)$$

SAPPIAMO CHE È UN VOLUME PERCHÉ f È POSITIVA, E L'AREA È POSITIVA.

PER OTTENERE UN'APPROSSIMAZIONE PRECISA AUMENTO IL NUMERO DI RETTANGOLI E DIMINUISCO LA LORO AREA.

SE ESISTE ED È INDIPENDENTE DALLA SCELTA DEI PUNTI (x_i, y_i):

$$\lim_{\substack{m \to +\infty \\ \max_{i=1,\dots,m} Q(R_i) \to 0}} \overbrace{\sum_{i=1}^{m} Q(R_i) \cdot f(x_i, y_i)}^{\text{SOMMA DI CAUCHY-REIMANN}} = Vol(S)$$

LA DEFINIZIONE VALE ANCHE SE f È SOLO LIMITATA, CON OPPORTUNE MODIFICHE:

f È INTEGRABILE IN $[a,b]\times[c,d]$ E

$$\boxed{\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \max\limits_{i=1,\dots,n} Q(R_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} Q(R_i)\cdot f(x_i,y_i)}$$

IN PARTICOLARE SE f È CONTINUA E POSITIVA, VALE LA PRECEDENTE DEFINIZIONE.

OSSERVAZIONI:

- f LIMITATA $\not\Rightarrow$ f INTEGRABILE

  ESEMPIO:

$$f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

f È LIMITATA, VEDIAMO SE È INTEGRABILE

$$\sum_{i=1}^{n} Q(R_i)\cdot f(x_i,y_i) = \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} Q(R_i)=1 & x_i\in\mathbb{Q}\ \forall i=1,\dots,n\\ 0 & x_i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \forall i=1,\dots,n\end{cases}$$

DATO CHE IL LIMITE DIPENDE DALLA SCELTA DEI PUNTI

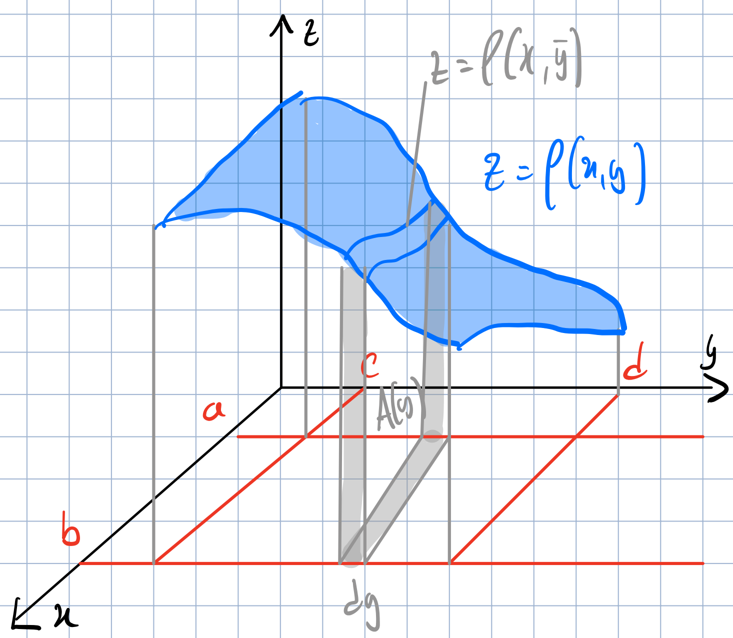
$\Rightarrow f$ NON È INTEGRABILE IN $[0,1]\times[0,1]$.

<u>TEOREMA</u>: $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ CONTINUA

$\Rightarrow f$ INTEGRABILE IN $[a,b]\times[c,d]$

COME CALCOLIAMO $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$?

CONSIDERIAMO f CONTINUA E POSITIVA:



FACCIAMO TANTI TAGLI

$$Vol(s)=\int_c^d A(y)\,dy \quad\Rightarrow\quad \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

$$A(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

TOGLIENDO IL SIGNIFICATO GEOMETRICO ABBIAMO DIMOSTRATO

LE FORMULE DI RIDUZIONE SUI RETTANGOLI.

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$$\Rightarrow \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

ESEMPI

① $$\iint_{[0,1]\times[0,2]} x \cdot e^{xy}\,dx\,dy$$

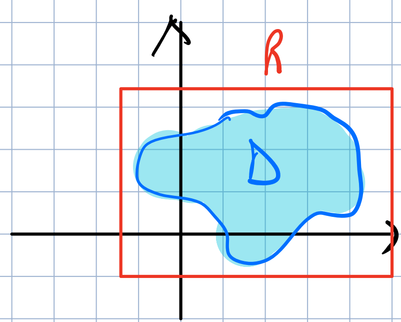
$$\int_0^1 \left(\int_0^2 x\,e^{xy}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[e^{xy}\right]_0^2 dx = \int_0^1 (e^{2x}-1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - x \Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}$$

$f : D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO

ESISTE UN RETTANGOLO CHE LO CONTIENE

f LIMITATA IN D



COSTRUIAMO LA FUNZIONE (PER ESTENDERE f IN R FUORI DA D)

$$\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

$\tilde{f}$ È LIMITATA IN R

SI DICE CHE f È INTEGRABILE IN D SE $\tilde{f}$ È INTEGRABILE IN R E SI PONE:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

SI DIMOSTRA CHE QUESTA DEFINIZIONE È INDIPENDENTE DALLA SCELTA DI R.

ESEMPIO

$$D = \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = 1$$ LIMITATA E CONTINUA

f È INTEGRABILE IN D?

$R = [0,1]\times[0,1]$ e $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \end{cases}$$

$\tilde{f}$ NON È INTEGRABILE (COME DIMOSTRATO PRIMA)

$\Rightarrow$ f NON INTEGRABILE IN D!

DUNQUE USCENDO DAI RETTANGOLI LE FUNZIONI CONTINUE NON SONO NECESSARIAMENTE INTEGRABILI.

MISURABILITÀ SECONDO PEANO - JORDAN

$D \subset \mathbb{R}^2$ LIMITATO

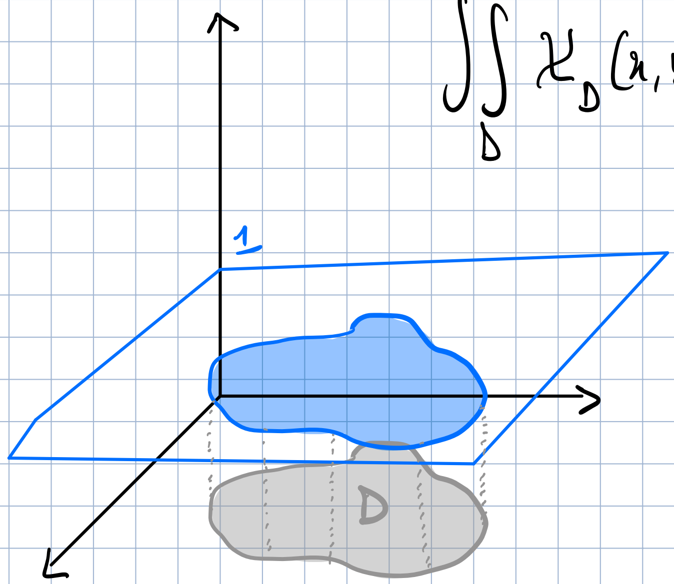
LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI D È LA FUNZIONE χ DEFINITA DA:

$$\chi_D(x) \begin{cases} 1 & \text{SE } (x,y) \in D \\ 0 & \text{SE } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$$

SI DICE MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN SE LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA È INTEGRABILE IN D.

IN TAL CASO SI DEFINISCE MISURA O AREA DI D E SI INDICA CON $\mathscr{A}(D)$ O $|D|$, LA QUANTITÀ:

$$\iint_D \chi_D(x,y)\,dx\,dy = \iint_D 1\,dx\,dy$$



$$V = \mathscr{A}(D) \cdot h = \mathscr{A}(D) \cdot 1 = \mathscr{A}(D)$$

ESEMPI

① $R = [a,b] \times [c,d]$ MISURABILE

$$|R| = \iint_R 1\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d dy = (b-a)(d-c)$$

(2) POLIGONI DELLA GEOMETRIA PIANA SONO MISURABILI

SI DICE CHE $D \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO È MISURABILE E DI MISURA NULLA SE

$$\iint_D 1 \, dx \, dy = 0$$

ESEMPI SONO INSIEMI DI MISURA NULLA:

1. UN' INSIEME COSTITUITO DA UN NUMERO FINITO DI PUNTI
2. UN SEGMENTO IN $\mathbb{R}^2$
3. UN SOTTOINSIEME DI UN' INSIEME DI MISURA NULLA
4. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA E INTEGRABILE IN $[a,b]$ IL GRAFICO HA MISURA NULLA
5. IL BORDO DI UN POLIGONO DI N LATI IN $\mathbb{R}^2$
6. L' UNIONE FINITA DI INSIEMI DI MISURA NULLA.

CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI MISURABILI SECONDO PEANO - JORDAN

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO

BORDO

D È MISURABILE SECONDO J-P $\Rightarrow \partial D$ È MISURABILE E $|\partial D| = 0$

TEOREMA :

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad$ D LIMITATO E MISURABILE, f LIMITATA

$\Rightarrow$ f INTEGRABILE IN D.

TEOREMA :

$f: R \to \mathbb{R}$, $R \subseteq \mathbb{R}^2$ RETTANGOLO, f LIMITATA E CONTINUA TRANNE IN UN INSIEME DI MISURA NULLA

$\Rightarrow$ f INTEGRABILE IN R.

PROPRIETA' INTEGRALE

$f, g: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO E MISURABILE

f, g LIMITATE E INTEGRABILI IN D

1) LINEARITA' : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\iint_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) \, dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y) \, dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y) \, dx\,dy$$

2) MONOTONIA : RISPETTO ALL' INTEGRALE

SE $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall \, x,y \in D$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y) \, dx\,dy \leq \iint_D g(x,y) \, dx\,dy$$

IN PARTICOLARE SE $g \geq 0$ IN D, ALLORA

$$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy \geq 0$$

(3) f È INTEGRABILE IN D E

$$\left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

(4) MONOTONIA RISPETTO AL DOMINIO DI INTEGRAZIONE:

SE $D' \subseteq D$ È MISURABILE, ALLORA f È INTEGRABILE IN D'.

INOLTRE SE $f \geq 0$ IN D, ALLORA

$$\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

(5) ADDITIVITA' RISPETTO AL DOMINIO DI INTEGRAZIONE:

$D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATI E MISURABILI TALI CHE $|D_1 \cap D_2| = 0$

f INTEGRABILE IN $D_1 \cup D_2$

$\Rightarrow$ f È INTEGRABILE IN D_1 E IN D_2 E SI HA:

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

SE NON FOSSERO DISGIUNTI DOVREI SOTTRARNE L'INTERSEZIONE.

⑥ PROPRIETÀ DI ANNULLAMENTO

D MISURABILE $|D| = 0$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

⑦ PROPRIETÀ DI ANNULLAMENTO PER FUNZIONI CONTINUE:

D APERTO, LIMITATO, MISURABILE

f CONTINUA E LIMITATA IN D $f \geq 0$ IN D

$$\Rightarrow \text{SE} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ IN } D$$

NON VALE SENZA CONTINUITÀ:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{IN } \{0,0\} \\ 0 & \text{IN } D \setminus \{0,0\} \end{cases}$$

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

$$\Rightarrow f \neq 0 \text{ IN } D$$

⑧ TEOREMA DELLA MEDIA

$f: D \to \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^2$

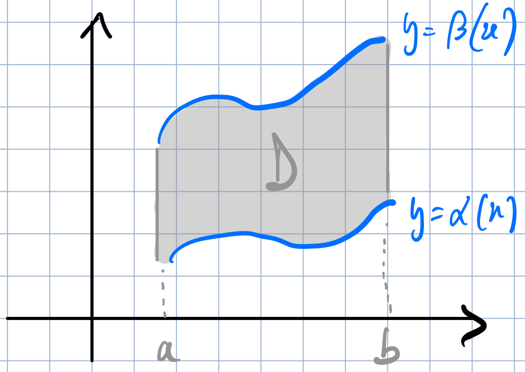
D LIMITATO, CHIUSO, MISURABILE, CONNESSO

$$\Rightarrow \exists (x_0,y_0) \in D \mid \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0)\,|D|$$

DOMINI NORMALI

$\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ α, β CONTINUE IN $[a,b]$ TALI CHE:

$$\alpha(x) \le \beta(x) \quad \forall x \in [a,b]$$



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \}$$

DA WEIERSTRASS α, β HANNO MIN, MAX

$\Rightarrow D$ LIMITATO

∂D È MISURABILE CON MISURA NULLA

$\Rightarrow D$ MISURABILE

$$|D| = \iint_D 1 \, dx \, dy \qquad |D| = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) \, dx$$

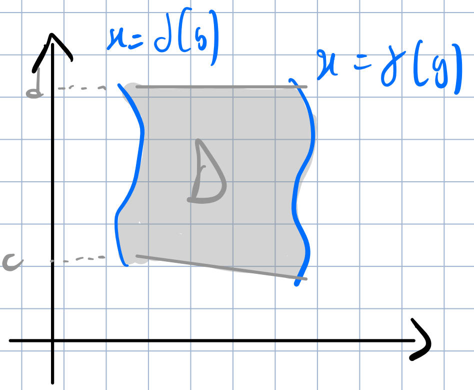
$$\Rightarrow \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) \, dx$$

IN MODO ANALOGO SI CHIAMA DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL'ASSE y UN' INSIEME DEL TIPO:

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d] , \ \delta(y) \le x \le \gamma(y) \}$$

DOVE $\delta, \gamma : [c,d] \to \mathbb{R}$ CONTINUE IN $[c,d]$

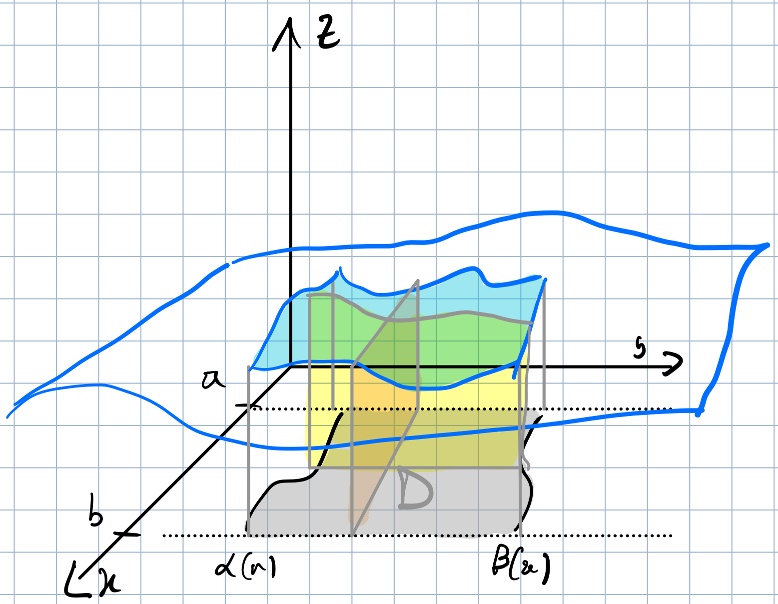
E TALI CHE $\delta(y) \le \gamma(y) \ \forall y \in [c,d]$



$$|D| = \iint_D 1 \, dx\, dy = \int_c^d \left(\gamma(y) - \delta(y)\right)$$

22/11

$$\iint f(x,y)\, dx\, dy = ???$$



$$\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

EFFETUIAMO DEI TAGLI

$$\int_a^b \underbrace{\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right)}_{G(x)} dx$$

$$G(x) \rightsquigarrow \int_a^b G(x)\, dx \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \underbrace{\left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right)}_{H(y)} dy$$

$$H(y) \rightsquigarrow \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} H(y) = \cancel{T(x)}$$

DOVREBBE ESSERE UN NUMERO, DUNQUE NON SI PUÓ USARE.

FORMULA DI RIDUZIONE PER I DOMINI NORMALI

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad f$ CONTINUA IN D

① SIA $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

DOVE $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE CON $\alpha \leq \beta$

ALLORA

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

② SIA $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ \delta(x) \leq x \leq \gamma(x)\}$

DOVE $\delta, \gamma : [c,d] \to \mathbb{R}$ CONTINUE CON $\delta \leq \gamma$

ALLORA

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\delta(x)}^{\gamma(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

D È LIMITATO E MISURABILE POICHÉ IL BORDO È FORMATO DA CURVE.

f È LIMITATA PER WEIERSTRASS, ED È CONTINUA

$\Rightarrow f$ INTEGRABILE

ESEMPIO

① $$\iint_D xy \, dx\, dy$$

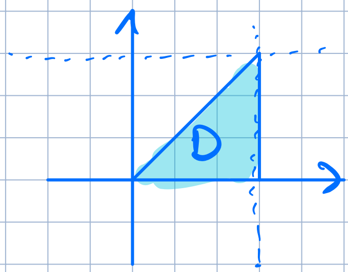
$$D : \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], \quad 0 \le y \le x^2 \}$$

f CONTINUA IN $\mathbb{R}^2$

D NORMALE RISPETTO A x

$$\iint_D xy \, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xy\, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^5\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^6}{6} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{12}$$



② $$\iint_D (x-y)\, dx\, dy$$

DOVE $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], \quad 0 \le y \le x \}$

f CONTINUA IN $\mathbb{R}^2$

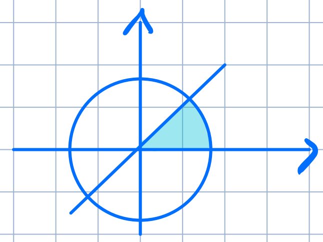
D NORMALE RISPETTO A x

$$\int_0^2 \left(\int_0^x (x-y)\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^x dx = \frac{4}{3}$$

D NORMALIZZATO A y

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,2],\ y \le x \le 2\}$$

3 $\displaystyle\iint_D x \, dx\, dy$



DOVE $D : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x\}$

TROVIAMO D NORMALIZZATO AD x

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\bar{x}],\ 0 \le y \le x\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\bar{x},2],\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$$

$$\bar{x} = \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

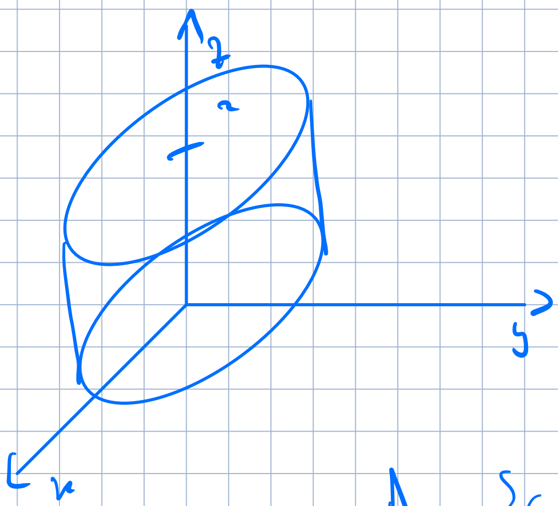
$$\Rightarrow \iint_D x\,dx\,dy = \iint_{D_1} x\,dx\,dy + \iint_{D_2} x\,dx\,dy = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$\iint_{D_1} x\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^x x\,dy\right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} \quad \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\iint_{D_2} x\,dx\,dy = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\,dy\right) dx = \int_{\sqrt{2}}^2 x \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^2 x(4-x^2)^{1/2} = \frac{2}{3}(4-x^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

(4) $E = \left(\{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 \leq 9 \,,\, 0 \leq z \leq 2 \right\}$



$\text{Vol}(E) = A(\text{ell'm}) \cdot 2$

$A(\text{ell'm}) = \iint\limits_{D} 1 \, dx \, dy$

$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \,,\, -\sqrt{9 - 4x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - 4x^2} \right\}$

$0 \leq x \leq \frac{3}{2} \qquad , \qquad 0 \leq y \leq \sqrt{9 - 4x^2}$

$$4 \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{9-4x^2}} 1 \, dy \, dx = 4 \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{9 - 4x^2} \, dx = 24 \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{4}{9} x^2} \, dx$$

$x = \frac{3}{2} \cos \theta$

$=$

CAMBIAMENTO DI VARIABILI IN $\mathbb{R}^2$

È UNA FUNZIONE $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \to \varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$$

TALE CHE φ È INVERTIBILE IN $\mathbb{R}^2$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, φ MANDA D IN $\varphi(D)$ DOVE

$$\varphi(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = \varphi_1(x,y),\ v = \varphi_2(x,y),\ (x,y) \in D\}$$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO

SI DICE CHE $\varphi \in C^1(D)$ SE $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(D)$.

SE $\varphi \in C^1(D)$, POSSIAMO SCRIVERE LA MATRICE JACOBIANA:

$$D\varphi = \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{pmatrix}$$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $\qquad \varphi : D \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi \in C^1(D)$

SI DICE CHE φ È INVERTIBILE IN D SE:

$$\det D\varphi(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in D$$

SE $\varphi \in C^1(D)$ È INVERTIBILE IN D, ALLORA:

$$\exists\ \varphi^{-1} : \varphi(D) \to D$$
$$(u,v) \to (x,y)$$

φ^{-1} È TALE CHE $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(D))$

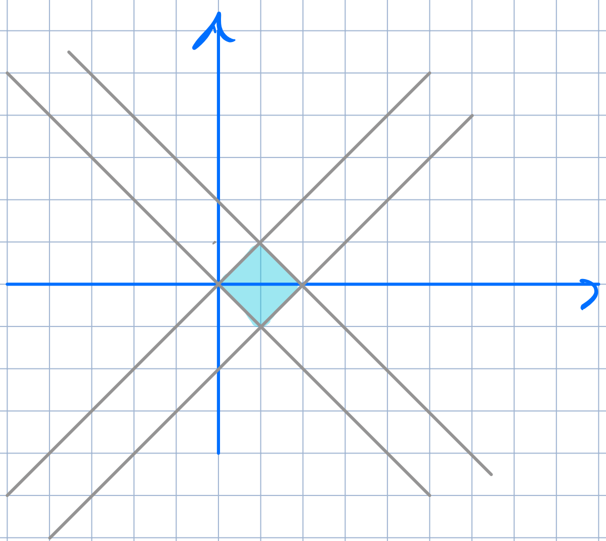
$$D\varphi^{-1}(\varphi(x,y)) = [D\varphi(x,y)] \quad \forall (u,v) \in \varphi(D)$$

$$\det D\varphi^{-1}(u,v) = \frac{1}{\det D\varphi(\varphi^{-1}(u,v))}$$

UNA FUNZIONE $\varphi \in C^1(D)$ INVERTIBILE È DETTA DIFFEOMORFISMO

ESEMPI

① $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq 2-y,\ x-2 \leq y \leq x\}$



VOGLIO GIRARE IL QUADRATO

$$-y+y \leq x+y \leq 2-y+y$$
$$0 \leq x+y \leq 2$$
$$x-2-x \leq y-x \leq x-x$$
$$2 \leq y-x \leq 0$$

$$\varphi : \begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases}$$

$\varphi \in C^1(D)$

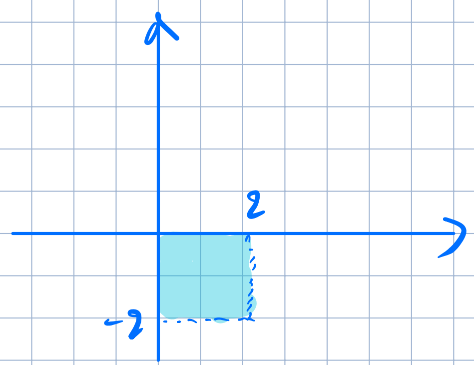
$$\det D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

φ È INVERTIBILE

φ È UN CAMBIAMENTO DI VARIABILI IN D.

INOLTRE $\exists\, \varphi^{-1} : \varphi(D) \to D$, $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(D))$

$$\varphi(D) = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;/\; u \in [0,2],\; v \in [-2,0] \}$$



$$\det D\varphi^{-1}(u,v) = \frac{1}{2}$$

$u = x+y$
$v = y-x$

$$\varphi^{-1} = \begin{cases} u+v = 2y \\ u-v = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u+v}{2} = y \\ \frac{u-v}{2} = x \end{cases}$$

2) $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(\rho,\theta) \to (x,y)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{d(x,y)}{d(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho \neq 0 \ \forall\ \rho > 0$$

FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILE PER GLI INTEGRALI DOPPI

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO E MISURABILE

$f: D \to \mathbb{R}$ LIMITATA E CONTINUA IN D

$\varphi: D \to \mathbb{R}^2$, $\varphi^{-1} \in C^1(D)$, $\det D\varphi \neq 0$ in D

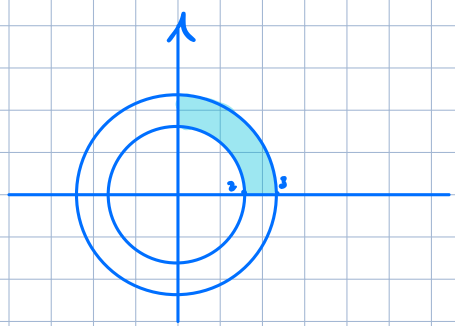
ALLORA:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\varphi(D)} f\left(\varphi^{-1}(u,v)\right)\left|\det D\varphi^{-1}(u,v)\right|\,du\,dv$$

ESEMPI

(1) $$\iint \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$



D LIMITATO E MISURABILE

f LIMITATA E CONTINUA IN D

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \rho \in [2,3] \end{array}$$

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \iint \frac{\rho^3\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{\rho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\cdot|\rho|\,d\rho\,d\theta =$$

$$\iint \rho^2\cos\theta\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta = \int_2^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta\right)d\rho =$$

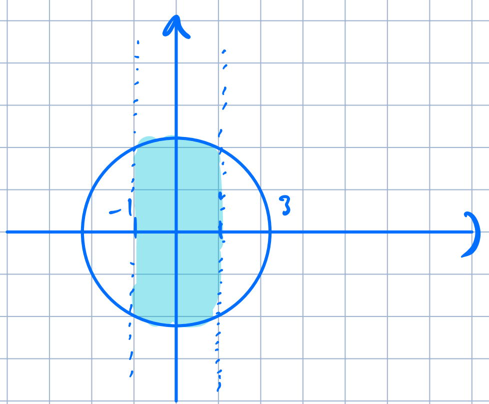
$$= \int_2^3\left(\rho^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta\cdot\int_2^3\rho^2\,d\rho =$$

$$= \rho^3\Big|_2^3\cdot\frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(9-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{19}{9}$$

(2) $$\iint_D x^3\,dx\,dy = 0$$

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1,\ x^2+y^2\le 9\}$$



(3) $\displaystyle\iint_D x \, dx \, dy$

$$D := \{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid -y \leq x \leq 2-y \, , \, x-2 \leq y \leq x \}$$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases}$$

$$= \iint_{[0,2]\times[-2,0]} \frac{u-v}{2} \cdot \frac{1}{2} \, du \, dv = \frac{1}{4} \int_0^2 \int_{-2}^0 (u-v) \, dv \, du =$$

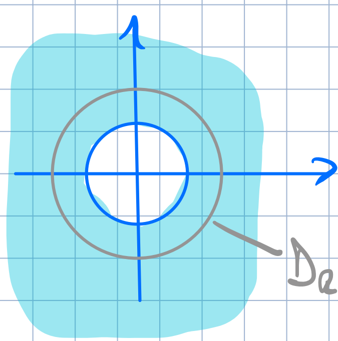
$$= \frac{1}{4} \int_0^2 uv - \frac{v^2}{2} \Big|_{-2}^0 du = \frac{1}{4} \int_0^2 (2u+2) \, du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} + u \Big|_0^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(2+2) = 2$$

INTEGRALI IMPROPRI

ESERCIZI

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \, dx \, dy$



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 \geq 1 \}$$

D ILLIMITATO $\Rightarrow$ INTEGRALE IMPROPRIO

$$D_R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < R^2 \}$$

$$\lim_{R \to +\infty} \iint_{D_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \, dx \, dy = 2\pi$$

$$\iint_{D_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \, dx \, dy = \int_1^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^3} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_1^R \frac{1}{\rho^2} \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta =$$

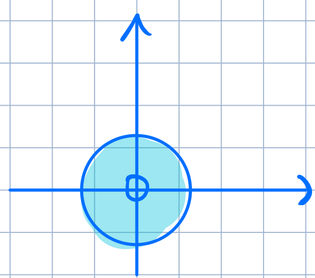
$$\rho \in [1, R] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_1^R \frac{1}{\rho^2} \, d\rho \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \left(-\frac{1}{\rho} \right) \Bigg|_1^R = 2\pi \left(-\frac{1}{R} + 1 \right)$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{|x|^\alpha} \quad \begin{cases} \alpha > 1 & \text{CONV.} \\ \alpha \leq 1 & \text{DIV.} \end{cases}}$$

(2) $$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

$$D: \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \}$$



$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty \qquad f \text{ È ILLIMITATA}$$

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\lim_{r \to 0} \iint_{D_r} \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_r^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2} \rho\, d\theta\, d\rho = \int_r^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho}\, d\theta\, d\rho =$$

$$= \log \rho \Big|_r^1 \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = -2\pi \log(r) \xrightarrow[r \to 0]{} +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \begin{cases} \text{div } \alpha \geq 1 \\ \text{conv } \alpha < 1 \end{cases}$$

③ $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2+y^2}\, dx\, dy = \lim_{R \to +\infty} \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho\, d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho \cdot e^{-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \Big|_0^R = -\pi\left(e^{-R^2} - 1\right) \xrightarrow[R \to +\infty]{} \pi$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

DI UNA VARIABILE

UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA DI ORDINE n È UN'EQUAZIONE DI FORMA:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

DOVE $F: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^{n+2}$ APERTO

L'**ORDINE** DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE, È L'ORDINE MASSIMO DI DERIVAZIONE CHE COMPARE NELL'EQUAZIONE.

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SI DICE IN **FORMA NORMALE** SE SI PUÒ SCRIVERE NELLA FORMA:

$$y^{n}(x) = f\left(x, y(x), \ldots y^{(n-1)}(x)\right)$$

DOVE $f: B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ APERTO

CARATTERISTICHE EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

① $y'''(x) + y''(x) + y'(x) = x$

- EQ. DI ORDINE 3
- A COEFFICIENTI COSTANTI ⟹ I TERMINI DAVANTI A y SONO NUMERI
- NON OMOGENEA ⟹ NON APPAIONO SOLO y E LE SUE DERIVATE
- LINEARE ⟹ GRADO DEI TERMINI IN y

② $y''(x) + x\,y'(x) = 3$

- 2° ORDINE
- COEFF. VAR.
- OMOGENEA
- LINEARE

③ $x y''(x) + y'(x) + y^2 = 6$

- 2° ORDINE
- COEFF. VAR.
- OMOGENEA
- NON LINEARE

④ $y'' + xy' - 2y - x^2 = 0$

- 2° ORDINE
- COEFF. VAR.
- NON OMOG.
- LINEARE

COSA VUOL DIRE RISOLVERE UN DIFFERENZIALE:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

TROVARE TUTTE LE $\bar{y} = y(x)$ CHE RISPETTINO L'EQUAZIONE

E $\bar{y}$ DEVE ESSERE DERIVABILE ALL'ORDINE n.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

(DEL PRIMO ORDINE)

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

RISOLUZIONE:

SE $g(y) \neq 0$ ALLORA DIVENTA:

$$\frac{y'(x)}{g(y)} = f(x)$$

POICHÉ $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ DIVENTA:

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

INTEGRANDO (PURCHÉ SIANO INTEGRABILI):

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \Rightarrow \boxed{G(y) = F(x) + c}\ , c \in \mathbb{R}$$

INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

UNA SOLUZIONE OTTENUTA SOSTITUENDO A C UN VALORE È DETTO INTEGRALE PARTICOLARE

SIA $g(y) = 0$, $y_0 \mid g(y_0) = 0$ ALLORA:

$y(x) = y_0$ È UN INTEGRALE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE.

ESEMPI

① $y' = x \cdot y^3$

$g(y) = 0 \Leftrightarrow y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ INTEGRALE SINGOLARE

SIA $g(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{y^3} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^3}\,dy = \int x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2y^2} = c - \frac{x^2}{2}$$ INTEGRALE GENERALE IN FORMA IMPLICITA

$$\frac{1}{2y^2} = \frac{2c - x^2}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2c - x^2}$$ $2c - x^2 > 0$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2c - x^2}}$$ $c > 0$ $-\sqrt{2c} < x < \sqrt{2c}$

(2) $$y' = \frac{y \cdot e^{2x}}{1 + e^{2x}} \Rightarrow y' = y \cdot \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

$g(y) = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 0}$ INTEGRALE SINGOLARE

$g(y) \neq 0$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx \Rightarrow \log(|y|) = \frac{1}{2}\log(1 + e^{2x}) + c$$

$$e^{\log|y|} = e^{\log\sqrt{1+e^{2x}} + c} \Rightarrow e^c = k \quad |y| = \sqrt{1 + e^{2x}} \cdot e^c$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm k\sqrt{1 + e^{2x}} \qquad k > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \tilde{k}\sqrt{1 + e^{2x}} \qquad \tilde{k} \neq 0$$

SE $\tilde{k} = 0 \Rightarrow y = 0$ DIVENTA INTEGRALE PARTICOLARE

③ $y' = \frac{y e^{2x}}{1+e^{2x}}$ $\quad y(1) = 0$

PROBLEMA DI CAUCHY DEL PRIMO ORDINE DAL PUNTO INIZIALE $x_0 = 1$

$y(x) = \tilde{k}\sqrt{1+e^{2x}}$ INT GENERALE

$2 = \tilde{k}\sqrt{1+e^2} \Rightarrow \tilde{k} = \frac{2}{\sqrt{1+e^2}}$

$\Rightarrow y(x) = \frac{2}{\sqrt{1+e^2}} \cdot \sqrt{1+e^{2x}}$

④ $\begin{cases} y' = \frac{y e^{2x}}{1+e^{2x}} \\ y(2) = 0 \end{cases}$ $\quad y(x) = 0$

⑤ $y' = 3 \cdot e^y$ ANALISI QUALITATIVA DELLE SOLUZIONI

- NON LINEARE
- I ORDINE

$\bar{y}' = 3e^{\bar{y}} > 0 \Rightarrow \bar{y}$ STRETT. CRESCENTE

$\bar{y}'' = (3e^{\bar{y}})' = 3e^{\bar{y}} \cdot \bar{y}' > 0$ CONVESSA

$\frac{dy}{e^y} = 3dx \rightarrow \int -e^y \, dy = \int 3 \, dx$

$\Rightarrow -e^{-y} = 3x + c$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DI ORDINE n

DELLA FORMA:

$$(1) \quad a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) y(x) = g(x)$$

DOVE $\underbrace{a_0, \dots, a_n}_{\text{COEFF. DELL' EQ.}}$, $\underbrace{g}_{\text{TERMINE NOTO}}: [a,b] \to \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

$g(x) = 0 \Rightarrow$ OMOGENEA

$g(x) \neq 0 \Rightarrow$ NON OMOGENEA

$$L : C^n([a,b]) \to C([a,b])$$

$$y \longmapsto L[y] = a_n(x) y^{(n)}(x) + \dots + a_0(x) \cdot y(x)$$

$$\Rightarrow L[y] = g$$

L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA AD (1) È DATA DA:

$$L[y] = 0$$

L È UN' OPERATORE LINEARE POICHÉ:

$$L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta [y_2]$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall y_1, y_2 \in C^n([a,b])$$

- NEL CASO OMOGENEO:

SUPPONIAMO $L[y] = 0$

y_1 e y_2 SOLUZIONI :

$\Rightarrow L[y_1] = 0 = L[y_2]$

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0$$

TUTTE LE COMBINAZIONI LINEARI DELLE SOLUZIONI SONO SOLUZIONI.

DETTO **PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE**

- **NEL CASO NON OMOGENEO:**

$$L[y] = g$$

PRENDIAMO $L[y_1] = g \quad L[y_2] = 0$

$$L[\alpha y_1 + y_2] = \alpha \cdot L[y_1] + L[y_2] = g$$

PROPRIETÀ DELLE SOLUZIONI

$$f_1, \dots, f_m : [a,b] \to \mathbb{R}$$

SI DICE CHE

a) $f_1, \dots, f_m$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE: $\exists (c_1, \dots, c_m) \neq (0, \dots, 0) \quad c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m$.

TALE CHE:

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_m f_m(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

b) $f_1, \dots, f_m$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE:

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \iff c_1 = \dots = c_n = 0$$

ESEMPI

LINEARMENTE DIPENDENTE: $\{1, x, x^2, 2x^2-1\}$

LINEARMENTE INDIPENDENTE: $\{1, x, x^2, x^3\}$

$L[y] = 0$ EQ. DIFF. LINEARE. OMOG. ORDINE n

$y_1, \dots, y_n$ n SOLUZIONI DI $L[y] = 0$, SI DEFINISCE WRONSKIANO O DETERMINANTE WRONSKIANO IL SEGUENTE DETERMINANTE:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

TEOREMA DEL WRONSKIANO

SIANO $y_1, \dots, y_n$ n SOLUZIONI DI $L[y] = 0$, ALLORA:

① $\exists\, x_0 \in [a,b] : W(x_0) = 0$ SSE. LE SOLUZIONI DI $y_1 \dots y_n$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI.

② $\exists\, x_1 \in [a,b] : W(x_1) \neq 0$ SSE. LE SOLUZIONI DI $y_1 \dots y_n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

EQ DIFFERENZIALI LINEARI

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x)\, y(x) = g(x) \quad (1)$$

DOVE $a_0, \dots, a_n \cdot g : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

SI SCRIVE NELLA FORMA $L[y] = g$

L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA A (1) È DATA DA:

$$L[y] = 0$$

TEOREMA

DATA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE OMOGENEA (2) DI ORDINE n, SI HA

1. $\exists$ n INTEGRALI PARTICOLARI $y_1, \dots, y_n$ DI (2) LINEARMENTE INDIPENDENTI

2. L'INTEGRALE GENERALE DI (2) È DATO DA

$$y(x, c_1, \dots, c_n) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

$$c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$$

NEL CASO NON OMOGENEO

TEOREMA: DATA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE NON OMOGENEA (1) DI ORDINE n, IL SUO INTEGRALE GENERALE È DATO DA

$$y(x, c_1, \dots, c_n) = c_1 \cdot y_1(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x) + y_0$$

$$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

DOVE:

1. $y_1, \dots, y_n$ SONO n INTEGRALI PARTICOLARI DI (2) LINEARMENTE INDIPENDENTI

2. y_0 È UN' INTEGRALE PARTICOLARE DI (1)

EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$$

DOVE $a, b : I \to \mathbb{R}$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO, CONTINUA

$\boxed{n = 1}$ $\quad a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) y(x) = g(x) \quad (3)$

ESSENDO $a_1(x) \neq 0$

$$y'(x) = \underbrace{\frac{-a_0(x)}{a_1(x)}}_{= a(x)} y(x) - \underbrace{\frac{g(x)}{a_1(x)}}_{= b(x)}$$

L'INTEGRALE GENERALE DI (3) È DATO DA

$$y(x) = e^{\int a(x)dx} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} dx + c \right], \quad c \in \mathbb{R}$$

DIM

CASO 1 $\quad b(x) = 0$

$y = 0$ SOL

$y \neq 0 \quad \frac{dy}{y} = a(x)\, dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int a(x)\, dx$

$\Rightarrow \log|y| = \int a(x)\, dx + k$

$\Rightarrow |y(x)| = e^{\int a(x)\, dx + k} \Rightarrow y(x) = c \cdot e^{\int a(x)\, dx}$

CASO 2 $\quad b(x) \neq 0$

MOLTIPLICHIAMO PER $e^{-\int a(x)\, dx} \neq 0$

$$e^{-\int a(x)\, dx}\, y'(x) = a(x) \cdot e^{-\int a(x)\, dx} + b(x) \cdot e^{-\int a(x)\, dx}$$

$$\left(e^{-\int a(x)\, dx}\right)' = e^{-\int a(x)\, dx} \cdot y'(x) - a(x) \cdot e^{-\int a(x)\, dx} \cdot y(x)$$

ALLORA:

$$= b(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}$$

QUINDI

$$e^{-\int a(x)\,dx}\, y(x) = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}\,dx + c$$

DA CUI $\Rightarrow$ $y(x) = e^{\int a(x)\,dx} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}\,dx + c\right]$

ESEMPI

1) $y' = 2y + 3e^{4x}$

$$y(x) = e^{\int 2\,dx} \cdot \left[\int e^{4x} \cdot e^{-\int 2\,dx}\,dx + c\right] =$$

$$= e^{2x}\left[\int 3 \cdot e^{4x} \cdot e^{-2x}\,dx + c\right] =$$

$$= e^{2x}\left[\frac{3}{2} \cdot e^{2x} + c\right] = \frac{3}{2}e^{4x} + ce^{2x}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE n

$$a_n \cdot y^{(n)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = g(x) \qquad (5)$$

DOVE

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad a_n \neq 0 \quad g : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ CONTINUA}$$

PASSIAMO AD UNA FORMA OMOGENEA:

$$a_n \cdot y^{(n)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

CERCHIAMO SOLUZIONI DELLA FORMA:

$$y(x) = e^{\alpha x} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$y'(x) = \alpha e^{\alpha x}$$

$$y''(x) = \alpha^2 \cdot e^{\alpha x}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}(x) = \alpha^n \cdot e^{\alpha x}$$

SOSTITUENDO IN (5)

$$a_n \alpha^n \cdot e^{\alpha x} + \dots + a_1 \alpha \cdot e^{\alpha x} + a_0 \cdot e^{\alpha x} = 0$$

$$e^{\alpha x}\left(a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha + a_0\right) = 0$$

$$\underline{a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0}$$

EQUAZIONE ALGEBRICA IN α DI GRADO n $\qquad P(\alpha)$

PROPOSIZIONE: SIA $\alpha \in \mathbb{C}$

$y(x) = e^{\alpha x}$ È LA SOLUZIONE DI (S)

$\Updownarrow$

α È LA SOLUZIONE DI $P(\alpha) = 0$

$P(\alpha)$ È DETTO POLINOMIO CARATTERISTICO ASSOCIATO A (S), $P(\alpha)$ È DETTA EQUAZIONE CARATTERISTICA ASSOCIATA A (S).

TEOREMA:

DOBBIAMO VERIFICARE CHE TUTTE LE SOLUZIONI DI $P(\alpha)$ SIANO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

SIA $P(\alpha)$ IL POLINOMIO CARATTERISTICO ASSOCIATO ALL'EQUAZIONE DIFF. LINEARE OMOGENEA A COEFF. COSTANTI (S) DI ORDINE n.

1) SE $P(\alpha) = 0$ AMMETTE n SOLUZIONI DISTINTE ALLORA

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x}$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = e^{\alpha_n x}$$

SONO n INTEGRALI PARTICOLARI DI (S) LINEARMENTE INDIPENDENTI

(2) SE $P(\alpha)=0$ AMMETTE $p(<n)$ SOLUZIONI $\alpha_1 \dots \alpha_p \in \mathbb{C}$ CON MOLTEPLICITA' $r_1 \dots r_p$ $\left(\sum_{i=1}^{n} r_i = n\right)$ ALLORA:

$$e^{\alpha_1 x}, \; x \cdot e^{\alpha_1 x}, \; \dots, \; x^{r_1 - 1} \cdot e^{\alpha_1 x}$$

$$\vdots$$

$$e^{\alpha_p x}, \; x \cdot e^{\alpha_1 x}, \; \dots, \; x^{r_1 - 1} \cdot e^{\alpha_p x}$$

SONO n INTEGRALI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI (S)

$$\alpha = a + ib \quad \text{SOLUZIONE DI} \quad \underbrace{P(\alpha)}_{a_n \cdot \alpha^n + \dots + a_0 = 0 \; (6)} = 0$$

$y(x) = e^{(a+ib)x}$ INTEGRALE PARTICOLARE DI (S)

POICHE' $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = 0, \dots, n$ ALLORA $\bar{\alpha} = a - ib$ È SOL DI (6)

QUINDI:

$y = e^{(a-ib)}$ È UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI (S)

DAL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:

$$\frac{y_1+y_2}{2} \quad e \quad \frac{y_1-y_2}{2} \quad \text{SONO INTEGRALI DI } (5)$$

USANDO LE FORMULE DI EULERO:

$$\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{e^{(a+ib)x}+e^{(a-ib)x}}{2} = \frac{e^{ax}\cdot e^{ibx}+e^{a}\cdot e^{-ibx}}{2} =$$

$$= e^{ax}\cdot\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2} = e^{ax}\cdot\cos(bx)$$

ESEMPI

(1) $y''-3y'+2y=0$

$y=e^{\alpha x} \qquad y'=\alpha\cdot e^{\alpha x} \qquad y''=\alpha^2\cdot e^{\alpha x}$

$\alpha^2\cdot e^{\alpha x}-3\alpha e^{\alpha x}+2\cdot e^{\alpha x}=0$

$e^{\alpha x}(\alpha^2-3\alpha+2)=0 \qquad \alpha^2-3\alpha+2=0$

$$\alpha_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2} \begin{cases} 2 & e^{2x} \\ 1 & e^{x}\end{cases}$$

$y(x)=c_1\cdot e^{2x}+c_2\cdot e^{x}$

(2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

$$e^{\alpha x}\left(\alpha^2 + 6\alpha + 9\right) = 0 \qquad \alpha^2 + 6\alpha + 9 = 0$$

$\alpha = -3$ com $r = 2$

$$y_1 = e^{-3x} \quad , \quad y_2 = x \cdot e^{-3x}$$

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 \cdot x e^{-3x}$$

(3) $y'' + 2y' + 5 = 0$

$$e^{\alpha x}\left(\alpha^2 + 2\alpha + 5\right) = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i \left\{ \begin{array}{l} e^{-x} \sin(2x) \\ e^{-x} \cos(2x) \end{array} \right.$$

$$y = C_1 e^{-x} \sin 2x + C_2 e^{-x} \cos(2x)$$

EQ. DIFF. LINEARE A COEF. COSTANTI NON OMOGENEA DI ORDINE n

$$a_n \cdot y^{(n)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = g(x) \quad (2)$$

DOVE $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $g: I \to \mathbb{R}$ CONTINUA

ESEMPI:

① $y'' - 3y' + 2y = x$

OMOGENEA ASSOCIATA $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$e^{\alpha x}\left(\alpha^2 - 3\alpha + 2\right) = 0 \iff \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{2x} \quad \text{INT. GEN. OMOGENEA}$$

SOLUZIONE PARTICOLARE: METODO DI SOMIGLIANZA

CERCHIAMO SOLUZIONI CHE ASSOMIGLIANO A $g(x)$ / IN QUESTO CASO UN POLINOMIO.

$y_0(x) = Ax + B$, $y' = A$, $y'' = 0$

y_0 SOL $\iff -3A + 2(Ax + B) = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$y_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

INTEGRALE GENERALE : $y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

② $y'' + y' = 3x - 1$

ESSENDO 0 SOLUZIONE IL POLINOMIO VIENE MOLTIPLICATO PER x ELEVATO ALLA MOLTEPLICITÀ DI α

OMOGENEA : $\alpha^2 + \alpha = 0 \qquad \alpha(\alpha + 1) = 0 \quad \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$$

PARTICOLARE : $y(x) = Ax^2 + Bx$

$y' = 2Ax + B \qquad \Rightarrow \quad 2A + 2Ax + B = 3x - 1$

$y'' = 2A$

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 2A + B = -1 \end{cases} = \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -4 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$$

INTEGRALE GENERALE = $y(x, c_1, c_2) = c_1 + c_2 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 4x$

③ $y'' + y = e^{2x}$

OMOGENEA: $\alpha^2 + 1 = 0 \qquad \alpha = \pm i$

$$y(x) = e^{ax} \cdot \sin(bx) + e^{ax} \cdot \cos(bx)$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(x) + c_2 \cos x$$

PARTICOLARE: $y_0(x) = A \cdot e^{2x} \qquad y' = 2A \cdot e^{2x} \qquad y'' = 4A \cdot e^{2x}$

$$4A \cdot e^{2x} + A e^{2x} = e^{2x}$$

$$5A = 1$$

$$A = \frac{1}{5}$$

$$y_0(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{2x}$$

GENERALE: $y(c_1, c_2, x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{5} e^{2x}$

(4) $y'' - y = e^x$

OMO:

$\alpha^2 - 1 = 0 \qquad \alpha \begin{cases} \boxed{1} \\ -1 \end{cases}$

$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$

ECCEZIONE ESPONENZIALE: SE IL COEFFICIENTE DELLA x ALL'ESPONENTE È SOLUZIONE LA SOLUZIONE VA MOLTIPLICATA PER ELEVATO ALLA MOLTEPLICITÀ.

PAR: $y = Ae^x x \qquad y' = A \cdot e^x + Ax \cdot e^x \qquad y'' = 2Ae^x + Ax \cdot e^x$

$$2Ae^x + \cancel{Ax \cdot e^x} - \cancel{Ax\, e^x} = e^x$$

$$2Ae^x = e^x$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \frac{1}{2} e^x \cdot x$$

GEN: $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \cdot x$

(5) $y'' - y = 2 \sin(3x)$

OMO: $\alpha = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \qquad y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}$

PAR: $y_0 = A \sin 3x + B \cos 3x$

$y_0' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x$

$y'' = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x$

$-9A \sin 3x - 9B \cos 3x - A \sin 3x - B \cos 3x = 2 \sin 3x$

$-10A \sin 3x - 10B \cos 3x = 2 \sin 3x$

$$\begin{cases} B = 0 \\ A = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$y_0 = -\frac{1}{5} \sin 3x$$

GEN: $y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{5} \sin 3x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(6) $y'' + y = 2 \sin x$

CASO PARTICOLARE, COEFF x NEL SENO UGUALE A COEFF. PARTE IMM. SOLITA SOLUZIONE.

OMO: $\alpha = \boxed{\pm i}$ $\qquad y = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$

PAR: $y = Ax \cdot \sin x + Bx \cdot \cos x$

$y' = Ax \cdot \cos x + A \sin x + Bx \cdot -\sin x + B \cos x$

$$= Ax\cdot\cos x + A\sin x - Bx\sin x + B\cos x$$

$$y'' = -Ax\cdot\sin x + A\cos x + A\cos x - Bx\cdot\cos x - B\cos x - B\sin x$$

$$= 2A\cos x - 2B\sin x - Ax\sin x - Bx\sin x$$

$$2A\cos x - 2B\sin x - Ax\cancel{\sin x} - \cancel{Bx\cos x} + \cancel{Ax\sin x} + \cancel{B\cos x} = 2\sin x$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \end{cases}$$

GEN :

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x - x\cos x$$

(7) $y'' + 3y' + 2y = x\cdot e^{3x}$

OMO :

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \qquad \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

$$y = c_1\cdot e^{-2x} + c_2\cdot e^{-x}$$

PAR:

$$y_0 = (Ax+B)\cdot e^{3x}$$

$$y' = A\cdot e^{3x} + 3(Ax+B)\cdot e^{3x} = 3Ax\cdot e^{3x} + (A+3B)e^{3x}$$

$$y'' = (6A+9B)e^{3x} + 9Ax\cdot e^{3x}$$

$$(6A+9B)e^{3x} + 9Ax\cdot e^{3x} + 9Ax\cdot e^{3x} + (3A+9B)\cdot e^{3x} + 2(Ax+B)\cdot e^{3x}$$

$$= x\cdot e^{3x}$$

$$\Rightarrow \left(6A+9B+3A+9B+2B\right)e^{3x} + \left(9A+9A+2A\right)x\cdot e^{3x} = x e^{3x}$$

$$(9A+20B)e^{3x} + 21A\cdot x\cdot e^{3x} = x\cdot e^{3x}$$

$$\begin{cases} 9A+20B = 0 \\ 20A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{9}{400} \\ A = \dfrac{1}{20} \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{1}{20}x - \frac{9}{400}\right)\cdot e^{3x}$$

GEN :

$$y = c_1\cdot e^{2x} + c_2\cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{20}x - \frac{9}{400}\right)e^{3x}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DI EULERO

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$$

DOVE $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

E $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

ESEMPIO

① $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$ in $[0, +\infty)$

PONIAMO $x = e^s = e^s \Rightarrow s = \log x$

e $z(s) = y(e^s) \Rightarrow \boxed{z(\log x) = y(x)}$

$$y' = z' \log(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = z'' \log(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + z' \log(x) \cdot -\frac{1}{x^2}$$

SOSTITUENDO SI HA:

$$x^2 \left(z'' \log(x) \cdot \frac{1}{x^2} + z' \log(x) \cdot -\frac{1}{x^2} \right) + 2x \left(z' \log(x) \cdot \frac{1}{x} \right) - 6z = 0$$

$$z'' - z' + 2z' - 6z = 0$$

$$z'' + z' - 6z = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \qquad \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$$z = c_1 e^{-3s} + c_2 \cdot e^{2s}$$

$$y = c_1 \cdot e^{-3\log x} + c_2 \cdot e^{2\log x} = \frac{c_1}{x^3} + c_2 \cdot x^2$$

SE L'INTERVALLO FOSSE IN $(-\infty, 0]$ LA SOSTITUZIONE È $x = e^{-s}$ $\Rightarrow$ $y(x) = z(\log(-x))$

EQUAZIONE LINEARE DI BERNULLI

$$y'(x) = a_x\, y(x) + b(x) \cdot y^{\alpha}(x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha = 0 \Rightarrow$ LINEARE DI PRIMO ORDINE

$\alpha = 1 \Rightarrow$ VARIABILI SEPARABILI

$\mathbb{R} \setminus \{0,1\} \Rightarrow$ BERNULLI (NON LINEARE)

$$z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$$

ESEMPIO

① $x y' = -y^2 \cdot \log(x) - 2y$ in $(0, +\infty)$

$$y' = -\frac{2}{x} y - \frac{\log(x)}{x} \cdot y^2$$

$y = 0$ È SOLUZIONE

$y \neq 0$

$$z = \frac{1}{y} \qquad y = \frac{1}{z} \qquad y' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'$$

$$y'' = 2 \cdot z^{-3} \cdot z' - \frac{1}{z^2} \cdot z''$$

SOSTITUIAMO:

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} - \frac{\log(x)}{x} \cdot \frac{1}{z^2}$$

$$z' = \frac{2}{x} z \cdot \frac{\log x}{x}$$

$$z = e^{\frac{2}{x}} \cdot \left[\int \frac{\log(x)}{x} \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + c \right]$$

$$= x^2 \left[\int \frac{\log(x)}{x^3} dx + c \right] =$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \log(x) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x} \log x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)$$

$$z = x^2 \left(-\frac{1}{2x^2} \log(x) - \frac{1}{4x^2} + c \right) = -\frac{1}{2} \log x - \frac{1}{4} + cx^2$$

$$y = \frac{1}{cx x^2 - \frac{1}{2} \log(x) - \frac{1}{4}} \quad + \quad y = 0$$

PROBLEMA DI CAUCHY

UN PROBLEMA DI CAUCHY DI ORDINE n È DI PUNTO INIZIALE x_0 È UN PROBLEMA DELLA FORMA:

$$\begin{cases} \text{EQ. DIFF. DI ORDINE } n. \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ESEMPIO

1.

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 2y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY DEL SECONDO ORDINE DI PUNTO INIZIALE 1

2.

$$\begin{cases} y''' + 3y' + xy = 5 \\ y(0) = 1 \\ y'(1) = 3 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

NON È DI CAUCHY

③
$$\begin{cases} y'' + xy = 5 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

NON DI CAUCHY

①
$$\begin{cases} y'' + 3y' - 2y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} \quad \begin{matrix} \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{matrix}$$

$$y = C_1 \cdot e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x} + C_2 \cdot e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}}$$

$$y' = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \cdot C_1 \cdot e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} + \frac{-3+\sqrt{17}}{2} C_2 \cdot e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}}$$

$$2 = y(1) = C_1 \cdot e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} + C_2 \cdot e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}}$$

$$0 = y'(1) = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \cdot C_1 e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} + C_2 \cdot e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} \cdot \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$$

$$C_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} C_1 \cdot e^{-\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} \cdot \frac{2}{-3+\sqrt{17}} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{17}}{-3+\sqrt{17}} \cdot e^{-\sqrt{17}} \cdot c_1$$

SOSTITUENDO NELLA PRIMA

$$c_1 \cdot e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} + \frac{3+\sqrt{17}}{-3+\sqrt{17}} \cdot e^{-\sqrt{17}} \cdot c_1 \cdot e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} = 2$$

$$c_1 = \frac{2}{e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} + \frac{3+\sqrt{17}}{-3+\sqrt{17}} \cdot e^{-\sqrt{17}} \cdot e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}}}$$

PROBLEMI AI LIMITI

ESEMPIO

$$\begin{cases} \text{EQ. DIFF. II ORDINE} \quad x \in [a,b] \\ 5y(a) + 7y(b) = 3 \\ 7y'(a) + y'(b) = 0 \end{cases}$$

PROBLEMI DI CAUCHY DEL PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x) = y_0 \end{cases}$$

TEOREMA DI ESISTENZA: DI PEANO

SE f È CONTINUA IN UN RETTANGOLO CENTRATO IN (x_0, y_0), ALLORA IL PROBLEMA AMMETTE SOLUZIONE LOCALE.

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE DI CAUCHY:

SE f È CONTINUA E DERIVABILE RISPETTO AD y CON DERIVATA LIMITATA IN UN RETTANGOLO CENTRATO IN (x_0, y_0) IL PROBLEMA AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE LOCALE.

SE $f \in C^1(R)$ ALLORA IL TEOREMA VALE

TEOREMA DI REGOLARITÀ

SE $f \in C^k(R)$, DOVE R È UN RETTANGOLO CENTRATO IN (x_0, y_0), ALLORA LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA È TALE CHE

$$y \in C^{k+1}(I)$$

DOVE I È UN INTORNO DI x_0.

ESEMPIO

① $$\begin{cases} x \cdot y' = y^2 \cdot \log(x) - 2y \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$y' = -y' \cdot \frac{1}{x} \log x - 2y \cdot \frac{1}{x}$$ DERIV.

$\exists$ UN'UNICA SOLUZIONE

$\Rightarrow$ $y(x)=0$ SOL.

13/12

ESERCIZI

① $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(1) = 0 \end{cases}$

λy È CONTINUA E $\in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ UNICA SOLUZIONE

$y=0$ UNICA SOLUZIONE

② $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(1) = 2 \end{cases}$

$y \neq 0$

$$y = \int \frac{1}{y}\, dy = \int \lambda\, dx \Rightarrow \log(y) = \lambda x + c \Rightarrow y = e^{\lambda x + c} = k e^{\lambda x}$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = k \cdot e^{\lambda} \Rightarrow k = 2 \cdot e^{-\lambda}$$

$$y = 2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda x} = 2 \cdot e^{\lambda(x-1)}$$

EQUAZIONE MOTO ARMONICO

(3)

$$\begin{cases} y'' + w^2 y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \qquad w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\alpha^2 + w^2 = 0 \qquad \alpha = \pm i w$$

$$y = c_1 \sin(wx) + c_2 \cos(wx) \qquad y(0) = y_0 \qquad y_0 = c_2 \Rightarrow$$

$$y' = c_1 w \cos(wx) - c_2 w \sin(wx) \qquad y'(0) = y_1 \qquad y_1 = c_1 w \Rightarrow c_1 = \frac{y_1}{w}$$

$$y = \frac{y_1}{w} \sin(wx) + y_0 \cdot \cos(wx)$$

(4) $y'' + 4y = 0$

- ○ AMMETTE SOLO SOLUZIONI COSTANTI
- ○ NON AMMETTE SOL.
- ⊠ AMMETTE SOL. LIMITATE
- ○ AMMETTE SOL. ILL.

(5)

$$\begin{cases} e^{x+y} y' + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{-x}{e^{x+y}} \Rightarrow y' = \frac{-x}{e^x} \cdot \frac{1}{e^y}$$

$$\int e^y \, dy = \int -x \cdot e^{-x} dx$$

$$y = \log\left(e^{-x}(x+1) + c\right)$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \log(c) = 0$$

$$y = \log\left(e^{-x}(x+1)\right)$$

$$y = \log\left(\frac{x+1}{e^x}\right)$$

LA SOLUZIONE E':

- ○ $y = x \log(x+1+e^x)$
- ⊠ $y = -x + \log(x+1)$
- ○ $y = \log(x+1)$
- ○ $\nexists$.

⑥ LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = x^2 \cdot e^y \geq 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

- ☒ CRESCENTE
- ○ DECRESCENTE
- ○ $\nexists$
- ○ STRETT. CR.

⑦ LE FUNZIONI

$$\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

RISOLVONO:

- ○ $y' - y = 0$
- ○ $y'' - y = 0$
- ○ $y'' - y' = 0$
- ○ $y'' = 0$

ESERCIZI DI RIEPILOGO

① $y'' - y' - 2y + 5e^{-\frac{x}{2}} = 0$

(A)

$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 \cdot e^{-x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$y = A \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2} A e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{1}{4} A \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} A \cdot e^{-\frac{x}{2}} - 2 A e^{-\frac{x}{2}} + 5 e^{-\frac{x}{2}} = 0$$

$$y'' = \frac{1}{4} A e^{-\frac{x}{2}} \qquad \Rightarrow -\frac{5}{4} A + 5 = 0$$

$$A = 4$$

$$y = 4 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(B) STABILIRE MOTIVANDO LA RISPOSTA SE L'EQUAZIONE DATA AMMETTE UNA SOL. $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TALE CHE

$$\int_0^{+\infty} y(x)\,dx < +\infty$$

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \left(c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + 4 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\right) dx = \pm\infty \quad \text{(IN BASE A } c_2\text{)}$$

QUINDI SOLO SE $c_2 = 0$.

(C) STABILIRE MOTIVANDO LA RISPOSTA SE L'EQ AMMETTE UNA SOL. $y = y(x)$ LIMITATA IN $[0, +\infty)$

$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

1 DETERMINARE LA SOLUZIONE DI

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y + 5e^{-\frac{x}{2}} \\ y(0) = -4 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

E STABILIRE, MOTIVANDO, SE TALE SOLUZIONE È MONOTONA IN $\mathbb{R}$

$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \qquad y' = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} - 2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y(0) = -4 \qquad y'(0) = 2$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 4 = -4 \\ -c_1 + 2c_2 - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 - 8 \\ c_2 + 8 + 2c_2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{aligned} c_1 &= \frac{4}{3} + 8 = -\frac{20}{3} \\ c_2 &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{20}{3} e^{-x} - \frac{4}{3} e^{2x} + 4 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$$

$\Rightarrow$ NON È MONOTONA

2 $$(x+1)y' = (x^2 - 1)y^2 - 3y$$

$$y' = -\frac{3}{x+1} y + \frac{x^2 - 1}{x+1} y^2 = -\frac{3}{x+1} + (x-1)y^2$$

$$z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y} \qquad y' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'$$

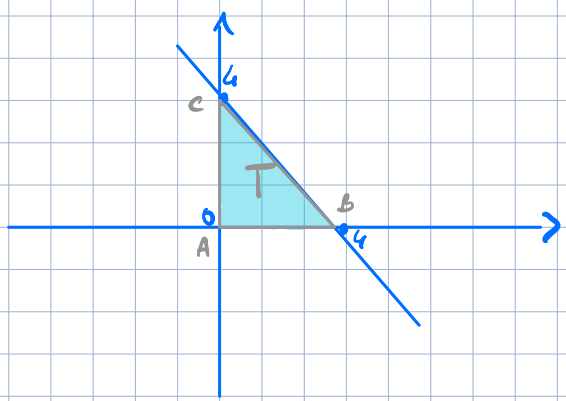
$$-\frac{1}{z^2}z' = -\frac{3}{x+1} + (x-1)\frac{1}{z^2}$$

ESEMPIO COMPITO

(1) $f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$

$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 4 \}$

a) DISEGNARE T



b) STABILIRE SE f AMMETTE MAX MIN ASS. IN T.

DA WEISTRASS $\Rightarrow$ $\exists$ MAX E MIN ASS.

c) DETERMINARLI

$\nabla f(x,y) = 0$

$$f_x = 2xy \cdot e^{-(x+y)} - x^2 y \cdot e^{-(x+y)} = e^{-(x+y)}(2-x) = 0$$

$$f_y = x^2 \cdot e^{-(x+y)} - x^2 y \cdot e^{-(x+y)} = x^2(1-y) = 0$$

$x=0,\ y=0,\ x=2$

$\Downarrow$

$(0,y)\ (x,0)\ (2,1)$

$(2,1) \in \mathring{D} \Rightarrow$ CRITICO

- STUDIAMO IL BORDO DI T:

PARAMETRIZZIAMO :

$\overline{AB} = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0,4] \qquad f_{|AB} = f(t,0) = 0 = h(t) \Rightarrow h'(t) = 0$

$\overline{BC} = \begin{cases} x = t \\ y = 4-t \end{cases} \quad t = [0,4] \qquad f_{|BC} = f(t,4-t) = t^2(4-t)e^{-4} \qquad h' \in (0,4)$

$h'(t) = (8t - 3t^2)e^{-4} = 0$

$t(8-3t) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{8}{3} \end{cases}$

$\overline{AC} = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,4] \qquad f_{|AC} = f(0,t) = 0 = h(t) \Rightarrow h'(t) = 0$

CANDIDATI $\quad \overline{AB}, \overline{AC} \quad e \quad t = \frac{8}{3}$

$f(2,1) \Rightarrow 4 \cdot 1 \cdot e^{-(3)} = 4 \cdot e^{-3} \Rightarrow MAX$

$f(x,0) \quad x \in [0,4] \Rightarrow 0$

$\Rightarrow MIN$

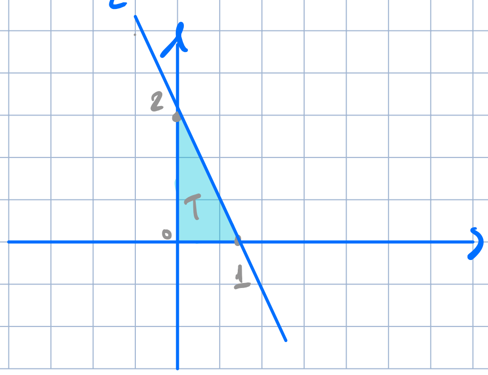
$f(0,y) \quad y \in [0,4] \Rightarrow 0$

$f\left(\frac{8}{3}, 4-\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \frac{16}{9} \cdot \left(4 - \frac{8}{3}\right) \cdot e^{-\left(\cancel{\frac{8}{3}} + 4 - \cancel{\frac{8}{3}}\right)} = \frac{16}{9} \cdot \frac{4}{3} \cdot e^{-4} = \frac{64}{27} \cdot e^{-4}$

(2) $\iint_T (1+3x+y)\,dx\,dy$

$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le -2(x-1)\}$

$0 \le y \le -2x+2$



D LIMITATO E CHIUSO   f LIMITATA E CONT.

D MISURABILE

PERCHÈ IL BORDO HA MISURA NULLA

$\Downarrow$

f INT. IN T

$$\iint_D (1+3x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{-2(x-1)} (1+3x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(y+3xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{-2(x-1)} dx =$$

$$= \int_0^1 -2x+2+3x(-2x+2)+\frac{4(x-1)^2}{2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 -6x^2+4x+2+2(x-1)^2\,dx = -\frac{6x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x+\frac{2(x-1)^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= -2+2+2+\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$