

Appunti di fisica generale

per facoltà di ingegneria e di informatica

di Arlind Pecmarkaj

Anno Accademico 2021/2022

10 giugno 2022

Sommario

Questi appunti sono stati scritti in L^AT_EX durante l'anno accademico 2021/2022 e sono tratti dal corso di Fisica Generale di 9 CFU della facoltà di informatica dell'Università di Urbino e non sono un indicatore di qualità del corso in quanto sono una mia riedizione dei concetti spiegati a lezione.

Essendo un semplice studente di informatica non posso per nulla garantire sulla correttezza di ciò che c'è scritto in quanto potrei aver trascritto male o non aver compreso correttamente alcune parole o concetti durante le lezioni.

Molto probabilmente vedrete errori grammaticali, di sintassi e di scrittura in quanto non è stata fatta una redazione del testo in questo ambito.

Non sono da intendersi come sostituzione dei propri appunti e di una presenza costante a lezione.

Considerate il tutto come supplemento ad essi. Il metodo di studio è il vostro.

È permessa la distribuzione e la stampa degli appunti.

Siete liberi di prendere qualsiasi frase, concetto e integrarla nei vostri appunti. È però assolutamente vietata la vendita.

Indice

1	Introduzione al metodo scientifico	1
1.1	Grandezze fisiche e il Sistema Internazionale di Unità di Misura	1
1.2	Operazioni di misura	2
1.3	Errori di misura	2
2	Il moto in una dimensione	4
2.1	Definizioni e concetti preliminari	4
2.2	Grandezze usate	4
2.2.1	Posizione	4
2.2.2	Spostamento	5
2.2.3	Distanza	5
2.2.4	Velocità media	5
2.2.5	Velocità media scalare	5
2.2.6	Velocità istantanea	6
2.2.7	Accelerazione media	6
2.2.8	Accelerazione istantanea	7
2.2.9	Esercizio di riepilogo	7
2.3	Moto rettilineo uniforme	8
2.4	Moto uniformemente accelerato	9
2.5	Esercizi di riepilogo	10
2.5.1	Esercizio n. 1	10
2.5.2	Esercizio n. 2	11
3	I vettori	13
3.1	Richiami di trigonometria	13
3.1.1	Applicazione della trigonometria ai triangoli rettangoli	14
3.1.2	Sistemi di riferimento	15
3.2	I vettori e le grandezze vettoriali	15
3.3	Somma tra vettori	16
3.4	Prodotto di un vettore per uno scalare	17
3.5	Prodotto scalare	17
3.6	Prodotto vettoriale	18
3.7	Componenti di un vettore e vettori unitari	19

4 Il moto in due e tre dimensioni	21
4.1 I vettori posizione e spostamento	21
4.2 I vettori velocità e accelerazione	22
4.3 Moto parabolico e dei proiettili	23
4.3.1 Il proiettile contro il bersaglio fermo	25
4.4 Moto circolare	26
4.4.1 Moto circolare uniforme	26
4.4.2 Moto circolare non uniforme	27
4.5 Esercizi di riepilogo	29
4.5.1 Esercizio n. 1	29
4.5.2 Esercizio n. 2	30
4.5.3 Esercizio n. 3	31
4.5.4 Esercizio n. 4	32
5 I principi della dinamica	34
5.1 La dinamica	34
5.2 Il primo principio della dinamica: il principio di inerzia	34
5.3 Il secondo principio della dinamica	35
5.3.1 Differenza tra massa e peso	36
5.4 Forze fondamentali e forze di contatto e di campo	36
5.5 Il terzo principio della dinamica	37
5.6 Quantità di moto	38
5.7 Conservazione della quantità di moto e l'impulso	38
5.8 Analisi dei sistemi fisici tramite i principi della dinamica	39
5.8.1 Esempio n. 1: cassa appesa ad un filo in un soffitto	40
5.8.2 Esempio n. 2: il traino di una slitta	41
5.8.3 Esempio n. 3: la macchina di Atwood	43
5.8.4 Esempio n. 4: carrucola cambia-direzione	45
5.9 Esercizio di riepilogo	47
6 Applicazione dei principi della dinamica	48
6.1 Il piano inclinato	48
6.2 L'attrito	49
6.2.1 Attrito statico	50
6.2.2 Attrito dinamico	50
6.2.3 Determinare sperimentalmente i coefficienti di attrito	52
6.2.4 Conviene più spingere o tirare?	53
6.3 Il moto armonico	54
6.3.1 Relazione tra moto circolare e moto armonico	57
6.4 La forza elastica e la legge di Hooke	57
6.4.1 Moto di una massa attaccata ad una molla	58
6.5 Pendolo semplice	59
6.6 Il moto nei sistemi di riferimento accelerati	60
6.6.1 Sfera in un treno che accelera	61

6.6.2	Il peso in ascensore	62
6.7	La dinamica nel moto circolare uniforme	63
6.7.1	La forza centrifuga	63
6.7.2	Velocità massima di percorrenza di una curva piana .	64
6.7.3	Velocità massima di percorrenza di una curva sopraelevata	65
6.7.4	Il pendolo conico	66
6.7.5	Il peso nella ruota panoramica	67
6.8	Esercizi di riepilogo	68
6.8.1	Esercizio n. 1	68
6.8.2	Esercizio n. 2	69
6.8.3	Esercizio n. 3	70
6.8.4	Esercizio n. 4	71
6.8.5	Esercizio n. 5	72
6.8.6	Esercizio n. 6	73
7	Lavoro ed energia	74
7.1	Lavoro di una forza costante in una traiettoria rettilinea . . .	74
7.2	Lavoro di forze non costanti in traiettorie generiche	74
7.2.1	Il lavoro della forza peso	75
7.2.2	Il lavoro della forza elastica	76
7.2.3	Il lavoro dell'attrito	77
7.3	La potenza	77
7.4	Le forze conservative	77
7.4.1	L'energia potenziale e la conservazione dell'energia meccanica	78
7.5	Esercizi di riepilogo	80
7.5.1	Esercizio n. 1	80
7.5.2	Esercizio n. 2	81
7.5.3	Esercizio n. 3	82
7.5.4	Esercizio n. 4	83
7.5.5	Esercizio n. 5	84
7.5.6	Esercizio n. 6	85
8	La gravitazione universale	86
8.1	La legge di gravitazione universale	86
8.2	Le leggi di Keplero	88
8.2.1	Prima legge di Keplero	88
8.2.2	Seconda legge di Keplero	88
8.2.3	Terza legge di Keplero	89
8.3	Teorema del momento angolare	89
8.3.1	Dimostrazione della seconda legge di Keplero	91
8.3.2	Dimostrazione della terza legge di Keplero	92
8.4	L'orbita dei satelliti	92

8.5 Il campo gravitazionale	93
8.6 L'energia potenziale gravitazionale	95
8.6.1 Energia potenziale di più masse	96
8.6.2 L'energia potenziale vicino alla superficie terrestre . .	96
8.6.3 Energia meccanica di un satellite	96
8.6.4 La velocità di fuga	97
8.7 Esercizi di riepilogo	98
8.7.1 Esercizio n. 1	98
8.7.2 Esercizio n. 2	99
9 La carica elettrica	100
9.1 I modelli atomici	100
9.2 La struttura elettrica della materia: conduttori e isolanti . .	102
9.3 La carica elettrica e l'induzione	103
9.4 La legge di Coulomb e proprietà della carica elettrica	104
10 Il campo elettrico	106
10.1 Il campo elettrico	106
10.2 Il dipolo elettrico	107
10.3 Distribuzioni continue di cariche	108
10.3.1 Distribuzione di cariche in volumi	108
10.3.2 Distribuzione di cariche in superfici	108
10.3.3 Distribuzione di cariche lineari	109
10.4 Moto di una carica in un campo elettrico uniforme	109
10.5 Il lavoro del campo elettrico	111
10.6 Il potenziale elettrico	112
10.7 Differenze di potenziale in campi uniformi	113
10.7.1 Superficie equipotenziali	114
10.7.2 Potenziale di un sistema di cariche	115
10.8 Esercizi di riepilogo	116
10.8.1 Esercizio n. 1	116
10.8.2 Esercizio n. 2	118
10.8.3 Esercizio n. 3	119
10.8.4 Esercizio n. 4	120
10.8.5 Esercizio n. 5	121
10.8.6 Esercizio n. 6	122
11 La legge di Gauss	123
11.1 Il flusso del campo elettrico	123
11.2 La legge di Gauss	125
11.3 Calcolo del campo in distribuzioni simmetriche	128
11.4 Conduttori in equilibrio elettrostatico	131
11.5 Esercizi di riepilogo	135
11.5.1 Esercizio n. 1	135

11.5.2 Esercizio n. 2	136
11.5.3 Esercizio n. 3	137
11.5.4 Esercizio n. 4	138
12 Capacità e condensatori	140
12.1 La capacità elettrica	140
12.2 Condensatori piani	141
12.3 Campo e capacità di un condensatore piano	142
12.4 Condensatori in parallelo e in serie	143
12.5 Energia conservata in un condensatore	144
12.6 Condensatore con dielettrico	145
13 La corrente elettrica	147
13.1 La corrente elettrica	147
13.2 La resistenza e la legge di Ohm	150
13.3 La legge di Joule	151
14 Circuiti elettrici in corrente continua	152
14.1 La forza elettromotrice	152
14.2 Resistori in serie e parallelo	153
14.3 Le leggi di Kirchoff	154
14.3.1 Definizioni preliminari	154
14.3.2 La prima legge di Kirchoff	155
14.3.3 La seconda legge di Kirchoff	155
14.4 Processi di carica e scarica nei circuiti RC	156
14.4.1 Circuiti RC	156
14.4.2 Processo di carica	157
14.4.3 Processo di scarica	158
14.5 Esercizi di riepilogo	159
14.5.1 Esercizio n. 1	159
14.5.2 Esercizio n. 2	160
14.5.3 Esercizio n. 3	162
15 Il campo magnetico	163
15.1 Il campo magnetico	163
15.2 La forza di Lorentz	164
15.3 Forza magnetica su conduttore percorso da corrente	166
15.4 Applicazioni pratiche della forza di Lorentz	169
15.4.1 Selettore di velocità	169
15.4.2 Spettrometro di massa	169
15.4.3 Ciclotrone	170
15.5 Esercizi di riepilogo	172
15.5.1 Esercizio n. 1	172
15.5.2 Esercizio n. 2	173

16 Sorgenti di campo magnetico	174
16.1 Legge di Gauss per il campo magnetico	174
16.2 La legge di Biot-Savart	175
16.3 Campo magnetico generato da un filo rettilineo e piegato ad arco	175
16.4 Forza magnetica tra fili paralleli percorsi da corrente	178
16.5 La legge di Ampère	179
16.6 Il campo magnetico nel solenoide	180
17 Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo	182
17.1 La legge di Faraday	182
17.2 La legge di Lenz	183
17.3 Forza elettromotrice nei circuiti in moto	184
17.4 Autoinduzione e induttanza	185
17.5 I circuiti RL	185
17.6 Le quattro equazioni di Maxwell	187

Capitolo 1

Introduzione al metodo scientifico

1.1 Grandezze fisiche e il Sistema Internazionale di Unità di Misura

In fisica una grandezza è la proprietà di un fenomeno o corpo che può essere rappresentata mediante un numero o un riferimento, ovvero la possibilità di misurare il fenomeno o corpo stesso quantitativamente.

Ad ogni grandezza fisica viene associato un'unità di misura e viene convenzionalmente usato il Sistema internazionale di unità di misura. Nel SI le grandezze vengono divise in 7 grandezze fondamentali:

Grandezza	Unità	Simbolo
Lunghezza	metro	<i>m</i>
Massa	chilogrammo	<i>kg</i>
Durata	secondo	<i>s</i>
Temperatura	kelvin	<i>K</i>
Corrente elettrica	ampere	<i>A</i>
Quantità di sostanza	mole	<i>mol</i>
Intensità luminosa	candela	<i>cd</i>

Tutte le altre grandezze derivano da quelle fondamentali, basta pensare alla velocità che dipende da spazio e tempo.

Le unità di misura sono arbitrarie e prima del 2018 erano legate ad un campione fisico. Per esempio all'inizio il metro era definito come la distanza dal polo nord all'equatore passando per il meridiano di Parigi moltiplicata per 10^{-7} . Successivamente era definita come la lunghezza di una barra di platino e iridio esposta al BIPM e infine alla lunghezza percorsa dalla luce nell'intervallo di $1/299792458$ secondi.

Avere un'unità di misura legato ad un campione fisico non conviene in quanto esso può cambiare nel tempo. Prima il chilogrammo veniva definito come

la massa del cilindro di platino e iridio conservata al BIPM. Pur essendo stata conservata sotto tre teche sottovuoto, il cilindro dopo qualche anno ebbe un cambiamento di circa $50\mu g$!

Per risolvere ciò dal 2018 le grandezze del SI sono legate a costanti universali fondamentali come la velocità della luce per la lunghezza o il numero di Avogadro per la mole.

1.2 Operazioni di misura

Data una grandezza fisica G (con esempio della misurazione della temperatura con termometro a mercurio tra parentesi), la misurazione avviene tramite i seguenti passi:

1. *Misurando G*: è la proprietà del fenomeno/corpo (temperatura);
2. *Elemento sensibile*: componente dello strumento sensibile a cambiamenti della grandezza (il mercurio nel termometro);
3. *Trasduttore*: dispositivo atto a convertire una grandezza fisica in un'altra (capillare cilindrico);
4. *Risposta R(G)*: risposta dell'elemento sensibile sul trasduttore (altezza della colonnina di mercurio);
5. *Taratura*: associazione della risposta con la grandezza da misurare (associazione altezza/temperatura);
6. Sistema di visualizzazione e/o memorizzazione: visualizzazione della grandezza misurata tramite strumenti analogici o digitali (scala graduata);
7. Misura $M(G)$;

1.3 Errori di misura

Quando si misura una grandezza fisica la presenza di errori è garantita ed essi si dividono in:

- Errori sistematici: dovuti a errori propri di misura come per esempio l'uso incorretto della strumentazione.
- Errori casuali: dovuti a fluttuazioni casuali e fenomeni impercettibili.

Eliminare gli errori del tutto è impossibile, ma è possibile controllarli e per far ciò è necessario ripetere più di una volta la misurazione per ottenere una media che data una grandezza G e n misurazioni è

$$\bar{G} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i}{n} \quad (1.1)$$

Ripetere la misurazione riduce l'entità dell'incertezza sperimentale. Calcolando la deviazione standard σ si riesce a quantificare anche l'entità dell'errore. Più piccolo il valore è, più piccolo è l'errore.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (G_i - \bar{G})^2} \quad (1.2)$$

Generalmente gli errori seguono una distribuzione di tipo Gaussiana.

Capitolo 2

Il moto in una dimensione

2.1 Definizioni e concetti preliminari

Partiamo col dare delle definizioni e concetti preliminari allo studio del moto in una dimensione.

Iniziamo dicendo che lo studio del moto fa parte della cinematica. Più precisamente la cinematica è lo studio del moto in termini di tempo e posizione. Il moto è un concetto relativo e per descriverlo abbiamo bisogno di un sistema di riferimento (o un sistema di coordinate).

La scelta del sistema non ha regole e si sceglie quello più conveniente per lo studio.

Diamo alcune definizioni fondamentali:

- *Punto materiale*: qualsiasi cosa od oggetto che è più piccola della traiettoria che percorre.
- *Traiettoria*: l'insieme delle posizioni occupate nello e spazio e nel tempo da parte di un punto materiale.
- *Legge oraria*: funzione che descrive l'andamento di un punto materiale in movimento in funzione del tempo e viene indicata con $x(t)$.

2.2 Grandezze usate

Nello studio del moto a una dimensione vengono usate le seguenti grandezze:

2.2.1 Posizione

Grandezza che ci indica la posizione del nostro punto materiale nella retta.

2.2.2 Spostamento

Grandezza **vettoriale** che ci indica di quanto è variata la posizione del punto in un intervallo di tempo.

Se per un punto definiamo x_1 come sua la posizione iniziale e x_2 la sua posizione finale, definiamo Δx lo spostamento

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2.1)$$

Lo spostamento è una lunghezza $[L]$ e avrà come unità di misura i metri.

2.2.3 Distanza

Grandezza **scalare** che indica la lunghezza effettivamente percorsa dal punto e come per lo spostamento, essa indica una lunghezza e viene rappresentata in metri. Viene rappresentata dalla lettera d .

Da ricordarsi che spostamento e distanza son due grandezze differenti.

Per esempio un punto che parte da 0 m del nostro sistema di riferimento e all'istante 1 è a 50 m e all'istante 2 è di nuovo a 0 m avrà avuto uno spostamento di 0 m e percorso una distanza di 100 m

Questa differenza è fondamentale per capire le prossime grandezze.

2.2.4 Velocità media

Grandezza che rappresenta il rapporto tra lo spostamento e la variazione di tempo durante lo spostamento.

Se per un punto definiamo x_1 la sua posizione iniziale all'istante t_1 e definiamo x_2 la sua posizione finale all'istante t_2 , definiamo $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ la velocità media

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2.2)$$

La velocità media $[V]$ è un rapporto di una grandezza di lunghezza con una grandezza di tempo (ossia $\frac{[L]}{[T]}$) e dunque nel SI ha come unità di misura $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. È utile ricordarsi che 1 m/s equivale a 3.6 km/h .

2.2.5 Velocità media scalare

Grandezza che rappresenta il rapporto tra la distanza percorsa e il tempo impiegato per percorrerla ed è indicata come

$$\bar{v} = \frac{d}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Come per la velocità media, l'unità di misura è $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.2.6 Velocità istantanea

Grandezza che rappresenta la velocità di un punto in un determinato istante. Partendo da una velocità media $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ la velocità istantanea è definita come

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.4)$$

ovvero è la derivata della legge oraria, i.e.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Data una legge oraria, è possibile rappresentarla nel diagramma spazio tempo. Graficamente parlando, la velocità istantanea in un istante t' è la pendenza della retta tangente al grafico della legge oraria in $x(t')$.

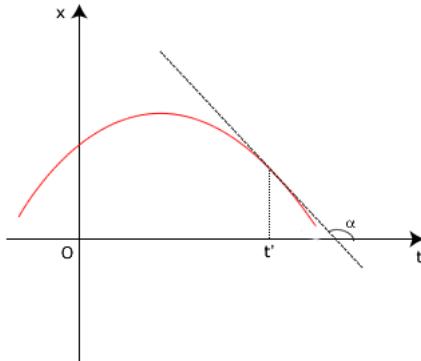


Figura 2.1: Significato geometrico della velocità istantanea

2.2.7 Accelerazione media

Grandezza che rappresenta il rapporto del cambiamento di velocità in un intervallo di tempo.

Se v_1 è la velocità iniziale di un punto materiale all'istante t_1 e v_2 la sua velocità nell'istante t_2 definiamo l'accelerazione media come

$$a_{media} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (2.6)$$

L'accelerazione a è un rapporto tra velocità e tempo (ossia $\frac{[L/T]}{[T]} = \frac{[L]}{[T^2]}$) e dunque la sua unità di misura nel SI è $\frac{m}{s^2}$.

2.2.8 Accelerazione istantanea

Grandezza che rappresenta l'accelerazione in un determinato istante definita come

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = d v(t) \quad (2.7)$$

dove $v(t)$ è la funzione di velocità istantanea. Dunque si ha che

$$a = \frac{d v(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (2.8)$$

Ossia l'accelerazione istantanea in un istante t è la derivata seconda della legge oraria in t .

2.2.9 Esercizio di riepilogo

Vengono fornite le seguenti misurazioni di un punto in moto:

Indice posizione	Istante $t(s)$	Posizione $x(m)$
1	0	30
2	10	52
3	20	38
4	30	0
5	40	-37
6	50	-53

Determinare lo spostamento:

Per lo spostamento basta prendere la posizione nell'ultimo istante e nel primo e sottrarli, ossia

$$\Delta x = x_6 - x_1 = -53 - 30 = -83 \text{ m}$$

Determinare la distanza:

Sappiamo che (dal nostro punto di riferimento) al secondo istante si sono percorsi 22 m ($52 - 30$). Dal secondo istante al quarto 52 m e dal quarto al sesto 53 m .

Dunque

$$d = 22 + 52 + 53 = 127 \text{ m}$$

Determinare la velocità media:

Per determinare la velocità media basta prendere lo spostamento e dividerlo per l'intervallo di tempo che è di 50 secondi

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-83}{50} = -1.66 \text{ m/s}$$

Determinare la velocità scalare media

Per la velocità scalare media basta dividere la distanza per l'intervallo di tempo di 50 secondi

$$v_{scalare\ media} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{127}{50} = 2.54 \text{ m/s}$$

2.3 Moto rettilineo uniforme

Con moto rettilineo uniforme intendiamo il moto di un punto materiale a velocità costante. Poichè la velocità è costante si ha che:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Proviamo a ricavarne la legge oraria.

Poichè abbiamo una equazione differenziale possiamo moltiplicare entrambi i termini per dt ed integrare.

$$\begin{aligned} dx &= vdt \\ \int_{x_0}^x dx &= \int_0^t vdt = v \int_0^t dt \\ x|_{x_0}^x &= vt|_0^t \\ x - x_0 &= vt \end{aligned}$$

La v la separiamo dall'integrale poichè è una costante.

Integrali indefiniti producono delle costanti di integrazioni e dunque dobbiamo usare degli integrali definiti. In questo caso gli estremi di integrazione indicano

- 0 : istante iniziale;
- t : istante finale;
- x_0 : posizione all'istante iniziale 0;
- x : posizione all'istante finale t ;

Si nota come abbiamo bisogno di queste **condizioni iniziali** per determinare correttamente il moto.

Dobbiamo precisare che la x del punto finale **non è uguale** alla x della variabile di integrazione dx . Lo stesso si può dire per la t e dt (questo varrà anche nella prossima sezione riguardante il moto uniformemente accelerato). Si ha che la legge oraria di un corpo in moto uniforme rettilineo è

$$x(t) = x_0 + vt \tag{2.9}$$

Ossia la posizione di un punto materiale in moto uniforme rettilineo è dato dalla sua posizione iniziale più la velocità moltiplicata per il tempo.

2.4 Moto uniformemente accelerato

Con moto uniformemente accelerato intendiamo il moto di un punto materiale con accelerazione costante. Abbiamo che

$$a = \frac{dv}{dt}$$

dove $v = v(t)$.

Anche qui abbiamo una equazione differenziale, perciò moltiplichiamo per dt ed integriamo

$$\begin{aligned} adt &= dv \\ \int_0^t adt &= \int_{v_0}^v dv \\ at|_0^t &= v|_{v_0}^v \\ at &= v - v_0 \end{aligned}$$

Gli estremi di integrazione sono:

- v_0 : velocità all'istante 0;
- v : velocità all'istante t ;

L'equazione del moto risulterà

$$v(t) = v_0 + at \quad (2.10)$$

Ossia la velocità di un punto materiale all'istante t è data dalla sua velocità iniziale e dalla accelerazione moltiplicata per il tempo.

Come abbiamo visto dalla sezione 2.2.9, l'accelerazione istantanea è la derivata seconda della legge oraria, perciò possiamo integrare di nuovo.

Partiamo dalla equazione (2.10) sapendo che $v = \frac{dx}{dt}$.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_0 + at \\ dx &= dt(v_0 + at) = v_0 dt + at dt \\ \int_{x_0}^x dx &= \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt \\ \int_{x_0}^x dx &= v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt \\ x - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}$$

Si ha che la legge oraria di un corpo in moto uniformemente accelerato sarà

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.11)$$

Notiamo che se non abbiamo accelerazione, la legge oraria vale anche per i moti uniformi rettilinei.

2.5 Esercizi di riepilogo

2.5.1 Esercizio n. 1

Nel momento in cui un semaforo volge al verde, un'auto parte con accelerazione costante di 2.2 m/s^2 . Nello stesso istante un'autocarro che sopravviene alla velocità costante di 9.5 m/s sorpassa l'auto.

- (a) A quale distanza oltre il semaforo l'auto sorpasserà il camion?
- (b) Che velocità avrà in quel momento?

Fissiamo come origine delle coordinate la posizione del semaforo e come istante iniziale il semaforo che diventa verde.

Il moto dell'auto è un moto uniformemente accelerato mentre quello dell'autocarro è un moto rettilineo uniforme.

Da queste informazioni scriviamo le leggi orarie dei due punti materiali in considerazione: denotiamo con $x_A(t)$ la legge oraria dell'auto e con $x_C(t)$ la legge oraria del camion.

- $x_A(t) = 1,1t^2$
- $x_C(t) = 9.5t$

Dal diagramma spazio-tempo si nota come x_A sia una parabola e x_C una retta: le loro intersezioni ci indicano in che istante e posizione i due corpi si incontrano. Perciò troviamo l'istante dell'incontro con la seguente equazione

$$\begin{aligned} 1.1t^2 &= 9.5t \\ 1.1t^2 - 9.5t &= 0 \\ t(1.1t - 9.5) &= 0 \end{aligned}$$

Che ha soluzioni $t_1 = 0$ (il momento del sorpasso dell'autocarro) e $t_2 = 8.6 \text{ s}$ che è il tempo del sorpasso dell'auto, valore che ci serve.

Per trovare la distanza in cui l'auto sorpassa il camion di nuovo, basta calcolare

$$x_A(8.6) = 1.1 \cdot (8.6)^2 = 81.4 \text{ m}$$

Poiché abbiamo la legge oraria e sappiamo che la velocità istantanea è la derivata prima di essa, troviamo la velocità al momento del sorpasso.

Avremo che

$$v_A(t) = x'_A(t) = 2.2t$$

Che valutata per 8.6 ci da

$$v_A(8.6) = 2.2 \cdot 8.6 = 18.9 \text{ m/s}$$

Vediamo infine il diagramma spazio tempo per una visualizzazione grafica

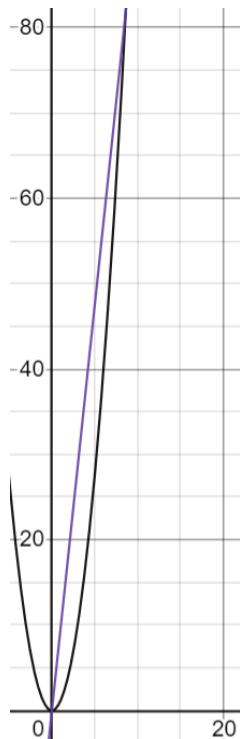


Figura 2.2: Diagramma spazio tempo - in nero la macchina e in viola l'autocarro.

2.5.2 Esercizio n. 2

Una pallina viene lanciata verso l'alto lungo la verticale con una velocità iniziale di 25 m/s ;

- (a) *Quanto tempo impiega a raggiungere la massima altezza?*
- (b) *Qual è l'altezza massima raggiunta?*

La massima altezza viene raggiunta quando la velocità è 0 per via della gravità che ci da un'accelerazione negativa nel nostro sistema di riferimento. Avendo un moto uniformemente accelerato abbiamo che

$$v(t) = 25 - gt = 25 - 9.8t$$

Dunque mettendo $v(t) = 0$ troviamo l'istante in cui viene raggiunta l'altezza massima

$$\begin{aligned} 25 - 9.8t &= 0 \\ t &= \frac{25}{9.8} = 2.55 \text{ s} \end{aligned}$$

Per trovare l'altezza massima dobbiamo ricavare la legge oraria dai dati forniti

$$x(t) = 25t - \frac{9.8}{2}t^2$$

che valutata nell'istante in cui la pallina raggiunge velocità massima ci da

$$x(2.55) = 25 \cdot 2.55 - \frac{9.8}{2} \cdot (2.55)^2 = 31.9 \text{ m}$$

Capitolo 3

I vettori

3.1 Richiami di trigonometria

Per questo capitolo riguardante i vettori è fondamentale un richiamo ai concetti base della trigonometria.

Partiamo con la circonferenza unitaria

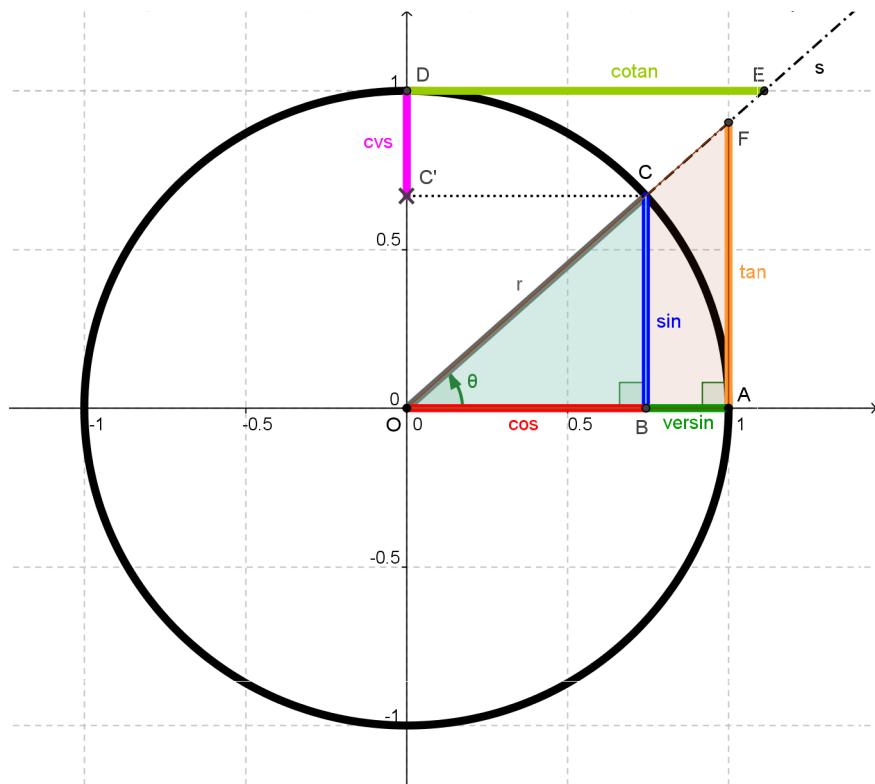


Figura 3.1: Circonferenza unitaria e funzioni trigonometriche.

Nel caso avessimo una circonferenza di raggio r diverso da 1 avremo che l'arco AC sarà uguale

$$AC = r\vartheta$$

Dove ϑ è l'angolo espresso in radianti.

Gli angoli si indicano in radianti in quanto un radiante è l'angolo che crea un arco di raggio r . La sua conversione è

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 11' 45''$$

Partendo dalla figura 3.1 scriviamo le funzioni che ci interesseranno di più e il loro legame con la circonferenza:

- $\bar{OB} = \cos \vartheta$
- $\bar{BC} = \sin \vartheta$
- $\bar{AF} = \frac{\bar{BC}}{\bar{OB}} = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \tan \theta$

Inoltre è utile ricordare l'identità fondamentale della trigonometria

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$$

3.1.1 Applicazione della trigonometria ai triangoli rettangoli

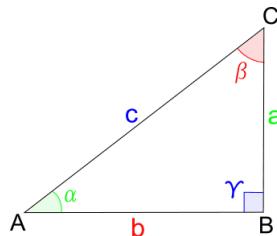


Figura 3.2: Triangolo rettangolo.

Data la figura 3.2 valgono le seguenti relazioni

- $a = C \sin \alpha;$
- $b = C \cos \alpha;$
- $a = b \tan \alpha;$
- $b = a \tan \alpha;$

3.1.2 Sistemi di riferimento

Generalmente vengono usati sistemi di riferimento a coordinate cartesiane. Può essere necessario però in alcuni casi, come per esempio la descrizione di un moto circolare, usare coordinate polari.

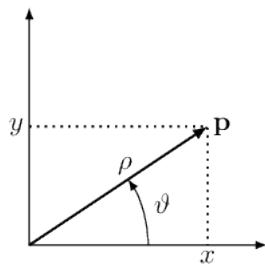


Figura 3.3: Punto p in entrambi i sistemi.

Nelle coordinate cartesiane un punto p viene descritto dalla sua posizione nelle ascisse e nelle ordinate.

Nelle coordinate polari il punto p viene descritto dal suo modulo (ossia la distanza dall'origine) denotato generalmente dalla lettera r o ρ e dall'angolo creato dal segmento che va dall'origine a p e l'asse x , quest'ultimo denotato dalla lettera ϑ .

È sempre possibile passare da coordinate cartesiane e viceversa:

Da polari a cartesiane

- $x = \rho \cos \vartheta;$
- $y = \rho \sin \vartheta;$

Da cartesiane a polari

- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$
- $\vartheta = \arctan \frac{y}{x};$

3.2 I vettori e le grandezze vettoriali

In fisica esistono due tipi di grandezze, le grandezze scalari e quelle vettoriali. Le grandezze scalari sono grandezze definite da un valore scalare ossia da un numero, mentre le grandezze vettoriali sono grandezze che si basano sui **vettori**, ossia hanno bisogno di più di un informazioni per essere definiti. Tralasciando la definizione algebrica di vettore, diremo che esso è un oggetto matematico che contiene diverse informazioni.

In fisica le informazioni che useremo sono

- modulo.
- direzione.
- verso.

La seguente immagine descrive chiaramente cosa indicano i tre termini:

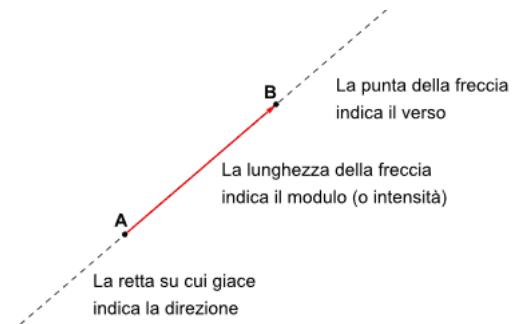


Figura 3.4: Vettore e le informazioni ad esso associato.

3.3 Somma tra vettori

Per fare la somma di due vettori in fisica si usa la regola del parallelogramma: questo metodo consiste nel tracciare le parallele ai due assi e la diagonale dal punto d'applicazione al vertice opposto è il vettore somma. Questo vuol dire, matematicamente parlando, che la somma dei vettori \vec{u} e \vec{v} è un vettore le cui componenti sono la somma dei componenti di \vec{u} e \vec{v} .

$\vec{u} + \vec{v}$ visualizzato graficamente sarà:

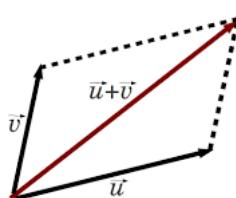


Figura 3.5: Somma vettoriale

Dato un vettore \vec{a} , il suo opposto $-\vec{a}$ sarà un vettore con stesso modulo e direzione, ma verso opposto.

Ciò significa che la differenza tra vettori è una particolare tipo di somma vettoriale, i.e.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Valgono la proprietà commutativa e distributiva.

3.4 Prodotto di un vettore per uno scalare

Dato un vettore \vec{u} e una costante $k \in \mathbb{R}$, $k \cdot \vec{u}$ è un vettore con stessa direzione e verso di \vec{u} con il modulo di quest'ultimo moltiplicato per k .

Il risultato è ovviamente un vettore.

3.5 Prodotto scalare

Si chiama prodotto scalare di due vettori \vec{a} e \vec{b} il numero che si ottiene effettuando la seguente operazione

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha \quad (3.1)$$

dove

- a è il modulo del vettore \vec{a} ;
- b è il modulo del vettore \vec{b} ;
- α è l'angolo compreso tra i due vettori.

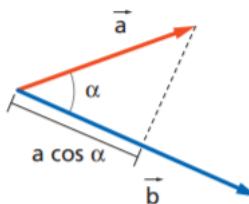


Figura 3.6: Visualizzazione grafica dei vettori in considerazione.

Il prodotto scalare gode sia della proprietà commutativa che di quella associativa.

Se il prodotto scalare di due vettori è 0 allora i due vettori sono ortogonali, ossia $\alpha = \frac{\pi}{2}$, i.e.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \implies \vec{a} \perp \vec{b}$$

Questo perchè $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Inoltre si ha che $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$

3.6 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è il vettore

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

tale che:

- il suo modulo è $c = ab \sin \alpha$, ossia il modulo è dato dal parallelogramma creato dai due vettori.
- la sua direzione è perpendicolare al piano creato dai due vettori.
- il suo verso è dato dalla regola della mano destra.

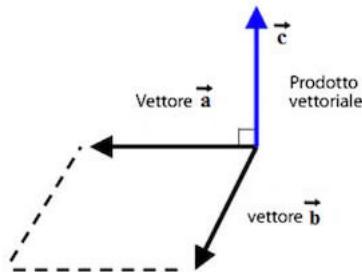


Figura 3.7: Esempio di prodotto vettoriale.

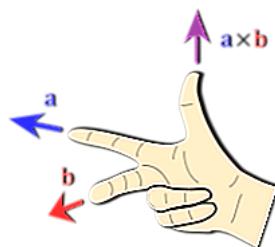


Figura 3.8: Regola della mano destra.

Se il prodotto vettoriale di due vettori è il vettore nullo, allora i due vettori sono paralleli, i.e.

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \implies \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Il prodotto vettoriale **non** è commutativo, ma anticommutativo, ossia

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

3.7 Componenti di un vettore e vettori unitari

Un vettore può esser composto dalla somma dei vettori che rappresentano la proiezione di esso nei vari assi cartesiani. Per facilitarci nella visualizzazione vediamo il seguente vettore in due dimensioni

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

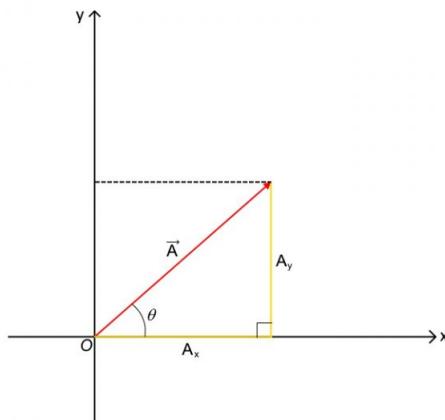


Figura 3.9: Componenti di \vec{a} .

Grazie alla regola dei parallelogrammi ciò è possibile.

Possiamo usare al posto \vec{a}_x e \vec{a}_y , dei vettori particolari, i versori, che hanno modulo 1.

I versori vengono usati principalmente per indicare gli assi cartesiani e poniamo:

- \hat{i} come direzione per l'asse x .
- \hat{j} come direzione per l'asse y .
- \hat{k} come direzione per l'asse z in sistemi a 3 dimensioni.

In questo modo il nostro vettore \vec{a} potrà esser scritto come

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

dove a_x e a_y sono le proiezioni scalari del vettore negli assi cartesiani.

Adesso vediamo come sono definite le operazioni tra vettori con i loro componenti.

Siano \vec{a} e \vec{b} due vettori a tre dimensioni.

Somma di vettori

La somma dei due vettori è definita come

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k} \quad (3.2)$$

Prodotto scalare

Sapendo che

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

e che

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

il prodotto scalare viene definito come

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (3.3)$$

Prodotto vettoriale

Sapendo che

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

e che

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

il prodotto vettoriale viene definito come determinante di una matrice ossia

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Capitolo 4

Il moto in due e tre dimensioni

4.1 I vettori posizione e spostamento

Consideriamo un punto materiale P , esso nel nostro sistema di riferimento si può trovare in qualsiasi posizione.

Chiameremo vettore posizione il vettore che parte dall'origine degli assi e arriva a P .

Quando P è in movimento, esso avrà cambiato posizione e con ciò il suo vettore posizione.

Se \vec{r}_1 è il vettore posizione di P all'istante t_1 e \vec{r}_2 il vettore posizione di P all'istante t_2 , il vettore spostamento è definito come

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (4.1)$$

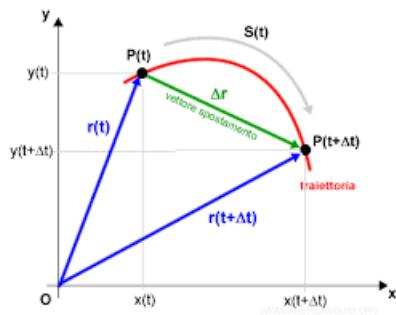


Figura 4.1: Esempio grafico dei vettori posizione e spostamento

Usando la notazione dei versori abbiamo che

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} - (y_2 - y_1)\hat{j}$$

4.2 I vettori velocità e accelerazione

Partendo dalla vettore spostamento della sezione precedente, definiamo il vettore velocità media come

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (4.2)$$

Partendo da esso, definiamo il vettore velocità istantanea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (4.3)$$

Parametrizzando la traiettoria come una curva in \mathbb{R}^2 possiamo definire il vettore spostamento come

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

Dunque

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad (4.4)$$

Graficamente parlando, il vettore velocità istantanea è un vettore che ha come direzione quella della retta tangente al grafico della traiettoria.

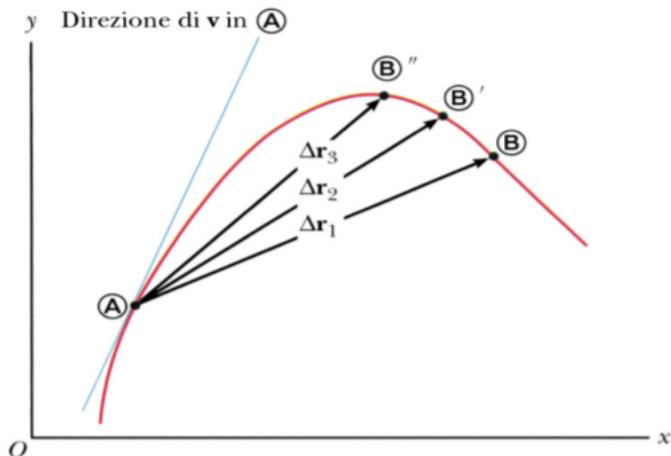


Figura 4.2: Esempio grafico del vettore velocità.

Definiamo il vettore accelerazione media come

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{finale} - \vec{v}_{iniziale}}{\Delta t} \quad (4.5)$$

Segue la definizione di vettore accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} \quad (4.6)$$

Graficamente parlando, il vettore accelerazione media è un vettore che punta verso il centro della traiettoria percorsa nell'intervallo di tempo.

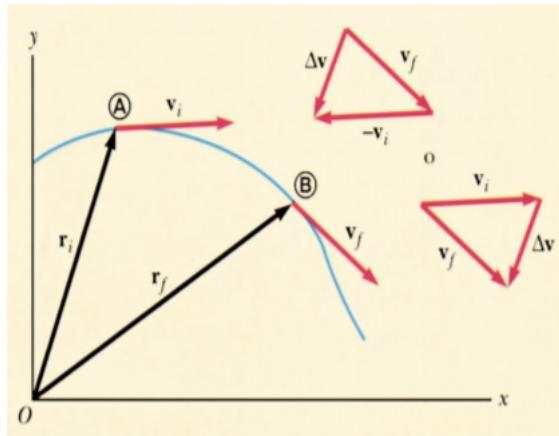


Figura 4.3: Vettore accelerazione

4.3 Moto parabolico e dei proiettili

Il moto parabolico è un particolare moto in due dimensioni in cui la componente v_x in qualsiasi istante è costante (e dunque il corpo è in moto rettilineo uniforme rispetto l'asse x) mentre la componente v_y subisce l'accelerazione della gravità (e dunque il corpo è in moto uniformemente accelerato rispetto l'asse y).

La traiettoria di questo moto è quello di una parabola ed è tipica dei proiettili.

Esso si può visualizzare graficamente

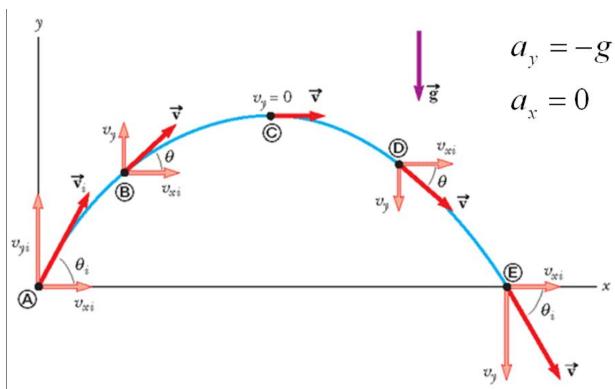


Figura 4.4: Esempio di moto parabolico.

Avremo che le leggi orarie delle due componenti saranno:

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad (4.7)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4.8)$$

dove

$$\text{- } v_{0x} = v_0 \cos \vartheta$$

$$\text{- } v_{0y} = v_0 \sin \vartheta$$

Possiamo ricavare la funzione della traiettoria parabolica sapendo che $t = \frac{x}{v_{0x}}$ dalla 4.7:

$$\begin{aligned} y &= v_0 \sin \vartheta t - \frac{1}{2}gt^2 \\ y &= v_0 \sin \vartheta \frac{x}{v_0 \cos \vartheta} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \vartheta} \end{aligned}$$

Dunque la traiettoria viene descritta dalla seguente funzione

$$y = \tan \vartheta x - g \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 \vartheta} \quad (4.9)$$

Valutando l'equazione per $y = 0$ otteniamo la gittata ossia la distanza percorsa dal punto materiale fino al ritorno alla stessa quota di partenza.

Una delle due soluzioni è 0 che è ovviamente la posizione di partenza, ci interessa l'altra

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} x - g \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 \vartheta} \\ x &= \frac{2v_0^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g} \end{aligned}$$

La gittata sarà perciò

$$x_R = \frac{v_0^2 \sin 2\vartheta}{g} \quad (4.10)$$

Dividendo per 2 x_R si ottiene la distanza della quota massima

$$x_{max} = \frac{x_R}{2} = \frac{v_0 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g}$$

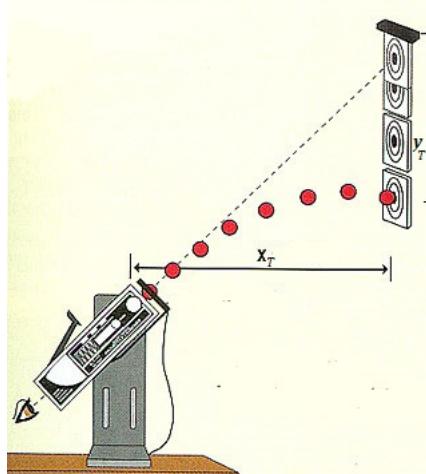
Infine per trovare la quota massima, valutiamo la funzione della traiettoria su x_{max} che ci da

$$y_{max} = x_{max} \tan \vartheta - g \frac{x_{max}^2}{2v_0^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta}{2g}$$

4.3.1 Il proiettile contro il bersaglio fermo

Prendendo un cannoncino e un bersaglio a distanza x_T e ad altezza y_T , se miriamo al bersaglio, spariamo e nello stesso istante facciamo cadere il bersaglio, la pallina colpirà il bersaglio.

Vediamo l'esperimento con un disegno:



Ovviamente la velocità della pallina dovrà essere tale da permettere una gittata maggiore o uguale a x_T .

Possiamo dimostrare il tutto matematicamente:

Sapendo che il bersaglio si trova in posizione iniziale (x_T, y_{0T}) la legge oraria della sua componente verticale è descritta da un moto uniformemente accelerato

$$y_T = y_{0T} - \frac{1}{2}gt^2 = x_T \tan \vartheta - \frac{1}{2}gt^2$$

Il moto della pallina è descritta dall'equazione della parabola e dunque la sua posizione nell'asse verticale sarà

$$y_P = v_0 \sin \vartheta \frac{x_P}{v_0 \cos \vartheta} - \frac{1}{2}gt^2 = x_P \tan \vartheta - \frac{1}{2}gt^2$$

Si nota chiaramente che $x_P = x_T \implies y_P = y_T$.

4.4 Moto circolare

Con moto circolare intendiamo il moto di un punto materiale che segue una traiettoria circolare.

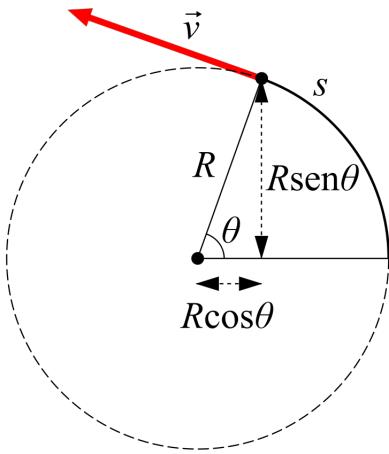


Figura 4.5: Esempio di moto circolare.

4.4.1 Moto circolare uniforme

In questo tipo di moto, il modulo della velocità è uniforme e dunque è costante.

Data una velocità iniziale \vec{v}_i e una finale \vec{v}_f definiamo l'accelerazione centripeta come

$$\Delta \vec{v} = \vec{a}_c = \vec{v}_f - \vec{v}_i \quad (4.11)$$

che è un vettore con direzione radiale, ossia ha come direzione sempre il raggio della circonferenza in ogni punto. Inoltre ha verso verso il centro della circonferenza ed è sempre perpendicolare al vettore velocità.

Il suo modulo è dato da

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (4.12)$$

Un corpo muovendosi lungo la circonferenza, cambia anche angolo, chiameremo velocità angolare il cambiamento dell'angolo ϑ in un determinato intervallo di tempo

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} \quad (4.13)$$

Chiameremo $\vartheta(t)$ la posizione angolare del punto in funzione di t ed in un corpo a velocità costante in moto circolare sarà definito come

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t \quad (4.14)$$

Avremo che la posizione del punto nella circonferenza può esser anche definito tramite coordinate polari usando la posizione angolare

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\vartheta_0 + \omega t) \\y &= r \sin(\vartheta_0 + \omega t)\end{aligned}$$

Definiamo S come lo spazio percorso dal punto materiale e $S(t)$ sraà la funzione di spazio percorso in funzione del tempo

$$S(t) = S_0 + vt \quad (4.15)$$

dove v è la velocità periferica, ossia la velocità di percorrenza della circonferenza. Avremo che la relazione tra spazio percorso e la circonferenza sarà

$$S = r\vartheta \implies \vartheta = \frac{S}{r}$$

Dunque a parità di velocità angolare, un corpo che si muove in una circonferenza con raggio più grande avrà velocità periferica più alta.

Sapendo che $v = \frac{dS}{dt}$ si ottiene

$$\frac{1}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega \implies \frac{v}{r} = \omega \quad (4.16)$$

Chiamamo periodo T il tempo che ci impiega il corpo a compiere un giro nella circonferenza

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

e frequenza ν il numero di giri nell'unità di tempo che ha come unità di misura del SI l'hertz

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (4.17)$$

4.4.2 Moto circolare non uniforme

Nel moto circolare non uniforme il modulo della velocità variabile, abbiamo dunque una nuova grandezza, quella dell'accelerazione tangenziale

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \quad (4.18)$$

Dunque l'accelerazione totale è composta dall'accelerazione centripeta e da quella tangenziale, due vettori ortogonali tra di loro

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C \quad (4.19)$$

Possiamo definire una nuova grandezza, quella dell'accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = \frac{dv}{r dt} = \frac{a_T}{r} \quad (4.20)$$

Un moto curvilineo può esser descritto come insieme di moti circolari uniformi e non come nella seguente figura

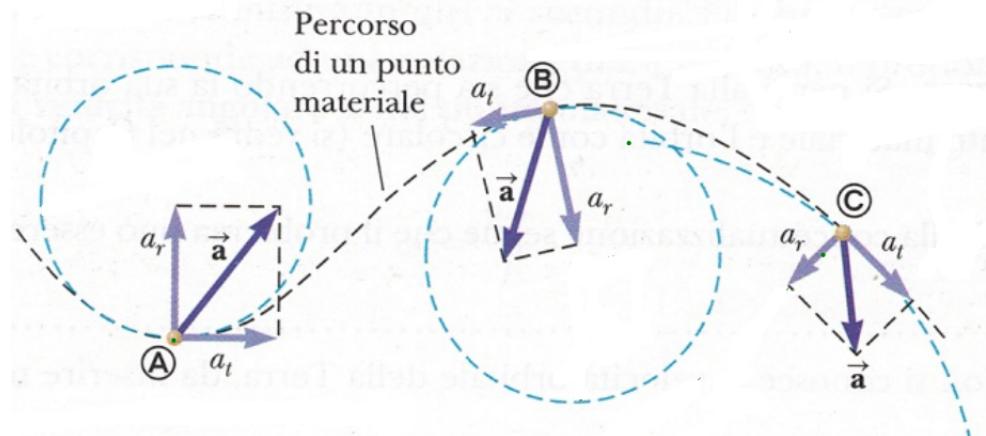


Figura 4.6: Esempio di moto curvilineo

4.5 Esercizi di riepilogo

4.5.1 Esercizio n. 1

Siamo in piedi sul terreno nell'origine del sistema delle coordinate.

Un aeroplano vola sopra di noi mantenendo la sua quota costante a $7.6 \times 10^3 m$ e la sua velocità che è parallela all'asse x è costante.

All'istante $t = 0$ l'aereo si trova proprio sopra la nostra testa così che il vettore posizione che va da noi all'aereo stesso è $\vec{P}_0 = (7.6 \times 10^3 \hat{j} m)$.

A $t = 30 s$ il vettore posizione è $\vec{P}_{30} = (8.04 \times 10^3 \hat{i} m) + (7.6 \times 10^3 \hat{j} m)$.

Si chiede di trovare il modulo e la direzione orientata del vettore posizione dell'aereo all'istante $t = 45 s$.

Poichè dal problema notiamo che l'aereo non ha subito spostamenti nella componente verticale, possiamo andare a calcolare direttamente la velocità media:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8.06 \times 10^3}{30} = 268 \text{ m/s}$$

La velocità dell'aereo è costante dunque l'aereo non subisce accelerazione e possiamo trovare direttamente il vettore posizione all'istante $t = 45 s$:

$$\vec{P}_{45} = (v_x t_{45} \hat{i} + 7600 \hat{j}) m = (1.21 \times 10^4 \hat{i} + 7600 \hat{j}) m$$

Troviamo il modulo tramite il teorema di Pitagora

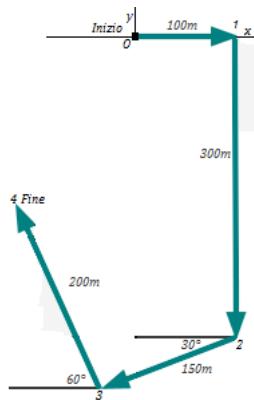
$$P_{45} = \sqrt{P_{45x}^2 + P_{45y}^2} = 1.43 \times 10^4 m$$

Infine calcoliamo l'angolo creato dal vettore per la direzione

$$\vartheta = \arctan \left(\frac{P_{45y}}{P_{45x}} \right) = 32,2^\circ$$

4.5.2 Esercizio n. 2

Una persona che sta facendo una camminata segue il cammino mostrato nella seguente figura:



Si chiede di determinare lo spostamento risultante dal punto di partenza.

Per via della presenza degli angoli, conviene partire dal calcolo del vettore spostamento nell'istante 2 e continuare da lì i calcoli

$$\vec{P}_2 = (100\hat{i} - 300\hat{j})m$$

$$\vec{P}_3 = [(P_{2x} - 150 \cos 30^\circ)\hat{i} + (P_{2y} - 150 \sin 30^\circ)\hat{j}]m = (-29.9\hat{i} - 375\hat{j})m$$

Otteniamo che

$$\Delta \vec{r} = [(P_{3x} - 200 \cos 60^\circ)\hat{i} + (P_{3y} + 200 \sin 60^\circ)\hat{j}]m = (-129.9\hat{i} - 201.8\hat{j})m$$

4.5.3 Esercizio n. 3

(a) Qual è l'accelerazione centripeta dovuta alla terra per un oggetto che si trova all'equatore?

(b) Calcolare l'accelerazione dovuta alla rotazione della Terra per una persona che si trova a latitudine $40^\circ N$.

Sappiamo che il raggio della terra è di 6370 km e che ha un periodo di circa 24 ore.

Poichè la terra va a velocità costante dalla formula inversa del periodo possiamo calcolare la velocità periferica

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 6.37 \cdot 10^6}{24 \cdot 3600} = 463\text{ m/s}$$

Ora possiamo calcolare l'accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{463^2}{6.37 \cdot 10^6} = 0.034\text{ m/s}^2$$

Applicando gli stessi procedimenti proviamo a trovare l'accelerazione a altitudine $40^\circ N$.

Dobbiamo trovare il raggio della terra in quella latitudine: se ci immaginiamo di tagliare la terra a metà notiamo che essa non è altro il raggio all'equatore moltiplicata per il coseno di 40°

$$r_{40} = r \cos 40^\circ = 4880\text{ km}$$

Da ora in poi i passi sono uguali a prima, ma con dati ovviamente diversi

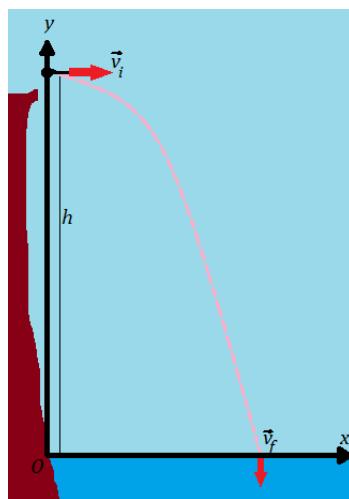
$$\begin{aligned} v_{40} &= \frac{2\pi r_{40}}{T} = 354.7\text{ m/s} \\ a_{c40} &= \frac{v_{40}^2}{r_{40}} = \frac{354.7^2}{4.88 \cdot 10^6} = 0.026\text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

4.5.4 Esercizio n. 4

Uno studente è in piedi alla sommità di una parete e lancia un sasso orizzontalmente oltre il bordo della parete con una velocità $v_i = 18 \text{ m/s}$.

La parete ha un'altezza $h = 50 \text{ m}$ sopra la superficie d'acqua come mostrato nella figura sottostante.

- (a) Quali sono le coordinate della posizione iniziale del sasso?
- (b) Quali sono le componenti della velocità iniziale del sasso?
- (c) Qual è il modello di analisi appropriato per il moto verticale del sasso?
- (d) Qual è il modello di analisi appropriato per il moto orizzontale del sasso?
- (e) Si scrivano le equazioni per le componenti x e y della velocità del sasso in funzione del tempo.
- (f) Si scrivano le equazioni per la posizione del sasso in funzione del tempo.
- (g) Dopo quanto tempo dal momento del lancio il sasso finisce in acqua?
- (h) Con quale modulo della velocità e con quale angolo il sasso cade in acqua?



(a) Considerata la figura che ci fornisce il sistema di riferimento, la posizione iniziale del sasso è $(0; 50)$.

(b) Per i componenti iniziali scriviamo la velocità iniziale con la notazione dei versori

$$\vec{v}_i = (18\hat{i} + 0\hat{j}) \text{ m/s}$$

(c) e (d) Considerata la traiettoria parabolica del sasso, il modello appropriato per il moto verticale sarà quello del moto uniformemente accelerato, mentre per il moto orizzontale il modello da seguire è quello del moto rettilineo uniforme.

(e) Dunque le equazioni della velocità delle due componenti in funzione del

tempo saranno

$$\begin{aligned} v_x(t) &= 18 \text{ (m/s)} \\ v_y(t) &= -gt \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

(f) Le leggi orarie saranno invece

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x t = 18t \\ y(t) &= y_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 50 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

(g) Per trovare dopo quanto tempo il sasso finisce in acqua basta risolvere $y(t) = 0$

$$0 = 50 - \frac{1}{2}gt^2$$

Che risolta per t ci da due soluzioni: ci interessa solo la soluzione positiva in quanto il tempo negativo (cosa è successo prima del lancio) non ci interessa

$$t^2 = \frac{100}{g} \implies t = \sqrt{\frac{50}{9.8}} = 3.2 \text{ s}$$

(h) Adesso per trovare il modulo della velocità finale usiamo il teorema di Pitagora. Calcoliamo prima il suo componente y in quanto l'altra ha velocità costante

$$v_y(3.2) = -g(3.2) = -31.3 \text{ m/s}$$

Calcoliamo il modulo

$$v_f = \sqrt{18^2 + (-31.3)^2} = 36.1 \text{ m/s}$$

e infine troviamo l'angolo usando l'arcotangente

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{v_{fy}}{v_{fx}}\right) = -60^\circ$$

Capitolo 5

I principi della dinamica

5.1 La dinamica

Mentre con la cinematica ci occupavamo dello studio del moto di un corpo, con la dinamica invece studiamo e investighiamo le cause del moto.

I corpi si muovono per effetto delle interazioni tra sistemi fisici: la grandezza che la esprimerà sarà la **forza**.

La dinamica (intesa nella meccanica classica) si basa su tre principi (o leggi) enunciati da Isaac Newton che descrivono le relazioni tra il moto di un corpo e gli enti che lo modificano.

5.2 Il primo principio della dinamica: il principio di inerzia

Il primo principio afferma che:

Un corpo mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se su di esso non agisce alcuna forza esterna.

Come si nota, esso non è una definizione di cos'è una forza, ma delle sue conseguenze.

Inoltre bisogna stare attenti alla definizione: assenza di forze **non implica** che non ci sia moto, ma **implica** assenza di *accelerazione*.

Il principio di inerzia è valido in particolari classi di sistemi di riferimento, quelli inerziali.

Con inerzia intendiamo la tendenza di un corpo ad opporsi ad una variazione del moto, mentre con sistema inerziale un qualsiasi sistema di riferimento che si muove a velocità costante e dunque con accelerazione nulla.

Inoltre se un sistema è inerziale, qualsiasi altro sistema che si muove a velocità costante rispetto ad esso è inerziale.

Infine nei sistemi di riferimento inerziali danno tutti gli osservatori la stessa descrizione della dinamica dei corpi.

La domanda che è naturale porsi è: la Terra è un sistema di riferimento inerziale? Se dobbiamo essere pedantici, no in quanto essa girà su se stessa e si ha l'effetto dell'accelerazione centripeta che è diversa per ogni latitudine e in aggiunta la forza di gravità non è uniforme.

Però si è visto nell'esercizio nella sezione 4.5.3 che l'accelerazione centripeta è solo 1/300 della gravità e dunque possiamo considerare la terra un sistema di riferimento inerziale per accelerazioni comparabili a g .

5.3 Il secondo principio della dinamica

Il secondo principio della dinamica enuncia

Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza applicata, e avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza stessa è esercitata.

Pertanto, esso afferma che

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (5.1)$$

Dove m è la massa inerziale ossia la resistenza del corpo a variare il suo stato di moto.

Rispetto al primo principio, la legge ci da una formulazione quantitativa della relazione tra forza e accelerazione.

L'unità di misura della forza nel SI è il *Newton* (indicata con la lettera N) che equivale a $1 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}^2$, in quanto le unità di misura in gioco sono

$$[F] = [M] \cdot [L] \cdot [T^{-2}]$$

Possiamo interpretare la seconda legge in termini di leggi orarie in quanto

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad (5.2)$$

Chiameremo questo tipo di interpretazione *equazione del moto*. Si nota come integrando due volte dalla 5.2 ci si riconduce alla legge oraria.

Il secondo principio ha dei limiti di validità:

- Sistemi di riferimento inerziali.
- Velocità piccole rispetto alla luce (si usa la relatività di Einstein per velocità prossime a c).
- Masse di ordine di grandezza superiori delle particelle (per le particelle vale la meccanica quantistica).

5.3.1 Differenza tra massa e peso

La massa (inerziale) è una proprietà intrinseca della materia che misura l'inerzia di un corpo, ovvero la resistenza che esso oppone alla variazione del suo stato di moto ed una quantità **scalare**.

Il peso è invece è una **forza** ed è dunque è una quantità **vettoriale**: è la forza esercitata dalla gravità sui corpi nella sua superficie, i.e.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Appaiono evidenti due cose

1. Il peso dipende dall'attrazione gravitazionale e varia con l'altezza e la latitudine.
2. In assenza di gravità il corpo non ha peso, ma mantiene la sua massa.

Nel linguaggio comune i due concetti vengono confusi in quanto le bilance che misurano il peso sono tarate in Kg.

5.4 Forze fondamentali e forze di contatto e di campo

Nella seguente tabella possiamo osservare le 4 forze fondamentali nell'universo ordinate in base alla loro intensità relativa alla forza forte:

Interazione	Intensità relativa	Raggio di azione	Vettore
forte	1	10^{-11} m	gluoni
elettromagnetica	10^{-2}	∞	fotoni
debole	10^{-13}	10^{-13}	bosoni
gravitazionale	10^{-39}	∞	gravitonni

Abbiamo poi una distinzione delle forze in due categorie:

- *Forze di contatto*: forze che si esercitano attraverso il contatto fisico tra due oggetti.
- *Forze di campo*: forze che si esercitano sullo spazio vuoto senza contatto.

In realtà a livello atomico tutte le forze di contatto sono dovute alla forza elettromagnetica che è una forza di campo e la distinzione rimane soltanto perché è utile nella meccanica classica.

5.5 Il terzo principio della dinamica

L'enunciato del terzo principio è:

Se un corpo A agisce con forza su un corpo B, il corpo B reagisce su A con una forza che ha la stessa intensità e direzione, ma verso opposto. Ovvero ad ogni reazione corrisponde una reazione uguale e contraria.

Ossia

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (5.3)$$

Il terzo principio ci dice che in natura *non esistono forze isolate*, ma esse si manifestano in coppia tramite interazioni tra sistemi fisici. I due membri della coppia agiscono sempre su corpi diversi, **non** si combinano in una forza risultante e **non** si escludono a vicenda.

Vediamo un esempio di azione/reazione nella vita quotidiana: supponiamo di avere un oggetto per terra come nella seguente figura.

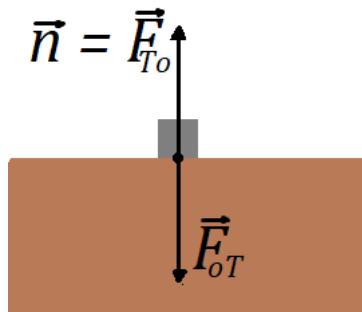


Figura 5.1: Azione e reazione tra oggetto e tavolo

Abbiamo l'azione data dalla forza oggetto-Terra \vec{F}_{oT} (in questo caso è la forza peso) che sposta in giù il nostro oggetto e poi la reazione che è la forza Terra-oggetto \vec{F}_{To} .

La reazione in questo caso specifico è la *forza normale*. Cos'è?

La forza normale è quella forza perpendicolare alla superficie che è in contatto con l'oggetto e non lo fa sprofondare verso il centro della terra. Infatti l'oggetto resta fermo e dunque dalla secondo principio della dinamica abbiamo che

$$\begin{aligned} n - mg &= 0 \\ n &= mg \end{aligned}$$

Abbiamo usato il modulo in quanto scegliamo un sistema di riferimento basato solo sull'asse verticale.

Senza il principio di azione-reazione non riusciremmo a spostarci: se mentre facciamo un passo non avessimo la reazione della superficie che ci sposta in

avanti, rimarremmo fermi nello stesso punto.

L'effetto dato dalle forze di azione e reazione può essere notevolmente diverso. Pensiamo di avere una mela di 100 grammi che cade verso la terra. Abbiamo la forza peso della mela \vec{F}_{tm} e la sua reazione \vec{F}_{mt} . Sappiamo che l'accelerazione della mela è g e dunque possiamo trovare i moduli delle due forze (si assume la direzione delle due forze sia in uno degli assi del nostro sistema di riferimento)

$$F_{tm} = F_{mt} = mg \approx 1 N$$

Adesso calcoliamo l'accelerazione della terra verso la mela

$$a_t = \frac{F_{mt}}{m_t} = \frac{1 N}{5.9 \cdot 10^{24} Kg} = 1.7 \cdot 10^{-25} m/s^2$$

piuttosto esplicativa.

5.6 Quantità di moto

La quantità di moto è una grandezza vettoriale definita come il prodotto della massa di un oggetto per la sua velocità, i.e.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (5.4)$$

Questa grandezza ci permette di scrivere la seconda legge in questo modo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5.5)$$

dove \vec{F} è la risultante delle forze.

Ciò ci da l'occasione di generalizzare il secondo principio per oggetti con massa variabile nel tempo, questo perchè

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5.6)$$

Notiamo come $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{ma}$.

5.7 Conservazione della quantità di moto e l'impulso

Se la risultante delle forze \vec{F} è nulla, avremo che

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (5.7)$$

Questo vuol dire che se non abbiamo forze che agiscono su un corpo o esse sono in equilibrio tra di loro, allora la quantità di moto del corpo non cambia.

Questo prende nome di **principio di conservazione della quantità di moto**.

Riprendendo l'equazione 5.5 possiamo spostare il termine dt a sinistra per ottenere

$$\vec{F}dt = d\vec{p} \quad (5.8)$$

Possiamo dunque dire che l'azione di una forza in un intervallo infinitesimo di tempo provoca un'infinitesima variazione della quantità di moto: chiameremo **impulso** \vec{I} il seguente risultato.

Matematicamente esprimiamo ciò con la risoluzione dell'equazione differenziale 5.8

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}dt = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} \quad (5.9)$$

L'impulso di una forza applicata in un intervallo di tempo ad un punto materiale non è altro che la variazione di quantità di moto del punto nell'intervallo di tempo.

5.8 Analisi dei sistemi fisici tramite i principi della dinamica

Prima di partire è doveroso precisare che durante l'analisi si effettueranno diverse idealizzazioni per renderci più semplici la vita. Elenchiamole:

- a. I fili saranno inestensibili (evitiamo accelerazioni diverse) e non avranno massa (in modo tale da non esercitare forza).
- b. Le carrucole non avranno massa ed attrito e serviranno solo per cambiare direzione alla forza.
- c. In un primo momento non consideriamo l'attrito.

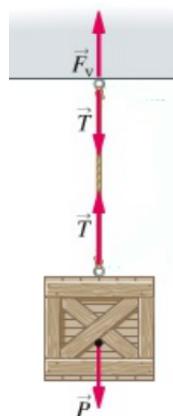
Detto ciò, al lato pratico, per l'analisi tramite i principi della dinamica seguiremo questi tre passi:

1. Definiamo un sistema di coordinate.
2. Disegniamo un diagramma di corpo libero, ossia uno schema del corpo considerato, su cui sono disegnate delle frecce che rappresentano le forze ad esso applicate.
3. Applichiamo la seconda legge di Newton (o il secondo principio, son sinonimi) e scriviamo l'equazione del moto.

Vediamo 4 esempi che illustrano le parole scritte fino ad ora.

5.8.1 Esempio n. 1: cassa appesa ad un filo in un soffitto

Abbiamo la seguente cassa appesa ad un filo al soffitto in equilibrio, vogliamo determinare la tensione \vec{T} del filo.

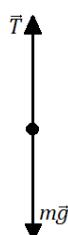


Passo n.1: il sistema di coordinate.

Avendo solo vettori che si muovono in verticale, pare ovvia la scelta di un sistema di coordinate con solo l'asse y . Il verso concorde sarà in alto.

Passo n.2: il diagramma di corpo libero.

Ci interessa soltanto le forze nella cassa e perciò disegniamo il diagramma di corpo libero



Passo n.3: applicazione della seconda legge di Newton.

Il corpo è in equilibrio e dunque non sta subendo accelerazione. Applichiamo la seconda legge di Newton

$$\sum_i \vec{F}_i = T - mg = 0$$

Usiamo il modulo in quanto la direzione delle forze è la stessa.

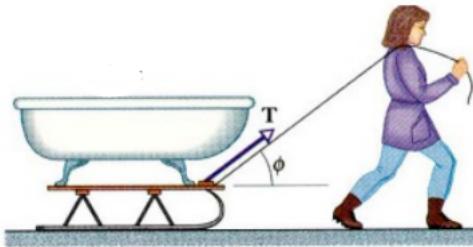
Il modulo di \vec{T} è positivo in quanto il suo verso è concorde al sistema di riferimento, mentre il modulo di forza peso è negativo in quanto ha invece verso discorde. Da ciò risulta

$$T = mg$$

ossia la tensione del filo equivale alla forza peso.

5.8.2 Esempio n. 2: il traino di una slitta

Abbiamo la seguente figura che mostra una persona trainare una slitta, vogliamo determinare l'accelerazione orizzontale rispetto alla tensione \vec{T} del filo e la relazione tra la forza normale e le restanti

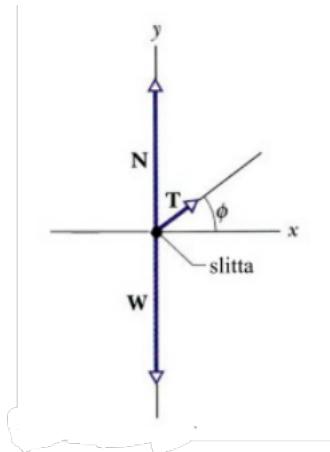


Passo n.1: il sistema di coordinate.

In questo caso usiamo un sistema di coordinate a due assi centrato sul corpo, in cui l'asse x ha verso a destra e l'asse y ha verso in su.

Passo n.2: il diagramma di corpo libero.

Mostriamo tutte le forze in tutte le direzioni in questo caso.
Denotiamo con \vec{W} la forza peso.



Passo n.3: applicazione della seconda legge di Newton.

In questo caso ci dividiamo nelle de direzioni degli assi.

Direzione x

In questo caso nella direzione x viene applicata un'unica forza, ovvero la componente x di \vec{T} . Il corpo sta subendo un movimento e perciò

$$T_x = ma_x$$

Avremo dunque che

$$a_x = \frac{T \cos \phi}{m}$$

Dove $T \cos \phi$ è la componente T_x .

Direzione y

Nella direzione y il corpo è in equilibrio. Avremo 3 forze che si applicano al corpo: la forza normale, la componente verticale della tensione del filo e dalla forza peso. Dunque dalla seconda legge di Newton abbiamo che

$$N + ty - W = 0$$

e dunque

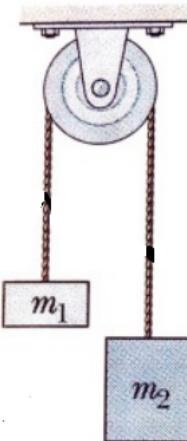
$$N = mg - T \sin \phi$$

Questo ci dice che la forza normale è minore della forza peso in quanto stiamo "sollevando" la massa da terra tramite il filo.

5.8.3 Esempio n. 3: la macchina di Atwool

La figura seguente mostra la macchina di Atwool, qui abbiamo due masse attaccate ad una carrucola verticale. La massa m_1 è minore della massa m_2 e se lasciate libere m_1 si sposterà su mentre m_2 in giù.

Ci interessa sapere la relazione tra accelerazione e gravità in funzione delle masse.

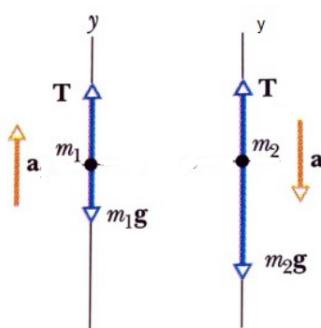


Passo n.1: il sistema di coordinate.

Vista la natura delle forze in gioco, usiamo un sistema con solo l'asse y con verso concorde in alto.

Passo n.2: il diagramma di corpo libero.

In questo caso abbiamo bisogno di due diagrammi di corpo libero in quanto abbiamo due punti materiali.



Passo n.3: applicazione della seconda legge di Newton.

Per la massa m_1 vengono applicate due forze, una è la forza peso e una è la tensione del filo.

Il corpo inoltre sta subendo un'accelerazione, dunque

$$T - m_1 g = m_1 a$$

Stessa cosa per la massa m_2 , soltanto che in questo caso l'accelerazione è discorde al verso del sistema (questo per colpa della carrucola) e avremo che

$$T - m_2g = -m_2a$$

La tensione del filo non ci interessa in quest'analisi e dobbiamo "eliminarlo". Sapendo che

$$T = m_1a + m_1g$$

Possiamo sostituirlo nell'equazione di moto di m_2 e otteniamo

$$\begin{aligned} m_1a + m_1g - m_2g &= -m_2a \\ m_1a + m_2a &= m_2g - m_1g \\ a(m_1 + m_2) &= g(m_2 - m_1) \\ \implies a &= g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

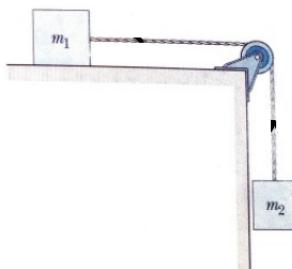
Abbiamo che l'accelerazione dei corpi è inferiore a quella di gravità. Infatti la macchina di Atwool è un "riduttore" di gravità, ossia limita apparentemente gli effetti di essa e ne riduce la sua accelerazione.

Inoltre se $m_2 \approx m_1$ l'effetto si nota di più.

Questa macchina al tempo permetteva di calcolare la forza di gravità in quanto essa veniva visualizzata tramite una scala graduata e tarata appositamente.

5.8.4 Esempio n. 4: carrucola cambia-direzione

Abbiamo due masse attaccate tra di loro tramite un filo che cambia direzione (da orizzontale a verticale) tramite una carrucola. Entrambi i corpi subiscono un'accelerazione e ci interessa sapere il rapporto di essa con la forza di gravità in funzione della massa.

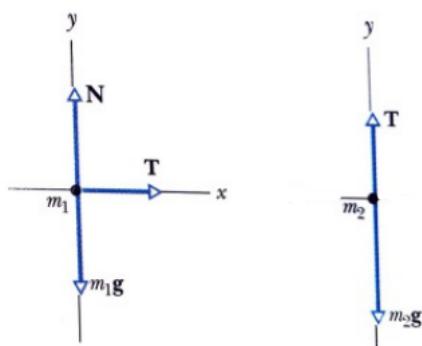


Passo n.1: il sistema di coordinate.

Abbiamo forze che vengono applicate in entrambe le direzioni per la massa m_1 e solo verticalmente per la massa m_2 dunque usiamo due sistemi di coordinate diverse per entrambi i corpi: con entrambi gli assi per il primo corpo e solo con l'asse y per il secondo corpo.

Passo n.2: il diagramma di corpo libero.

Abbiamo due diagrammi di corpo libero con diversi sistemi di coordinate in questo caso



Qui ci dobbiamo ricordare della forza normale data dalla superficie.

Passo n.3: applicazione della seconda legge di Newton.

Nel primo corpo nella direzione y le uniche forze presenti sono la forza peso e la forza normale e il corpo è in equilibrio perciò avremo che

$$N - m_1 g = 0$$

Nella direzione x il corpo subisce la forza della tensione del filo nel vero concorde all'asse e si ha un'accelerazione, in questo caso avremo che

$$T = m_1 a$$

Il secondo corpo riceve solo due forze nell'asse y , la forza della tensione del filo e la forza peso. Inoltre subisce un'accelerazione disconcreta. Si ha dunque

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

Dall'equazione di moto della direzione x della prima massa possiamo trovare la relazione tra accelerazione e gravità

$$\begin{aligned} m_1 a - m_2 g &= -m_2 a \\ (m_1 + m_2) a &= m_2 g \\ \implies a &= g \frac{m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Anch'esso questo sistema dunque è un riduttore di gravità che è più evidente quanto più è alta la massa m_1 .

5.9 Esercizio di riepilogo

Tre blocchi sono collegati come mostrato nella figura sotto e trascinati su un piano orizzontale privo di attrito da una forza $T_3 = 6.5 N$.

Inoltre le masse saranno $m_1 = 1.2 Kg$, $m_2 = 2.4 Kg$ e $m_3 = 3.1 Kg$. Si chiede di calcolare:

- (a) L'accelerazione del sistema.
- (b) Le tensioni T_1 e T_2

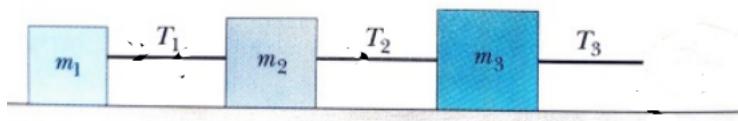
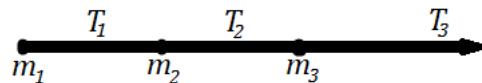


Figura 5.2: Le masse trainate.

Pare ovvio di scegliere un sistema con solo l'asse x . Disegniamo il diagramma dei corpi liberi



Sappiamo che il filo sta trascinando le tre masse e dunque applica una forza a tutte e 3, da questo ricaviamo l'accelerazione dell'intero sistema

$$\begin{aligned} T_3 &= (m_1 + m_2 + m_3)a \\ a &= \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0.97 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Sapendo adesso l'accelerazione, troviamo la tensione T_1 applicando alla lettera la seconda legge di Newton

$$T_1 = m_1 a = 1.2 \cdot 0.97 = 1.2 N$$

Per calcolare T_2 possiamo seguire la stessa strada che abbiamo usato per T_3 e considerare T_2 la tensione che traina sia m_1 che m_2

$$T_2 = (m_1 + m_2)a = (3.6) \cdot 0.97 = 3.5 N$$

Oppure considerare solo la massa m_2 e considerare come forze T_2 e la reazione di T_1 (i.e. $T_2 - T_1 = m_2 a$)

$$T_2 = T_1 + m_2 a = 1.2 + (2.4 \cdot 0.97) = 3.5 N$$

Capitolo 6

Applicazione dei principi della dinamica

6.1 Il piano inclinato

Caso noto e particolare dello studio della dinamica è quello dei corpi nei piani inclinati.

A differenza dei piani orizzontali, la forza peso gioca un ruolo fondamentale nell'accelerazione del corpo.

Generalmente un corpo su un piano inclinato viene idealizzato come nella seguente figura:

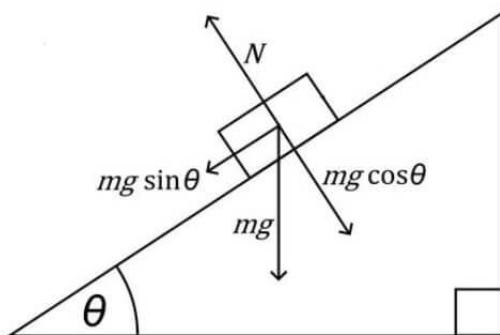


Figura 6.1: Corpo in piano inclinato

Usiamo un sistema di riferimento allineato col piano in modo tale da renderci più semplici i calcoli. Questo vorrà dire che la forza peso non sarà più ortogonale a uno dei due assi e dovremo scomporla nei suoi due componenti. Analizziamo le forze che agiscono sul corpo nelle due direzioni.

Direzione y

Nella direzione y (perpendicolare alla superficie del piano) abbiamo che il corpo non subisce accelerazione, dunque dalla seconda legge di Newton avremo che

$$\begin{aligned} N - mg \cos \vartheta &= 0 \\ N &= mg \cos \vartheta \end{aligned} \tag{6.1}$$

Questo ci dice due cose sulla forza normale:

1. Non è verticale (rispetto alla terra e non al sistema di riferimento).
2. È minore della forza peso.

Direzione x Nella direzione x agisce solo una componente della forza peso (in questo primo momento, poi verrà aggiunto l'attrito), inoltre sappiamo che il corpo subisce un'accelerazione.

Quindi avremo che

$$\begin{aligned} mg \sin \vartheta &= ma \\ g \sin \vartheta &= a \end{aligned} \tag{6.2}$$

La gravità viene moltiplicata per il seno che è sempre minore o uguale a 1, dunque l'accelerazione del corpo sarà minore di essa.

Questo ci dice che il piano inclinato è un riduttore di gravità.

6.2 L'attrito

L'attrito è una forza che si oppone sempre al moto ed è parallela alla superficie di appoggio.

È dovuta a saldature "a freddo" che si formano a livello microscopico causa delle asperità delle superfici a contatto.

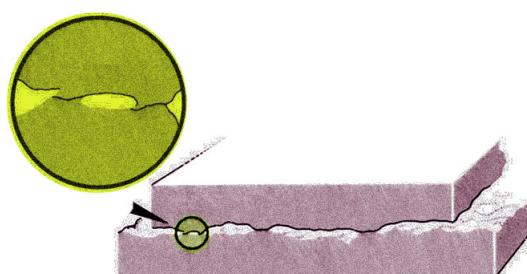


Figura 6.2: L'attrito visto graficamente.

Non è corretto parlare di solo attrito, ma si deve differenziare in due categorie.

6.2.1 Attrito statico

L'attrito statico f_s è l'attrito presente quando ad un corpo fermo viene applicata una forza e ne impedisce il suo movimento.

Questa forza ha un valore massimo f_{smax} per cui ogni forza con modulo più piccola di essa non riesce a spostare l'oggetto. Non appena si supera questa soglia parte il moto e si passa all'attrito dinamico.

L'intensità dell'attrito statico è proporzionale alla forza applicata (fino alla soglia) e avremo che

$$f_s \leq f_{smax} = \mu_s N \quad (6.3)$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito che è un numero adimensionale.

Vediamo graficamente come si comporta l'attrito statico

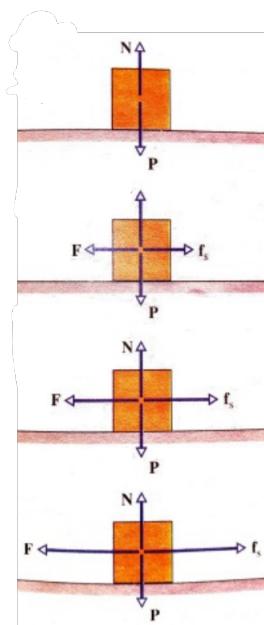


Figura 6.3: In tutti i casi la forza applicata è minore di f_{smax} e notiamo come $f_s = -F$

6.2.2 Attrito dinamico

Superata la soglia di attrito statico il corpo inizia ad accelerare nel verso della forza e si passa in regime di attrito dinamico e ad opporsi alla forza applicata sarà f_k che è equivalente

$$f_k = \mu_k N \quad (6.4)$$

dove μ_k è il coefficiente di attrito dinamico.

f_k come f_s è parallela alla superficie, contraria al verso della forza, ma a

differenza dell'attrito statico, è sempre costante finchè il corpo è in velocità. Inoltre f_k è sempre più piccolo di f_{smax}

Quando la forza applicata è uguale all'attrito dinamico (dunque risultante delle forze nulla) avremo che il corpo sarà in moto rettilineo uniforme. Vediamo graficamente l'effetto dell'attrito dinamico

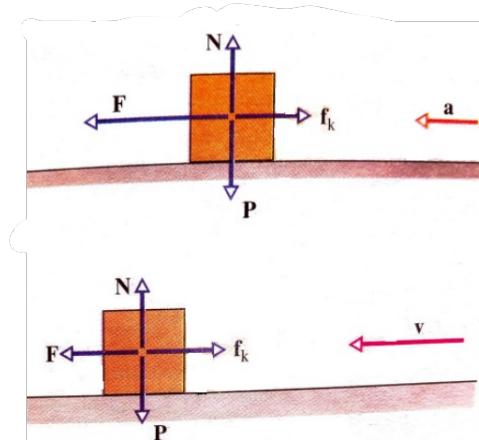
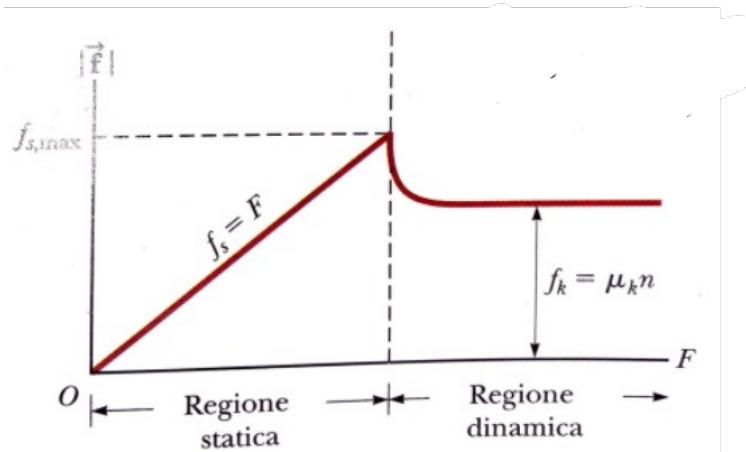


Figura 6.4: Quando la forza è superiore all'attrito dinamico siamo in accelerazione, quando le due forze si equivalgono invece siamo a velocità costante.

Riepilogando, possiamo generalizzare il modulo dell'attrito in generale in funzione della forza applicata e disegnare un grafico



Notiamo come in una prima parte l'attrito è proporzionale alla forza: lì è presente l'attrito statico che è uguale ad essa. Superata la forza di attrito statica massima passiamo alla forza di attrito dinamica che è costante. Concludiamo dicendo che i coefficienti di attrito **non** dipendono dall'area delle superfici di contatto, ma dai materiali a contatto.

6.2.3 Determinare sperimentalmente i coefficienti di attrito

Per determinare i coefficienti di attrito dei vari materiali facciamo uso dei piani inclinati. Calcoliamo prima il coefficiente di attrito statico.

Supponiamo di avere un corpo in un piano inclinato e che l'inclinazione sia la massima possibile per cui il corpo resti fermo (chiameremo questo angolo ϑ_s). Ciò significa che l'attrito statico sarà quello massimo in quanto se avessima un'inclinazione anche minuscola la componente della forza peso parallela al piano vincerà sulla forza di attrito

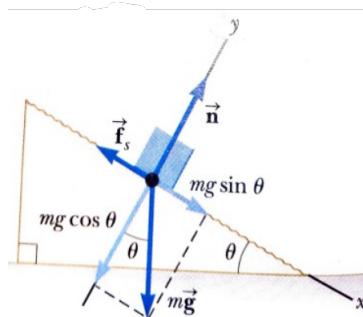


Figura 6.5: Il corpo è fermo e il nostro sistema di riferimento è in linea con il piano

Per la direzione x avremo che

$$mg \sin \vartheta_s - f_{smax} = 0 \implies f_{smax} = mg \sin \vartheta_s$$

Invece per la direzione y

$$n - mg \cos \vartheta_s = 0 \implies n = mg \cos \vartheta_s$$

Sapendo che $f_{smax} = \mu_s n = \mu_s mg \cos \vartheta$ possiamo sostituire e otteniamo

$$\mu_s mg \cos \vartheta_s = mg \sin \vartheta_s \implies \mu_s = \tan \vartheta_s \quad (6.5)$$

Notiamo come il coefficiente d'attrito non dipende da fattori come peso e area di contatto.

Adesso calcoliamo il coefficiente di attrito dinamico.

Supponiamo invece che il corpo in figura 6.5 sia a velocità costante (f_s in figura diventa f_k) e che la pendenza sia massima per cui il corpo non è in accelerazione (ossia la risultante tra attrito e componente della forza peso è nulla; chiameremo l'angolo ϑ_k).

Per la direzione x avremo che

$$mg \sin \vartheta_k - f_k = 0 \implies f_k = mg \sin \vartheta_k$$

E per la direzione y

$$n - mg \cos \vartheta_k = 0 \implies n = mg \cos \vartheta_k$$

Come per l'attrito dinamico avremo che

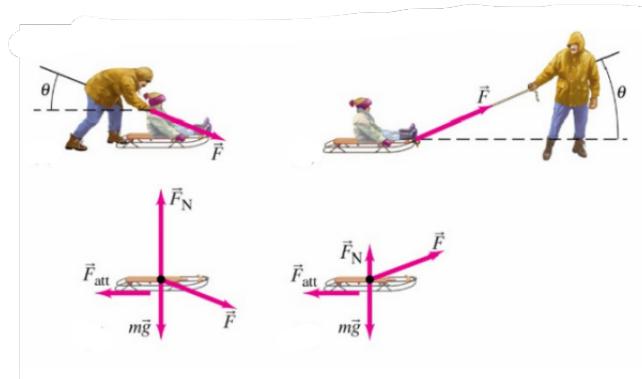
$$\mu_k = \tan \vartheta_k \quad (6.6)$$

Ovviamente tocca specificare che $\vartheta_s \neq \vartheta_k$.

Se fossero uguali non varrebbe il calcolo del coefficiente di attrito statico in quanto $f_k < f_{smax}$ sempre. Se i due angoli fossero uguali allora il corpo non sarebbe in velocità costante in quanto la componente della forza peso sarebbe superiore a f_k .

6.2.4 Conviene più spingere o tirare?

Supponiamo di dover spostare un oggetto più basso di noi. È meglio spingere o tirare? Per facilitarci nella visualizzazione, immaginiamo di dover spostare una slitta, idealizziamo le due situazioni e disegniamo il diagramma di corpo libero



In entrambe le situazioni il corpo sta accelerando nella direzione x ed è fermo nella direzione y . Quando spingiamo avremo che

$$N = mg + F \sin \vartheta$$

questo perchè la forza va verso il basso e dunque il modulo della forza normale comprende anche la componente verticale della forza. Quando tiriamo invece la forza va verso l'alto e dunque la forza normale non è uguale alla forza peso ossia

$$N = mg - F \sin \vartheta$$

Poichè il corpo sta accelerando abbiamo attrito dinamico e abbiamo che $f_k = \mu_k N$. Ciò significa che quando tiriamo l'attrito è minore in quanto la forza normale è "più debole" rispetto a quando spingiamo.

Queste considerazioni non valgono ovviamente se spingiamo o tiriamo in verso parallelo alla superficie: in quel caso il vettore forza sarebbe uguale in entrambi casi e non avremmo differenze per quanto riguarda l'attrito.

6.3 Il moto armonico

Il moto armonico è un particolare tipo di moto unidimensionale a prescindere se è compiuto nello spazio. È un moto di tipo oscillatorio (ossia un corpo che viaggia in una linea tra due estremi equidistanti da un punto detto di equilibrio) in cui la forza agente sul punto materiale è proporzionale allo spostamento, ma ha verso opposto. L'equazione del moto armonico è definita come

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (6.7)$$

la cui soluzione è data da

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (6.8)$$

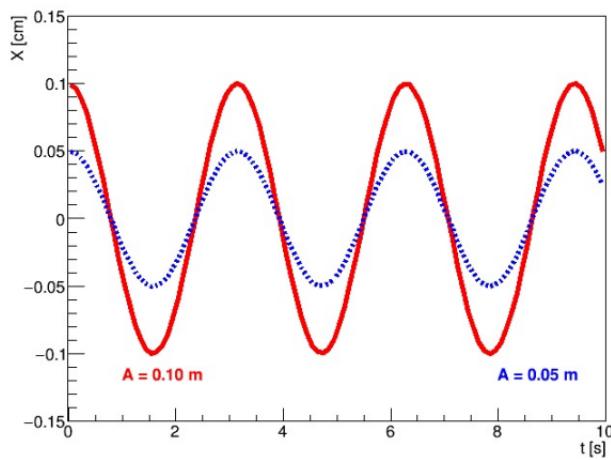
dove:

- A : è l'ampiezza massima dell'oscillazione.
- ϕ : è la fase iniziale ossia è la frazione di periodo trascorsa rispetto ad un tempo fissato (con l'ampiezza forma la coppia delle condizioni iniziali del sistema) ed è misurato in radianti.
- ω : è la pulsazione ossia la velocità con cui viene effettuata l'oscillazione completa ed è misurato in rad/s .

Avremo che $-\omega^2$ è la forza di richiamo che riporta al punto di equilibrio il corpo.

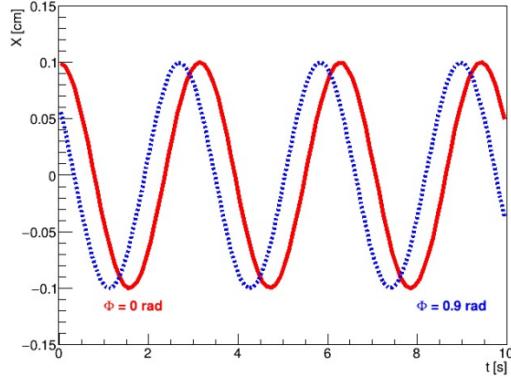
Visualizziamo cos'è l'ampiezza: supponiamo di avere un moto con ampiezza di 10 cm e uno di 5 cm con il resto uguale.

Disegnando il diagramma delle leggi oraria otteniamo:



L'ampiezza ci dice in pratica la distanza tra gli estremi del moto.

Vediamo invece la fase. Supponiamo di avere anche qui due moti che differiscono solo per la fase: uno avrà fase di 0 radianti e l'altro di 0.9 radianti. Vediamo cosa esce fuori:



La fase ci dice di quanto è in avanti il corpo rispetto all'estremo di partenza. Possiamo dimostrare matematicamente che la soluzione è valida matematicamente derivandola due volte

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\v(t) &= \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \\a(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)\end{aligned}$$

Chiameremo periodo T il tempo necessario per percorrere un'oscillazione e avremo che

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.9)$$

Più è grande la pulsazione più il periodo sarà piccolo e notiamo per virtù della periodicità della funzione coseno che aggiungendo il periodo al tempo t il corpo si ritroverà nella stessa posizione, infatti

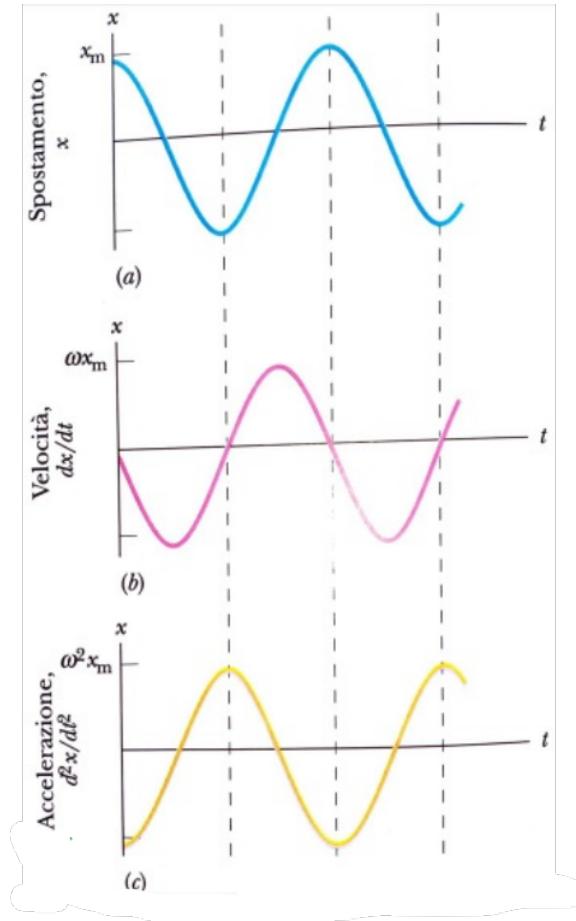
$$\begin{aligned}x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) &= A \cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right) = \\&= A \cos(\omega t + 2\pi + \phi) = \\&= A \cos(\omega t + \phi) = \\&= x(t)\end{aligned}$$

Chiameremo frequenza il numero dei periodi compiuti nell'unità di tempo, i.e.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

e nel SI ha come unità di misura l'hertz.

Vediamo la relazione tra spostamento, velocità ed accelerazione nel moto armonico:



Notiamo che nei punti di equilibrio la velocità è massima e l'accelerazione è nulla, mentre nei punti estremi la velocità è nulla mentre l'accelerazione è massima (in termini di modulo). Partendo dal punto massimo (positivo per facilitarci l'immaginazione) il corpo inizialmente non ha velocità ed ha accelerazione negativa poiché il verso di percorrenza sarà opposto al sistema di riferimento.

Successivamente il corpo guadagna velocità (negativa in verso) fino al punto di equilibrio: da questo momento in poi l'accelerazione cambia verso (il corpo vuole tornare al punto di equilibrio) e fermerà la velocità fino all'altro estremo. Da lì la velocità è positiva in quanto il movimento è concorde al sistema di riferimento.

L'accelerazione però diminuisce e al punto di equilibrio ritorna negativa frenando nuovamente il corpo. La velocità dunque si abbassa fino a ritornare al punto di partenza.

6.3.1 Relazione tra moto circolare e moto armonico

Immaginiamo di avere un punto materiale P che si muove di moto circolare uniforme in una circonferenza di raggio A con velocità angolare ω e posizione iniziale nella circonferenza per cui il suo angolo è ϕ .

Se ci interessa la proiezione sull'asse x del raggio che dall'origine va a P in un istante t possiamo scrivere la legge oraria che potremo scrivere come

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

che non a caso è la soluzione dell'equazione del moto armonico. Infatti il moto armonico è il moto della proiezione sull'asse x di un punto P che ha moto circolare uniforme.

6.4 La forza elastica e la legge di Hooke

L'elasticità di un corpo è la proprietà di un corpo deformato di riprendere la propria forma originale dopo che sono stati deformati da una forza esterna. I corpi elastici sono dotati della forza elastica ossia quella forza che si oppone alla deformazione e tende a ripristinare la forza iniziale.

Caso particolare è quello della molla la cui forza elastica è direttamente proporzionale alla deformazione, i.e.

$$F = -kx \quad (6.10)$$

dove

- k : è il coefficiente di rigidità della molla espresso in N/m .
- x : è la deformazione della molla espressa in m .

Questa viene chiamata *Legge di Hooke*. Per determinare il coefficiente di una molla la si tiene sospesa in alto e si misura inizialmente la sua lunghezza a riposo. Poi viene attaccata una massa e si misura la deformazione ottenuta. Supponendo di avere un sistema di riferimento verticale con verso concorde in su, poiché il corpo rimane fermo allora

$$\begin{aligned} F_e - mg &= 0 \\ F_e &= mg \end{aligned}$$

Abbiamo che $F_e = -kx$ però abbiamo che la deformazione è concorde al verso della forza peso dunque

$$kx = mg \implies k = \frac{mg}{x}$$

6.4.1 Moto di una massa attaccata ad una molla

Suuponiamo di avere una massa attaccata ad una molla in una superficie senza attrito. Supponiamo che la massa abbia un'accelerazione.

Dalla seconda legge della dinamica si ricava subito che

$$F_e = ma$$

in quanto la forza elastica è l'unica che agisce. Riscriviamo l'equazione ed otteniamo

$$\begin{aligned} -kx &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x \end{aligned}$$

Se poniamo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ otteniamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

ossia la massa si muove di moto armonico e abbiamo che

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.11}$$

e che

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{6.12}$$

6.5 Pendolo semplice

Chiamiamo pendoli semplici quei sistemi fisici dove è presente una massa puntiforme appesa ad un filo inestensibile di lunghezza L .

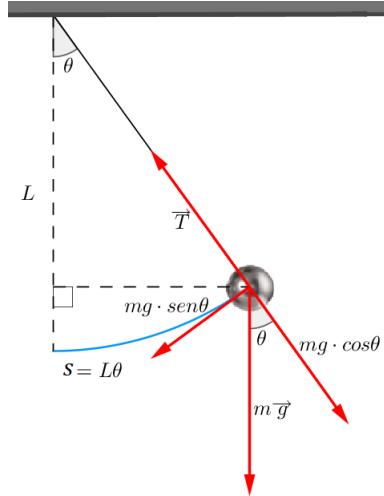


Figura 6.6: Esempio di pendolo semplice

Poichè il pendolo percorre un arco di circonferenza per lo studio del moto ci mettiamo in un sistema di riferimento in cui una direzione è radiale e una tangenziale alla circonferenza.

Il moto del pendolo pur essendo bidimensionale può esser descritto da modelli matematici monodimensionali.

Prendiamo la direzione tangenziale all'arco di circonferenza percorsa, sappiamo che il corpo ha un accelerazione opposta alla componente $mg \sin \vartheta$ perciò avremo che

$$-mg \sin \vartheta = ma = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (6.13)$$

Sapendo che $s = L\vartheta$ allora $ds = Ld\vartheta$ e dunque possiamo riscrivere la 6.13 in modo tale da avere tutto in funzione dell'angolo. Allo stesso tempo rimuoviamo la massa da entrambi e otteniamo

$$L \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -g \sin \vartheta \quad (6.14)$$

Per angoli piccoli sappiamo che $\sin \vartheta \approx \vartheta$ e dunque la 6.14 può esser nuovamente riscritta come

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \vartheta \quad (6.15)$$

Se poniamo $\omega^2 = \frac{g}{L}$ notiamo come per angoli piccoli il sistema ha oscillazioni di tipo armonico.

Ne consegue che il periodo sarà

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (6.16)$$

Notiamo come esso non dipenda da fattori quali angolo e massa, ma solo dalla lunghezza del filo. Avremo che la legge oraria angolare sarà

$$\vartheta(t) = \vartheta_{max} \cos(\omega t + \phi) \quad (6.17)$$

mentre la legge oraria riguardante l'arco sarà

$$s(t) = L\vartheta_{max} \cos(\omega t + \phi) \quad (6.18)$$

Derivando otteniamo le velocità.

Adesso consideriamo la direzione radiale. Nella direzione radiale agiscono due forze: la componente $mg \cos \vartheta$ della forza peso e la tensione del filo. Il corpo inoltre subisce l'accelerazione centripeta (non compierebbe la traiettoria circolare) dunque dalla seconda legge della dinamica abbiamo che

$$T - mg \cos \vartheta = ma_c$$

Riscrivendo l'euquazione ricaviamo

$$T = mg \cos \vartheta + m \frac{v^2(t)}{L} \quad (6.19)$$

Questo ci dice che la tensione del filo non è costante e che equilibra la componente radiale della forza peso e fornisce la forza per l'accelerazione centripeta.

6.6 Il moto nei sistemi di riferimento accelerati

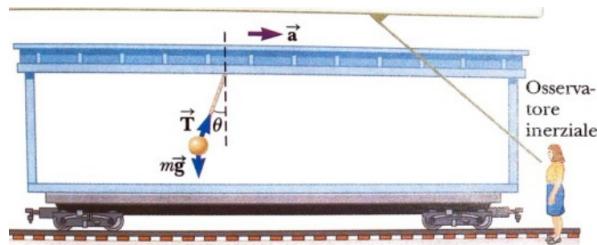
Fino ad adesso abbiamo usato le leggi di Newton che sono valide per sistemi di riferimento inerziali.

È possibile però trovare casi in cui dobbiamo far fronte a sistemi di riferimento accellerati. Il problema di questi sistemi è il fatto che si possono sperimentare forze non riconducibili a quelle fondamentali che vengono chiamate forze apparenti o fittizie.

In realtà queste forze sono proprio dovute all'accelerazione del sistema di riferimento ed è per questo che si preferisce un sistema inerziale. Vediamo due esempi di come sia visibile la differenza tra osservazioni tra sistemi di riferimento inerziali e accelerati.

6.6.1 Sfera in un treno che accelera

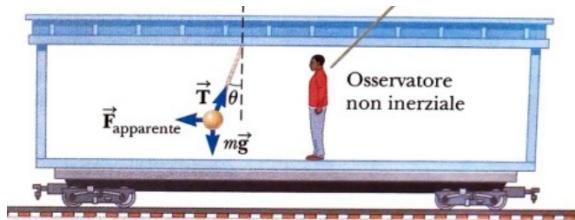
Immaginiamo di avere una sfera appesa ad un vagone di un treno che accelera. Per un osservatore inerziale fermo la situazione sarà descritta come nella seguente figura



Secondo lui l'accelerazione della sfera è dovuta alla componente orizzontale del filo e dunque per lui la descrizione delle forze lungo l'asse x sarà

$$T \sin \vartheta = ma$$

Adesso vediamo la descrizione di un osservatore non inerziale interno al vagone



Dalla sua prospettiva esso nota che la pallina rimane ferma e la componente orizzontale del filo viene bilanciata da una forza apparente e darà la seguente descrizione per l'asse x

$$T \sin \vartheta - F_{apparente} = 0 \quad (6.20)$$

La descrizione data dai due osservatori è **diversa** e se andiamo a vedere la forza apparente è solo l'accelerazione del sistema di riferimento.

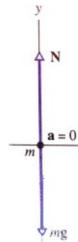
Nell'asse verticale il sistema è inerziale per entrambi gli osservatori: entrambi danno la stessa descrizione in quanto il corpo è fermo ed è bilanciato dalla componente verticale della tensione del filo e dalla forza peso.

$$T \cos \vartheta - mg = 0$$

6.6.2 Il peso in ascensore

Immaginiamoci di essere in un ascensore e di voler misurare il nostro peso tramite una bilancia (usiamo queste poiché han la particolarità di misurare il peso tramite la forza normale).

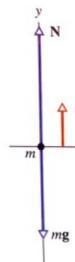
All'inizio siamo fermi e disegnando il diagramma di corpo libero otteniamo



Forza normale e forza peso si equivalgono dunque il peso P' (che è una notazione della forza normale) è uguale al peso reale.

$$P' = mg = P$$

L'ascensore inizia ad accelerare verso l'alto, il diagramma di corpo libero cambia e otteniamo



Dunque la risultante delle forze in questo caso è la massa per l'accelerazione subita. La bilancia che è in un sistema accelerato ci notificherà un peso più alto e non reale in quanto percepisce una forza apparente che è in realtà l'accelerazione del sistema.

$$\begin{aligned} P' - mg &= ma \\ P' &= m(g + a) \end{aligned}$$

Se invece scendiamo giù, l'accelerazione ha verso opposto al sistema, la bilancia notificherà un peso minore a quello reale

$$\begin{aligned} P' - mg &= -ma \\ P' &= m(g - a) \end{aligned}$$

6.7 La dinamica nel moto circolare uniforme

Se un punto materiale si muove di moto circolare uniforme è sottoposto ad accelerazione centripeta data da

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

scritta sia in termini di velocità tangenziale che di velocità angolare.

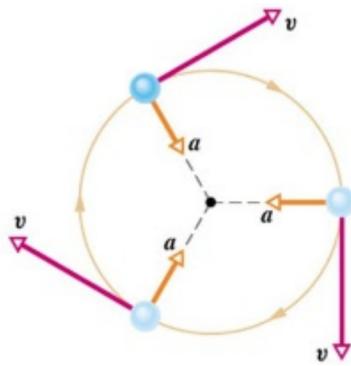


Figura 6.7: Esempio di corpo in moto circolare uniforme

Tale accelerazione è dovuta alla forza centripeta F_c

$$F_c = m a_c = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r \quad (6.21)$$

6.7.1 La forza centrifuga

Immaginiamo di avere un auto che percorre una curva: essa avrà moto circolare uniforme.

Immaginiamo di essere dei passeggeri di quell'auto. Quando la macchina inizia a curvare sentiamo una forza che ci tira all'esterno, ossia la forza centrifuga, che viene bilanciata dalla forza di attrito statica che ci tiene ancorati al sedile.

La descrizione delle forze che diamo sarà dunque (nel nostro sistem di riferimento l'auto curva nel verso opposto all'asse x)

$$f_{centrifuga} - f_s = 0$$

In realtà la forza centrifuga è una forza apparente dovuta all'accelerazione del sistema fisico. Difatti un osservatore esterno dirà che è la forza di attrito statico a impremere la forza centripeta e a farci curvare insieme all'auto e darà la seguente descrizione

$$-f_s = -m a_c \implies f_s = m a_c$$

6.7.2 Velocità massima di percorrenza di una curva piana

Immaginiamo di nuovo di avere un'auto che percorre una curva di raggio r . Qual è la velocità massima di percorrenza della curva?

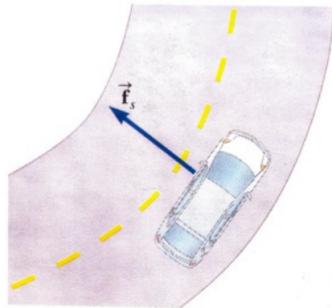
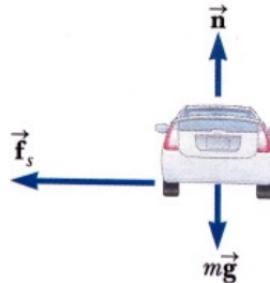


Figura 6.8: L'auto che percorre la curva.

Prendiamo un sistema di riferimento a due assi cartesiani e che l'auto stia curvando nel verso opposto all'asse x , disegniamo il diagramma di corpo libero.



Abbiamo attrito statico in quanto il corpo in riferimento al sistema di riferimento è centrato nella traiettoria e se non fosse in equilibrio uscirebbe da essa.

Il corpo comunque subisce un'accelerazione che è quella centripeta che la fa tenere in traiettoria e l'unica forza agente è la forza di attrito statico. Avremo che

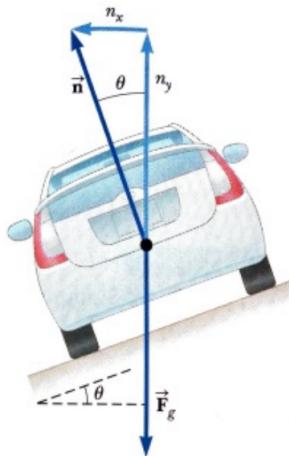
$$f_s = m \frac{v^2}{r} \quad (6.22)$$

Spendo che $f_s = \mu_s N = \mu_s mg$ allora possiamo trovare la velocità massima

$$\begin{aligned} \mu_s mg &= m \frac{v^2}{r} \\ \implies v &= \sqrt{\mu_s gr} \end{aligned} \quad (6.23)$$

6.7.3 Velocità massima di percorrenza di una curva sopraelevata

Immaginiamo di percorrere invece una curva sopraelevata invece come nella figura sottostante



Trascurando l'attrito, la forza che ci dà l'accelerazione centripeta è la componente radiale (ossia nell'asse x se prendiamo il nostro sistema di riferimento) della forza normale. Avremo che

$$n_x = n \sin \vartheta = m \frac{v^2}{r}$$

Nell'asse verticale il corpo è in equilibrio dunque

$$n_y = n \cos \vartheta = mg$$

Dividendo n_x per n_y otteniamo

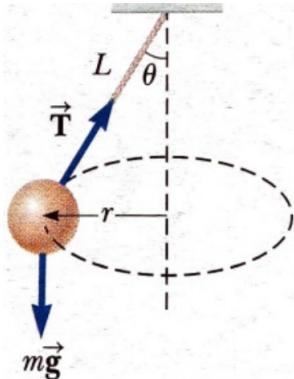
$$\tan \vartheta = \frac{v^2}{gr}$$

Da cui possiamo ricavare la velocità

$$v = \sqrt{gr \tan \vartheta} \quad (6.24)$$

6.7.4 Il pendolo conico

Un pendolo può muoversi purè in due dimensioni. Studiamo il caso in cui il pendolo si muova di moto circolare uniforme e la domanda che ci chiediamo è: qual è la velocità per cui la massa attaccata al filo va di moto circolare uniforme?



Notiamo com l'accelerazione centripeta è data dalla componente orizzontale della tensione del filo.

Nella direzione orizzontale la descrizione delle forze sarà

$$T \sin \vartheta = m \frac{v^2}{r}$$

Nella direzione verticale invece

$$T \cos \vartheta = mg$$

in quanto verticalmente il corpo è fermo.

Dividendo $T \sin \vartheta$ per $T \cos \vartheta$ otteniamo

$$\tan \vartheta = \frac{v^2}{rg}$$

da cui ricaviamo la velocità richiesta

$$v = \sqrt{gr \tan \vartheta} = \sqrt{gL \sin \vartheta \tan \vartheta} \quad (6.25)$$

6.7.5 Il peso nella ruota panoramica

Immaginiamo di essere sulla ruota panoramica e vogliamo misurarci il peso nel punto più alto e più basso. Cosa otteniamo?

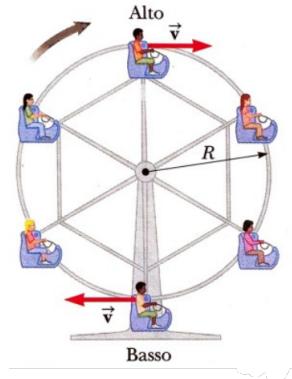


Figura 6.9: La ruota panoramica in cui ci pesiamo.

Prnediamo un sistema di riferimento inerziale ossia esterno alla ruota e un sistema di coordinate con direzione verticale con verso positivo in su. Quando siamo in alto la risultante della forza normale e del peso ci da l'accelerazione centripeta che è disconorde al sistema di riferimento ottenendo

$$\begin{aligned} N - mg &= -ma_c \\ N &= m(g - a_c) \end{aligned}$$

Poichè $N < mg$ allora peseremo di meno sulla bilancia quando siamo su. Quando siamo in basso invece la risultante ci da di nuovo l'accelerazione centripeta che però è concorde al sistema di riferimento. Ne deriva che

$$\begin{aligned} N - mg &= ma_c \\ N &= m(g + a_c) \end{aligned}$$

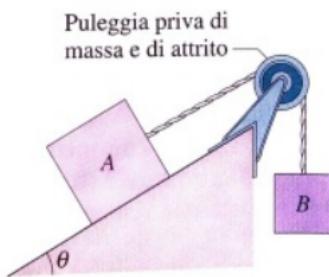
In basso la bilancia ci dirà che pesiamo di più.

6.8 Esercizi di riepilogo

6.8.1 Esercizio n. 1

Due blocchi sono collegati attraverso una puleggia come nella figura in basso. La massa di A è 10 kg e il coefficiente di attrito dinamico vale 0.20. L'angolo ϑ vale 30 gradi.

Qual è la massa di B?



Per la massa B ci mettiamo in un sistema di riferimento verticale. Sapendo che agiscono due forze, ossia tensione del filo e forza peso, e che il corpo è in velocità costante (il problema parla di attrito dinamico e non parla di accelerazione) avremo che

$$T = m_B g$$

Per la massa A ci mettiamo in un sistema di riferimento in linea col piano inclinato in cui la direzione x ha verso quello che va verso l'angolo. Nella direzione y il corpo A è fermo e dunque

$$N - m_A g \cos 30^\circ = 0$$

$$N = m_A g \cos 30^\circ$$

Invece nella direzione x la forza concorde sarà la componente della forza peso nell'asse, le forze discordi sono l'attrito e la tensione del filo. Il corpo è in moto rettilineo uniforme dunque la risultante delle forze è nulla e perciò

$$m_A g \sin 30^\circ - fk = T$$

La forza d'attrito dalla formula equivale a

$$fk = \mu_k N = 0.20 m_A g \cos 30^\circ$$

Non ci rimane che comporre i pezzi sostituendo

$$T - m_B g = 0$$

$$m_A g \sin 30^\circ - \mu_k m_A g \cos 30^\circ - m_B g = 0$$

$$m_B = m_A (\sin 30^\circ - \mu_k \cos 30^\circ)$$

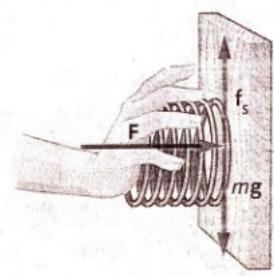
Sostituendo i valori e risolvendo l'equazione otteniamo che la massa di B è di 3.2 kg.

6.8.2 Esercizio n. 2

Una molla con una costante elastica di 120 N/m viene usata per spingere un pezzo di legno di 0.27 kg contro un muro come nella figura sottostante.

(a) Trova la compressione minima necessaria perché la molla trattenga il pezzo di legno dal cadere, dato che il coefficiente di attrito statico fra il pezzo di legno è 0.46 .

(b) La risposta alla domanda 'a' cambia se la massa del pezzo di legno viene raddoppiata?



Pendiamo un sistema di riferimento a due coordinate. Ricordandoci che F in questo caso è la forza elastica in quanto il pezzo di legno deforma la molla al contatto. Per la direzione x avremo che

$$F - N = 0 \implies F = N$$

Per la direzione y invece

$$f_s - mg = 0 \implies f_s = mg$$

Adesso calcoliamo la forza elastica sapendo che $f_s = \mu_s N = \mu_s F$

$$mg = \mu_s F \implies F = \frac{mg}{\mu_s} = \frac{0.27 \cdot 9.8}{0.46} = 5.75 \text{ N}$$

Adesso dalla legge di Hooke troviamo la compressione della molla

$$F = kx \implies x = \frac{F}{k} = \frac{5.75}{120} = 0.048 \text{ m}$$

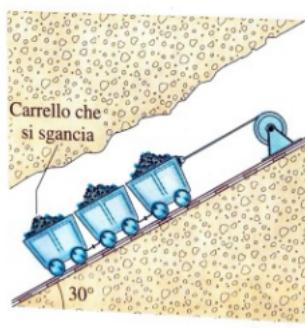
Se la massa raddoppia possiamo vedere subito dai calcoli per trovare la forza che anche essa raddoppia.

6.8.3 Esercizio n. 3

Tre vagoni pieni di carbone di 10000 kg ciascuno sono tenuti fermi in miniera su un binario inclinato di 30° per mezzo di un cavo parallelo al piano del binario come nella figura sottostante.

Si è osservato un allungamento del cavo di 15 cm un istante prima che cedesse il gancio fra i due vagoni inferiori, lasciando così libero di scendere per il piano inclinato l'ultimo vagone.

Assunto che il cavo obbedisca alla legge di Hooke, determinare la frequenza e l'ampiezza delle oscillazioni indotte nei due vagoni rimanenti.



Come sistema di riferimento usiamo un sistema in linea col piano inclinato in cui l'asse x va verso la carrucola.

Per l'asse x avremo che

$$F_e = mg \sin \vartheta \implies kx = mg \sin \theta$$

così da ricavare il coefficiente di rigidità del cavo

$$k = \frac{mg \sin (30^\circ)}{x} = 9.8 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

Da questo possiamo ricavare la frequenza delle oscillazioni ricordandoci che la massa viene diminuita di 10000 kg

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8 \cdot 10^5}{20000}} = 1.1 \text{ Hz}$$

Ovviamente avendo meno massa abbiamo un nuovo punto di equilibrio che dobbiamo calcolare sapendo che la nuova forza elastica sarà $F'_e = mg \sin 30^\circ$

$$kx = mg \sin \vartheta \implies x = \frac{mg \sin \vartheta}{k} = \frac{30000 \cdot 9.8 \cdot \sin 30^\circ}{9.8 \cdot 10^5} = 10 \text{ cm}$$

Questo perchè appena il vagone si sgancia il cavo ha meno massa da spostare e vuole portarla al punto di equilibrio però come visto nella sezione 6.4.1 ciò porta ad un moto armonico.

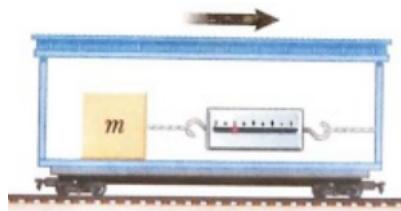
L'ampiezza di questa oscillazione sarà di 5 centimetri che è la differenza della deformazione originale e il nuovo punto di equilibrio.

6.8.4 Esercizio n. 4

Un corpo di massa $m = 5 \text{ kg}$ collegato ad un dinamometro, sta fermo su di un piano orizzontale privo di attrito, come nella figura sottastante.

Sul dinamometro, attaccato alla parete anteriore del vagone, quando il vagone è in quiete si legge zero.

Se il dinanometro segna 18 N quando il vagone è in moto, quanto vale l'accelerazione del vagone?



Un osservatore all'interno del vagone direbbe che la massa sia in equilibrio tra la forza del dinanometro che la sposta davanti e una forza apparente che la tira indietro.

Sappiamo però che la forza apparente non è altro che l'accelerazione del sistema e dunque la descrizione dinamica del sistema sarà

$$F_D = ma$$

Da cui possiamo ricavare l'accelerazione

$$a = \frac{F_D}{m} = \frac{18}{5} = 3.6 \text{ m/s}^2$$

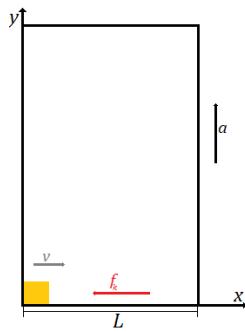
6.8.5 Esercizio n. 5

Uno studente è fermo in un ascensore in moto uniformemente accelerato verso l'alto con accelerazione a . Il suo zaino si trova sul pavimento, vicino alla parete. La larghezza dell'ascensore è L .

Nell'istante $t = 0$, lo studente dà un piccolo calcio al suo zaino, impartendogli una velocità v e facendolo scivolare attraverso il pavimento dell'ascensore. Nell'istante t , lo zaino colpisce la parete opposta.

Si trovi il coefficiente di attrito dinamico μ_k tra lo zaino e il pavimento dell'ascensore.

Per capire meglio il problema proviamo a fare un disegno e vedere cosa sta succedendo



Nell'asse y il corpo sta accelerando verso l'alto e le forze in gioco sono la forza peso e la forza normale e avremo che

$$\begin{aligned} N - mg &= ma \\ N &= m(g + a) \end{aligned}$$

Nell'asse delle x l'unica forza agente è la forza d'attrito e il corpo è in accelerazione negativa perciò avremo

$$f_k = -\mu_k m(g + a)$$

L'accelerazione dello zaino sarà

$$a_z = -\mu_k(g + a)$$

La legge oraria sarà

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_z t^2 \\ x &= v_0 t - \frac{1}{2} \mu_k m(g + a) t^2 \end{aligned}$$

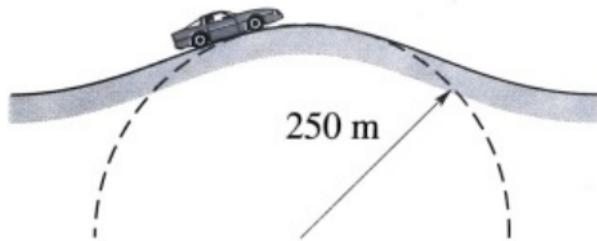
Da cui possiamo ricavare il valore dell'attrito dinamico spendo che $x(t) = L$

$$\mu_k = 2 \frac{vt - L}{(g + a)t^2}$$

6.8.6 Esercizio n. 6

Uno stuntman guida un'auto su un dosso avente un raggio di curvatura verticale di 250 m come nella figura sottostante.

Determinare la velocità massima che può tenere senza che l'auto si stacchi dal fondo stradale nel punto più alto.



Per risolvere il problema pensiamo di essere alla velocità limite in cui l'auto si è staccata ma ancora "ruota" insieme alla strada.

Questo vuol dire che la forza peso è quella che ci da l'accelerazione centripeta (la forza normale non c'è in quanto l'auto non tocca l'asfalto).

Perciò avremo che

$$\begin{aligned}
 mg &= m \frac{v^2}{r} \\
 g &= \frac{v^2}{r} \\
 \Rightarrow v &= \sqrt{gr} = \sqrt{9.8 \cdot 250} = 49.5 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Capitolo 7

Lavoro ed energia

7.1 Lavoro di una forza costante in una traiettoria rettilinea

Chiamiamo in fisica lavoro quella grandezza fisica che misura il prodotto scalare delle forze che subisce un corpo per il suo spostamento.

In un primo momento vediamo il caso più semplice ossia una forza costante che produce uno spostamento in una traiettoria rettilinea. Chiameremo lavoro W il prodotto scalare

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos \vartheta ds$$

dove l'angolo ϑ è l'angolo formato dal vettore forza e dal vettore spostamento. Da ciò deriva che

- se i due vettori sono ortogonali allora il lavoro è nullo.
- se l'angolo formato tra i due vettori è minore di 90 gradi allora il lavoro sarà positivo.
- se l'angolo formato tra i due vettori è maggiore di 90 gradi allora il lavoro è negativo.

Nel SI il lavoro $[W]$ ha come unità di misura il $N \cdot m$ che equivale ad un Joule che ha segno J .

7.2 Lavoro di forze non costanti in traiettorie generali

Nella sezione precedente abbiamo idealizzato il concetto di lavoro. Succede che una forza non è costante per tutto il percorso di una traiettoria che non è detto che sia rettilinea.

Però se prendiamo in ogni punto della traiettoria la forza che produce uno spostamento infinitesimo avremo un infinitesimo di lavoro:

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Se sommiamo tutti questi infinitesimi di forza otteniamo il lavoro totale, i.e.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (7.1)$$

dove A e B sono gli estremi della nostra traiettoria.

A valori infinitesimali la forza è costante e lo spostamento è rettilineo, possiamo dunque trattare l'infinitesimo di lavoro come lavoro di una forza costante con traiettoria rettilineo

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos \vartheta ds = F_t ds = m a_t ds = m \frac{dv}{dt} ds$$

dove F_t è la forza tangenziale e a_t l'accelerazione tangenziale.

Osserviamo che $\frac{ds}{dt} = v$ perciò possiamo riscrivere il tutto come

$$dw = mv dv \quad (7.2)$$

Allora il lavoro totale sarà

$$W = \int_A^B dw = \int_A^B mv dv = \frac{1}{2} m [v^2]_A^B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (7.3)$$

Chiamiamo energia cinetica la quantità

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

Risulta perciò che il lavoro totale è la differenza di energia cinetica all'inizio e alla fine della traiettoria, i.e.

$$W = E_{KB} - E_{KA} = \Delta E_K \quad (7.4)$$

7.2.1 Il lavoro della forza peso

Assumiamo di avere un oggetto in caduta libera.

Trascurando l'attrito dell'aria l'unica forza che produce spostamento è la forza peso che è costante e lo spostamento è rettilineo. Denotiamo con A l'altezza in cui parte l'oggetto e con B l'altezza in cui arriva. Il nostro sistema di coordinate sarà puntato verso l'alto dunque la forza peso è discorde.

Da queste informazioni ricaviamo il lavoro compiuto dalla forza peso

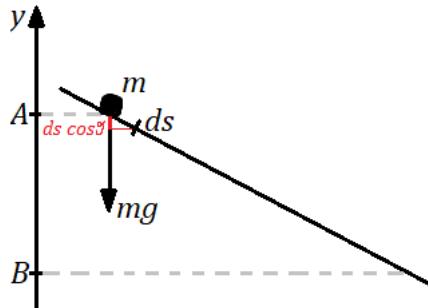
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -mg ds = -mg(y_B - y_A) = -\Delta(mgy) \quad (7.5)$$

Poichè forza e spostamento hanno stessa direzione possiamo considerare direttamente i moduli nell'integrale.

Cosa succede se la traiettoria del corpo è quella di un piano inclinato?

Ossia qual è il lavoro svolto dalla forza peso se il corpo cade da un piano inclinato privo di attrito?

Visualizziamo il tutto Il lavoro totale è la somma di tutti i lavori infinitesimi



compiuti negli spostamenti infinitesimi della traiettoria. La forza peso e lo spostamento formano un angolo ϑ e dunque il lavoro infinitesimo sarà

$$dw = mg \cos \vartheta ds$$

La forza peso è costante per tutto il percorso e la somma di tutti i $ds \cos \vartheta$ ci da $y_B - y_A$, dunque il lavoro compiuto è uguale al caso precedente.

$$W = -mg(y_B - y_A) = -\Delta(mgy)$$

7.2.2 Il lavoro della forza elastica

La forza elastica è una forza unidimensionale, per praticità scriviamola con la notazione dei versori

$$\mathbf{F} = -kx\hat{i}$$

La forza elastica produce uno spostamento infinitesimale nella stessa direzione, il lavoro infinitesimale sarà

$$dw = -kx\hat{i} \cdot dx\hat{i} = -kxdx$$

Il versore scompare in quanto $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$. Denotando con A il punto iniziale del corpo elastico e con B il punto finale e integrando si ottiene che

$$W = \int_A^B -kxdx = -\frac{1}{2}k [x^2]_A^B = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right) = -\Delta\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \quad (7.6)$$

Come per la forza peso, il lavoro può esser visto come la differenza tra il valore nel punto finale e quello iniziale in funzione della posizione (in questo caso $\frac{1}{2}kx^2$).

7.2.3 Il lavoro dell'attrito

Vediamo infine il lavoro dell'attrito.

Il lavoro infinitesimale sarà

$$dw = \vec{f}_k \cdot d\vec{s} = -\mu_k N \hat{v} \cdot d\hat{s} = -\mu_k N ds$$

Dove v è il versore velocità che è nella stessa direzione e verso dello spostamento: lo mettiamo per far vedere che la forza di attrito si oppone alla velocità e per prendere il modulo dello spostamento. Se assumiamo che la superficie dove si muove un corpo ha coefficiente di attrito costante allora la forza di attrito è costante.

Ricaviamo il lavoro svolto dalla forza di attrito considerati A e B gli estremi della traiettoria

$$W = \int_A^B -\mu_k N ds = -\mu_k N \int_A^B ds \quad (7.7)$$

A differenza delle altre forze viste fin'ora, il lavoro della forza d'attrito dipende dalla traiettoria percorsa.

7.3 La potenza

La potenza è una grandezza fisica che determina la quantità di lavoro svolta in un'unità di tempo, i.e.

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (7.8)$$

L'unità di misura nel SI è lo J/s che è uguale a $1W$ (Watt).

7.4 Le forze conservative

Chiamiamo forze conservative quelle forze per cui il lavoro non dipende dalla traiettoria percorsa, i.e. se consideriamo un percorso I da A a B e un percorso II da A a B diversi tra di loro allora vale la seguente uguaglianza

$$\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_I = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{II} \quad (7.9)$$

Vale inoltre

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

ossia il lavoro svolto per andare in da un punto all'altro è l'opposto del lavoro svolto per percorrere la stessa traiettoria al contrario. Questo si può scrivere anche come

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7.10)$$

Il lavoro di una forza conservativa in un percorso chiuso è sempre nullo.

7.4.1 L'energia potenziale e la conservazione dell'energia meccanica

Il lavoro svolto dalle forze conservative può essere descritto come la differenza di valori di una funzione valutata agli estremi della traiettoria.

Questa funzione prende nome di *energia potenziale* e viene indicata con la lettera U . Vale dunque la seguente relazione solo per le forze conservative:

$$W = -\Delta U = -(U_B - U_A) \quad (7.11)$$

La funzione U non è determinabile a priori e va studiata. Abbiamo i casi noti dell'energia potenziale della forza pesa e l'energia potenziale elastica:

- $U_p = mgy \implies W_p = -(-mgy_B - mgy_A)$
- $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2 \implies W_{el} = -(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2)$

Poiché per ogni forza vale la seguente relazione $W = \Delta E_K$ ossia il lavoro totale è la differenza dell'energia totale allora **solo** per le forze conservative possiamo affermare che

$$\Delta E_K = -\Delta U \quad (7.12)$$

Eguagliando ricaviamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 &= -(U_B - U_A) \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + U_A &= \frac{1}{2}mv_B^2 + U_B \end{aligned}$$

Ossia $E_M = E_K + U$ è costante.

Questo prende il nome di *principio di conservazione dell'energia meccanica*. Non a caso chiamiamo queste forze "conservative": esse conservano l'energia meccanica.

Un esempio di questo principio lo abbiamo con i pendoli; nel punto di massima elongazione il pendolo è all'altezza massima, ma la velocità è nulla (per via del moto armonico). Ciò vuol dire che l'energia è tutta potenziale in quanto l'energia cinetica nulla.

Man mano che arriviamo al punto di equilibrio esso acquista velocità fino alla velocità massima e perciò energia cinetica massima, ma l'altezza è nulla e dunque energia potenziale nulla.

In qualsiasi stato del pendolo la somma delle due energie è sempre costante. Ciò è anche il motivo per cui un pendolo lasciato ad un'altezza h per principio di conservazione non potrà mai superare quell'altezza.

Ma questo vale per tutti gli oscillatori armonici e si può dimostrare prendendo il caso delle molle.

La legge oraria di un oscillatore armonico è data da

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Derivando la legge oraria otteniamo la velocità

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

Dunque per un qualsiasi istante t l'energia cinetica sarà

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

dove $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (sez. 6.4.1).

L'energià potenziale di una molla è data da

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

La somma delle due energie ci da l'energia meccanica totale

$$\begin{aligned} E_M &= E_K + U = \\ &= \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t + \phi) \cos^2(\omega t + \phi)] = \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned} \tag{7.13}$$

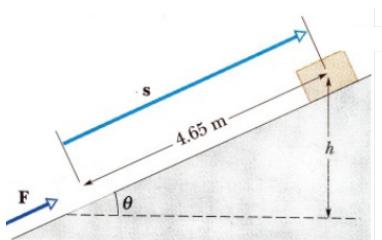
Come si nota, l'energia meccanica è costante in quanto non dipende dall'istante t in cui viene misurata e perchè dipende solo dalla costante elastica e dall'ampiezza massima dell'oscillazione.

7.5 Esercizi di riepilogo

7.5.1 Esercizio n. 1

Un blocco di massa $m = 11.7 \text{ kg}$ è spinto lungo un piano inclinato senza attrito e percorre una distanza $s = 4.65 \text{ m}$ raggiungendo un'altezza $h = 2.86 \text{ m}$ dal suolo.

Determinare il lavoro necessario allo spostamento se viene applicata una forza parallela al piano e se il blocco viene spinto ad una velocità costante.



Prendiamo un sistema di coordinate in linea con il piano con la x concorde alla forza.

In questo modo la forza peso crea l'angolo ϑ tra lei e l'asse y e perciò nell'asse x la sua componente sarà $mg \sin \vartheta$ e nell'asse y la componente sarà $mg \cos \vartheta$. Nel quesito viene specificato che si va a velocità costante dunque la risultante delle forze è 0. Avremo perciò che per l'asse x la componente della forza peso bilancia la forza applicata al corpo ossia

$$F - mg \sin \vartheta = 0 \implies F = mg \sin \vartheta$$

Nell'asse y la forza normale viene bilanciata dalla componente y della forza peso in quanto il corpo è fermo.

Adesso ci ricaviamo il valore del seno tramite le formule di trigonometria

$$h = s \sin \vartheta \implies \sin \vartheta = \frac{h}{s} = \frac{2.86}{4.65} = 0.615$$

Da cui possiamo trovare il valore della forza applicata

$$F = mg \sin \vartheta = 11.7 \cdot 9.8 \cdot 0.615 = 70.5 \text{ N}$$

La forza è costante per tutta la traiettoria e lo spostamento è su una traiettoria. Inoltre entrambi i vettori sono paralleli perciò andiamo direttamente a considerare i loro moduli per il calcolo del lavoro

$$W = F \cdot s = 70.5 \cdot 4.56 = 328 \text{ J}$$

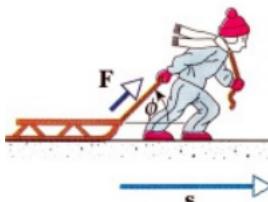
Il lavoro svolto dalla forza peso è invece

$$W = mgh = 11.7 \cdot 9.8 \cdot 2.86 = 328 \text{ J}$$

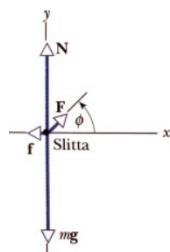
7.5.2 Esercizio n. 2

Un bambino traina una slitta di 5.6 kg per 12 m a velocità costante in un'superficie con coefficiente di attrito dinamico $\mu_k = 0.2$ tramite una fune inestensibile creando un angolo ϕ di 45 gradi con la slitta.

Determinare il lavoro svolto dal bambino.



Proviamo a disegnare il diagramma di corpo libero in un sistema di coordinate a due assi



Nell'asse x il corpo è a velocità costante dunque la risultante delle forze è nulla e avremo che

$$F \cos \phi = f_k$$

Per l'asse y considerato che il corpo è fermo abbiamo

$$N + F \sin \phi - mg = 0$$

Per trovare N prendiamo l'equazione per l'asse x sapendo che $f_k = \mu_k N$

$$F \cos \phi - \mu_k N = 0 \implies N = \frac{F \cos \phi}{\mu_k}$$

Sostituendo all'equazione dell'asse y otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{F \cos \phi}{\mu_k} + F \sin \phi - mg &= 0 \\ F \left(\frac{\cos \phi}{\mu_k} + \sin \phi \right) &= mg \end{aligned}$$

Sostituendo con i valori dati otteniamo che $F = 12.9 N$. Ricaviamo infine il lavoro

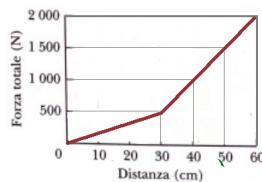
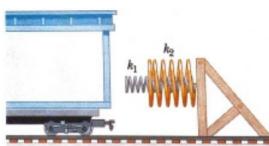
$$W = F \cos \phi s = 110 J$$

7.5.3 Esercizio n. 3

Un carro merci di 6000 kg si muove lungo i binari senza apprezzabile attrito. Il carro viene fermato mediante un sistema combinato di due molle, come illustrato nella figura sottostante.

Entrambe le molle seguono la legge di Hooke con costanti elastiche $k_1 = 1600 \text{ N/m}$ e $k_2 = 3400 \text{ N/m}$. Dopo che la prima molla viene compressa per 30 cm, comincia ad agire anche la seconda molla aumentando la forza frenante che varia con la posizione come mostrato nel grafico di figura. Dal primo contatto con il sistema di molle, il carro percorre 50 cm prima di fermarsi.

Determinare la velocità iniziale del carro.



Per determinare la velocità del carro calcoliamo il lavoro delle molle. Questo perché il lavoro delle molle è compiuto da forze conservative e perché l'energia cinetica del carro viene convertita in energia elastica. Avremo che

$$W_{el} = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}mv_i^2$$

Per calcolare il lavoro della forza elastico dovremmo integrare $F \cdot ds$ (sono paralleli e considero solo i moduli) dato che la forza non è costante. Però abbiamo il grafico della forza elastica in funzione della distanza e dunque possiamo calcolare l'aerea che sta da 0 a 50 cm (ossia il significato geometrico dell'integrale). Otteniamo

$$W = \frac{500 \cdot 0.3}{2} + \frac{1000 \cdot 0.2}{2} + 500 \cdot 0.2 = 275 \text{ J}$$

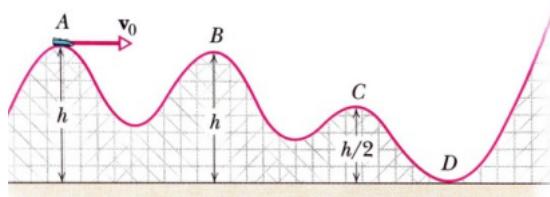
In realtà adesso ci siamo calcolati il modulo, il lavoro della forza elastica è negativo in quanto è una forza frenante. Sfruttiamo la relazione scritta all'inizio per trovare la velocità del carro

$$\begin{aligned} -275 &= -\frac{1}{2}mv_i^2 \\ v_i &= \sqrt{\frac{550}{m}} = \sqrt{\frac{550}{6000}} = 0.3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

7.5.4 Esercizio n. 4

Un carrello da montagne russe parte dal punto A in figura con velocità in modulo uguale a v_0 .

Determinare il modulo della velocità nei punti B, C e D considerato che l'attrito è trascurabile.



La risoluzione dell'esercizio si basa sul fatto che l'unica forza che compie lavoro è la forza peso che è una forza conservativa.

Avremo che l'energia meccanica sarà data da

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Nel punto B l'altezza del carrello è uguale al punto A e perciò l'energia potenziale gravitazionale è la stessa. Questo implica che la velocità in B è uguale a quella in A.

In C l'altezza viene dimezzata e di conseguenza pure l'energia potenziale e avremo che

$$\begin{aligned} E_A &= E_C \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv_c^2 + mg\frac{h}{2} \\ v_c^2 &= v_0^2 + 2gh - gh \\ \implies v_c &= \sqrt{v_0^2 + gh} \end{aligned}$$

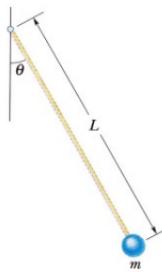
Nel punto D siamo nell'altezza 0 e dunque non abbiamo più energia potenziale che è stata convertita in energia cinetica e perciò scriviamo

$$\begin{aligned} E_A &= E_D \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv_d^2 \\ v_d^2 &= v_0^2 + 2mgh \\ \implies v_d &= \sqrt{v_0^2 + 2gh} \end{aligned}$$

7.5.5 Esercizio n. 5

Una sbarretta sottile di lunghezza $L = 2.13\text{ m}$ e di massa trascurabile è fissata a una sua estremità in modo da ruotare su un piano verticale. Essa viene spinta lateralmente di un angolo ϑ di 35° rispetto alla verticale e quindi è lasciata andare.

Determinare la velocità della pallina di massa m fissata all'estremità libera della sbarra nell'istante in cui si trova nel punto più basso



Come nell'esercizio precedente l'unica forza agente in questo caso è la forza peso che è conservativa. Perciò l'energia nel punto di partenza è uguale al punto più basso.

Quando la sbarra è al massimo dell'altezza il corpo non ha velocità e dunque l'energia meccanica è tutta potenziale. Nel punto più basso avremo l'opposto, ossia l'energia è tutta cinetica in quanto siamo ad altezza 0.

Se consideriamo lo 0 come punto più basso e considerato che la pallina compie come traiettoria un arco di circonferenza, possiamo ricavare l'altezza x massima che sarà data da

$$x = L(1 - \cos \vartheta) = 2.13 - (1 - \cos 35^\circ) = 0.385\text{ m}$$

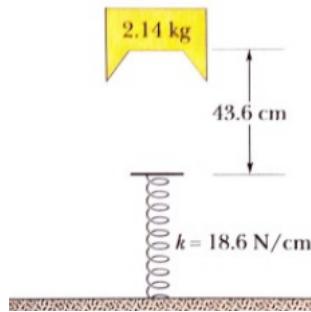
Non resta che trovare la velocità confrontando le energie nel punto più basso e nel punto più alto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mgh \\ v^2 &= 2mgh \\ v &= \sqrt{2mgh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.385} = 2.75\text{ m/s} \end{aligned}$$

7.5.6 Esercizio n. 6

Un blocco di 2.14 kg viene lasciato cadere da un'altezza di 43.6 cm su una molla di costante elastica $k = 18.6 \text{ N/cm}$.

Determinare la compressione della molla.



In questo caso le forze presenti sono ancora conservative in quanto abbiamo la forza peso prima e quella elastica dopo. Il corpo cade da un'altezza e dunque ha energia potenziale. Quando tocca la molla l'energia potenziale viene convertita in energia elastica fino alla massima compressione della molla, punto in cui l'energia è interamente elastica. Perciò l'altezza totale per l'energia potenziale sarà la distanza tra molla e oggetto più la compressione x della molla.

Da queste informazioni ricaviamo la compressione stessa sapendo che l'energia si conserva

$$\begin{aligned} mg(h + x) &= \frac{1}{2}kx^2 \\ mgh + mgx - \frac{1}{2}kx^2 &= 0 \\ kx^2 - 2mgx - 2mgh &= 0 \\ x &= \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori stando attenti al fatto che $18.6 \text{ N/cm} = 1860 \text{ N/m}$ e scartando il valore negativo otteniamo che la compressione della molla è di 0.11 m

Capitolo 8

La gravitazione universale

8.1 La legge di gravitazione universale

Nel capitolo 5 sezione 4 abbiamo visto come la forza di gravità è una delle forze fondamentali dell'universo.

Vediamo un'immagine per capire come si comporta

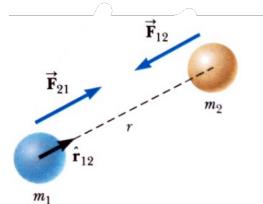


Figura 8.1: Attrazione gravitazionale tra due particelle

Notiamo come la forza gravitazionale è una forza attrattiva, ossia avvicina due corpi tra di loro. Inoltre dalla terza legge di Newton avremo che

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Lo stesso Newton formulò la legge di gravitazione universale che è un'equazione che ci permette di ricavare la forza di gravità tra due corpi di massa \$m_1\$ e \$m_2\$

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (8.1)$$

dove

- \$G\$: è la costante di gravitazione universale.
- \$r\$: è la distanza dei due corpi
- \$\hat{r}_{12}\$: è il versore che ci indica la direzione della retta che va da un corpo all'altro.

Questo vuol dire che la forza di gravità è proporzionale alle prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei due corpi e il segno negativo ci dice che la forza è attrattiva.

La costante di gravitazione fu misurata inizialmente da Henry Cavendish e vale

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \quad (8.2)$$

Se la costante non fosse così piccola anche oggetti di piccola massa eserciterebbero attrazione gravitazionale non trascurabile.

La formula della gravitazione universale ci da una spiegazione del perchè l'accelerazione di gravità non dipenda dal peso.

Per masse molto estese come quella della terra possiamo considerare tutta la massa della terra situata al suo centro.

La forza peso che abbiamo nella terra è in realtà la forza di gravità terrestre che ci spinge verso il suo centro. Dunque per un corpo ad altezza h possiamo scrivere

$$p = m_c g = G \frac{m_c M_t}{(r_t + h)^2}$$

dove m_c è la massa del corpo, M_t è la massa della terra e r_t il raggio della terra.

Dall'equazione possiamo togliere la massa del corpo e avremo che

$$g = G \frac{M_t}{(r_t + h)^2} \quad (8.3)$$

8.2 Le leggi di Keplero

Le leggi di Keplero sono leggi che descrivono la dinamica del moto dei pianeti enunciate dopo le osservazioni fatte da Newton.

8.2.1 Prima legge di Keplero

La prima legge di Keplero enuncia

L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

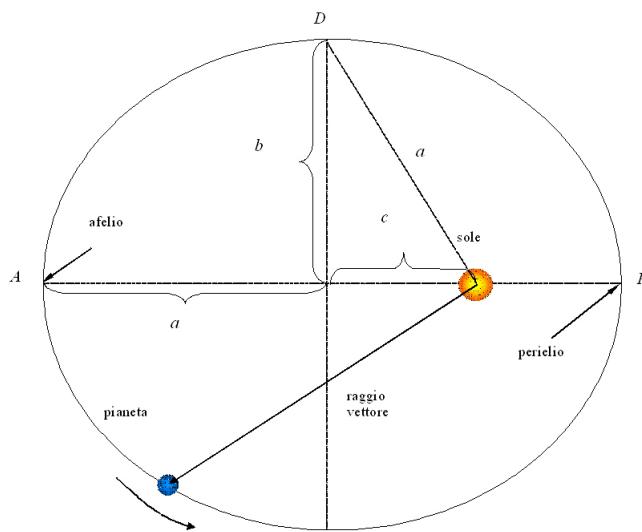


Figura 8.2: Esempio di orbita di un pianeta

Notiamo che l'orbita è descritta da due parametri: il semiasse maggiore e l'eccentricità. L'eccentricità e ci indica quanto è schiacciata l'ellisse in quanto è definita come

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Avremo che $0 \leq e < 1$ e più il valore è vicino a 1 più l'ellisse è schiacciata. Il punto più vicino della orbita alla stella si chiama perielio e quello più lontano afelio.

8.2.2 Seconda legge di Keplero

La seconda legge afferma che

Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali

Ossia la velocità areolare con cui il vettore che unisce il sole ad un pianeta è costante. Ciò vuol dire che la velocità del pianeta al perielio è massima e

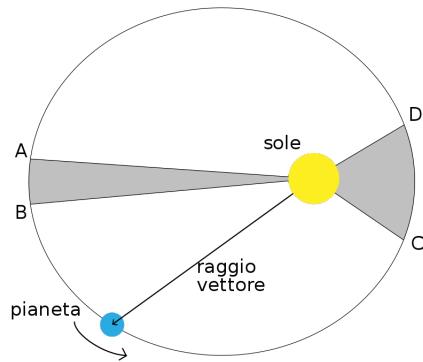


Figura 8.3: Il tempo per percorrere AB è uguale al tempo per percorrere CD

minimo all'afelio.

8.2.3 Terza legge di Keplero

La terza legge di Keplero enuncia che

I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore.

In termini matematici ciò vuol dire che

$$T^2 = ka^3 \quad (8.4)$$

dove k è la costante di proporzionalità.

8.3 Teorema del momento angolare

Chiamiamo momento angolare la seguente grandezza

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (8.5)$$

Ossia preso un punto materiale che ha una determinata velocità, chiamiamo momento angolare il prodotto vettoriale della distanza del punto materiale da un polo per la velocità del punto materiale stesso.

Il momento angolare ha modulo dato da

$$L = rmv \sin \vartheta \quad (8.6)$$

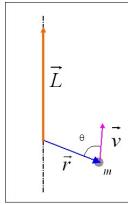


Figura 8.4: Momento angolare.

Chiamiamo momento della forza la seguente grandezza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (8.7)$$

ossia è il prodotto vettoriale della forza applicata ad un punto materiale per il vettore distanza da un polo. (Per esempio quando spingo per aprire una porta, la forza sarà la spinta, il polo il cardine e il vettore distanza il vettore che va dal cardine al punto in cui spingo)

Ci interessa sapere quando il vettore momento angolare è costante. Per vedere ciò deriviamo il momento angolare rispetto al tempo e vediamo quando si annulla

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{r} \end{aligned}$$

Si osserva che $\frac{d\vec{r}}{dt}$ equivale alla velocità tangenziale e che $\frac{d\vec{v}}{dt}$ equivale all'accelerazione tangenziale. Scriveremo allora

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

$\vec{v} \times m\vec{v}$ va via in quanto il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo.

Ci rimane $\vec{r} \times m\vec{a}$ che è il momento della forza

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{F} = \vec{M} \quad (8.8)$$

Questo prende il nome di teorema del momento angolare. Ne deriva che il momento angolare è nullo quando

1. La distanza \vec{r} o la forza applicata \vec{F} è nulla.
2. La forza applicata \vec{F} al punto è sempre parallela alla direzione.

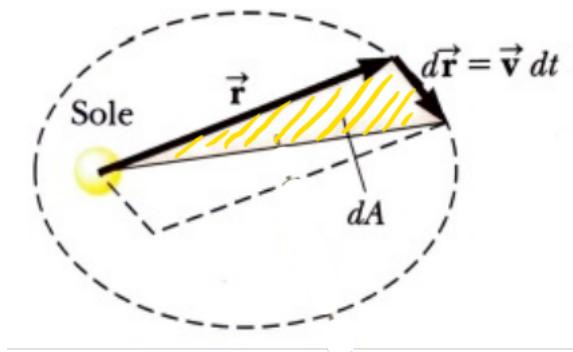
Il secondo punto si verifica nell'orbita planetaria. Infatti

$$\vec{M}_g = \vec{r} \times \vec{F}_g = \vec{r} \times G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} = 0 \quad (8.9)$$

In quanto la forza di gravità è parallela alla distanza del pianeta dalla stella. Questo risultato ci permette di dimostrare la seconda e terza legge di Keplero.

8.3.1 Dimostrazione della seconda legge di Keplero

Per la dimostrazione risulta utile un supplemento grafico per capire di cosa parliamo



Prendiamo dei pezzettini infinitesimali di area. Quest'area la possiamo vedere come il modulo del prodotto vettoriale (questo perché esso è l'area del parallelogramma creato dai due vettori) della distanza tangenziale percorsa per la distanza del sole dal pianeta. Dividiamo poi per due.

Definiamo la distanza tangenziale come il prodotto tra la velocità per l'intervallo di tempo.

Avremo che

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt|$$

Moltiplichiamo e dividiamo per la massa in modo tale da ottenere il modulo del momento angolare

$$dA = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| dt = \frac{1}{2m} L dt$$

Dividendo entrambi i termini otteniamo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (8.10)$$

Ossia la velocità areolare è uguale al modulo del momento angolare diviso il doppio della massa.

Ma come abbiamo visto prima il momento angolare di un pianeta è costante e di conseguenza la velocità areolare stessa.

8.3.2 Dimostrazione della terza legge di Keplero

Consideriamo le orbite planetarie e approssimiamole a orbite circolari.

Questo vuol dire che il pianeta suisce un'accelerazione centripeta data dalla forza di gravità. Denotiamo con m_p la massa del pianeta e m_s la massa del sole

$$F_g = m_p \frac{v^2}{r}$$

$$G \frac{m_p m_s}{r^2} = m_p \frac{v^2}{r} = m_p \omega^2 r$$

Possiamo togliere la massa del pianeta dall'equazione e sapendo che $\omega = \frac{2\pi}{T}$ possiamo riscrivere l'equazione e togliere il raggio alla seconda dal termine a sinistra

$$G m_s = \frac{4\pi^2}{T^2} r^3 \implies T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_s} r^3$$

Se consideriamo $k = \frac{4\pi^2}{G m_s}$ notiamo che è uguale alla formula $T^2 = k a^3$

8.4 L'orbita dei satelliti

Generalmente possiamo approssimare l'orbita dei satelliti a una traiettoria circolare con raggio della terra sommata all'altezza dell'orbita. Ciò

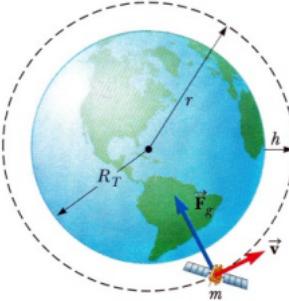


Figura 8.5: Esempio di satellite che orbita e le forze in gioco.

vuol dire che essi si muovono di moto circolare uniforme e che subiscono un'accelerazione centripeta data dalla forza gravitazionale terrestre, i.e.

$$F_g = m_s \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

$$G \frac{m_s M_T}{(R_T + h)} = m_s \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

Sapendo che $\omega^2 r = \frac{v^2}{r}$ e che $\omega = \frac{2\pi}{T}$ possiamo ricavarci il perido al quadrato dalla terza legge di Keplero togliendo la massa del satellite che compare in

entrambi i termini

$$G \frac{M_T}{(R_T + h)} = \frac{4\pi^2}{T^2} (R_T + h)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} (R_t + h)^3$$

Satelliti particolari sono quelli geostazionari che sono fermi relativamente ad un punto sulla terra. Essi sono essenziali per trasmettere segnali sulla terra. Questo vuol dire che hanno periodo uguale a quello terrestre ossia 24 ore o $8.64 \cdot 10^4$ s. Proviamo a calcolare a che altezza devono stare dalle formule appena ricavate

$$(R_T + h) = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} \approx 42300 \text{ km}$$

Sapendo che il raggio della terra è di circa 6300 km allora i satelliti geostazionari devono orbitare a circa 36000 km di altezza.

8.5 Il campo gravitazionale

Fino ad adesso abbiamo considerato la gravità tramite interazioni dirette tra corpi mediante delle forze.

Nella realtà abbiamo i cosiddetti campi. Un corpo genera un "campo gravitazionale" in cui ogni oggetto al suo interno subisce una forza di attrazione gravitazionale.

Il campo diventa il mediatore dell'interazione delle masse in gioco in un sistema

$$\text{massa}_1 \rightarrow \text{campo} \leftarrow \text{massa}_2$$

Per un punto nel campo la forza di attrazione del corpo sarà data da

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2} \hat{r} \quad (8.11)$$

dove

- m : è la massa del corpo che genera il campo
- r : è la distanza dal punto al corpo
- \hat{r} : è il versore che indica la retta che va dal punto al corpo.

In un campo sono presenti le linee di forza, ossia i vettori che in ogni punto del campo rappresentano la forza di attrazione.

Queste linee sono tangenti al campo e il loro verso di percorrenza indica il verso del campo.

La densità di queste linee di forza è proporzionale all'intensità del campo. Se

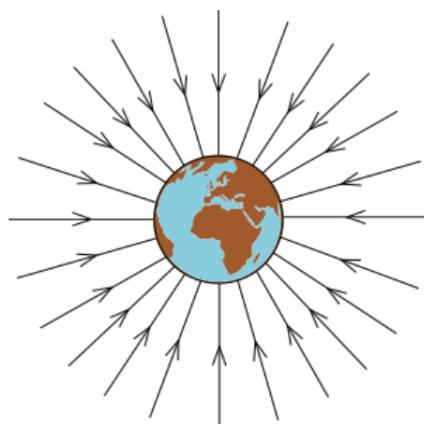
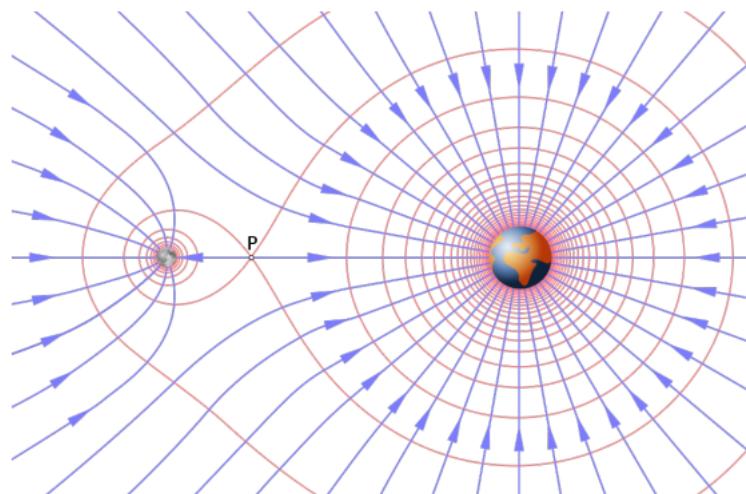


Figura 8.6: Esempio del campo terrestre della terra.

vediamo la figura sovrastante si può graficamente vedere come avvicinandoci alla terra le linee di forza diventino più dense.

Nello spazio ovviamente non abbiamo solo corpi con campi ben definiti senza interruzioni. I satelliti orbitano ai loro pianeti e i pianeti orbitano le stelle. Quando è così le linee di forza si sommano vettorialmente.

Vediamolo con un esempio grafico rappresentante il campo terra-luna



Le linee rosse rappresentano le orbite che un corpo potrebbe avere in base all'intensità delle forze applicate dalla terra o dalla luna.

8.6 L'energia potenziale gravitazionale

La forza gravitazionale è una forza conservativa e dunque il lavoro compiuto dalla gravità verso un punto materiale è la differenza dell'energia potenziale del punto stesso i.e. $W = -\Delta U$.

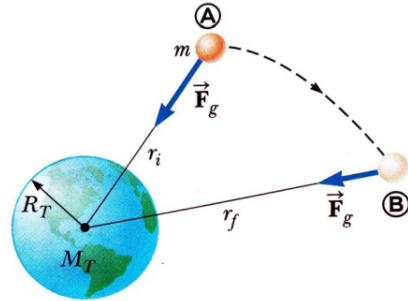


Figura 8.7: Andiamo a vedere il lavoro compiuto per lo spostamento in figura.

Vediamo quante vale il lavoro infinitesimale, ossia quello per effettuare uno spostamento infinitesimo

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -G \frac{mM_T}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

Prendendo la figura di riferimento vediamo che $\hat{r} \cdot d\vec{s}$ sarebbe la proiezione di $d\vec{s}$ su \hat{r} e dunque uno spostamento infinitesimale nella distanza dalla terra dr . Dunque

$$dw = -G \frac{mM_T}{r^2} dr$$

Integrando da r_i a r_f otteniamo il lavoro totale

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_i}^{r_f} -G \frac{mM_T}{r^2} dr = \\ &= -GmM_T \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= -GmM_T \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f} = \\ &= -GmM_T \left(-\frac{1}{r_f} + \frac{1}{r_i} \right) \end{aligned} \tag{8.12}$$

L'energia potenziale gravitazionale sarà definita dunque come

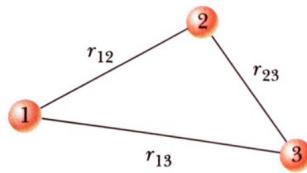
$$U(r) = -GmM_T \left(\frac{1}{r} \right) \tag{8.13}$$

Notiamo che per $r \rightarrow \infty$ l'energia potenziale tende a 0 dunque per distanze molto grosse la gravità può non esser considerata.

8.6.1 Energia potenziale di più masse

In un sistema di più masse l'energia potenziale è l'energia per tenere i corpi a quella distanza o l'inverso per separare i corpi.

È data dalla somma di tutte le energie potenziali tra coppie di masse. Vediamo un esempio di sistema a 3 masse L'energia potenziale totale sarà data



data da

$$\begin{aligned} U_{tot} &= U_{12} + U_{13} + U_{23} = \\ &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G \frac{m_2 m_3}{r_{23}} = \\ &= -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \end{aligned} \quad (8.14)$$

8.6.2 L'energia potenziale vicino alla superficie terrestre

Immaginiamo di avere un punto materiale che cade da un punto A a un punto B , entrambi vicini alla superficie terrestre. Avremo che

$$\begin{aligned} \Delta U &= -GM_t m \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) = \\ &= -GM_t m \left(\frac{r_a - r_b}{r_b r_a} \right) \end{aligned}$$

Possiamo approssimare $r_a r_b$ come r_t^2 in quanto i valori sono molto simili e possiamo approssimare $r_a - r_b$ come l'altezza da cui cade h . Avremo che

$$\Delta U = -GM_t m \frac{h}{r_t^2} = -mgh \quad (8.15)$$

8.6.3 Energia meccanica di un satellite

Un satellite in orbita a distanza r dal centro della terra possiede sia l'energia cinetica che l'energia potenziale gravitazionale. Avremo un moto circolare uniforme con l'accelerazione centripeta data dalla forza di gravità

$$G \frac{m M_t}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

da cui il quadrat velocità di orbita sarà

$$v^2 = G \frac{M_t}{r}$$

Ricaviamo così l'energia meccanica totale

$$\begin{aligned} E_M &= E_K + U = \\ &= \frac{1}{2} m G \frac{m M_t}{r} - \frac{G m M_t}{r} = \\ &= -\frac{G m M_t}{2r} \end{aligned} \tag{8.16}$$

8.6.4 La velocità di fuga

Chiamiamo velocità di fuga la velocità minima necessaria per sfuggire all'attrazione gravitazionale.

Per calcolare ciò dobbiamo confrontare l'energia meccanica in partenza e l'energia meccanica per distanza tendenti all'infinito, i.e.

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - G \frac{m M_t}{r_t} = \frac{1}{2} m v_f^2 + U(\infty)$$

L'energia potenziale per distanze tendenti a infinito è nulla e la velocità finale a sarà 0 Avremo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_i^2 - G \frac{m M_t}{r_t} &= 0 \\ \frac{1}{2} v_i^2 - G \frac{M_t}{r_t} &= 0 \\ \implies v_f &= \sqrt{\frac{2 G M_t}{r_t}} \end{aligned} \tag{8.17}$$

Aggiustando la massa e il raggio la formula vale per tutti i corpi.

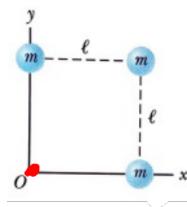
Per la terra la velocità di fuga è di 11.2 km/s o 40000 km/h.

8.7 Esercizi di riepilogo

8.7.1 Esercizio n. 1

Tre corpi di massa uguale sono posti nei vertici di un quadrato di lato l come nella figura sottostante.

Determinare il campo gravitazionale dovuto alle tre masse che è presente nel quarto vertice.



Il campo gravitazionale nel quarto vertice sarà dato dalla somma vettoriale dei campi gravitazionali di ogni massa.

La componente x del campo sarà data dal campo della massa nel terzo vertice (la massa nell'asse x) e dalla componente orizzontale del campo gravitazionale della massa nel secondo vertice

$$g_x = g_3 + g_{2x} = G \frac{m}{l^2} + G \frac{m}{2l^2} \cos 45^\circ = G \frac{m}{l^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

La componente y sarà data dal campo della massa nel primo vertice (la massa nell'asse y) e dalla componente verticale della massa nel secondo vertice.

Per simmetria dei quadrati le due componenti sono uguali.

$$g_y = g_1 + g_{2y} = G \frac{m}{l^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

Scritta con la notazione dei versori

$$\mathbf{g} = \left[G \frac{m}{l^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right] (\hat{i} + \hat{j})$$

Il modulo è dato da

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = G \frac{m}{l^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right)$$

8.7.2 Esercizio n. 2

Che velocità lineare deve avere un satellite per stare su un'orbita circolare ad un'alitudine di 160 km? Quale sarà il suo periodo?

Dalla seconda legge di Newton avremo che il corpo subisce un'accelerazione (quella centripeta) data dalla forza di gravità. Da ciò calcoliamo la velocità

$$\begin{aligned} G \frac{m M_T}{(r_t + h)^2} &= m \frac{v^2}{(r_t + h)} \\ G \frac{M_t}{(r_t + h)} &= v^2 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{G \frac{M_t}{(r_t + h)}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{5.98 \cdot 10^{24}}{(6370 + 160) \cdot 10^3}} = 7815 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Per un corpo in moto circolare la velocità è data dal perimetro rapportato per il periodo. Da ciò ricaviamo il periodo stesso

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi(r_t + h)}{T} \\ \Rightarrow T &= \frac{2\pi(r_t + h)}{v} = 5244 \text{ s} \end{aligned}$$

Capitolo 9

La carica elettrica

9.1 I modelli atomici

Prima di partire vediamo la differenza dei principali modelli dell'atomo che ci permettono di capire cos'è la carica elettrica.

Partiamo con il *modello di Rutherford*, modello in cui l'atomo è composto da un nucleo composto di protoni (di carica positiva) e neutroni (di carica negativa) che compone la carica positiva dell'atomo e gli elettroni (in numero uguale ai protoni) che orbitano attorno al nucleo che compongono la carica negativa bilanciandosi con il nucleo rendendo l'atomo neutro. Il modello di

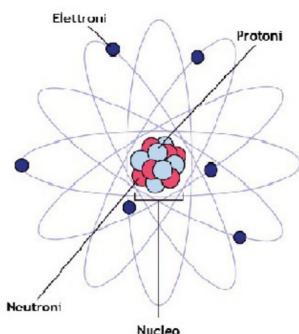


Figura 9.1: Esempio di atomo nel modello di Rutherford.

Rutherford pur essendo quasi corretto non da una descrizione realistica delle orbite degli elettroni.

Un modello che prova a vedere cosa succede è il *modello di Bohr*.

In questo modello gli elettroni orbitano attorno al nucleo in orbite in funzione dell'energia. Man mano che l'orbita è più lontana dal nucleo l'elettrone possiede più energia.

Quando un elettrone passa a un'orbita più vicina viene liberata energia emettendo un fotone.

Viceversa quando un atomo passa ad un'orbita più lontana viene liberata energia.

L'energia per cambiare stato è data da

$$E = h\nu \quad (9.1)$$

dove

- h : è la costante di Plank.
- $\nu = \frac{E_f - E_i}{h}$: è il rapporto delle differenze di energia nel cambiamento di stato per la costante di Plank.

Il momento angolare di un elettrone sarà dato invece da

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad (9.2)$$

dove n è il numero quantico principale.

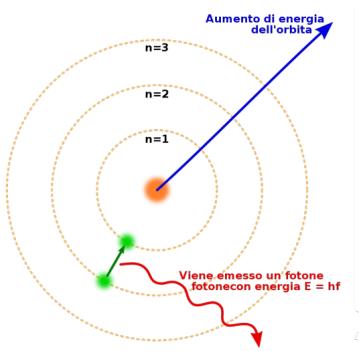


Figura 9.2: Modello di Bohr

Per virtù del principio di indeterminazione di Heisenberg che afferma che non è possibile conoscere simultaneamente posizione e quantità di moto di un elettrone si è passati ad un modello in cui si dà la descrizione dell'orbita in termini probabilistici: il modello degli orbitali.

Per ogni stato non si ha la posizione precisa dell'elettrone ma una distribuzione di probabilità in cui esso potrebbe essere.

9.2 La struttura elettrica della materia: conduttori e isolanti

In natura la materia può essere raggruppata in due categorie: conduttori e isolanti.

I conduttori (quali i metalli) formano un reticolo cristallino in cui per ogni atomo uno o più elettroni (quelli più esterni ossia quelli più debolmente legati) sono liberi di muoversi per tutto il volume della materia.

I materiali conduttori generalmente hanno atomi legati tramite legame ionico (in quanto gli atomi "perdonano" gli elettroni che girano liberamente, diventando degli ioni).

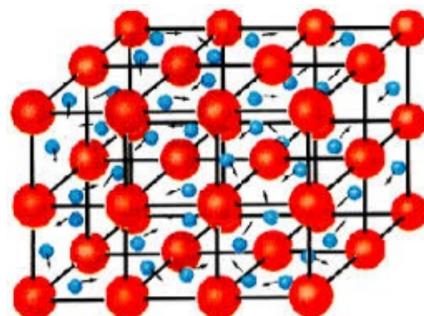


Figura 9.3: Esempio di struttura molecolare di un conduttore: in rosso gli ioni e in blu gli elettroni.

Nei materiali isolanti invece non abbiamo elettroni liberi e perciò non conducono elettricità.

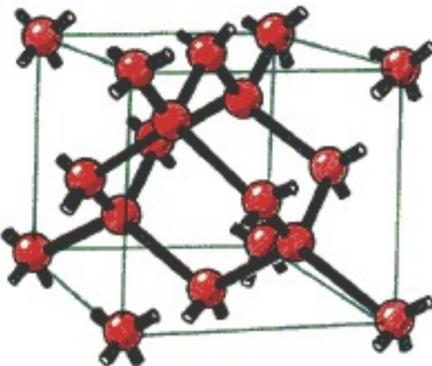


Figura 9.4: Esempio della struttura del diamante: l'assenza di elettroni lo rende un isolante.

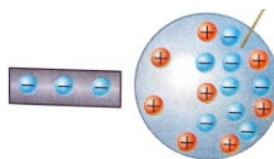
9.3 La carica elettrica e l'induzione

Chiamiamo carica elettrica di un materiale la sua differenza di elettroni rispetto ai protoni. Poiché gli elettroni han carica negativa, se essi sono presenti in quantità maggiori allora la carica elettrica negativa, viceversa quando abbiamo più protoni la carica è positiva.

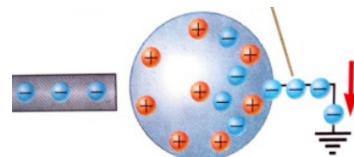
Inoltre cariche dello stesso segno si respingono, cariche del segno opposto si attraggono. Chiamiamo il processo di carica di un corpo *induzione*.

Per i conduttori l'induzione avviene nel seguente metodo:

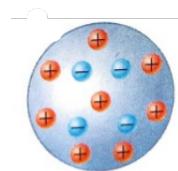
1. Supponiamo di avvicinare un materiale carico negativamente al nostro corpo conduttore: le cariche negative provando repulsione si allontanano da esso



2. Collegando un filo che va a terra con il corpo, alcuni degli elettroni trovano un passaggio e si scaricano.



3. Eliminano il filo e allontando il materiale negativo, gli elettroni si distribuiscono uniformemente. Avendo meno elettroni ci ritroviamo con un corpo carico positivamente.



Come notiamo non c'è stato contatto.

Questa cosa non succede nell'induzione nei corpi isolanti. Il processo più semplice per caricare un corpo isolante è tramite sfregamento. Tramite agente meccanico gli elettroni vengono separati e passano da un corpo all'altro.

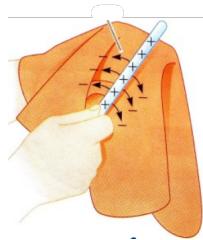


Figura 9.5: Strofinando una bacchetta di vetro su un panno, gli eltroni del primo vengono "catturati" dal secondo. Otteniamo un corpo carico positivamente ed uno negativamente.

Un altro tipo di induzione è dovuto al contatto di un isolante carico con un'altro di carica neutra.

Quello che si viene a creare è una polarizzazione del materiale: ossia abbiamo uno spostamento delle cariche dalla loro posizione di equilibrio in modo da formare microscopici dipoli elettrici.

Questo porta ad avere una forza attrattiva tra corpo ed isolante.

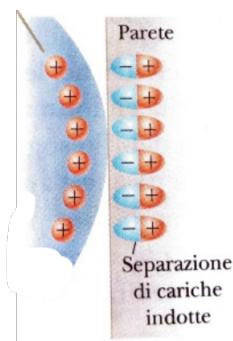


Figura 9.6: Induzione tra isolanti.

9.4 La legge di Coulomb e proprietà della carica elettrica

La legge di Coulomb esprime e descrive la forza esercitata tra due cariche puntiformi a riposo. Avremo che

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

dove

- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$: è una costante data dalla costante dielettrica ϵ_0 .
- q_1, q_2 : sono le cariche elettriche delle due particelle.

- r : è la distanza tra la due particelle, \hat{r} è il versore che indica la direzione tra le due particelle.

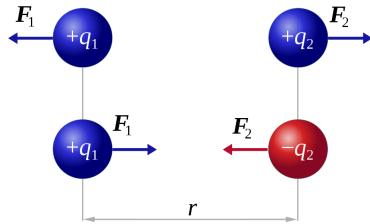


Figura 9.7: Dalla terza legge della dinamica $F_1 = -F_2$. Notiamo come cariche di segno uguale hanno forze repulsive, cariche di segno opposto hanno forze attrattive.

L'unità di misura della carica elettrica è il Coulomb con simbolo C e si ha che

$$1 C = 6.24 \cdot 10^{18} \text{ elettroni} \quad (9.3)$$

Questo vuol dire che un corpo di carica positiva di $1 C$ ha una carenza di tali elettroni.

Una carica elettrica non può avere valori "a caso" ma esiste solo tramite multipli interi della carica fondamentale ' e '. Ossia

$$q = Ne \quad (9.4)$$

dove $N \in \mathbb{Z}$ ed $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$.

Questa proprietà prende nome di *quantizzazione della carica elettrica*.

e rappresenta la carica elettrica (senza segno) di un elettrone o di un protone. N ci da oltre al moltiplicatore il segno della carica indicandoci se abbiamo una carica positiva o negativa.

Infine in un sistema isolato la somma algebrica di tutte le cariche rimane costante nel tempo: questa proprietà prende il nome di *conservazione della carica elettrica*.

Capitolo 10

Il campo elettrico

10.1 Il campo elettrico

Sia la gravità che la carica elettrica condividono lo stesso modello matematico.

Abbiamo descritto l'interazione delle cariche elettriche tramite forze. Adesso vediamo l'interazione mediante una carica sorgente che genera un campo che interagisce con un campo di prova.

Il campo di prova è concettualmente una carica positiva e infinitesima che prova 'repulsione' verso cariche positive e 'attrazione' verso cariche negative in un modello

$$\text{carica sorgente} \rightarrow \text{campo} \leftarrow \text{carica di prova}$$

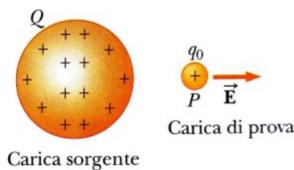


Figura 10.1: Esempio di interazione in un campo elettrico.

Il campo elettrico \vec{E} è un campo vettoriale a tre dimensioni e perciò si espande in tutto lo spazio e viene rappresentato tramite una tripla di valori $\vec{E} = (x, y, z)$. Il valore di \vec{E} è dato dal rapporto della forza elettrica per la carica di prova, i.e.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2 q_0} \cdot \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} \quad (10.1)$$

Allora la forza verso una carica q_0 in un campo elettrico sarà $\vec{F} = q_0 \vec{E}$. Una carica elettrica produce le cosiddette linee di campo, curve in cui la direzione

del vettore del campo (in questo caso la direzione della forza) è tangente ad esso.

Queste curve sono radiali e in cariche positive esse sono uscenti, mentre in cariche negative esse sono entrante.

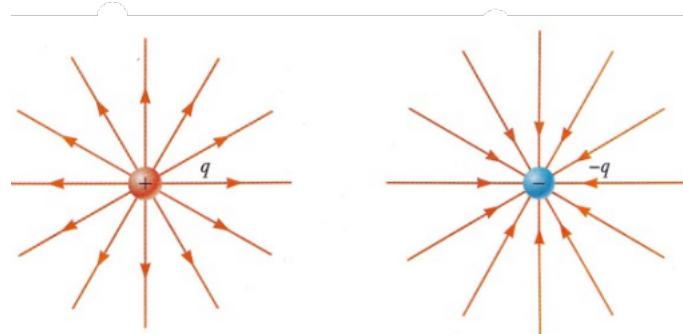


Figura 10.2: Linee di campo in una carica positiva e una negativa.

Man mano che ci avviciniamo alla sorgente della carica le linee di campo si addensano e l'effetto della carica è sempre più grande.

10.2 Il dipolo elettrico

Chiamiamo dipolo elettrico un sistema composto da due cariche elettriche uguali e di segno opposto a distanza costante $2a$ nel tempo. Calcoliamo

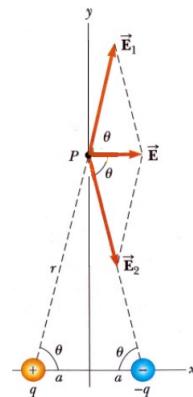


Figura 10.3: Effetto del campo elettrico su un punto P nel sistema.

il campo elettrico in un punto P del sistema posto a distanza r dalle due cariche (come in figura 10.3).

Come notiamo le cariche hanno stessa intensità ma di segno opposto.

Nel punto P abbiamo la forza repulsiva della carica elettrica positiva e la forza attrattiva della carica negativa.

Per via della stessa intensità le loro componenti orizzontali sono uguali. Questo significa che \vec{E} è il doppio di una delle due componenti orizzontali di E_1 o E_2

$$E = 2E_1 \cos \vartheta = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \vartheta$$

Si osserva che $\cos \vartheta = \frac{a}{r}$. Se consideriamo il punto P ad un'altezza y allora $r = \sqrt{a^2 + y^2}$ dal teorema di Pitagora. Sostituendo otteniamo

$$E = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (10.2)$$

Chiamiamo $2aq$ il momento dipolo.

10.3 Distribuzioni continue di cariche

Fino ad ora nello studio delle cariche abbiamo considerato solo particelle e masse puntiformi.

In realtà possiamo avere anche volumi, superfici o linee cariche elettricamente che generano un campo elettrico.

10.3.1 Distribuzione di cariche in volumi

Prendiamo un volume τ e una funzione $\rho(x, y, z)$ che per ogni punto del volume ci indica la densità di carica (unità di misura $\frac{C}{m^3}$). L'infinitesimo di carica dq darà dato da

$$dq = \rho(x, y, z)d\tau \quad (10.3)$$

La carica totale del volume invece

$$q = \int_{\tau} \rho(x, y, z)d\tau \quad (10.4)$$

L'infinitesimo di carica sarà dato da

$$d\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} \quad (10.5)$$

10.3.2 Distribuzione di cariche in superfici

Prendiamo una superficie Σ e un suo infinitesimo $d\Sigma$ e una funzione di densità di superficie $\sigma(x, y, z)$ (a tre coordinate in quanto la superficie non è costante nello spazio). L'infinitesimo di carica è dato da

$$dq = \sigma(x, y, z)d\Sigma \quad (10.6)$$

La carica totale è data da

$$q = \int_{\Sigma} \sigma(x, y, z)d\Sigma \quad (10.7)$$

10.3.3 Distribuzione di cariche lineari

Prendiamo una linea x con infinitesimo dx e densità di carica $\lambda(x, y, z)$ (a tre variabili per la stessa motivazione di prima). L'infinitesimo di carica è dato da

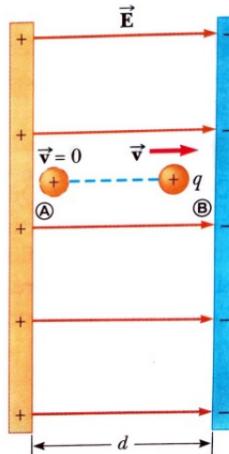
$$dq = \lambda(x, y, z)dx \quad (10.8)$$

La carica totale è data da

$$q = \int_x \lambda(x, y, z)dx \quad (10.9)$$

10.4 Moto di una carica in un campo elettrico uniforme

Immaginiamo di avere una carica positiva posta tra due piastre, una di carica positiva e una di carica negativa come nella figura sottostante e che il campo elettrico sia costante in tutta l'area considerata.



Poichè il campo elettrico è costante, la forza applicata sulla carica è sempre costante. Questo implica che il protone si muove di moto uniformemente accelerato (seconda legge della dinamica).

Sapendo che $\vec{F} = q\vec{E}$ la descrizione dinamica che chiamo al sistema sarà

$$\vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (10.10)$$

Assumendo che la particella sia nell'origine e che non abbia velocità iniziale, la sua velocità finale sarà data da

$$v_f = \frac{qE}{m}t \quad (10.11)$$

da cui ricaviamo il tempo di percorrenza totale della particella fino al raggiungimento della velocità v_f $t = \frac{mv_f}{qE}$. La legge oraria sarà data da

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m} \cdot \frac{(mv_f)^2}{(qE)^2} = \frac{mv_f^2}{2qE} \quad (10.12)$$

Assumendo di aver percorso una distanza x la velocità al quadrato sarà

$$v^2 = \frac{2xqE}{m}$$

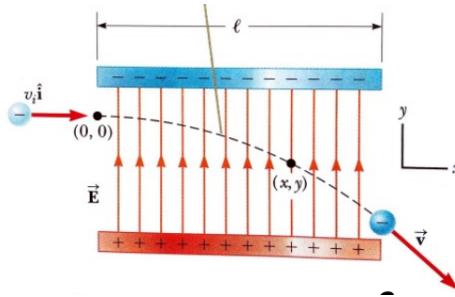
Questa ci serve per calcolare l'energia cinetica della particella dopo aver percorso una distanza x

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{2xqE}{m} = xqE \quad (10.13)$$

Il lavoro è definito come la differenza di energia cinetica. Considerato che la particella ha velocità iniziale 0 il lavoro del campo elettrico equivale all'energia cinetica della particella, i.e.

$$W = \Delta E_K = qEx \quad (10.14)$$

Adesso vediamo il caso in cui le piastre siano parallele all'asse x con un elettrone che entra nel campo elettrico con velocità v come nella figura sottostante



Rispetto l'asse x la particella non subisce forze e dunque si muove di velocità costante. La legge oraria rispetto l'asse x sarà dunque

$$x = v_i t \quad (10.15)$$

Da cui ricaviamo il tempo per percorrere la distanza x

$$t = \frac{x}{v_i}$$

Nell'asse y il campo elettrico provoca una forza che è costante per tutta la traiettoria. Dunque abbiamo moto uniformemente accelerato. Ipotizzando

che nell'istante iniziale la particella si trovi nell'origine degli assi, la legge oraria sarà

$$y = -\frac{1}{2}at^2 = -\frac{eE}{2m}t^2 \quad (10.16)$$

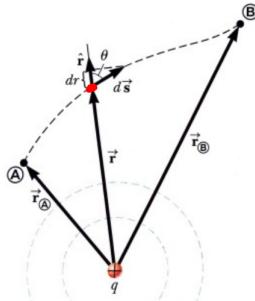
L'accelerazione l'abbiamo ricavato dividendo la forza elettrica ('e' è la carica elettrica dell'elettrone) per la massa. Sostituendo la t con quell ricavata dalla equazione 10.15 otteniamo

$$y = -\frac{eE}{2m} \cdot \frac{x^2}{v_i^2} \quad (10.17)$$

Che è l'equazione di una parabola. Cio ci indica che l'elettrone si muove di moto parabolico.

10.5 Il lavoro del campo elettrico

Ipotizziamo di avere una particella di carica q_0 che si muove dal punto A al punto B come nella figura sottostante, interagendo con il campo di una carica q



Poichè la forza creata dal campo elettrico è radiale l'infinitesimo di lavoro sarà dato da

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \cdot \hat{r}$$

Notiamo (analogamente al campo gravitazionale) che $d\vec{s} \cdot \hat{r}$ è la proiezione di $d\vec{s}$ su \hat{r} . Questo sarà il nostro infinitesimo di spostamento di distanza dalla carica $dr = rds \cos \vartheta$. Dunque avremo che

$$dW = F \cdot dr \quad (10.18)$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned}
 W &= \int_A^B F dr = \\
 &= \int_A^B \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \\
 &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \\
 &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)
 \end{aligned} \tag{10.19}$$

Come si nota la traiettoria della particella non influisce sul lavoro svolto dunque il campo elettrostatico è conservativo.

L'energia potenziale di una carica q_0 in un campo elettrico generato da una carica q sarà dunque

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi r} \tag{10.20}$$

10.6 Il potenziale elettrico

Volendo dare una grandezza indipendente dalla carica di prova, al posto di integrare $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ integriamo $\vec{E} \cdot d\vec{s}$: otteniamo il *potenziale elettrico*. e lo indichiamo con il simbolo $V(r)$.

Per ogni posizione nello spazio della carica q_0 abbiamo un valore di energia potenziale U relativa ad una configurazione del sistema in cui l'energia potenziale stessa vale 0. Ossia la nostra energia potenziale di un punto del sistema è confrontata ad una distanza "infinita" tale da poter dire che $U(\infty) = 0$.

L'energia potenziale di una carica di prova in un punto è il lavoro che deve compiere il campo elettrico tramite la forza elettrica per spostare la carica dall'infinito (ovvero un punto arbitrario lontano in cui campo ha effetti ininfluenti) a quel punto ossia $\Delta U = U(\infty) - U(r) = -U(r)$. Adesso proviamo a definire il potenziale elettrico analogamente sapendo che

$$U(\infty) = V(\infty) = 0$$

Avendo il punto di riferimento in cui il potenziale è nullo lo confrontiamo con il potenziale a distanza r

$$\Delta V = V(\infty) - V(r) = 0 - V(r)$$

Quello che otteniamo è

$$-V(r) = - \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} \implies V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{10.21}$$

Ma allora ciò vuol dire che

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_0} \quad (10.22)$$

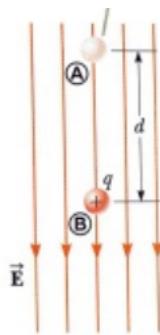
Da questo possiamo scrivere la seguente relazione tra lavoro e potenziale elettrico sapendo che $W = -\Delta U$

$$\frac{W}{q_0} = -\Delta V \implies \frac{\Delta U}{q_0} = \Delta V \quad (10.23)$$

L'unità di misura del potenziale elettrico nel SI è $\frac{J}{C}$ che prende il nome di Volt e si indica con il simbolo V .

10.7 Differenze di potenziale in campi uniformi

Partiamo col caso base. Immaginiamo di avere una carica positiva che si sposta in un campo elettrico come nella figura sottostante



Diamo la seguente descrizione

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

in quanto il lavoro compiuto da A a B è $W = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$: dividendo per $-q$ otteniamo la differenza di potenziale ΔV dalla (10.23).

Poichè $\vec{E} \parallel d\vec{s}$ allora riscriviamo il tutto come

$$\Delta V = - \int_A^B E ds = -Ed \quad (10.24)$$

Dunque $\Delta U = q\Delta V = -qEd$.

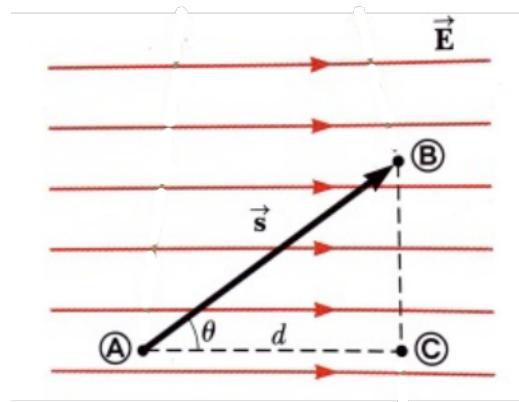
Nel caso la carica positiva di dovesse muovere da B verso A quello che

succede è che $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ sarebbe equivalente a $Eds \cos \pi$ in quanto il campo e lo spostamento hanno verso opposto. Ciò che otteniamo è

$$\Delta V = -E \cos \pi \int_A^B ds = Ed$$

Allora $\Delta U = q\Delta V = qEd > 0$ dunque la carica acquista energia potenziale. Da ciò ricaviamo che $W = -\Delta U = -qEd < 0$ ossia che il campo elettrico subisce lavoro.

La differenza di potenziale elettrico non dipende dalla traiettoria percorsa. Prendiamo la seguente immagine



La descrizione della differenza di potenziale data è

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B Eds \cos \vartheta$$

Osserviamo che $ds \cos \vartheta$ non è altro che la proiezione di ds su d . Dunque l'integrale vale $-Ed$ (sommendo tutte le proiezioni andiamo a ottenere d). Questo ci dice che

$$\Delta V = V_C - V_A = V_B - V_A = -Ed \quad (10.25)$$

10.7.1 Superfici equipotenziali

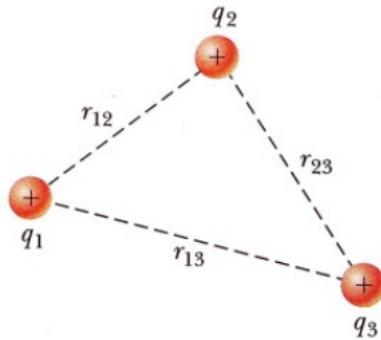
Chiamiamo superfici equipotenziali quelle superfici nel campo elettrico per cui ogni suo punto ha lo stesso potenziale elettrico. Ciò vuol dire che lo spostamento non comporta lavoro. i.e.

$$dV = \vec{E} \cdot d\vec{s} \implies \vec{E} \perp d\vec{s}$$

Dunque queste superfici sono perpendicolari al campo elettrico. Possiamo visualizzare per esempio una sfera di raggio r attorno a una carica che genera un campo. In ogni punto la sfera è perpendicolare alle linee di campo.

10.7.2 Potenziale di un sistema di cariche

Abbiamo la seguente situazione in cui ci sono 3 cariche nello spazio come nella figura sottostante



L'energia potenziale del sistema è data dalla somma dell'energia potenziale dell'interazione di ogni carica con le altre nel sistema, i.e.

$$\begin{aligned} U &= U_{12} + U_{13} + U_{23} = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \end{aligned} \quad (10.26)$$

Analogamente avremo che il potenziale sarà

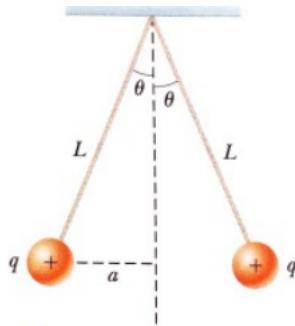
$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \quad (10.27)$$

10.8 Esercizi di riepilogo

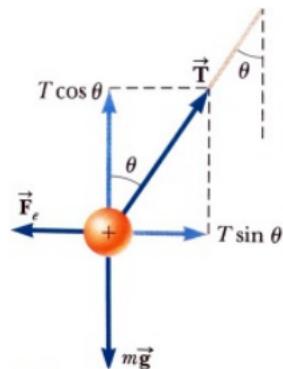
10.8.1 Esercizio n. 1

Due sferette caricate identiche, ciascuna di massa $m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ sono sospese in equilibrio nella posizione mostrata nella figura sottostante. La lunghezza di ogni filo è di 0.15 m e l'angolo ϑ è di 5° .

Calcolare la carica su ciascuna sfera.



Risolviamo questo problema tramite la dinamica. Disegniamo il diagramma di corpo libero per uno delle due cariche (i valori sono uguali per entrambi e dunque ne analizziamo solo uno).



Nell'asse x il corpo è fermo dunque la risultante delle forze è nulla. Le forze in gioco sono la forza elettrica data dalla repulsione da parte dell'altra carica e dalla componente orizzontale della tensione

$$T \sin \vartheta = F_e$$

Analogamente pure nell'asse y il corpo è fermo perciò avremo che

$$T \cos \vartheta = mg$$

Dividendo le due equazioni otteniamo il valore della forza elettrica

$$\begin{aligned}\frac{T \sin \vartheta}{T \cos \vartheta} &= \frac{F_e}{mg} \\ \tan \vartheta &= \frac{F_e}{mg} \\ F_e &= mg \tan \vartheta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\end{aligned}$$

Ci manca da trovare a . Dalle formule di trigonometria abbiamo che

$$a = L \sin \vartheta$$

Riprendendo l'ultima equazione avremo che

$$q = \sqrt{mg \tan \vartheta 4\pi\varepsilon_0(2a)^2}$$

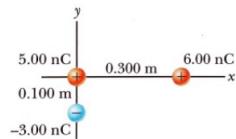
Sostituendo i valori otteniamo che $q = 4.42 \cdot 10^{-8} C$

10.8.2 Esercizio n. 2

Tre cariche sono disposte come in figura.

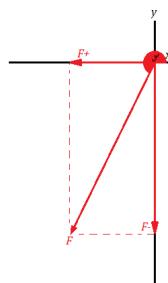
Determinare:

- (a) il modulo e
- (b) la direzione della forza elettrica agente sulla particella posta nell'origine.



Come notiamo la particella prova una forza repulsiva verso la carica a destra in quanto sono entrambe positive e prova una forza attrattiva verso la particella sotto di essa. La somma vettoriale delle due forze ci dà la forza elettrica totale.

Disegniamo il diagramma di corpo libero



Per l'asse x avremo

$$F_x = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0(d)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 30 \cdot 10^{-18}}{0.09} = 3.6 \cdot 10^{-6} N$$

Per l'asse y invece

$$F_y = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0(d)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 15 \cdot 10^{-18}}{0.01} = 13.5 \cdot 10^{-6} N$$

Con la notazione dei versori avremo

$$\vec{F} = (-3.6 \cdot 10^{-6} \hat{i} - 13.5 \cdot 10^{-6} \hat{j}) N$$

Modulo e angolo sono dati da

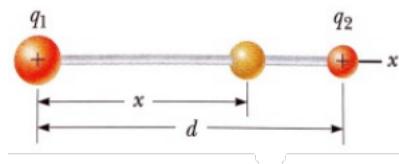
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1.39 \cdot 10^{-5} N$$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = 257.5^\circ$$

10.8.3 Esercizio n. 3

Due piccole perline, di carica positiva $q_1 = 3q$ e $q_2 = q$ sono fissate alle estremità di una sbarretta isolante orizzontale di lunghezza $d = 1.5\text{ m}$. La perlina con carica q_1 è nell'origine. Come mostrato nella figura sottostante, la perlina è libera di muoversi sulla sbarretta.

- (a) Determinare la posizione di equilibrio della terza perlina.
- (b) Determinare se l'equilibrio è stabile.



La terza perlina è in equilibrio quando è in una posizione in cui la forza della prima carica elettrica è uguale alla seconda.

Se x è la distanza da q_1 a Q allora $(d - x)$ è la distanza da Q a q_2 . Avremo che

$$\begin{aligned} \frac{q_1 Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} &= \frac{q_2 Q}{4\pi\epsilon_0 (d-x)^2} \\ \frac{3q}{x^2} &= \frac{q}{(d-x)^2} \\ 3(d-x)^2 &= x^2 \\ 2x^2 - 6dx + 3d^2 &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{9 \pm \sqrt{81 - 54}}{4} = 0.95\text{ m} \end{aligned}$$

La stabilità dell'equilibrio dipende dalla carica della terza perlina.

Se la carica è negativa, appena abbiamo una piccola perturbazione rende la forza di attrazione di una delle cariche minore dell'altra facendola accellerare verso la carica con più forte in quella determinata distanza.

Ciò è analogo ad una pallina in equilibrio su un dosso. Appena essa viene mossa la pallina cade sul verso di spostamento e non ritorna su.

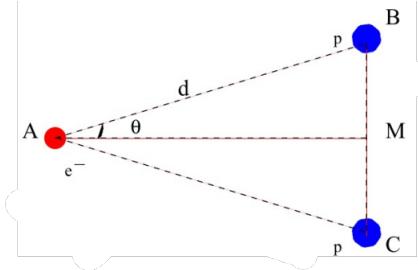
Viceversa, se la carica fosse positiva, appena abbiamo una perturbazione, la forza di repulsione delle cariche vicine la riporterebbe alla sua posizione originale dando stabilità all'equilibrio.

Esempio analogo è la pallina in una 'buca' convessa in cui se la spostiamo essa ritorna subito nel punto minimo.

10.8.4 Esercizio n. 4

Un elettrone ($m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} kg$ e due protoni sono disposti ai vertici di un triangolo isoscele ($d = 2.5 cm, \vartheta = 22^\circ$). L'elettrone parte da fermo dal punto A .

Determinare la sua velocità in M .



Per la risoluzione di questo problema usiamo la conservazione dell'energia meccanica.

Il potenziale elettrico nel punto A equivale a

$$V_A = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Per il potenziale in M ci tocca calcolare la lunghezza di BM

$$d' = BM = d \sin 22^\circ = 0.0094 m$$

Il potenziale in M sarà dunque

$$V_M = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d'}$$

Moltiplicando per la carica dell'elettrone troviamo subito l'energia potenziale. Adesso applichiamo la conservazione dell'energia meccanica sapendo che l'elettrone in A è fermo e perciò non ha energia cinetica

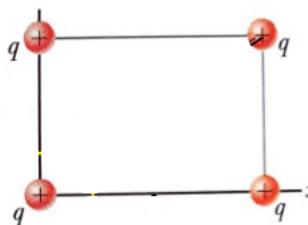
$$\begin{aligned} -qV_A &= -qV_M + \frac{1}{2}mv^2 \\ \frac{1}{2}mv^2 &= q(V_M - V_A) = q\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0 d'} - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 d}\right) \\ v^2 &= \frac{2q^2}{2\pi\epsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{d}\right) \end{aligned}$$

Sostituendo i dati otteniamo che la velocità dell'elettrone in M è di 258.6 m/s.

10.8.5 Esercizio n. 5

Quattro cariche puntiformi identiche ($q = 10 \mu C$) sono poste ai vertici di un triangolo rettangolo di lunghezza 60 cm e altezza 15 cm.

Determinare la variazione dell'energia potenziale elettrica del sistema quando la carica nell'angolo in basso a sinistra in figura viene trasportata da una distanza infinita fino ad occupare la sua posizione, assumendo che le altre tre particelle rimangano fisse nelle loro posizioni.



Per la risoluzione del problema calcoliamo all'inizio il potenziale del sistema senza la carica. Denotiamo con l la lunghezza del rettangolo e con h l'altezza

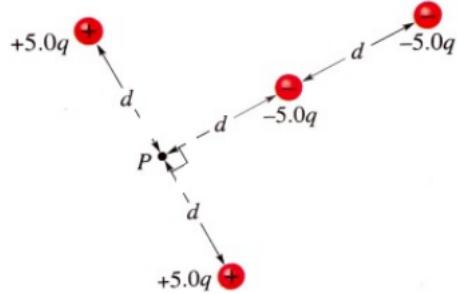
$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{l} + \frac{q}{\sqrt{l^2 + h^2}} + \frac{q}{h} \right)$$

Adesso la differenza di energia potenziale è data dalla differenza dell'energia potenziale quando è presente la quarta carica (moltiplichiamo q per il potenziale) con l'energia potenziale quando la carica è all'infinito (che vale 0). Quello che otteniamo è

$$\Delta U = U(P) - U(\infty) = qV_P = 8.96 J$$

10.8.6 Esercizio n. 6

Nella figura sottostante, qual è il potenziale netto nel punto P dovuto alle quattro cariche puntiformi, se $V = 0$ all'infinito? Per calcolare il potenziale



basta semplicemente sommare i potenziali dati da ogni carica al punto P

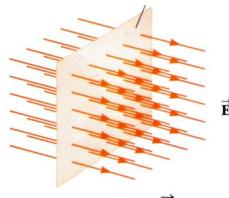
$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{i=1}^4 V_i = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{r_i} = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{5q}{d} + \frac{5q}{d} - \frac{5q}{d} - \frac{5q}{2d} \right) = \frac{5q}{4\pi\epsilon_0 2d}
 \end{aligned}$$

Capitolo 11

La legge di Gauss

11.1 Il flusso del campo elettrico

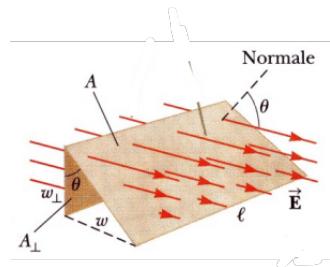
Chiamiamo flusso di un campo elettrico la misura del campo elettrico attraverso una superficie e viene indicato con la lettera ϕ . Per una superficie ortogonale alle linee di campo come la seguente



Avremo che se indichiamo con A l'area della superficie, il flusso varrà

$$\phi_E = E A \quad (11.1)$$

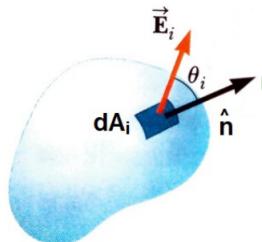
Nel caso la superficie non fosse perpendicolare al campo, valutiamo il flusso su un area ortogonale tale per cui le linee di campo passanti per essa sono uguali a quelle dell'area non ortogonale come nella seguente figura



Come si nota A_{\perp} crea un angolo θ con A : difatti essa sarebbe la proiezione della superficie sull'asse ortogonale al campo. Avremo perciò

$$\phi_E = E A_{\perp} = E A \cos (\theta) \quad (11.2)$$

Le superfici non sempre sono regolari. Prendiamo il seguente esempio



In questo caso consideriamo infinitesimi di flussi dati dal prodotto scalare delle linee di campo per gli infinitesimi di area, i.e.

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

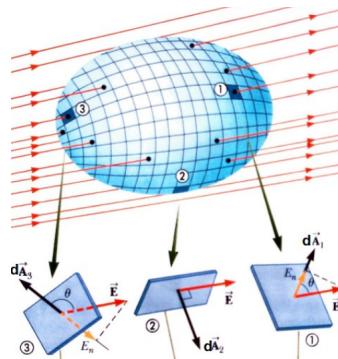
Se osserviamo l'immagine osserviamo che $d\vec{A}$ ha un verso dato dal versore \hat{n} che forma un angolo ϑ con \vec{E} . Quello che otteniamo sarà

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cos \vartheta dA$$

Integrando in Σ (la superficie) otteniamo il flusso totale

$$\phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\Sigma} E \cos \vartheta dA \quad (11.3)$$

Infine abbiamo il caso delle superfici chiuse come la seguente. Notiamo che



abbiamo tre casi

1. Il flusso elettrico è positivo in quanto l'angolo formato dal campo e l'area è compreso tra 0 e 90 gradi. Le linee in questo caso si diranno uscenti.
2. Il flusso elettrico è nullo in quanto i vettori del campo e dell'infinitesimo di area sono nulli in quanto essi sono ortogonali.

3. Il flusso elettrico è negativo in quanto l'angolo formato da campo e area è tra 90 e 180 gradi. Le linee di campo in questo caso si diranno entranti.

Data la superficie Σ il flusso elettrico è dato da

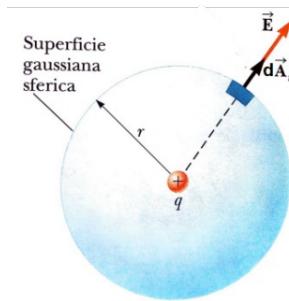
$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dA \quad (11.4)$$

Il flusso è proporzionale alla differenza di linee entranti con quelle uscenti. Notiamo che se le linee entranti sono pari a quelle uscenti il flusso totale è nullo.

11.2 La legge di Gauss

Supponiamo di avere una carica positiva. Supponiamo inoltre di avere un'ipotetica superficie sferica non reale in cui la carica sarà al suo centro. Chiamiamo questa superficie *superficie gaussiana sferica*.

Quello che otteniamo è



Vediamo come il campo è normale alla superficie (ossia le linee di campo sono ortogonali alla superficie) e perciò le linee di campo in ogni punto sono parallele al versore \hat{n} di direzione delle superfici infinitesimali $d\vec{A}$ e hanno stesso verso: dunque il prodotto scalare è il prodotto dei loro moduli

Il flusso della superficie sarà

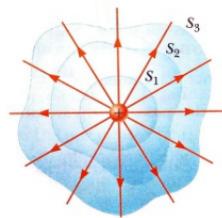
$$\begin{aligned} \phi_E &= \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dA \\ &= \oint_{\Sigma} E dA \\ &= E \oint_{\Sigma} dA = E 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Dalla legge di Coloumb avremo che

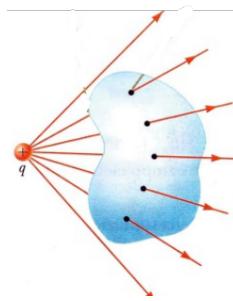
$$\phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (11.5)$$

Il risultato ottenuto è la legge di Gauss per i campi elettrici. Come notiamo non abbiamo dipendenza radiale: questo vuol dire che la sfera può avere un qualsiasi raggio e il flusso rimarrà sempre lo stesso.

Ma non dipende neanche dalla forma dell'oggetto. Basta vedere quest'immagine

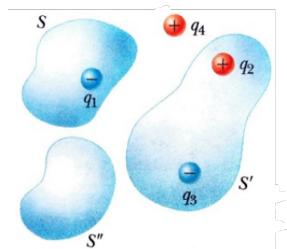


A prescindere dalla forma le linee uscenti sono sempre le stesse. La legge vale esclusivamente per cariche interne e non per cariche esterne: vediamo il seguente esempio



Si nota subito che il flusso è nullo in quanto le linee entranti sono uguali a quelle uscenti.

Adesso osserviamo il flusso in un sistema di cariche e superfici



Per la superficie S il flusso sarà dato da

$$\phi_E(S) = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

Per S'

$$\phi_E(S') = \frac{q_2 - q_3}{\varepsilon_0}$$

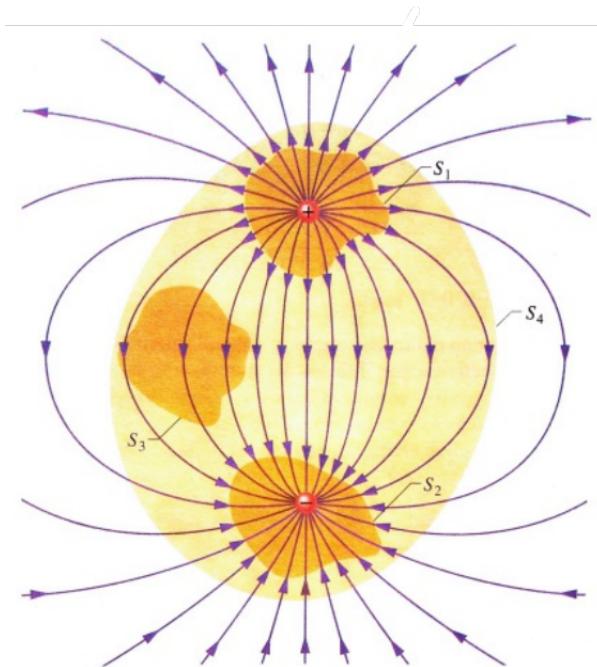
E infine per S''

$$\phi_E(S'') = 0$$

Notiamo che

- La carica q_4 non influisce nel flusso delle altre cariche in quanto è esterna a tutte le superfici.
- La superficie S'' non ha flusso in quanto non ha cariche interne.
- Il flusso della superficie S' è dato dalla somma delle sue cariche interne.

Vediamo infine il flusso elettrico in un dipolo elettrico



S_1 ha come carica interna la carica positiva del dipolo e il suo flusso sarà

$$\phi_E(S_1) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Stessa cosa per S_2 che ha però una carica negativa

$$\phi_E(S_2) = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

Per S_3 le due cariche sono esterne e dunque il flusso è nullo.

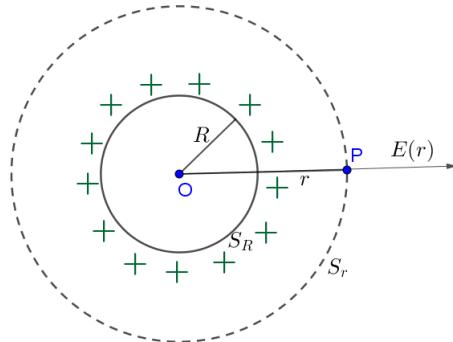
Il flusso è nullo anche per S_4 in quanto le due cariche si cancellano tra di loro

$$\phi_E(S_4) = \frac{q - q}{\epsilon_0} = 0$$

11.3 Calcolo del campo in distribuzioni simmetriche

La legge di Gauss può essere usata per calcolare il campo elettrico di distribuzioni di carica simmetrica. Supponiamo di avere un guscio carico e di voler calcolare il campo in un punto P esterno ad esso.

Ciò che otteniamo è Per ogni posizione di P il campo è costante e perpen-



dicolare al guscio. Questo perchè se prendiamo un infinitesimo di carica e il campo infinitesimale che genera verso P , facendo la somma di tutti gli infinitesimi di campo otteniamo la linea di campo che è normale alla superficie del guscio.

Dalla legge di Gauss il flusso elettrico sarà

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E \oint_{\Sigma} dA = E 4\pi r^2$$

Ipotizzando che la carica del guscio sia Q e sapendo che $\phi_e = \frac{Q}{\epsilon_0}$ ricaviamo il campo che sarà

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\epsilon_0} &= E 4\pi r^2 \\ \Rightarrow E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned} \tag{11.6}$$

Questo ci dice che il guscio per distanze superiori al suo raggio si comporta come una *carica puntiforme*.

In questa situazione non ha senso calcolare il campo all'interno del guscio in quanto non abbiamo campo (i vettori si cancellano). Vale la stessa cosa per una sfera completamente carica (anche al suo interno) con carica uniforme. Vediamo il campo all'interno della sfera carica Per il calcolo del flusso supponiamo che la superficie gaussiana sferica sia interna alla sfera. Sapendo che la densità di carica dell'intera sfera è $\rho = \frac{Q}{V}$ per trovare la carica del volume interno basterà fare

$$q_{int} = \rho Vol(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

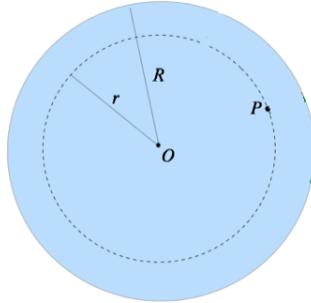


Figura 11.1: La sfera in cui vogliamo calcolare il campo nei punti P nel raggio r

Tramite questa ci calcoliamo il flusso elettrico per la nostra superficie sferica di raggio r

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

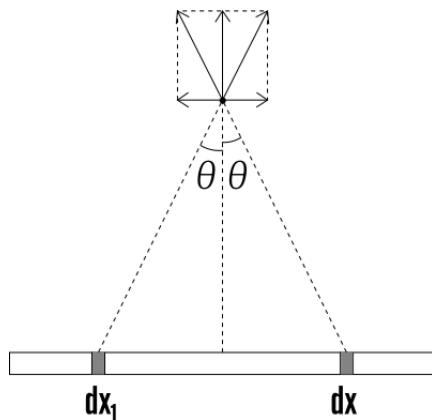
Non manca che calcolarci il campo

$$E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (11.7)$$

Il massimo del campo all'interno della sfera è quando siamo a $r = R$.

Un caso di distribuzione simmetrica è quella del filo a lunghezza infinita. L'aggettivo infinito in questo caso descrive il modello matematico usato che funziona pure per fili di lunghezza finita a apatto di essere vicino al filo e lontano dai bordi.

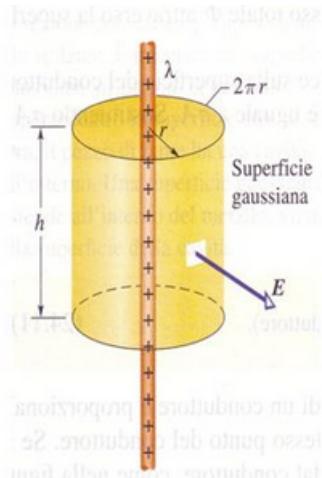
Prendiamo un punto P e consideriamo di metterlo nell'origine delle ascisse del sistema come in figura



Vediamo che se prendiamo due infinitesimi di fili, uno opposto l'altro nel nostro sistema, e prendiamo la somma vettoriale dei loro infinitesimi di

carica otteniamo $d\vec{E}$ che è normale al filo: la somma di tutti gli infinitesimi ci da che per ogni punto P , il filo si comporta come una massa puntiforme. La simmetria è perpendicolare o cilindrica intorno al filo e dunque sussistono le condizioni per la legge di Gauss.

È ovvio che la nostra superficie gaussiana sarà un cilindro



Denotando con λ la densità di carica del nostro filo andiamo a calcolarci il flusso elettrico

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E \oint_{\Sigma} dA = E 2\pi r h = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Da cui possiamo ricavare il campo

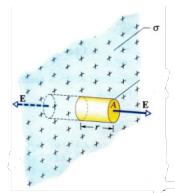
$$E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0 2\pi r h} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \quad (11.8)$$

Si nota subito che non abbiamo dipendenza dalla lunghezza del filo.

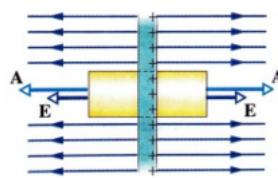
Ultimo caso che vedremo è quello del piano infinito. Come per il filo l'aggettivo infinito descrive il modello matematico usato che funziona quando siamo lontano dai bordi e abbastanza vicini al piano.

Supponiamo di avere un piano infinito con campo elettrico costante: questo vuol dire che la densità di carica $\sigma = \frac{q}{\Sigma}$ è costante.

La nostra superficie gaussiana sarà un cilindro perpendicolare al piano



Se ci mettiamo lateralmente quello che otteniamo è Vediamo come le linee di



campo siano parallele alle basi del cilindro. Invece la superficie laterale non influisce per il flusso in quanto è perpendicolare al campo.

Il flusso dalla legge di Gauss sarà

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 2E \oint_{\Sigma} dA = 2EA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Il campo sarà $E = \frac{q}{2A\epsilon_0}$. Ma $\frac{q}{A}$ è la densità di carica. Perciò

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (11.9)$$

11.4 Conduttori in equilibrio elettrostatico

Definiamo equilibrio elettrostatico la situazione in cui abbiamo un'assenza di movimento delle cariche elettriche (escludendo ovviamente il movimento degli elettroni attorno ai propri atomi). Quando un conduttore è in equilibrio elettrostatico avremo che al suo interno c'è assenza di campo elettrico.

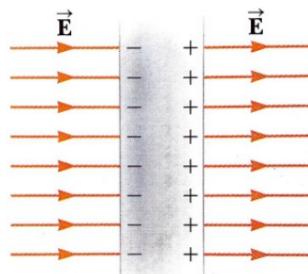


Figura 11.2: Notiamo che all'interno del conduttore in equilibrio non abbiamo nessun campo.

Questo porta a diverse conseguenze dettate dalla legge di Gauss

1. *Un eccesso di carica può essere solo in superficie.*

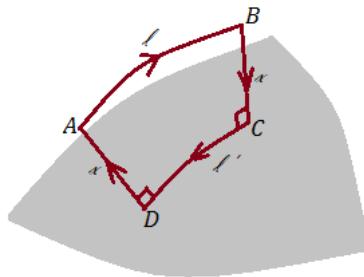
Infatti il campo è nullo al suo interno e dunque il flusso elettrico è nullo per ogni superficie interna del corpo. Ciò implica che le carica interna deve essere per forza 0.

2. *Il campo elettrico è perpendicolare alla superficie ed $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.*

Questo perchè se non fosse così abbiamo un trasferimento di cariche,

contraddicendo la condizione di equilibrio stesso.

Matematicamente parlando supponiamo che il campo abbia due componenti una normale E_n e una tangenziale E_t e prendiamo un cammino chiuso come in figura.



Poichè il campo elettrico è conservativo allora

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Che è uguale al singolo contributo di ogni segmento

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_t \cdot l - E_n \cdot x + E_n \cdot x'$$

Il segmento CD non contribuisce in quanto siamo nel conduttore e $E = 0$.

Se x e x' tendono a 0, i termini $E_n \cdot x$ e $E_n \cdot x'$ diventano uguali. Ciò che si ottiene è che

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_t \cdot l = 0 \implies E_t = 0$$

3. La superficie del conduttore è equipotenziale.

Questa è conseguenza del fatto che il campo elettrico può essere solo perpendicolare. Infatti in un cammino da un punto A ad un punto B della superficie si ha che

$$\Delta V = -(V_B - V_A) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \implies V_B = V_A$$

4. In un conduttore di forma generica la densità di carica superficiale non è costante ed è maggiore dove il raggio di curvatura è minore.

Questo è dovuto al fatto che le linee di campo sono tutte perpendicolari alla superficie (esempio grafico figura 11.3).

Notiamo come nella punta le linee di campo siano più dense.

Matematicamente lo possiamo dimostrare attraverso due sfere uniformemente caricate collegate da un filo: in questo modo avremo lo stesso

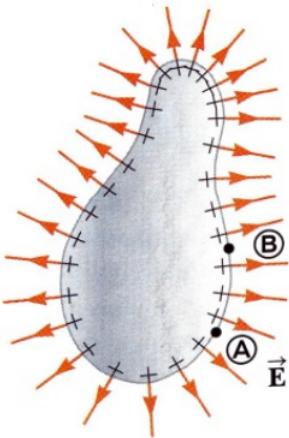
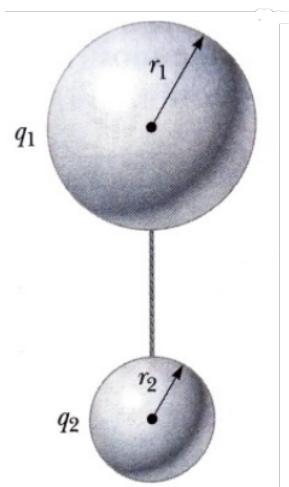


Figura 11.3: Nella punta la densità è maggiore che nella parte sottostante del corpo.



potenziale per entrambe.

Ciò che si ha dunque

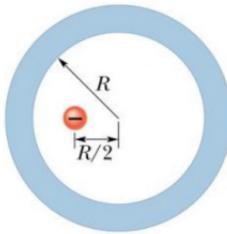
$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = V \implies \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \implies \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Inoltre confrontando i due campi $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$ e $E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$ otteniamo

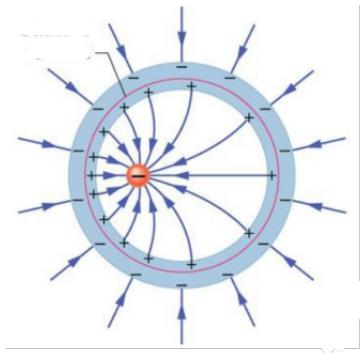
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1 r_2^2}{q_2 r_1^2} = \frac{r_1 r_2^2}{r_2 r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Se poniamo $r_2 \rightarrow 0$ notiamo che E_2 deve tendere a ∞ per soddisfare l'equazione dimostrando il punto.

Supponiamo di avere una sfera conduttrice cava, inizialmente neutra a cui inseriamo al suo interno una carica $-q$.



Per equilibrio elettrostatico, il campo elettrico all'interno del guscio deve essere nullo.



Considerando la superficie gaussiana (linea rossa in figura) si ha che il flusso ϕ_E in esso sarà per forza 0 come la carica interna q_{int} dovrà essere nulla.

Ciò vuol dire che avviene una ridistribuzione delle cariche e sulla superficie interna appare una carica q e su quella esterna una carica $-q$.

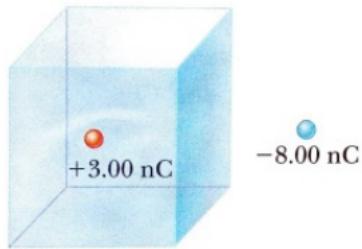
Inoltre la posizione della carica all'interno è ininfluente al risultato.

Questo è il funzionamento delle gabbie di Faraday: in quanto il campo elettrico all'interno deve essere nullo, la gabbia fa da schermatura rispetto alle cariche elettrostatiche esterne.

11.5 Esercizi di riepilogo

11.5.1 Esercizio n. 1

- (a) Si determini il flusso totale attraverso la superficie cubica mostrata in figura.
- (b) Si spieghi se è possibile o meno usare la legge di Gauss per calcolare il campo elettrico sulla superficie del cubo.



L'unica carica che contribuisce al flusso elettrico è la carica positiva poiché è l'unica carica interna alla superficie. Dunque

$$\phi_E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{8.85 \cdot 10^{-12}} = 339 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

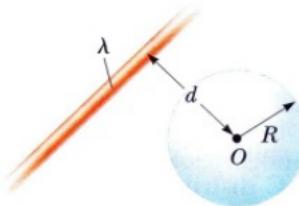
Non è possibile usare la legge di Gauss per calcolare il campo elettrico in quanto non sussistono le condizioni di simmetria necessarie. Infatti non possiamo definire se le linee di campo siano normali agli spigoli del cubo.

11.5.2 Esercizio n. 2

Una distribuzione lineare infinita di carica con densità lineare uniforme λ si trova ad una distanza d dal punto O in figura.

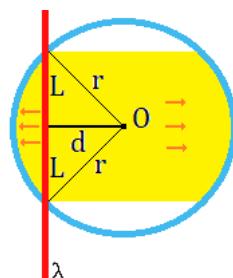
Si determini il flusso totale del campo elettrico generato dalla distribuzione lineare di carica attraverso la superficie di una sfera di raggio R con centro in O .

Si consideri sia il caso con $R < d$ che il caso con $R > d$.



Quando $R < d$ notiamo subito che la distribuzione di carica è esterna alla superficie dunque ϕ_E è nulla.

Quando $R > d$ la situazione è questa



Nella fascia in giallo abbiamo il flusso elettrico dato dal campo. Il valore di L è

$$L = \sqrt{R^2 - d^2}$$

Sapendo che la densità di carica è $\lambda = \frac{q}{l}$ possiamo trovare la carica data dal filo dentro la superficie sferica e avremo che $q = 2L\lambda$. Perciò

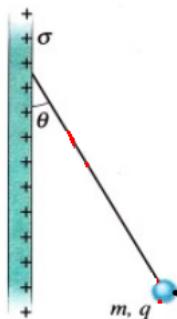
$$q = 2L\lambda = 2\lambda\sqrt{R^2 - d^2}$$

Il flusso sarà dunque

$$\phi_E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{2\lambda\sqrt{R^2 - d^2}}{\epsilon_0}$$

11.5.3 Esercizio n. 3

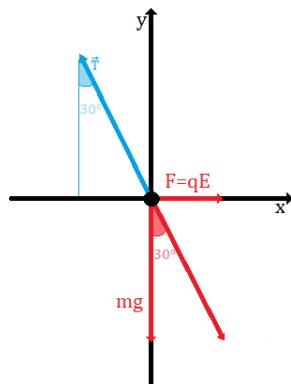
Nella figura sottostante, una piccola sfera avente massa $m = 1 \text{ mg}$ e carica distribuita uniformemente $q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, è appesa ad un filo isolante e forma un angolo $\vartheta = 30^\circ$ con un grande piatto isolante carico uniformemente. Considerando il peso della sfera e assumendo che il piatto si estenda in tutte le direzioni, si determini la densità di carica superficiale σ sul piatto.



Dalla sezione 11.3 sappiamo che il campo elettrico di una superficie piana infinita è

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Da qui disegniamo il diagramma di corpo libero per vedere in che relazioni sono le forze tra di loro



Poichè il corpo è fermo, la tensione del filo è bilanciata dalla somma vettoriale della forza peso e dalla forza elettrica. Dalla trigonometria applicata ai triangoli abbiamo che $F_e = mg \tan \vartheta = q \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

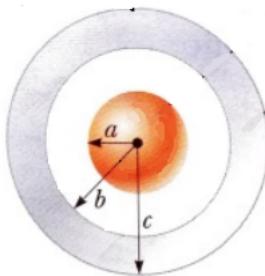
Da queste informazioni ricaviamo la densità di carica

$$\sigma = \frac{2\epsilon_0 mg \tan \vartheta}{q} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

11.5.4 Esercizio n. 4

Una sfera isolante di raggio $a = 5\text{ cm}$ ha una carica positiva $Q = 3\mu\text{C}$, uniformemente distribuita all'interno del suo volume. Un guscio sferico di raggio interno $b = 10\text{ cm}$ e raggio esterno $c = 15\text{ cm}$ è concentrico alla sfera e ha una carica $q = -1\mu\text{C}$. La figura sottostante illustra il sistema.

Si tracci un grafico per il modulo del campo elettrico in funzione di r , con $0 < r < 25\text{ cm}$.



Per $r < a$ il campo elettrico è dato da $E = \frac{\rho r}{\varepsilon_0}$ dove $\rho = \frac{Q}{Vol}$.

Il volume della sfera isolante è $Vol = \frac{4}{3}\pi a^3$. Perciò il campo elettrico fino ad a sarà

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

Per $a \leq r \leq b$ la sfera è una carica puntiforme per cui $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. In particolare

$$\text{- } E(a) = 10.8 \cdot 10^6 \frac{N}{C};$$

$$\text{- } E(b) = 2.7 \cdot 10^6 \frac{N}{C}$$

Poichè il guscio sferico è un conduttore in equilibrio elettrostatico, per $b < r < c$ il campo elettrico è nullo.

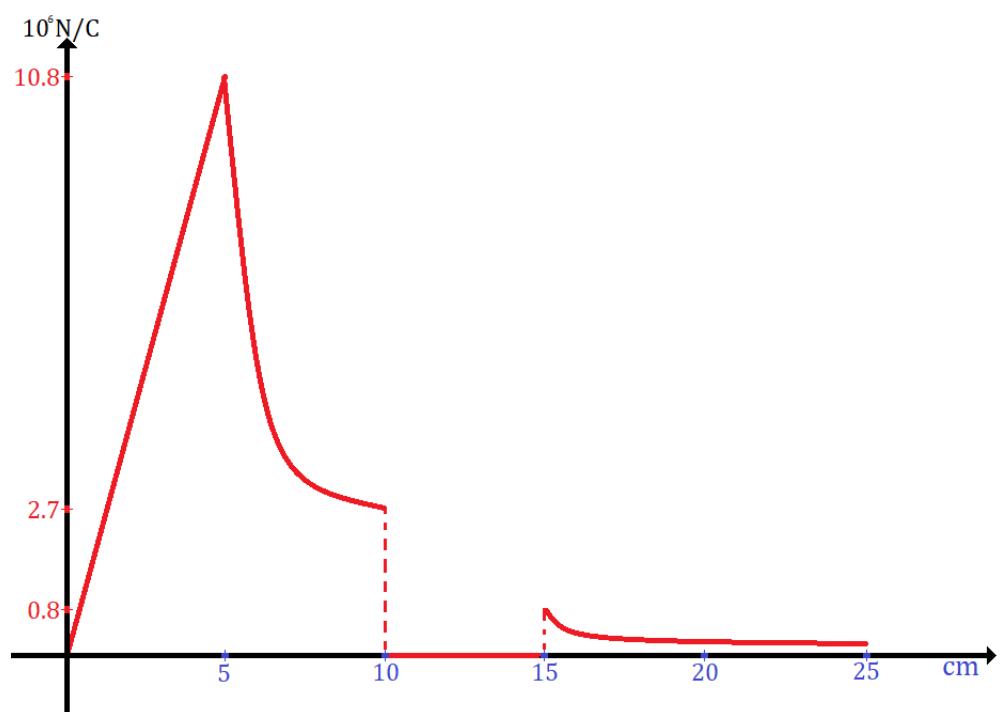
Per $c \leq r \leq 25\text{ cm}$ il campo è dato solo dalle cariche esterne che si comportano come una carica puntiforme: il guscio è in equilibrio elettrostatico e la sfera interna ha attrattato verso la superficie interna del guscio cariche negative. Avremo che la carica esterna sarà

$$q_{ext} = Q - q = 2\mu\text{C}$$

Il campo elettrico sarà dato da

$$E = \frac{q_{ext}}{4\pi\varepsilon r^2}$$

A 15 cm il valore sarà $0.8 \cdot 10^6 \frac{N}{C}$. Dalle informazioni ricavate possiamo finalmente costruirci il grafico.



Capitolo 12

Capacità e condensatori

12.1 La capacità elettrica

Introduciamo una grandezza fisica: la capacità elettrica. Essa rappresenta l'attitudine di un conduttore ad accumulare carica elettrica.

Prendiamo una sfera conduttrice carica che ha le cariche in eccesso all'esterno.

Vedendo il campo elettrico e il potenziale alla superficie, si nota che il rapporto $\frac{q}{V}$ non varia al variare della carica sul conduttore: chiameremo questo rapporto capacità elettrica

$$C = \frac{q}{V} \quad (12.1)$$

Nel SI l'unità di misura è il Farad (lettera F) che equivale ad $1\frac{C}{V}$.

Questa quantità è molto elevata. In una sfera conduttrice la capacità vale $C = 4\pi\epsilon_0 r$ e come si vede dipende solo dal raggio della sfera stessa. Per una sfera di 10 centimetri di raggio la capacità è

$$C = \frac{10^{-1}}{9 \cdot 10^9} = 11 \cdot 10^{-12} F = 11 pF$$

Se la sfera fosse grande quanto la terra invece

$$C = \frac{6.7 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9} = 0.74 \cdot 10^{-3} F = 0.74 mF$$

Per avere 1 Farad si deve avere una sfera che ha raggio ben 9 miliardi di metri.

I *condensatori* sono una componente fondamentale nei circuiti elettrici in quanto essi fanno da capacitori e immagazzinano energia potenziale elettrostatica.

12.2 Condensatori piani

I condensatori piani si presentano come due piani di stessa area A , paralleli, carichi con carica opposta e distanti d l'uno dall'altro. Su ogni armatura

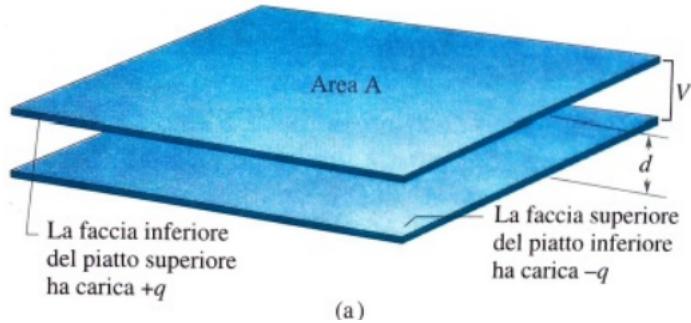


Figura 12.1: (a) Esempio di condensatore piano.

ci sono cariche uguali e opposte dunque un condensatore è elettricamente neutro. Inoltre si sviluppa una differenza di potenziale ΔV (indicata anche solo con V) tra i due piani: caricare un condensatore significa creare questo differenziale di potenziale ossia separare le cariche.

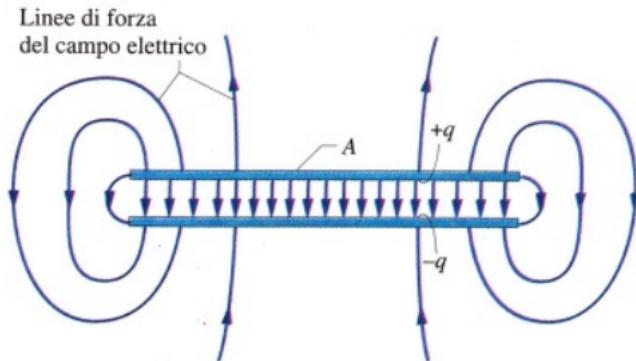
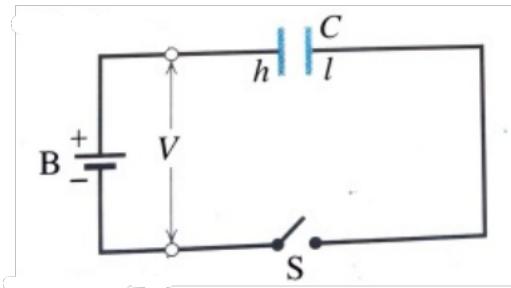


Figura 12.2: (b) Campo elettrico del condensatore piano.

Tre le due piastre è presente il vuoto oppure un materiale isolante, dunque **non** c'è movimento di carica in un condensatore.

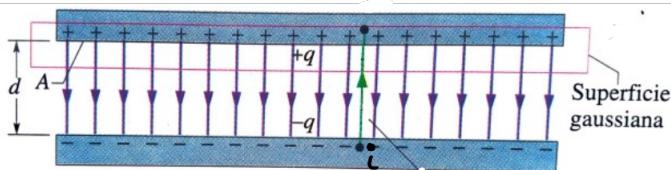
Vediamo come si carica un condensatore.// Prendiamo un circuito con un generatore di tensione continua, un interruttore e un condensatore come in figura.



Quando viene chiuso l'interruttore gli elettroni vengono presi dalla piastra positiva h al polo positivo del generatore B . Ugual numero di cariche vengono trasferiti dal polo negativo della batteria alla piastra negativa l . Il trasferimento avviene fino a quando la differenza di potenziale del condensatore è uguale alla differenza di potenziale ai capi del generatore.

12.3 Campo e capacità di un condensatore piano

Prendiamo un condensatore ideale e proviamo a vedere il flusso elettrico per una superficie gaussiana a forma di parallelepipedo come nella figura sottostante



Il flusso del campo è (ricordandoci che le piastre sono conduttori in equilibrio elettrostatico)

$$\phi_E = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = EA$$

Abbiamo le condizioni di simmetria richieste dalla legge di Gauss, possiamo ricavarci la carica del condensatore.

$$EA = \frac{q}{\epsilon_0} \implies q = EA\epsilon_0 \quad (12.2)$$

La differenza di potenziale è dato invece da

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot ds = Ed \quad (12.3)$$

Il rapporto tra carica e differenza di potenziale ci dà la capacità del condensatore

$$C = \frac{EA\epsilon_0}{Ed} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (12.4)$$

Come si nota non abbiamo dipendenza dalla carica.

12.4 Condensatori in parallelo e in serie

In un circuito n condensatori possono esser posti in n fili diversi che si racordano negli stessi punti al filo del circuito e per cui ogni condensatore è allo stesso differenziale di potenziale.

Prendiamo il caso di due condensatori in parallelo con capacità C_1 e C_2 .

Visto che la differenza di potenziale è la stessa allora avremo che

$$\text{- } Q_1 = C_1 V$$

$$\text{- } Q_2 = C_2 V$$

Sommmando le due quantità otteniamo che

$$Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

Dividendo per V il primo termine avremo che i due condensatori in parallelo sono equivalenti a un singolo condensatore la cui capacità è la somma delle capacità dei condensatori.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad (12.5)$$

La capacità del condensatore equivalente per un circuito a n condensatori sarà

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (12.6)$$

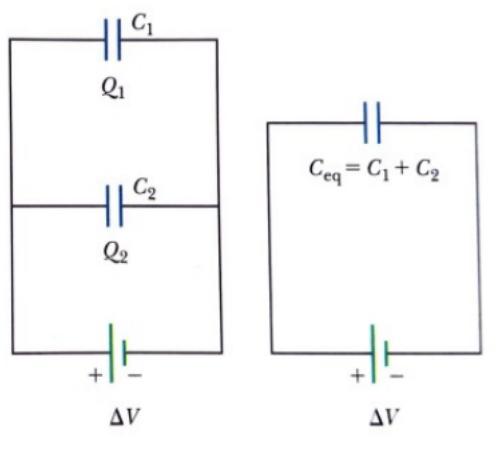


Figura 12.3: Esempio di circuito con condensatori in parallelo a sinistra con circuito con il condensatore equivalente a destra.

Equivalentemente possiamo collegare due o più condensatori in serie, ossia uno di seguito all'altro.

In questo caso avremo che la differenza di potenziale è diversa per ogni condensatore e la situazione sarà

$$\text{- } V_1 = \frac{q}{C_1}$$

$$\text{- } V_2 = \frac{q}{C_2}$$

Sommiamo le due tensioni otteniamo la tensione del generatore

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Dividendo per q in entrambi termini, otteniamo il reciproco del condensatore con capacità equivalente

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (12.7)$$

Per n condensatori in parallelo il reciproco della capacità del condensatore equivalente è

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (12.8)$$

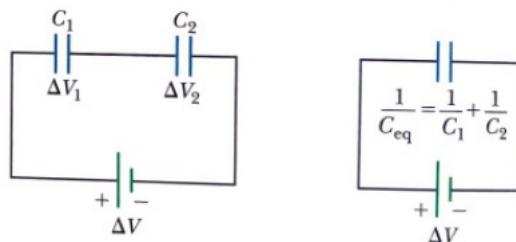


Figura 12.4: Condensatori in serie a destra e condensatore equivalente a sinistra.

12.5 Energia conservata in un condensatore

Per effettuare la separazione delle cariche durante il processo di carica in un condensatore abbiamo bisogno di un agente esterno (esempio il generatore) che fornisce l'energia necessaria per far ciò. Questo comporta un accumulo di energia potenziale elettrostatica nel sistema.

L'infinitesimo di lavoro dalla definizione di potenziale è

$$dW = V dq = \frac{q}{C} dq$$

Integrando dal momento in cui il condensatore è scarico fino a quando abbiamo la massima carica otteniamo il lavoro necessario per la separazione,

sapendo che la capacità è costante in quanto dipende solo dalle dimensioni del condensatore

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2C} [1]_0^Q = \frac{Q^2}{2C}$$

Perciò avremo che

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = U_{el} \quad (12.9)$$

12.6 Condensatore con dielettrico

Introducendo una lastra di isolante tra le armature di un condensatore si osserva una riduzione della differenza di potenziale data da

$$V_d = \frac{V_0}{k} \quad (12.10)$$

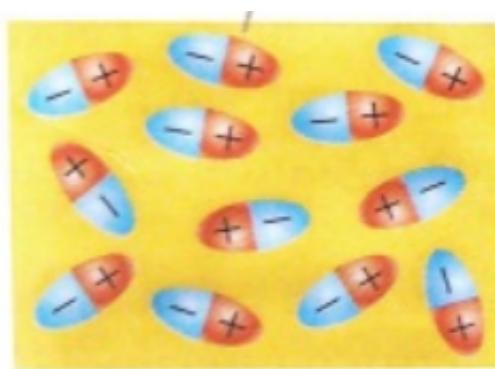
dove k è la costante dielettrica del materiale isolante e V_0 la differenza di potenziale senza l'isolante.

Ciò si traduce in un aumento della capacità data da

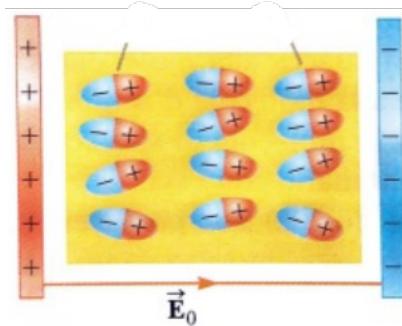
$$C = k \frac{A}{d} \varepsilon_0 = k C_0 \quad (12.11)$$

dove C_0 è la capacità senza l'isolante.

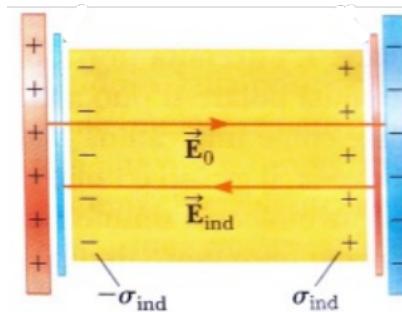
Nel materiale isolante le molecole polari sono orientate in modo casuale senza campo elettrico



Le molecole subendo l'effetto del campo elettrico del condensatore si allineano nella direzione del campo



Le cariche superficiali nel materiale isolante possono essere schematizzate come una coppia di piani paralleli che generano un campo indotto nel verso opposto al campo del condensatore Poniamo E_0 il campo del condensatore



senza il materiale isolante che equivale a

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

La carica superficiale q' indotta dalla polarizzazione del dielettrico crea anch'essa un campo che è però inferiore al campo del condensatore. Il campo totale del condensatore sarà dunque

$$E = \frac{q}{\epsilon_0} - \frac{q'}{\epsilon_0} = E_0 - E_{ind} < E_0 \quad (12.12)$$

Capitolo 13

La corrente elettrica

13.1 La corrente elettrica

I conduttori solidi sono costituiti da un reticolo composto dagli ioni positivi del materiale in cui gli elettroni al suo interno possono girare liberamente. Per esempio nel rame, per ogni atomo è presente un elettrone libero e il numero di cariche per unità di volume n è

$$n = 8.49 \cdot 10^{28} \frac{\text{elettroni}}{\text{m}^3}$$

Gli elettroni si muovono in modo caotico e casuale, ma la loro velocità media 0. Dalle teorie quantistiche si è ipotizzato che un elettrone nel suo percorso caotico viaggi a $10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

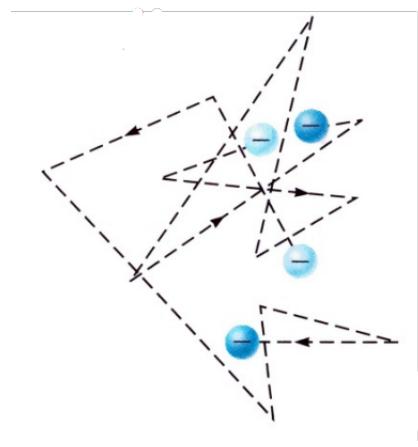


Figura 13.1: Esempio di moto casuale di un elettrone.

Se nella regione del conduttore viene applicato un campo elettrico, i portatori di carica liberi si muovono sotto azione della forza elettrica dando origine

ad un moto ordinato di cariche elettriche ovvero ad una *corrente elettrica*. L'elettrone assume una velocità di deriva in verso opposto al campo che si sovrappone al moto caotico che esso ha.

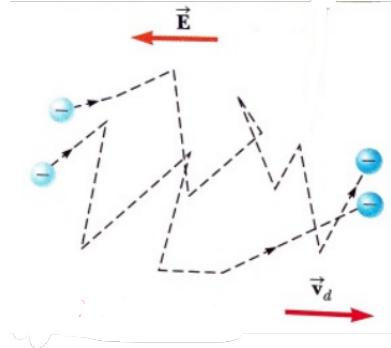


Figura 13.2: Elettroni che assumono velocità di deriva dato dal campo.

Definitamo l'intensità di corrente I come

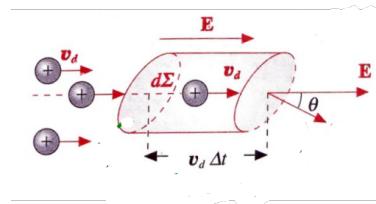
$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (13.1)$$

dove

- Δq : è la carica che passa in una sezione Σ del conduttore.
- Δt : è l'intervallo di tempo in cui la carica passa nella sezione.

Nel SI l'unità di misura dell'intensità di corrente è l'Ampere (simbolo A) che equivale a $1 \frac{C}{s}$.

Consideriamo una superficie infinitesimale $d\Sigma$ la cui normale \hat{n} forma un angolo ϑ con il campo elettrico \vec{E} . Nel tempo Δt le cariche percorrono una distanza $v_d \Delta t$ e la carica che passa attraverso $d\Sigma$ è quella contenuta nel volume infinitesimo $d\tau$.



La carica che passa nella sezione è data da

$$\Delta q = ned\tau = nev_d \cos \vartheta d\Sigma \quad (13.2)$$

dove n è la densità di carica.

Dalla equazione ricaviamo la corrente di

$$di = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nev_d \cos \vartheta d\Sigma \quad (13.3)$$

Definiamo il vettore densità di corrente \vec{j}

$$\vec{j} = nev_d \quad (13.4)$$

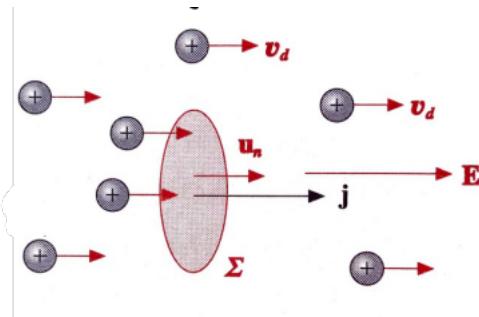
Riscriviamo di come

$$di = \vec{j} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Integrando in Σ si ottiene l'intensità di corrente

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{n} d\Sigma = \phi_{\Sigma}(\vec{j}) \quad (13.5)$$

che è uguale al flusso di corrente in *Sigma* del vettore densità di corrente.
Se $\Sigma \perp \vec{j}$ e \vec{j} è uniforme la situazione si semplifica.



In questo caso avremo che

$$i = j \cdot \Sigma \quad (13.6)$$

Si prende come verso della corrente quello delle cariche positive per convenzione. Su scala macroscopica non è possibile correlare il verso della corrente al segno dei portatori di carica.

A prescindere dalla carica abbiamo che il vettore \vec{j} è lo stesso indifferentemente dal segno della carica in quanto $ev_+ = -ev_-$. La velocità di deriva di un elettrone è piuttosto lenta.

Se prendiamo un intensità di corrente di $8 A$ che passa in una sezione Σ di $4 mm^2$ vediamo che la densità di carica j è $2 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}$. Ricaviamo da essa la velocità di deriva dapendo che $j = nev_d$.

$$v_d = \frac{j}{ne} \approx 1.47 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} = 0.53 \frac{m}{h}$$

L'effetto del movimento di cariche è collettivo e c'è il trasferimento di cariche su tutto il circuito.

13.2 La resistenza e la legge di Ohm

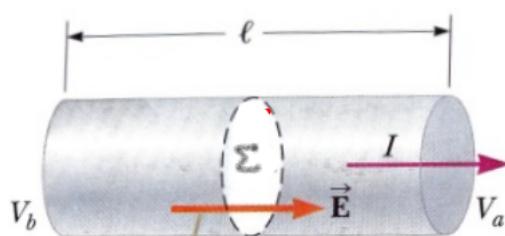
Quando un elettrone si muove nel reticolo esso subisce continue interazioni con gli ioni positivi. L'elettrone si scontra e subisce "attrito" e rilascia energia al reticolo. Lo ione che subisce lo scontro non l'elettrone non può muoversi per via dei legami atomici e inizierà a vibrare su se stesso, aumentando la temperatura del sistema.

La difficoltà dell'elettrone di passare per il reticolo viene chiamata *resistenza*.

I metalli (più precisamente i materiali ohmici) dispongono della seguente proprietà per la densità di corrente

$$j = \sigma E \quad (13.7)$$

dove σ è la conducibilità del metallo. Prendiamo un conduttore di lunghezza l e applichiamo una differenza di potenziale V



Avremo che

$$V = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = El$$

Allora $E = \frac{V}{l}$.

Se il conduttore è ohmico allora vale

$$j = \sigma \frac{V}{l} \implies V = \frac{jl}{\sigma} = \frac{I}{\Sigma} \cdot \frac{l}{\sigma}$$

Chiamiamo l'inverso della conducibilità $\frac{1}{\sigma}$ resistività e lo denotiamo con ρ . Riscriviamo la differenza di potenziale come

$$V = I \frac{l\rho}{\Sigma}$$

Chiamiamo resistenza e la indichiamo con R il valore $R = \frac{l}{\sigma}\rho$. La differenza di potenziale è allora

$$V = R \cdot I \quad (13.8)$$

Questa è la legge di Ohm.

La resistenza nel SI ha unità di misura l'Ohm e ha simbolo ω che equivale a $1 \frac{V}{A}$. La resistenza viene implementata dai resistori, componenti elettronici che vengono usati per gestire l'intensità della corrente nei circuiti o per convertire l'energia elettrica in energia termica.

13.3 La legge di Joule

In un circuito, il generatore presente compie un lavoro sui portatori di carica generando una corrente elettrica I . L'energia ad essi fornita viene dissipata dalla resistenza R posta nel circuito producendo un aumento della temperatura.

La potenza dissipata si ottiene da

$$dU = dq \cdot V = I dt \cdot V \implies P = \frac{dU}{dt} = I \cdot V$$

Dalla legge di Ohm si ricava che

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (13.9)$$

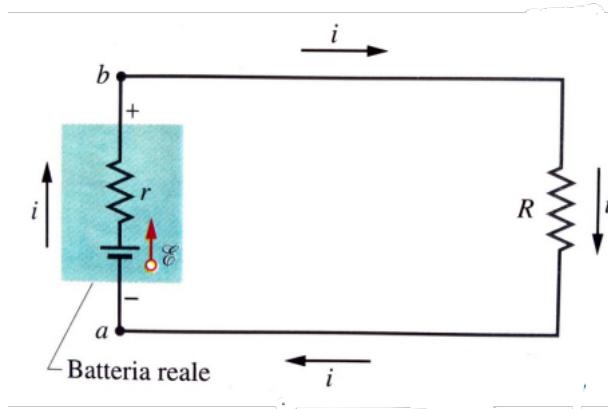
Questa è la legge di Joule.

Capitolo 14

Circuiti elettrici in corrente continua

14.1 La forza elettromotrice

Fino ad adesso abbiamo considerato generatori ideali la cui differenza di potenziale è la stessa indifferentemente dalla composizione del circuito. Nella realtà ciò non è così.



Un generatore quando viene collegato ad un circuito incontra una resistenza interna r che vale 0 nei generatori ideali.

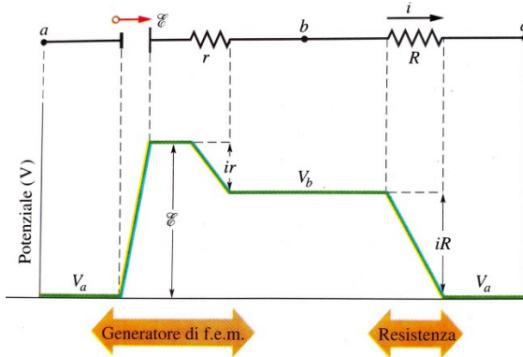
Chiamiamo forza elettromotrice di un generatore la massima differenza di potenziale ai capi del generatore quando esso è sconnesso dal circuito e la denotiamo con la lettera ε .

La forza elettromotrice non è una forza nel senso della dinamica.

Quando colleghiamo un generatore reale ad un circuito la differenza di potenziale ai capi del generatore sarà

$$\Delta V = \varepsilon - ir < \varepsilon \quad (14.1)$$

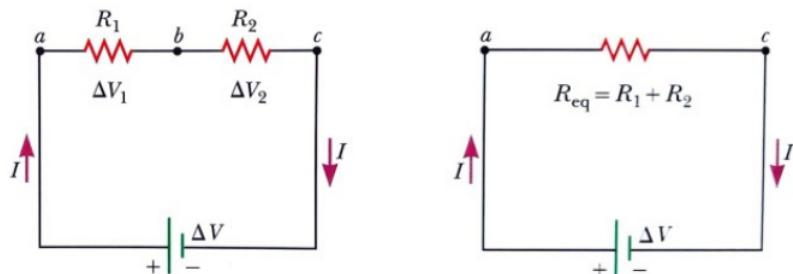
Qui sotto vediamo la differenza di potenziale del circuito nella figura precedente



14.2 Resistori in serie e parallelo

Come per i condensatori, è possibile inserire dei resistori uno dietro l'altro in un circuito creando un collegamento in serie.

Vediamo il caso di due resistori



La corrente che passa è uguale nei due resistori, ma cambia la differenza di potenziale. Avremo che

$$- V_1 = R_1 I$$

$$- V_2 = R_2 I$$

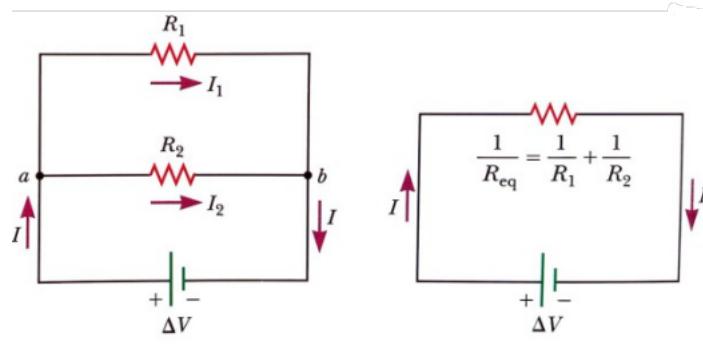
Sommendo entrambi i valori di tensione otteniamo il valore del differenziale di potenziale della batteria in modo tale da trovare il valore di resistenza del resistore equivalente

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = \\ &= (R_1 + R_2) I \\ \implies R_{eq} &= R_1 + R_2 \end{aligned} \tag{14.2}$$

Per n resistenze in serie avremo che

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k \quad (14.3)$$

Vediamo invece come si comportano i resistori in parallelo. Osserviamo il caso di due resistori in parallelo



In questo caso la differenza di potenziale ai capi dei due resistori è uguale. La somma delle correnti che passano per i resistori ci danno la corrente totale del circuito. In tal modo ci ricaviamo la resistenza equivalente

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \\ &= V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ \implies \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{aligned} \quad (14.4)$$

Per n resistori in parallelo avremo che

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (14.5)$$

14.3 Le leggi di Kirchoff

14.3.1 Definizioni preliminari

Prima di elencare le due leggi di Kirchoff è doveroso indicare il significato dei termini che verranno usati:

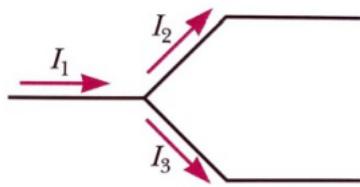
- Nodo: punto in cui convergono almeno 3 conduttori.
- Ramo: Singolo percorso circuitale tra due nodi.
- Maglia: Percorso chiuso tra due nodi.

14.3.2 La prima legge di Kirchoff

La prima legge di Kirchoff (o *legge dei nodi*) afferma che in un nodo di un circuito la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti, i.e.

$$\sum_{nodo} I_k = 0 \quad (14.6)$$

Per esempio prendiamo il seguente nodo



La corrente entrante nel nodo è I_1 mentre le correnti uscenti sono I_2 e I_3 . Dalla prima legge di Kirchoff abbiamo che

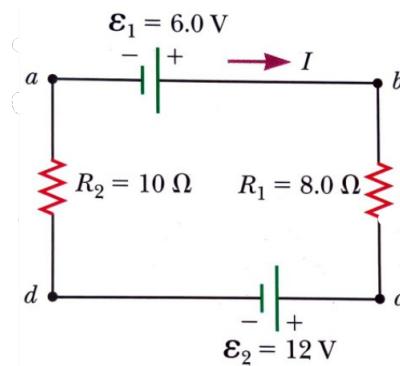
$$I_1 = I_2 + I_3$$

14.3.3 La seconda legge di Kirchoff

La seconda legge di Kirchoff (o *legge delle maglie*) afferma che la somma algebrica delle differenze di potenziale in una maglia (con il verso della corrente scelto arbitrariamente) è 0, i.e.

$$\sum_{maglia} \Delta V = 0 \quad (14.7)$$

Per capire meglio facciamo un esempio con il seguente circuito a cui vogliamo determinare la corrente. Poniamo il verso della corrente in senso orario.



Partiamo da ε_1 che ha differenza di potenziale positivo, quando I arriva a

R_1 subisce un calo di potenziale dunque la differenza di potenziale IR_1 è negativa rispetto al segno di percorrenza. Quando la corrente incontra ε_2 subisce un calo di potenziale in quanto si sposta nel polo negativo del generatore. Infine incontra l'ultima resistenza in cui abbiamo un'altra caduta di potenziale e IR_2 avrà anch'esso segno negativo.

In definitiva

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 - IR_1 - \varepsilon_2 - IR_2 &= 0 \\ I(R_1 + R_2) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ I &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 = \frac{6-12}{18}} = -0.33 A\end{aligned}$$

Il segno negativo che è uscito ci indica che la corrente in realtà circola nel verso opposto a quello che abbiamo usato per i calcoli.

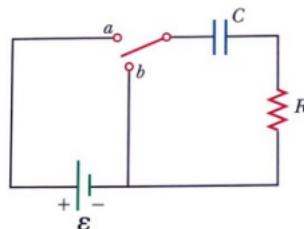
Ciò è dovuto al fatto che ε_2 fornisce una tensione maggiore di ε_1 .

14.4 Processi di carica e scarica nei circuiti RC

14.4.1 Circuiti RC

I circuiti RC sono circuiti composti da resistori e condensatori.

Prendiamo il caso semplice di un circuito composto da un condensatore e da un resistore come nella figura sottostante



Quando chiudiamo l'interruttore su a il condensatore si inizia a caricare e circola corrente fino a che la differenza di potenziale su C è uguale a ε . Nell'istante $t = 0^+$ ossia nell'istante subito dopo la chiusura dell'interruttore il condensatore si comporta da cortocircuito, ossia non è influente nel circuito e la corrente sarà massima in quanto data da $\frac{\varepsilon}{R}$. All'istante $t = \infty$ ossia nell'istante in cui si è caricato il condensatore esso rende il circuito aperto e blocca il flusso di corrente.

14.4.2 Processo di carica

Vediamo il processo di carica del condensatore.

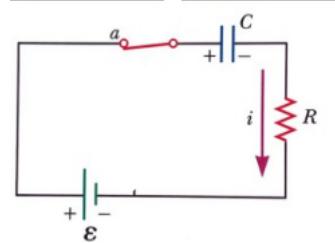


Figura 14.1: Nel circuito chiuso si carica il condensatore e il generatore da la direzione alla corrente.

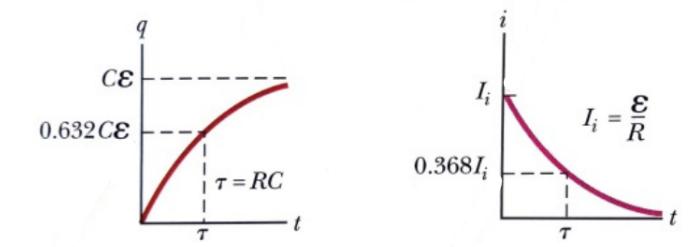
Applichiamo la seconda legge di Kirchoff. Questo ci porta ad un'equazione differenziale la cui soluzione ci dà la carica del condensatore in funzione del tempo. Sappiamo che la massima differenza di potenziale del condensatore è uguale alla tensione del generatore ed è data da $\Delta V_{Cmax} = \frac{Q}{C} = \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon - \Delta V_C - iR &= 0 \\
 \varepsilon - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R &= 0 \\
 \frac{dq}{dt} &= \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} \\
 \frac{dq}{q - C\varepsilon} &= -\frac{1}{RC}dt \\
 \int_0^Q \frac{dq}{q - C\varepsilon} &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \\
 \log\left(-\frac{q - C\varepsilon}{C\varepsilon}\right) &= -\frac{t}{RC} \\
 q(t) &= Q \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)
 \end{aligned} \tag{14.8}$$

Derivando otteniamo anche la corrente elettrica

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -Q \left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \tag{14.9}$$

Indichiamo con τ la quantità RC che è un'unità di tempo in quanto $\tau = RC = \frac{V}{A} \cdot \frac{Q}{V} = t$. Nella pagina successiva abbiamo il grafico della carica del condensatore e della corrente passante nel circuito in funzione del tempo: dopo un intervallo τ di tempo il condensatore si è caricato del 63.2% mentre la corrente è il 36.8% della corrente originale. La carica massima e la corrente nulla, pur essendo valori asintotici, sono raggiunti nella realtà dopo un intervallo di $4/5\tau$.



14.4.3 Processo di scarica

Chiudendo l'interruttore su b il condensatore inizia a scaricarsi e la corrente circola dall'armatura positiva del condensatore a quella negativa.

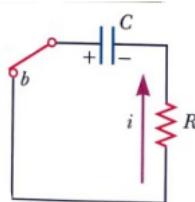


Figura 14.2: In questo caso il verso della corrente è dato dalle armature del condensatore.

Riapplichiamo la seconda legge di Kirchoff per trovare la carica del condensatore in funzione del tempo

$$\begin{aligned}
 -\frac{q}{C} - iR &= 0 \\
 -R \frac{dq}{dt} &= \frac{q}{C} \\
 \frac{dq}{q} &= -\frac{1}{RC} dt \\
 \int_0^Q \frac{dq}{q} &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \\
 q(t) &= Q e^{-\frac{t}{RC}}
 \end{aligned} \tag{14.10}$$

Derivando otteniamo la corrente in funzione del tempo

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \tag{14.11}$$

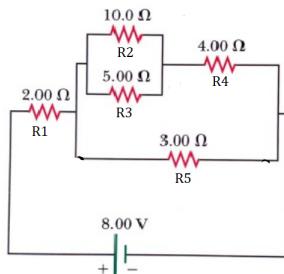
Si nota che la corrente ha lo stesso andamento del processo di carica, ma con verso opposto.

14.5 Esercizi di riepilogo

14.5.1 Esercizio n. 1

Si consideri il circuito mostrato in figura.

- (a) Determinare la tensione ai capi del resistore R_5 .
- (b) Determinare la corrente che passa nel resistore R_5 .



Per prima cosa dobbiamo determinare la corrente totale passante nel circuito facendo una riduzione dei resistori. R_2 e R_3 sono in parallelo. La loro resistenza equivalente è

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} \Omega$$

Successivamente R_{23} è in serie con R_4 . La resistenza equivalente è

$$R_{234} = R_{23} + R_4 = \frac{10}{3} + 4 = \frac{22}{3} \Omega$$

A sua volta R_{234} è in parallelo con R_5

$$R_{2345} = \frac{R_{234} R_5}{R_{234} + R_5} = \frac{66}{31} \Omega$$

Adesso R_1 è in serie con l'ultima resistenza trovata, determinando così la resistenza equivalente per tutto il circuito

$$R_{eq} = R_1 + R_{2345} = \frac{128}{31} \Omega$$

La corrente totale è

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = 1.94 A$$

La tensione che arriva a R_5 è quella dopo la caduta di potenziale di R_1 visto che il resistore è in parallelo a R_{234} . Usiamo la seconda legge di Kirchoff

$$V_5 = \varepsilon - V_1 = \varepsilon - R_1 I = 4.12 V$$

Da cui ricaviamo la corrente passante per R_5

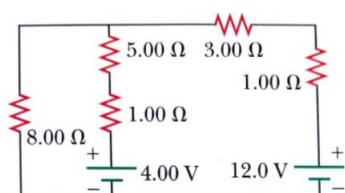
$$I_5 = \frac{V_5}{R_5} = \frac{4.12}{3} = 1.38 A$$

14.5.2 Esercizio n. 2

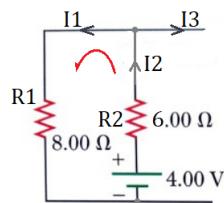
Il circuito mostrato in figura è collegato per 2 minuti.

(a) Si determini il valore della corrente che circola in ciascuna maglia del circuito.

(b) Si calcoli l'energia totale dissipata nei resistori.



Per la risoluzione separiamo il circuito nelle due maglie interne a "destra" e "sinistra" del generatore di 4 V. La maglia a sinistra sarà (con la riduzione dei resistori da 5 e 1 Ω, non riduciamo R_1 in quanto non ha la stessa corrente) così costruita. Decidiamo di far passare la corrente in senso antiorario



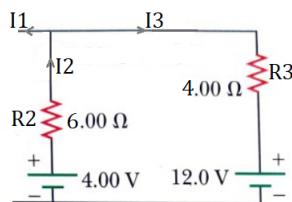
Applichiamo la legge dei nodi di Kirchoff sapendo che nel nodo in alto la corrente entrante è I_2 mentre I_1 e I_3 sono uscenti.

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0$$

Applichiamo la legge delle maglie per le tensioni, denotando con ε_1 il generatore di 4 V

$$\varepsilon_1 - I_2 R_2 - I_1 R_1 = 0$$

Adesso ci spostiamo nella seconda maglia, decidiamo di far girare la corrente in senso orario. Riduciamo anche qui la coppia di resistenze da 5 e 1 Ω e le resistenze da 3 e 1 Ω



Applichiamo la legge delle maglie denotando con ε_2 il generatore da 12 V.

$$\varepsilon_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 - \varepsilon_2 = 0$$

Otteniamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} I_3 = I_2 - I_1 \\ \varepsilon_1 - I_2 R_2 - I_1 R_1 = 0 \\ \varepsilon_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 - \varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo

$$I_1 = \frac{\varepsilon_2 - I_2 R_2}{R_1}$$

Adesso prendiamo la terza equazione, scriviamo I_3 come $I_2 - I_1$ e sostituiamo poi I_1 con il valore trovato precedentemente

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - I_2 R_2 - (I_2 - I_1) R_3 - \varepsilon_2 &= 0 \\ \varepsilon_1 - I_2 R_2 - I_2 R_3 + \frac{\varepsilon_1 - I_2 R_2}{R_1} R_3 - \varepsilon_2 &= 0 \\ I_2 = \frac{\varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_1 R_3 - \varepsilon_2 R_1}{R_2 R_1 + R_3 R_1 + R_2 R_3} &= -0.462 A \end{aligned}$$

Ricaviamo I_1 dalla prima equazione trovata dopo il sistema e otteniamo che $I_1 = 0.846 A$ da cui ricabiamo $I_3 = -1.31 A$. Le correnti negative ci dicono che esse in realtà vanno nel senso opposto a quello dato.

14.5.3 Esercizio n. 3

Un condensatore scarico di capacità $C = 20 \mu F$ e un resistore di 100Ω sono collegati in serie ad una sorgente di forza elettromotrice ε di 9 V.

Si determini:

- (a) *La costante di tempo del circuito.*
- (b) *La carica massima del condensatore.*
- (c) *La carica che si accumula nel condensatore quando sia trascorso, dopo il collegamento alla batteria del circuito, un tempo pari alla costante di tempo.*

Il problema è abbastanza semplice e basta ricordarsi la sezione 14.4 per risolvere i quesiti. La costante di tempo del circuito è

$$\tau = RC = 100 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-3} s$$

La carica massima

$$Q_{max} = C\varepsilon = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 9 = 180 \mu C$$

Dopo la costante di tempo il condensatore si carica del 63.2%, da qui calcoliamo la carica che si è accumulata

$$q(\tau) = Q_{max} \cdot 0.632 = 113.8 \mu C$$

Capitolo 15

Il campo magnetico

15.1 Il campo magnetico

Il campo magnetico è il campo generato dal movimento degli elettroni. Alcuni materiali, soprattutto il ferro, posseggono un campo magnetico proprio per via del movimento degli elettroni.

È un campo associato ad un dipolo nord-sud in cui nel polo nord le linee di campo sono uscenti, mentre nel polo sud sono entranti.

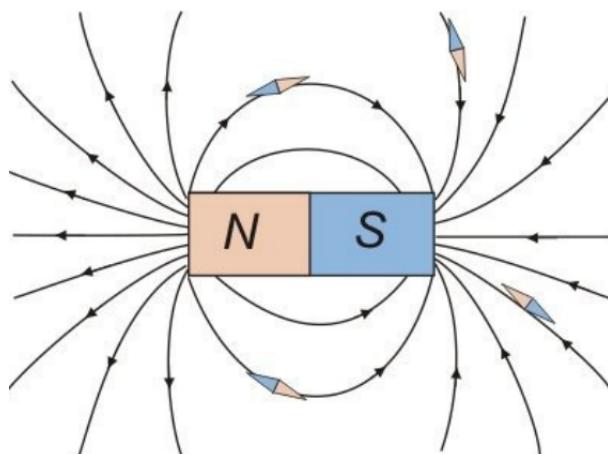


Figura 15.1: Esempio di dipolo magnetico.

Come due cariche opposte si attraggono e due cariche simili si respingono lo stesso è per i poli magnetici.

Non è possibile separare i due poli tra di loro in quanto ogni divisione di un dipolo ne crea altri.

Per convenzione in un campo magnetico uniforme, le linee uscenti dal piano vengono rappresentati da pallini, mentre le linee entranti da crocette.

15.2 La forza di Lorentz

Quando una particella carica è in moto di velocità \vec{v} in un campo magnetico \vec{B} essa subisce una forza dal campo stessa, detta *forza di Lorentz*

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (15.1)$$

Il campo magnetico B ha come unità di misura nel SI la Tesla con simbolo T e $1T = 1 \frac{N}{A \cdot m}$.

La forza di Lorentz ha verso e direzione dalla regola della mano destra e modulo

$$F_L = qVB \sin \vartheta \quad (15.2)$$

Poiché la forza di Lorentz è perpendicolare alla velocità, allora è perpen-

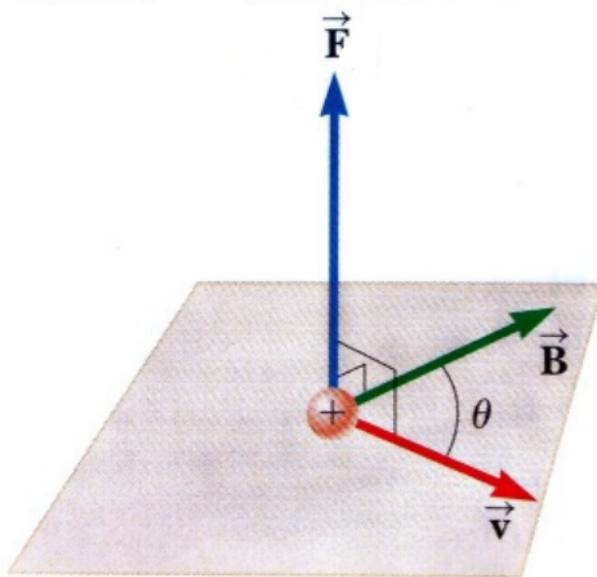


Figura 15.2: La forza di Lorentz è perpendicolare sia alla velocità che al campo magnetico.

dicolare anche allo spostamento. Ciò vuol dire che la forza magnetica **non** compie lavoro sulla particella, i.e.

$$\Delta E_K = W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (15.3)$$

La particella subisce una forza e provoca un'accelerazione, ma visto che la forza non compie lavoro, l'unico moto possibile è quello circolare uniforme, perpendicolare al campo magnetico.

Conoscendo la forza possiamo ricavarci il raggio, velocità angolare e periodo

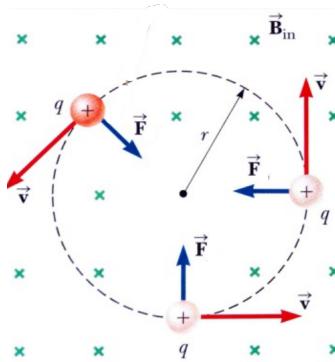


Figura 15.3: La forza magnetica è sempre diretta verso il centro della circonferenza

del moto circolare.

Abbiamo detto che è la forza magnetica a fornire l'accelerazione centripeta i.e.

$$F_L = qvB = m \frac{v^2}{r}$$

Allora il raggio della circonferenza sarà

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (15.4)$$

Fino ad adesso abbiamo considerato una velocità perpendicolare al campo. Vediamo cosa succede per angoli generici.

Scomponiamo la velocità in due componenti, una parallela al campo magnetico e una perpendicolare

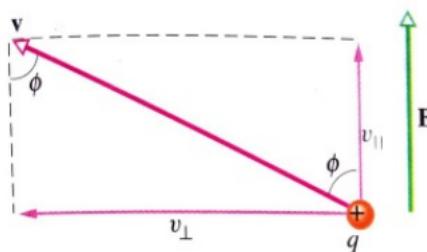


Figura 15.4: Scomposizione della velocità.

La componente parallela non viene toccata dalla forza magnetica in quanto il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è 0.

Allora la forza di Lorentz sarà data da

$$\vec{F}_L = qv_{\perp} \times \vec{B} \quad (15.5)$$

La particella si muoverà di conseguenza di moto elicoidale seguendo il campo magnetico come nella figura successiva.

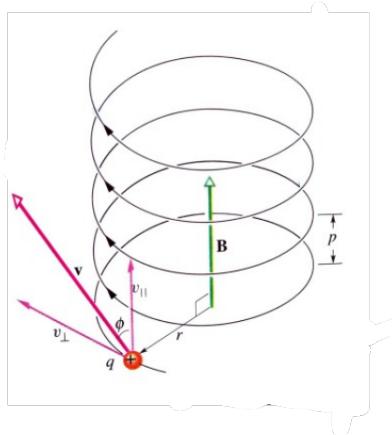


Figura 15.5: Moto elicoidale della particella. La componente parallela della velocità è responsabile dello spostamento lungo la linea di campo.

15.3 Forza magnetica su conduttore percorso da corrente

La corrente elettrica è un moto ordinato di cariche prodotto dal campo elettrico su un conduttore.

Se il conduttore è immerso in un campo magnetico uniforme e costante su ciascuna carica è applicata la forza di Lorentz che viene successivamente trasmessa alla massa del conduttore stesso.

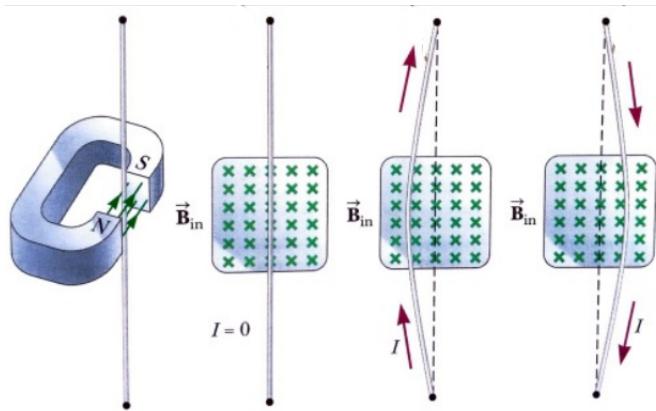
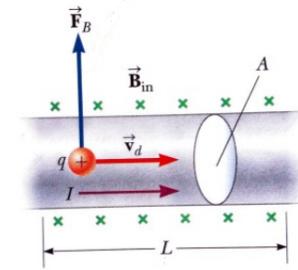


Figura 15.6: In base alla direzione della corrente la forza magnetica deforma il filo conduttore. Se non c'è passaggio di cariche non succede niente.

Vediamo il caso del filo conduttore dritto



La forza di Lorentz applicata ad ogni portatore di carica è (la velocità è quella di deriva)

$$\vec{F}_L = q\vec{v}_d \times \vec{B}$$

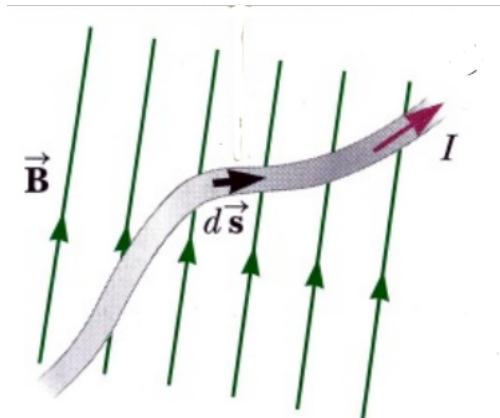
Il numero di cariche totali è dato da nAL dove n è il numero di cariche per volume e AL è il volume del conduttore, allora la forza esercitata sul filo conduttore è

$$\vec{F} = (q\vec{v}_d \times \vec{B})nAL$$

Sapendo che $i = J \cdot A = nqv_d A$ riscriviamo la forza esercitata sul filo

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B} \quad (15.6)$$

Ovviamente un filo conduttore non è sempre dritto e può assumere forme generiche come la seguente



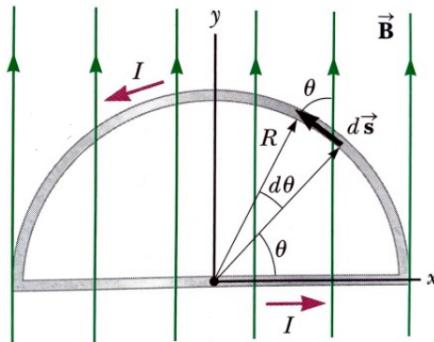
Suddividiamo il filo in pezzi infinitesimali che sono dritti. Per questi pezzi infinitesimali allora vale la (15.6)

$$d\vec{F} = id\vec{s} \times \vec{B} \quad (15.7)$$

Sommendo tutti i contributi, ossia integrando, otteniamo la forza magnetica agente sull'intero filo

$$\vec{F} = \int_A^B id\vec{s} \times \vec{B} = i \int_A^B d\vec{s} \times \vec{B} \quad (15.8)$$

Vediamo infine il caso della spira semicircolare



Per la sezione rettilinea applichiamo direttamente la (15.6) sapendo che la lunghezza del filo è $2R$. Dalla regola della mano destra la forza magnetica sarà uscente dal foglio.

$$\vec{F}_1 = 2iBR \cdot \hat{k} \quad (15.9)$$

Dove \hat{k} è il versore dell'asse z .

Per la sezione circolare applichiamo invece la (15.8).

La corrente in questo caso va in verso opposto a prima e dunque la forza magnetica sarà entrante nel foglio.

L'infinitesimo di forza è dato da

$$d\vec{F}_2 = id\hat{s} \times \vec{B} = -iB \sin \vartheta ds \cdot \hat{k}$$

Integrando otteniamo la forza magnetica sulla sezione circolare. Prima di procedere facciamo un cambio di variabili e poniamo $Rd\vartheta = ds$ dalle regole della trigonometria. Ciò implica che dovremo integrare da 0 a π

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= - \int_0^\pi iRB \sin \vartheta d\vartheta \cdot \hat{k} = \\ &= -iRB \cdot \hat{k} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= -iRB \cdot \hat{k} [-\cos \vartheta]_0^\pi = \\ &= -2iRB \cdot \hat{k} \end{aligned} \quad (15.10)$$

Si osserva che complessivamente la forza magnetica nel circuito è nulla.

15.4 Applicazioni pratiche della forza di Lorentz

15.4.1 Selettore di velocità

Il selettore di velocità è uno strumento che sfrutta la presenza combinata di un campo magnetico e di un campo elettrico opportunamente direzionali per selezionare fasci di particelle cariche con una ben precisa velocità e quindi una ben precisa energia cinetica.

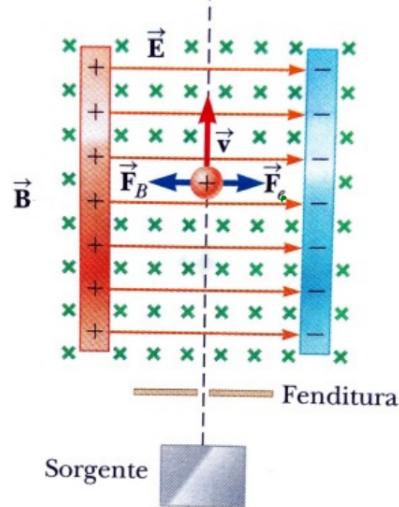


Figura 15.7: Selettore di velocità

La particella che passa deve avere una velocità tale per cui la forza di Lorentz generata deve essere in equilibrio con la forza elettrica data dal campo elettrico, i.e.

$$\begin{aligned} F_e - F_B &= 0 \\ qE &= qvB \end{aligned}$$

La velocità per cui la particella passa senza avere deviazioni di traiettoria è dato da

$$v = \frac{E}{B} \quad (15.11)$$

15.4.2 Spettrometro di massa

Lo spettrometro di massa è uno strumento analitico che separa gli ioni aventi la stessa carica e massa diversa, o più in generale aventi rapporto di massa su carica diverso (come sono ad esempio gli isotopi).

Lo ione passa attraverso un selettore di velocità per poi liberarsene e muoversi di moto circolare uniforme in presenza del solo campo magnetico. In base al raggio di curvatura lo ione cadrà in uno dei sensori posizionati in

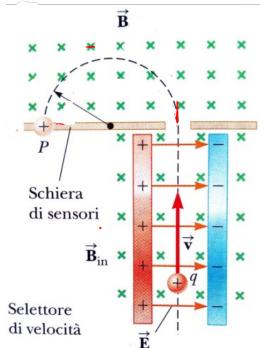


Figura 15.8: Spettrometro di massa.

base all'isotopo che dovrebbe cadere li e differenziare gli ioni.
Nello spettrometro la velocità è data da

$$v = \frac{E}{B_{in}}$$

Successivamente la particella si muove di moto rettilineo uniforme, la cui forza magnetica del campo \vec{B} è quella che da l'accelerazione centripeta. Il raggio di curvatura sarà dato da

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Sostituendo la velocità con quella ottenuta dal selettore di velocità otteniamo il rapporto massa-carica

$$\frac{m}{q} = \frac{rB}{v} = \frac{rBB_{in}}{E} \quad (15.12)$$

15.4.3 Ciclotrone

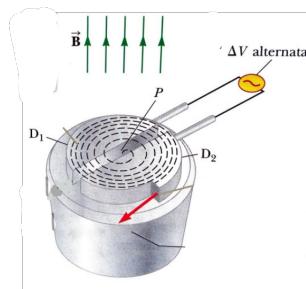


Figura 15.9: Ciclotrone

Un ciclotrone è una macchina usata per accelerare fasci di particelle elettricamente cariche utilizzando una corrente alternata.

Esso è formato da due elettrodi semicircolari cavi a forma di D distanziati tra di loro. Applicando una opportuna differenza di potenziale alternata ad alta frequenza tra i due elettrodi, le particelle subiscono un'accelerazione ogni volta che passano nello spazio tra essi. Accelerando, il diametro dell'orbita aumenta, fino a quando il fascio non fuoriesce tangenzialmente dal bordo del dispositivo. Il raggio di curvatura è dato da

$$r = \frac{mv}{qB}$$

da cui ricaviamo il periodo di rotazione

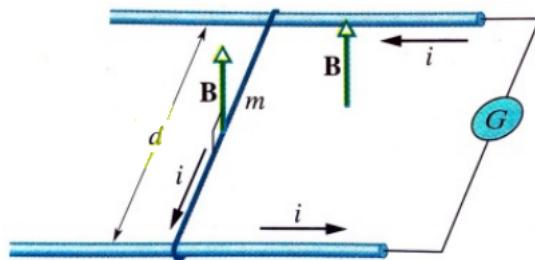
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (15.13)$$

In base al periodo si ricava la frequenza per la corrente alternata.

15.5 Esercizi di riepilogo

15.5.1 Esercizio n. 1

Un cavo metallico di massa m può scorrere senza attrito lungo due rotaie orizzontali separate da una distanza d come in figura. L'insieme giace in un campo magnetico uniforme B . Una corrente costante i fluisce dal generatore G lungo una rotaia, passa attraverso il cavo e poi lungo la seconda rotaia. *Determinare la velocità (modulo e verso) del cavo in funzione del tempo, assumendo che sia fermo per $t = 0$.*



Dalla regola della mano destra osserviamo che la forza magnetica ha verso quello a sinistra, perciò il cavo avrà un'accelerazione che lo porterà a lo allontana dal generatore. La forza applicata sul filo sarà

$$F = idB$$

Da cui ricaviamo l'accelerazione dalla seconda legge della dinamica

$$a = \frac{idB}{m}$$

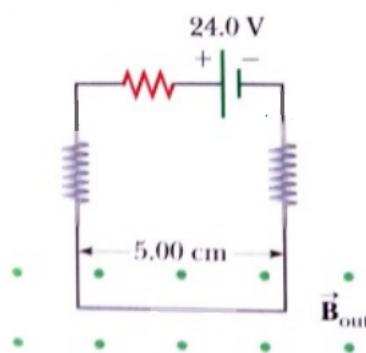
Ricavata l'accelerazione possiamo scrivere la velocità in funzione del tempo

$$v(t) = v_0 t + at = \frac{idB}{m} t$$

15.5.2 Esercizio n. 2

Il circuito in figura consiste in fili orizzontali che sono collegati alle estremità di due molle verticali identiche. La parte superiore del circuito è fissa ed il filo rettilineo inferiore ha una massa di 10 g e una lunghezza di 5 cm. Le molle si allungano di 0.5 cm sotto il peso del filo e il circuito ha una resistenza totale di 12Ω . Quando viene acceso un campo magnetico uscente dal foglio, si osserva un ulteriore allungamento di 0.3 cm. Solamente il cavo orizzontale sul fondo del circuito è immerso nel campo magnetico.

Determinare il valore del campo magnetico.



Per prima cosa ci troviamo la costante elastica della molla dall'allungamento della molla per via della forza peso

$$k = \frac{mg}{x_1} = \frac{0.01 \cdot 9.8}{5 \cdot 10^{-3}} = 19.6 \frac{N}{m}$$

La forza magnetica fa allungare di 0.3 cm la molla dunque

$$F_b = kx_2 = 19.6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 0.0588 N$$

Troviamo la corrente passante per il circuito dalla legge di Ohm

$$I = \frac{V}{R} = \frac{24}{12} = 2 A$$

Infine otteniamo il valore del campo magnetico sapendo che $F_B = ilB$

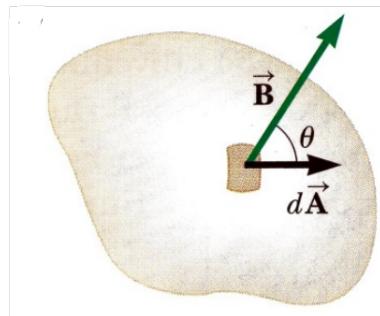
$$B = \frac{F_B}{il} = \frac{0.0588}{2 \cdot 0.05} = 0.588 T$$

Capitolo 16

Sorgenti di campo magnetico

16.1 Legge di Gauss per il campo magnetico

Sia Σ una generica superficie chiusa immersa in un campo magnetico \vec{B} .



L'infinitesimo di flusso sarà

$$d\phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Il flusso totale sarà dunque

$$\phi_B = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Ma per via della conformazione del campo magnetico e della sua struttura dipolare, in ogni superficie chiusa abbiamo tante linee entranti quanto uscenti. Ne deriva che

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = 0 \quad (16.1)$$

Questa è anche la seconda equazione di Maxwell.

16.2 La legge di Biot-Savart

Come detto nel capitolo 15 il movimento delle cariche elettriche genera un campo magnetico.

Un infinitesimo di filo in cui passa una corrente I produce a distanza r un infinitesimo di campo magnetico dato da

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2} \quad (16.2)$$

Questo prende nome di legge di Biot-Savart.

Abbiamo che μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto e vale $1.26 \cdot 10^{-6} \frac{T \cdot m}{A}$

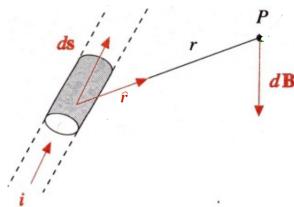


Figura 16.1: Visualizzazione della legge di Biot-Savart.

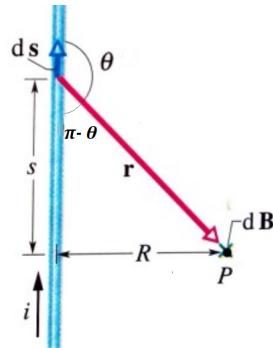
Il campo magnetico generato a distanza r da un conduttore con corrente darà dunque

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2} \quad (16.3)$$

16.3 Campo magnetico generato da un filo rettilineo e piegato ad arco

Consideriamo un filo infinito di cui vogliamo calcolare il campo a distanza R da esso.

Vediamo prima una figura per avere una visualizzazione grafica



Dalla legge di Biot-Savart abbiamo che l'infinitesimo di campo magnetico è dato da

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \sin \vartheta}{r^2}$$

Il modulo del campo dunque sarà dato da

$$B = 2 \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta}{r^2} ds$$

Consideriamo

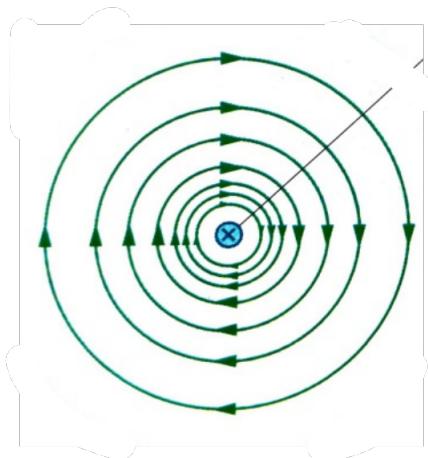
$$\text{- } r = \sqrt{S^2 + R^2}$$

$$\text{- } \sin \vartheta = \sin(\pi - \vartheta) = \frac{R}{\sqrt{S^2 + R^2}}$$

Continuando con l'integrazione troviamo il campo

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R}{(S^2 + R^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{S}{\sqrt{(S^2 + R^2)}} \right]_0^\infty = \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \end{aligned} \tag{16.4}$$

Il campo generato dal filo è radiale come mostrato in figura



Il verso di rotazione è determinato prendendo la mano destra e puntando il pollice verso il verso della corrente: il verso di rotazione è quello dato dall'avvolgimento del filo.

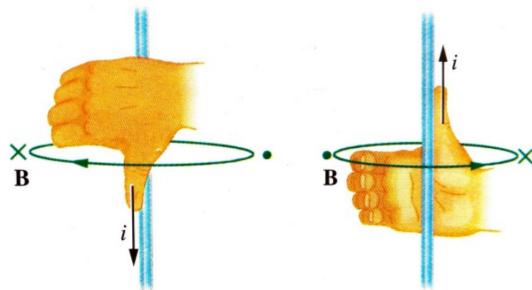
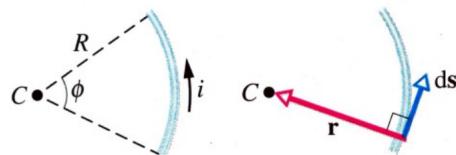


Figura 16.2: Con la mano destra si determina il verso del campo del filo rettilineo.

Consideriamo invece il caso di un filo piegato ad arco



Un infinitesimo ds è rettilineo e r è perpendicolare a esso perciò $ds \cdot \sin \vartheta = ds$. L'infinitesimo di campo è dunque dato da

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds}{R^2}$$

Integrando si trova il campo totale

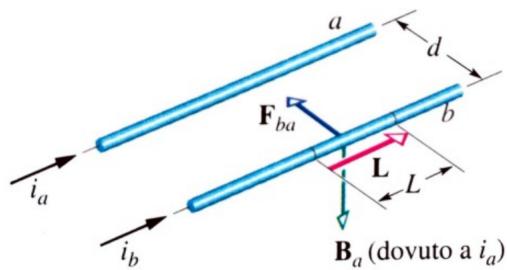
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \int ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} S$$

Sappiamo che l'arco $S = R\phi$ perciò possiamo riscrivere il tutto come

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} R\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \phi \quad (16.5)$$

16.4 Forza magnetica tra fili paralleli percorsi da corrente

Abbiamo visto come un filo generi un campo magnetico radiale ad esso. Se abbiamo due fili paralleli in cui scorre in entrambi corrente, si crea un campo per ogni filo. Poiché abbiamo cariche con una determinata velocità il campo magnetico di un filo genera una forza verso l'altro filo e viceversa Vediamo in figura come esempio la forza esercitata dal filo *a* sul filo *b*.



Il campo magnetico di *a* sarà

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

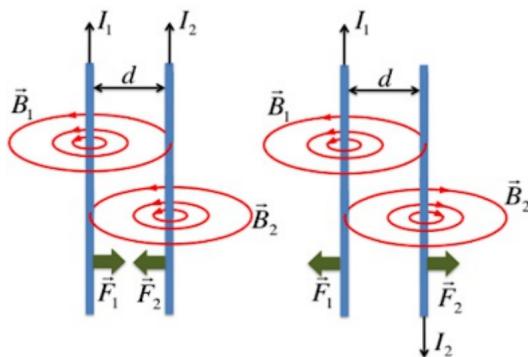
La forza magnetica generata su *b* invece sarà

$$\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a$$

Il modulo sarà dato da

$$F_{ba} = i_b L B_a \sin 90^\circ = i_b L \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d} = \frac{\mu_0 L}{2\pi d} i_a i_b \quad (16.6)$$

Conduttori in cui scorre lo stesso verso della corrente si attraggono, quelli in cui scorre in verso opposto si respingono.



16.5 La legge di Ampère

In analogia al caso elettrostatico si può utilizzare la legge di Gauss per il calcolo del campo magnetico in condizioni di simmetria delle correnti.
Calcoliamo la circuitazione di un percorso che concatena (ossia che ci gira intorno) un filo in cui passa corrente elettrica

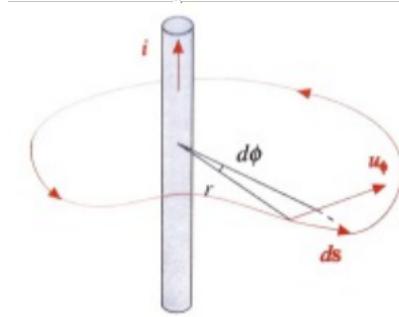


Figura 16.3: Percorso generico in cui faremo la circuitazione

La circuitazione è l'integrale dello scalare del campo magnetico sul percorso

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Il prodotto scalare del campo per l'infinitesimo di percorso è

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds \cos \phi$$

$ds \cos \phi$ è la proiezione nella direzione tangenziale alla circonferenza che rappresenta la linea del campo \vec{B} e perciò $ds \cos \phi = rd\phi$.

Pertanto si ha

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot rd\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$$

La circuitazione diventa

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i_c \quad (16.7)$$

dove i_c è la corrente concatenata.

Nel caso avessimo più correnti concatenate, la circuitazione Γ è definita come

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o I \quad (16.8)$$

dove $I = \sum_k i_k$ e gli i_k sono dentro al percorso. Andiamo a vedere il caso di un percorso non concatenato alla corrente come nella seguente figura

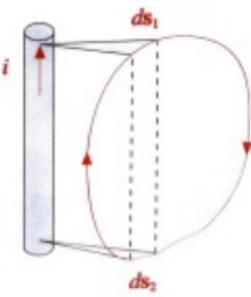


Figura 16.4: Percorso generico non concatenato

Notiamo che per ogni infinitesimo di percorso $d\vec{s}_1$ con proiezione lungo \vec{B} pari a $rd\phi$, esiste un analogo infinitesimo $d\vec{s}_2$ con proiezione lungo \vec{B} pari a $-rd\phi$. Questo vuol dire che l'integrale è nullo, i.e.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (16.9)$$

Successivamente si vedrà che quest'ultima equazione, fa parte della quarta equazione di Maxwell.

16.6 Il campo magnetico nel solenoide

Un solenoide è un lungo filo avvolto a forma di elica.



Figura 16.5: Rappresentazione di un solenoide.

Quando passa una corrente in un solenoide, dalla legge di Biot-Savart si crea un campo magnetico come il seguente

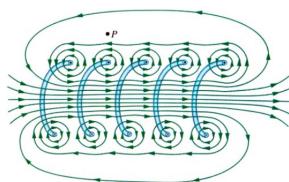


Figura 16.6: Campo magnetico di un solenoide reale.

Per il calcolo del campo magnetico ci affidiamo ad un solenoide ideale in cui il campo magnetico è uniforme e facciamo la circuitazione su un percorso come quello in figura. La circuitazione sarà data da

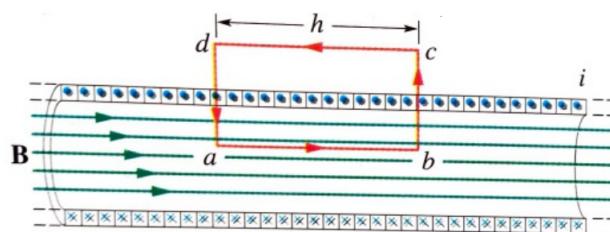


Figura 16.7: Solenoide ideale e il percorso in cui faremo la circuitazione.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Notiamo subito come i percorsi cb e da sono ortogonali al campo magnetico e dunque non danno contributo nella circuitazione. Non dà contributo neanche il percorso cd in quanto il campo magnetico è nullo.

Allora la circuitazione sarà

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bh$$

Dalla (16.7) avremo che $Bh = \mu_0 i_c$.

La corrente i_c è uguale a inh dove i è la corrente passante nei fili e n è il numero di spire per unità di lunghezza. Allora

$$Bh = \mu_0 inh$$

Di conseguenza il campo magnetico del solenoide ideale è

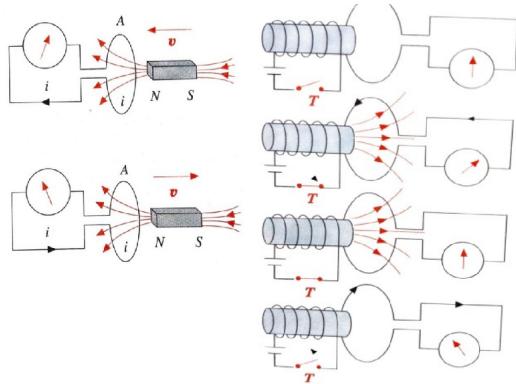
$$B = \mu_0 in \quad (16.10)$$

Capitolo 17

Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

17.1 La legge di Faraday

Osserviamo le due immagini sottostanti



Entrambe hanno in comune una cosa: c'è un cambiamento del flusso magnetico.

Questo cambiamento di flusso produce una differenza di potenziale ε pari a

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (17.1)$$

La variazione produce un *campo elettrico indotto* \vec{E}_i da cui deriva la differenza di potenziale, i.e.

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma \quad (17.2)$$

Poiché la circuitazione è diversa da 0, il campo elettrico indotto **non** è conservativo!

17.2 La legge di Lenz

Il segno meno nella legge di Faraday è enunciato dalla legge di Lenz:

L'effetto della forza elettromotrice è sempre tale da opporsi alla causa che ha generato il fenomeno.

Quando il flusso del campo magnetico aumenta, ossia $\frac{d\phi_B}{dt} > 0$, la forza elettromotrice indotta è negativa in modo tale che il verso della corrente crei un campo magnetico indotto che si oppone all'aumento del flusso. Viceversa

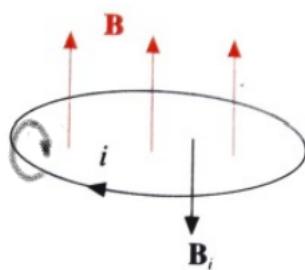


Figura 17.1: Situazione in cui $\frac{d\phi_B}{t} > 0$.

nel caso in cui il flusso fosse in diminuzione, la forza elettromotrice generata è positivo in modo tale che il verso della corrente crei un campo magnetico indotto che contrasta la diminuzione del flusso esterno

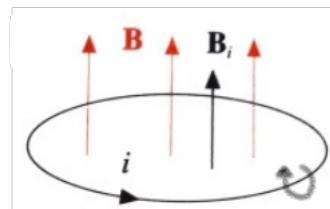
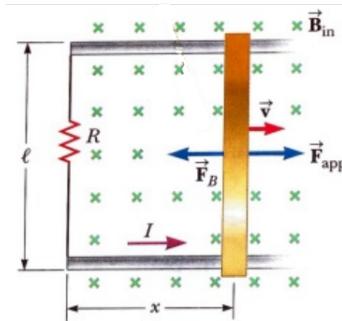


Figura 17.2: Situazione in cui $\frac{d\phi_B}{t} < 0$.

17.3 Forza elettromotrice nei circuiti in moto

Come abbiamo visto, circuiti immersi in campo magnetico a cui viene cambiato il flusso conducono corrente elettrica. Studiamo il caso di una spira con una bacchetta che si muove di velocità costante come in figura



Dalla seconda legge della dinamica abbiamo che

$$F_{appl} = F_B = ilB$$

La forza applicata è una qualsiasi forza generica applicata alla bacchetta. Il flusso magnetico è dato da $\phi_B = Blx$. L'area aumenta poiché la bacchetta si muove, c'è un cambio di flusso magnetico e dunque viene generata una forza elettromotrice data da

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$$

La corrente gira in senso antiorario in quanto si oppone all'aumento del flusso.

Dalla legge di Ohm ricaviamo la velocità

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R} \implies v = \frac{Ri}{Bl}$$

Infine ricaviamo la potenza necessaria per muovere la bacchetta

$$P = f_{appl} \cdot v = ilB \cdot \frac{Ri}{Bl} = i^2 R \quad (17.3)$$

che è la legge di Joule.

Se non ci fosse il segno meno, la corrente girerebbe al verso contrario (in senso orario in questo caso) e la forza magnetica si aggiungerebbe alla forza applicata facendo accelerare la bacchetta senza dispendio di energia che è impossibile.

Infatti la Legge di Lenz esprime la conservazione dell'energia nei campi elettromagnetici indotti.

17.4 Autoinduzione e induttanza

Un circuito percorso da corrente produce un campo magnetico secondo la legge di Biot-Savart.

Il flusso concatenato con il circuito stesso si chiama autoflusso ed è proporzionale alla corrente

$$\phi = Li \quad (17.4)$$

dove L è l'induttanza del circuito che ha come unità di misura nel SI l'Henry e indicato con il simbolo H .

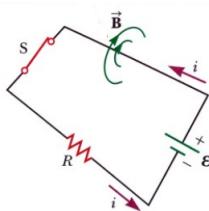


Figura 17.3: Il campo magnetico generato dalla corrente provoca l'autoflusso.

Quando la corrente non è costante, il flusso concatenato genera una forza elettromotrice indotta, detta di autoinduzione data da

$$\varepsilon_L = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (17.5)$$

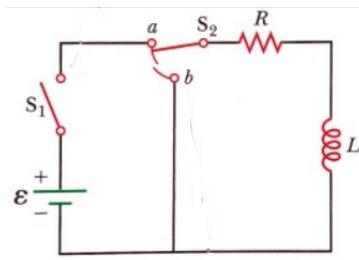
Possiamo immaginare l'induttanza del circuito tutta concentrata in un singolo punto.

I componenti elettronici che implementano l'induttanza vengono chiamati induttori.

17.5 I circuiti RL

La presenza di un induttore in un circuito impedisce alla corrente di aumentare o diminuire istantaneamente.

Prendiamo il seguente circuito per i calcoli



All'istante $t = 0^+$ dalla chiusura di S_1 l'induttore si comporta come un interruttore aperto e non fa passare corrente.

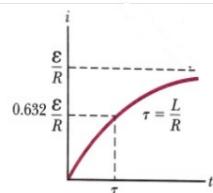
Invece all'istante $t = \infty$ l'induttore si comporta come un cortocircuito ed è come se non esistesse. Nel periodo transitorio invece l'induttore genera una forza elettromotrice (vedi equazione 17.5). Percorrendo in senso orario il circuito, dalla legge delle maglie avremo che

$$\begin{aligned}\varepsilon - iR &= L \frac{di}{dt} \\ \frac{\varepsilon - iR}{di} &= \frac{L}{dt} \\ \int \frac{di}{\varepsilon - iR} &= \int \frac{dt}{L}\end{aligned}$$

Continuando con i calcoli si ottiene che la corrente in un istante t è descritta da

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (17.6)$$

Dove $\tau = \frac{L}{R}$ è l'unità di tempo in cui la corrente passa al 63.2% del valore massimo. Il grafico della funzione è Adesso se chiudiamo l'interruttore S_2 a b, il

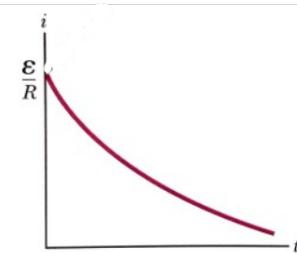


generatore viene escluso e la forza elettromotrice viene fornita dall'induttore, con la corrente che a $t = 0^+$ è massima e $t = \infty$ è nulla.

La corrente viene descritta da

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (17.7)$$

che avrà grafico



L'energia magnetica potenziale dell'induttore è il lavoro compiuto nel tempo contro la forza elettromotrice ε_L nel tempo in cui la corrente passa dal valore 0 al valore i ed è

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad (17.8)$$

Viene ricavata dal fatto che $P = V \cdot i$.

Infatti la potenza del generatore è data da

$$\varepsilon i = ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

Moltiplicando per dt otteniamo la seguente equazione differenziale

$$\varepsilon idt = ri^2 dt + Lidi$$

dove

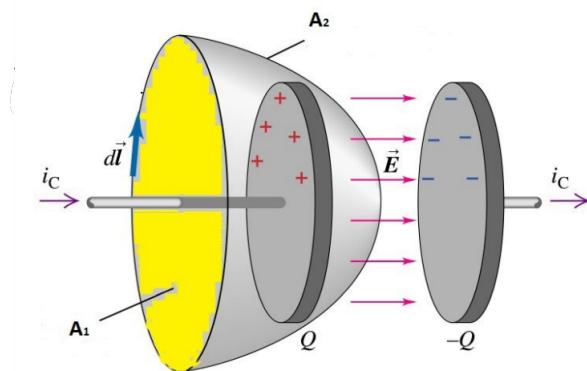
- εidt è il lavoro del generatore.
- $ri^2 dt$ è il lavoro per far girare le cariche nel circuito.
- $Lidi$ è il lavoro contro la f.em di autoinduzione.

Risolvendo otteniamo la (17.8).

17.6 Le quattro equazioni di Maxwell

Se consideriamo il processo di carica di un condensatore notiamo un'incongruenza nella legge di Ampère.

Prendiamo per esempio la seguente immagine



A_1 e A_2 sono delimitate dallo stesso percorso chiuso, ma solo A_1 è attraversato dalla corrente concatenata.

Tra le armature del condensatore non c'è un passaggio di corrente però nello

spazio intorno al condensatore è comunque presente un campo magnetico! Nel processo di carica abbiamo un cambiamento del campo elettrico e dunque un cambio del flusso elettrico dato da (σ è la densità superficiale di carica)

$$\phi_E = EA = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A = \frac{q}{A\epsilon_0} A = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Chiamiamo corrente di spostamento (attenzione **non** è un movimento di cariche, ma un nome dato da Maxwell e termine storico) la variazione del flusso elettrico dato da

$$i_s = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = \epsilon_0 \frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{dq}{dt} \quad (17.9)$$

La corrente di spostamento è dunque ciò che crea il campo magnetico intorno al condensatore in carica.

Aggiungendo la corrente di spostamento alla legge di Ampere otteniamo la legge di Ampere Maxwell

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(i + i_s) = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad (17.10)$$

Abbiamo ottenuto le quattro equazioni di Maxwell (qui in forma integrale, in realtà sono sistemi di equazione differenziali alle derivate parziali) che insieme alla forza di Lorentz governano e descrivono l'interazione elettromagnetica:

1. $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$ (*legge di Gauss per i campi elettrici*);
2. $\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} d\Sigma = 0$ (*legge di Gauss per i campi magnetici*);
3. $\oint_{\tau} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}$ (*legge di Faraday*);
4. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$ (*legge di Ampère-Maxwell*);

La legge di Lorentz generica descrive le forze agenti su una carica in un campo elettricomagnetico ed è dato da

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (17.11)$$