Домашнее задание №2

Яськов А.С. группа СКБ201

Варианты №5 и №12

- Геометрическое P(x) $= \theta(1-\theta)^{x-1}$, $x \in N$, $0 < \theta < 1$
- Максвелла f(x) $= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\theta^3}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}$, $x, \theta \in R^+$

1 Основные характеристики распределений

В силу измеримости $\xi(\omega)$ для каждой случайной величины, принимающей значения в R, существует функция, определенная как:

$$F\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) \leq x) = P(\xi \leq x),$$

которая называется функцией распределения случайной величины $\xi(\omega)$. [1]

Найдем по определению функцию распределения случайной величины, имеющей геометрическое распределение.

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) \leq x) = \sum_{i=1}^{[x]}\theta(1-\theta)^{i-1} = \theta\sum_{i=1}^{[x]}(1-\theta)^{i-1} =$$

$$= /* \text{ по формуле суммы геометрической прогрессии } */ =$$

$$= \theta\frac{1-(1-\theta)^{[x]}}{\theta} = 1-(1-\theta)^{[x]} = \begin{cases} 1-(1-\theta)^{[x]} & \text{если } x \geq 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Здесь [x] означает целую часть числа x.

Найдем по определению функцию распределения случайной величины, имеющей распределение Максвелла.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{t^2}{\theta^3}e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta^3}}\int_{-\infty}^{x} t^2e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}\,dt = /* \text{ так как } d(e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}) = -\frac{te^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}}{\theta^2}\,dt,$$

$$\text{то получим } */ = -\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta^3}}\theta^2\int_{-\infty}^{x}\frac{t^2}{t}\,d(e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta}}\int_{-\infty}^{x} t\,d(e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}) = /* \text{ далее берем по частям } */ =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta}}(te^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}\,dt) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta}}xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta}}\theta\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}\,dt) =$$

$$= /* \text{ так как } x, \theta \in R^+ */ = -\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta}}xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta}}\theta\sqrt{2\pi}\int_{0}^{x}\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}\,dt) = /* \text{ в правом слагаемом}$$

$$\text{подынтегральная фукнция ни что иное, как функция плотности стандартного нормального}$$

$$\text{распределения } */ = -\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta}}xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} + 2\int_{0}^{x} f_N(t)\,dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\theta}}xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} + 2F_N(x)$$

Здесь $F_N(x)$ - функция распределения N(0,1).

[1]Лекции, определение 5.3, стр. 46

Основными свойствами функции распределения F(x) являются[2]:

1. F(x) - неубывающая функция
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. F(x) - непрерывна справа(слева)

Нам потребуется проверить свойства 2 и 3.

Неверно

Покажем непрерывность $F_\xi(x)$ для геометрического распределения справа (слева доказывается аналогично).
Так как это дискретное распределение, то $F_\xi(x)$ - кусочно-постоянная функция с конечным числом точек разрыва[3]. Данные точки - точки разрыва первого рода, а именно скачки. Это можно увидеть на рисунке 1.

```
In[22]:= f[x_, theta_] := theta * Sum[(1 - theta)^(i - 1), {i, 1, x}]
                                   сумма
         h1 = DiscretePlot[{f[x, 0.1], f[x, 0.3], f[x, 0.8]}, {x, -1, 50},
              график последовательности
           PlotLegends → "Expressions", ExtentSize → Full, Filling → None]
           легенды графика                размер прот⋯  в по⋯ заливка  ни одн
```

Out[23]=

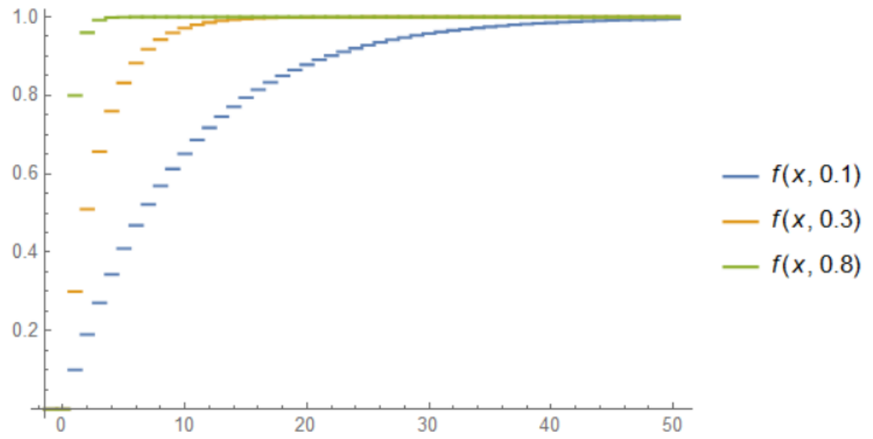

Рис. 1: График геометрического распределения при разных θ

Для непрерывности справа требуется равенство $F_\xi(x_i)$ и $\lim\limits_{x\to x_i^+} F_\xi(x)$.
Рассмотрим $F_\xi(x_i) = 1 - (1-\theta)^{\lceil x_i \rceil}$, где $x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$ - множество всех точек разрыва функции распределения.
$\lim\limits_{x\to x_i^+} F_\xi(x) = 1 - (1-\theta)^{\lceil x \rceil}$, $x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$
$\lim\limits_{x\to x_i^-} F_\xi(x) = 1 - (1-\theta)^{\lfloor x \rfloor}$, $x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$

По этому

Действительно, получили $F_\xi(x_i) = \lim\limits_{x\to x_i^+} F_\xi(x)$ (при этом $F_\xi(x_i) \neq \lim\limits_{x\to x_i^-} F_\xi(x)$).

Теперь проверим свойство 3 для этого же распределения.
$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, так как при x $<$ 1 функция распределения принимает значение равное 0, значит при x $\to -\infty$ очевидно, что это верно.
$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - (1-\theta)^{[x]} = 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} (1-\theta)^{[x]} = /*$ заметим, что $0 < \theta < 1$, значит $1 - \theta \in (0, 1) */ = 1 - 0 = 1$

Покажем что свойства 2 и 3 верны так же и для $F_\xi(x)$ для распределения Максвелла.

Из найденной функции распределения видно, что в ней присутствует функция распределения стандартного нормального распределения, для которого свойства 2, 3, а также 1 верны. $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}$ же определена на R^+ и непрерывна, так как не имеет точек разрыва. В этом можно убедиться, посмотрев на график, представленный на рисунке 2.

Нет   График не позволяет убедиться

[2]Лекции, теорема 5.4, стр. 46
[3]Лекции, начало пункта 5.2.1, стр. 48

```
In[19]:= g[x_, theta_] := - Sqrt[2 / Pi] * 1 / theta * x * Exp[-x^2 / (2 * theta^2)]
                             квадра···  число пи              показательная функция

         h2 = Plot[{g[x, 0.3], g[x, 3], g[x, 2.1]}, {x, 0, 3},
              график функции
            PlotLegends → "Expressions"]
            легенды графика
```

Out[20]=

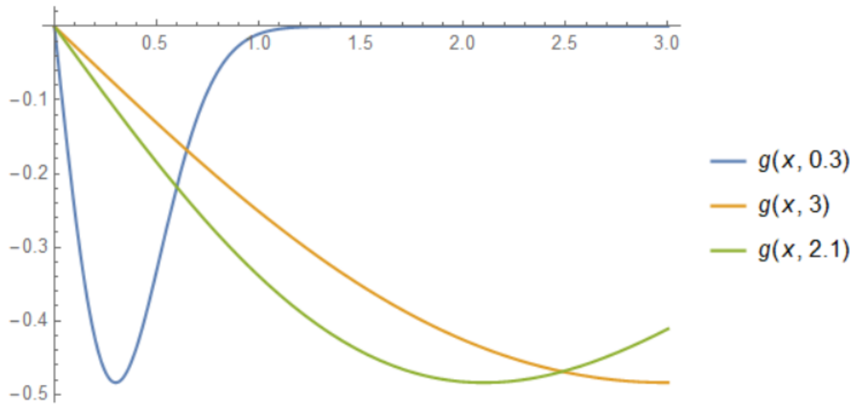

Рис. 2: График $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}$ при разных θ

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} + \lim\limits_{x\to-\infty} F_N(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} + 0 = 0$, так как при x $\to -\infty$ $e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} \to 0$ (значит и $xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} \to 0$).
$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} + \lim\limits_{x\to+\infty} F_N(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} + 1 = 1$, так как при x $\to +\infty$ $e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} \to 0$ (значит и $xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} \to 0$).

1.1 Характеристики распределений

1.1.1 Определения

Математическим ожиданием случайной величины ξ (средним значением) называется интеграл Лебега от неё мере P[4]:

$$M\xi = E\xi = \int\limits_{\Omega} \xi P(d\xi)$$

Центральный момент второго порядка называется дисперсией и обозначается $D\xi$ или $\sigma^2(\xi)$:

$$D\xi = \sigma^2(\xi) = M(\xi - M\xi)^2$$

Дисперсия является средним значением квадрата отклонения случайной величины ξ от математического ожидания.[5]

Пусть g(x) = x^k. Величина $M\xi^k$ называется моментом k-го порядка.[6]
Для дискретных случайных величин:

$$M\xi^k = \sum_{i=1}^{k} x_i^k P(\xi = x_i)$$

Для абсолютно непрерывных случайных величин:

$$M\xi^k = \int\limits_{R} x^k p_\xi(x)\,dx$$

[4]Лекции, определение 6.10, стр. 61
[5]Лекции, определение 7.6, стр. 71
[6]Лекции, определение 7.3, стр. 70-71

Пусть g(x) $= (x - M\xi)^k$. Величина $M(\xi - M\xi)^k$ называется центральным моментом k-го порядка.[7] Для дискретной случайной величины:

$$M(\xi - M\xi)^k = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M\xi)^k P(\xi = x_i)$$

Для абсолютно непрерывной случайной величины:

$$M(\xi - M\xi)^k = \int_R (x - M\xi)^k p_\xi(x)\, dx$$

Величины $M\nu^{[k]} = M\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)$ называются факториальными моментами целочисленной случайной величины ν.[8]

Модой случайной величины называется её наиболее вероятное значение. Термин «наиболее вероятное значение», строго говоря, применим только к дискретным величинам; для непрерывной величины модой является то значение, в котором плотность вероятности максимальна. Условимся обозначать моду буквой M_O.[9]

Медианой случайной величины называется такое её значение M_e, для которого

$$P(X \leq M_e) = P(X \geq M_e) = \frac{1}{2},$$

т.е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше. Геометрически медиана – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам. В случае симметричного модального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.[10]

Квантиль уровня γ такое значение случайной величины, которое все остальные значения этой величины не превышают с вероятностью p. Другими словами, квантиль уровня γ– это значение x_γ случайной величины ξ для которого выполняется следующее равенство:[11]

$$P(\xi \leq x_\gamma) = \gamma \text{ или } F_\xi(x_\gamma) = \gamma$$

Производящей функцией $f_\nu(s)$ распределения случайной величины ν, принимающей целые неотрицательные значения, называется степенной ряд

$$f_\nu(s) = Ms^\nu = \sum_{r=0}^{\infty} P(\nu = r)s^r$$

Заметим, что для любой производящей функции верно неравенство:[12]

$$f_\nu(s) = Ms^\nu = \sum_{r=0}^{\infty} P(\nu = r)s^r \leq \sum_{r=0}^{\infty} s^r$$

Характеристической функцией случайной величины ξ, принимающей действительные значения, называется функция[13]

$$f(t) = Me^{it\xi},\ t \in R$$

[7] Лекции, определение 7.5, стр. 71
[8] Лекции, стр. 95
[9] Определение взято с https://scask.ru/a_book_tp.php?id=21&
[10] Определение взято с https://scask.ru/a_book_tp.php?id=21&
[11] Определение взято с https://allatambov.github.io/psms/pdf/quantiles.pdf
[12] Лекции, определение 12.1, стр. 95
[13] Лекции, определение 13.2, стр. 110

В частности, для случайной величины ξ с дискретным распределением

$$f(t) = \sum_k e^{itx_k} P(\xi = x_k),$$

для случайной величины ξ, распределение которой имеет плотность p(x),

$$f(t) = \int\limits_R e^{itx} p(x)\, dx$$

и в общем случае для случайной величины ξ с функцией распределения $F_\xi(x) = P(\xi \le x)$

$$f(t) = \int\limits_\Omega e^{it\xi(\omega)} P(d\omega) = \int\limits_R e^{itx} dF(x)$$

1.1.2 Вычисления требующихся величин для геометрического распределения

Вычислим математическое ожидание:

$$M\xi = \sum_{i\ge 1} i\theta(1-\theta)^{i-1} = \theta \sum_{i=1}^{\infty} i(1-\theta)^{i-1} = /*\text{заметим, что } d((1-\theta)^i) = i(1-\theta)^{i-1} d(1-\theta), \text{значит} */ =$$

$$= \theta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(1-\theta)^i}{d(1-\theta)} = \theta \frac{d}{d(1-\theta)} \sum_{i=1}^{\infty} (1-\theta)^i = /*\text{ далее по формуле суммы геометрической прогрессии}$$

$$\text{получаем} */ = \theta \frac{d}{d(1-\theta)} \frac{1-\theta}{1-(1-\theta)} = \theta \frac{1(1-(1-\theta) - (1-\theta)(-1)}{(1-(1-\theta))^2} = \theta \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$$

Вычислим диспресию:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

Ранее было найдено значение $M\xi = \dfrac{1}{\theta}$, значит $(M\xi)^2 = \dfrac{1}{\theta^2}$.
Найдем значение $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = \sum_{i\ge 1} i^2\theta(1-\theta)^{i-1} = \theta \sum_{i=1}^{\infty} i^2(1-\theta)^{i-1} = /*\text{заметим, что } d(i(1-\theta)^i) = i^2(1-\theta)^{i-1} d(1-\theta), \text{значит} */ =$$

$$= \theta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{di(1-\theta)^i}{d(1-\theta)} = \theta \frac{d}{d(1-\theta)} \sum_{i=1}^{\infty} i(1-\theta)^i = /*\text{ пусть p} = \theta\text{, а q} = 1-\theta */ = p\frac{d}{dq} \sum_{i=1}^{\infty} iq^i \quad (1)$$

Теперь распишем получившийся ряд:

$$\sum_{i=1}^{\infty} iq^i = q + q^2 + q^3 + \dots + q^k + \dots = q(1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} + \dots)$$

Обозначит сумму в скобках за F(q) и возьмем интеграл от этой функции: Несовсем...

$$\int F(q)dq = q + q^2 + q^3 + \dots + q^k + \dots = /*\text{ по формуле суммы геометрической прогресии} */ = \frac{q}{1-q}$$

Чтобы найти F(q) нужно полученное значение интеграла продифференцировать:

$$F(q) = \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{1(1-q) - q(-1)}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Подставим полученное значение qF(q) в (1):

$$M\xi^2 = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = p\frac{(1-q)^2 - q2(1-q)(-1)}{(1-q)^4} = p\frac{1-q+2q}{(1-q)^3} = p\frac{1+q}{(1-q)^3}$$

Выполним обратную замену и получим:

$$M\xi^2 = \theta \frac{1+1-\theta}{(1-(1-\theta))^3} = \frac{2-\theta}{\theta^2}$$

Значит искомая дисперсия равна $DD\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \dfrac{2-\theta}{\theta^2} - \dfrac{1}{\theta^2} = \dfrac{1-\theta}{\theta^2}$

Вычислим 3-й момент случайной величины:

$$M\xi^3 = \sum_{i\geq 1} i^3\theta(1-\theta)^{i-1} = \theta\sum_{i=1}^{\infty} i^3(1-\theta)^{i-1} / * \text{ пусть p} = \theta, \text{ а q} = 1-\theta * / = p\sum_{i=1}^{\infty} i^3 q^{i-1} \quad (2)$$

Далее дейсвуем аналогично с поиском $M\xi^2$. Распишем получившийся ряд:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^3 q^i - 1 = 1 + 8q + 27q^2 + \cdots + k^3 q^{k-1} + \ldots$$

Обозначим расписанную сумму за F(q) и возьмем от нее интеграл:

$$\int F(q)dq = q + 4q^2 + 9q^3 + \cdots + k^2q^k + \cdots = q(1 + 4q + 9q^2 + \cdots + k^2q^{k-1} + ...)$$

Теперь сумму в скобках обозначим за G(q) и также возьмем от нее интеграл:

$$\int G(q)dq = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + kq^k + \cdots = q(1 + 2q + 3q + \cdots + kq^{k-1} + \ldots)$$

Аналогично с G(q), введем H(q) - сумма в скобках. Возьмем интеграл от H(q):

$$\int H(q)dq = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k + \cdots = / * \text{по формуле суммы геометрической прогресии} * / = \frac{q}{1-q}$$

Чтобы найти H(q) нужно полученное значение интеграла продифференцировать:

$$H(q) = \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Чтобы найти G(q) надо продифференцировать qH(q):

$$G(q) = \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

Чтобы найти F(q) надо продифференцировать qG(q):

$$F(q) = \frac{d}{dq}\left(\frac{q(1+q)}{(1-q)^3}\right) = \frac{(1+2q)(1-q)^3 - (q+q^2)3(1-q)^2(-1)}{(1-q)^6} = \frac{q^2+4q+1}{(1-q)^4}$$

Подставим полученное значение F(q) в (2) и сделаем обратную замену:

$$M\xi^3 = p\frac{q^2+4q+1}{(1-q)^4} = \theta\frac{(1-\theta)^2 + 4 - 4\theta + 1}{\theta^4} = \frac{\theta^2 - 6\theta + 6}{\theta^3}$$

Вычислим 2-й факториальный момент случайной величины:

$$M\xi^{[2]} = M\xi(\xi - 1) = M\xi^2 - M\xi = \frac{2-\theta}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} = \frac{2-2\theta}{\theta^2}$$

Найдем моду распределения:
$M_O\xi = 1$. Покажем это:
Рассмотрим отношение $\dfrac{P(x)}{P(x+1)} = \dfrac{\theta(1-\theta)^{x-1}}{\theta(1-\theta)^x} = \dfrac{1}{1-\theta}$. Полученное выражение > 1, потому что $0 < \theta < 1 \Rightarrow 0 < 1-\theta < 1$. Значит при увеличении аргумента значение функции уменьшается, следовательно функция монотонно убывает. $x \in N$, значит минимальное значения для x это 1. Тогда функция принимает максимальное значение при x = 1.

Найдем квантиль распределения заданного уровня γ:
Из определения получаем $F_\xi(x_\gamma) = \gamma = P(\xi \leq x_\gamma)$. Однако, $P(\xi \leq x_\gamma) = 1 - P(\xi \geq x_\gamma)$. Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} P(\xi \geq x_\gamma) \leq \gamma \\ P(\xi \geq x_\gamma) \geq 1-\gamma \end{cases}$$

$$1-(1-\theta)^{x_\gamma} = \gamma$$

$$1-\gamma = (1-\theta)^{x_\gamma}$$

$$x_\gamma = \lceil \log_{(1-\theta)}(1-\gamma) \rceil$$

Найдем медиану распределения:
Из определения M_e - квантиль распределения уровня $\gamma = \frac{1}{2}$.

$$M_e = \left\lceil \log_{(1-\theta)}(1-\frac{1}{2}) \right\rceil = \lceil \log_{(1-\theta)} 0.5 \rceil$$

Найдем производящую функцию:

$$f_\xi(x) = Ms^\xi = \sum_{r=0}^{\infty} P(\xi = r)s^r = \sum_{r=0}^{\infty} \theta(1-\theta)^{r-1}s^r = \frac{\theta}{1-\theta}\sum_{r=1}^{\infty} \theta(1-\theta)^r s^r = \frac{\theta(1-\theta)s}{(1-\theta)(1-s+\theta s)} = \frac{\theta s}{1-s+\theta s}$$

Используя производящую функцию найдем:

1. первые три факториальных момента случайной величины
2. второй центральный момент случайной величины
3. вероятности: $P(\xi = 0), P(\xi = 3), P(\xi \geq 3)$

1.
1-ый факториальный момент:

$$M\xi^{[1]} = \frac{d}{ds}f_\xi(s)\bigg|_{s=1^-} = \frac{d}{ds}\frac{\theta s}{1-s+\theta s}\bigg|_{s=1^-} = \frac{\theta(1-s+\theta s) - \theta s(-1+\theta)}{(1-s+\theta s)^2}\bigg|_{s=1^-} = \frac{\theta}{(1-s+\theta s)^2}\bigg|_{s=1^-} = \frac{1}{\theta}$$

2-ой факториальный момент:

$$M\xi^{[2]} = \frac{d^2}{ds^2}f_\xi(s)\bigg|_{s=1^-} = \frac{d}{ds}\frac{\theta}{(1-s+\theta s)^2}\bigg|_{s=1^-} = -\theta\frac{\frac{d}{ds}(1-s+\theta s)^2}{(1-s+\theta s)^4}\bigg|_{s=1^-} =$$
$$= -\theta\frac{2(1-s+\theta s)(-1+\theta)}{(1-s+\theta s)^4}\bigg|_{s=1^-} = \frac{2\theta-2\theta^2}{(1-s+\theta s)^3}\bigg|_{s=1^-} = \frac{2-\theta}{\theta^2}$$

3-ий факториальный момент:

$$M\xi^{[3]} = \frac{d^3}{ds^3}f_\xi(s)\bigg|_{s=1^-} = \frac{d}{ds}\frac{2\theta-2\theta^2}{(1-s+\theta s)^3}\bigg|_{s=1^-} = (2\theta^2-2\theta)\frac{\frac{d}{ds}(1-s+\theta s)^3}{(1-s+\theta s)^6}\bigg|_{s=1^-} =$$
$$= (2\theta^2-2\theta)\frac{3(1-s+\theta s)^2(-1+\theta)}{(1-s+\theta s)^6}\bigg|_{s=1^-} = \frac{6\theta(\theta-1)^2}{(1-s+\theta s)^4}\bigg|_{s=1^-} = \frac{6\theta^2-12\theta+6}{\theta^3}$$

2. Второй центральный момент случайной величины

$$M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = M\xi(\xi-1) + M\xi - (M\xi)^2 = M\xi^{[2]} + M\xi^{[1]} - (M\xi^{[1]})^2 =$$
$$= \frac{2(1-\theta)}{\theta^2} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1-\theta}{\theta^2}$$

3. вероятности:

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{0!}\frac{d^0}{ds^0}f\xi(s)\bigg|_{s=0} = \frac{\theta s}{1-s+\theta s}\bigg|_{s=0} = 0$$

$$P(\xi = 3) = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}f\xi(s)\bigg|_{s=0} = \frac{1}{6}\frac{6\theta(\theta-1)^2}{(1-s+\theta s)^4}\bigg|_{s=0} = \theta - \theta^2$$

$$P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) = 1 - 0 - \frac{1}{1!}\frac{d^1}{ds^1} f\xi(s)\bigg|_{s=0} - \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2} f\xi(s)\bigg|_{s=0} =$$

$$= 1 - \frac{\theta}{(1 - s + \theta s)^2}\bigg|_{s=0} - \frac{1}{2}\frac{2\theta - 2\theta^2}{(1 - s + \theta s)^3}\bigg|_{s=0} = 1 - \theta - \theta + \theta^2 = 1 - 2\theta + \theta^2$$

Найдем характеристическую функцию:

$$f(t) = \sum_k e^{itx_k} P(\xi = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \theta (1-\theta)^{k-1} = \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \theta (1-\theta)^k =$$

$$= \frac{\theta}{1-\theta} \frac{e^{it}(1-\theta)}{1 - (1-\theta)e^{it}} = \frac{\theta e^{it}}{1 - (1-\theta)e^{it}}$$

С помощью характеристической функции случайной величины вычислим 1, 2 и 3 моменты случайной величины(если они существуют).

1-ый момент случайной величины:

$$M\xi = \frac{f^{(1)}(0)}{i} = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\frac{\theta e^{it}}{1 - (1-\theta)e^{it}}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{i}\frac{i\theta e^{it}(1 - (1-\theta)e^{it}) - \theta e^{it}(-(1-\theta)e^{it} i)}{(1 - (1-\theta)e^{it})^2}\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{i\theta e^{it}}{(1 - (1-\theta)e^{it})^2}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{\theta}$$

2-ой момент случайной величины:

$$M\xi = \frac{f^{(2)}(0)}{i^2} = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\theta e^{it}}{1 - (1-\theta)e^{it}}\bigg|_{t=0} = /* \text{ так как } i^2 = -1, \text{ то} */ = -\frac{d}{dt}\frac{i\theta e^{it}}{(1 - (1-\theta)e^{it})^2}\bigg|_{t=0} =$$

$$= -\frac{i\theta e^{it} i(1 - (1-\theta)e^{it})^2) - i\theta e^{it} 2(1 - (1-\theta)e^{it})(-(1-\theta)e^{it} i)}{1 - (1-\theta)e^{it})^4}\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\theta e^{it}(1 - (1-\theta)e^{it})^2) - \theta e^{it} 2(1 - (1-\theta)e^{it})(-(1-\theta)e^{it})}{(1 - (1-\theta)e^{it})^4}\bigg|_{t=0} = \frac{\theta e^{it}(e^{it}(1-\theta) + 1)}{(1 - (1-\theta)e^{it})^3}\bigg|_{t=0} = \frac{2-\theta}{\theta^2}$$

3-ий момент случайной величины:

$$M\xi = \frac{f^{(3)}(0)}{i^3} = \frac{1}{i^3}\frac{d^3}{dt^3}\frac{\theta e^{it}}{1 - (1-\theta)e^{it}}\bigg|_{t=0} = /* \text{ так как } i^2 = -1, \text{ то} */ = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\frac{\theta e^{it}(e^{it}(1-\theta) + 1)}{(1 - (1-\theta)e^{it})^3}\bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{(\theta e^{it} i(e^{it}(1-\theta) + 1) + \theta e^{it}(1-\theta)e^{it} i)(1 - (1-\theta)e^{it})^3}{(1 - (1-\theta)e^{it})^6}\bigg|_{t=0} -$$

$$- \frac{1}{i}\frac{\theta e^{it}(e^{it}(1-\theta) + 1) 3(1 - (1-\theta)e^{it})^2(-(1-\theta)e^{it} i)}{(1 - (1-\theta)e^{it})^6}\bigg|_{t=0} = /* \text{ подставим t } = 0 */ =$$

$$= \frac{\theta^2 - 6\theta + 6}{\theta^3}$$

+

1.1.3 Вычисления требующихся величин для распределения Максвелла

Вычислим математическое ожидание:

$$M\xi = \int\limits_R x f\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\theta^3} \exp(-\frac{x^2}{2\theta^2}) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\theta^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 \exp(-\frac{x^2}{2\theta^2}) dx =$$

$$= /* \text{ так как } x, \theta \in R^+, \text{ то} */ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\theta^3} \int\limits_0^{+\infty} x^3 \exp(-\frac{x^2}{2\theta^2}) dx$$

Посчитаем сначала

$$\int x^3\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})dx = /*\text{пусть u} = x^2,\ \text{тогда}\ dx=\frac{1}{2x}du*/=\frac{1}{2}\int u\exp(-\frac{u}{2\theta^2})du = /*\text{пусть}\ v=-\frac{u}{2\theta^2},$$
$$\text{тогда}\ du=-2\theta^2dv*/=2\theta^4\int ve^vdv = /*\text{далее берем по частям}*/=2\theta^4(ve^v-\int e^vdv)=2\theta^4(ve^v-e^v)=$$
$$=/*\text{ выполним обратные замены }*/=-(\theta^2x^2+2\theta^4)\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})+C$$

Значит искомый интеграл равен:

$$-(\theta^2x^2+2\theta^4)\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})\Big|_0^{+\infty}=2\theta^4$$

Получаем математическое ожидание равное $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}2\theta^4=\sqrt{\frac{2}{\pi}}2\theta$

Вычислим дисперсию:

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2=M\xi^2-(M\xi)^2$$

Ранее было найдено значение $M\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}2\theta$, значит $(M\xi)^2=\frac{8}{\pi}\theta^2$.
Найдем значение $M\xi^2$:

$$M\xi^2=\int\limits_R x^2f\xi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\theta^3}\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^4\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})dx=$$
$$=/*\text{ так как }x,\theta\in R^+,\ \text{ то}*/=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\int\limits_0^{+\infty}x^4\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})dx=$$

=/*это интеграл вида[14]

$$\int\limits_0^{+\infty}x^n\exp(-\alpha x^2)dx=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}\alpha^k}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} & \text{если } n=2k, k\in N, \alpha>0\\ \frac{k!}{2\alpha^{k+1}} & \text{если } n=2k+1, k\in N, \alpha>0\end{cases}*/=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\frac{3}{8}\sqrt{\pi}(2\theta^2)^{2.5}=$$
$$=3\theta^2$$

Значит дисперсия:

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2=M\xi^2-(M\xi)^2=3\theta^2-\frac{8}{\pi}\theta^2=\theta^2(3-\frac{3}{\pi})$$

Вычислим 3-й момент случайной величины:

$$M\xi^3=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\int\limits_0^{+\infty}x^5\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}(2\theta)^6=\sqrt{\frac{2}{\pi}}8\theta^3$$

Вычислим 2-й факториальный момент случайной величины:

$$M\xi^{[2]}=M\xi(\xi-1)=M\xi^2-M\xi=3\theta^2-\sqrt{\frac{2}{\pi}}2\theta$$

Найдем моду распределения:

$$f_\xi^{'}(x)=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\theta^3}\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})\right)^{'}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\left(x^2\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})\right)^{'}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\left(2x\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})+x^2\frac{(-2x)}{2\theta^2}\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2})x\left(2-\frac{x^2}{\theta^2}\right)$$

[14]https://ru.wikipedia.org/wiki/Список_интегралов_от_экспоненциальных_функций

$f_\xi^{'}(x) = 0 \iff x\left(2 - \dfrac{x^2}{\theta^2}\right) = 0$, так как $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\theta^3}\exp(-\dfrac{x^2}{2\theta^2}) \neq 0$, $\forall x \in R^+$. Получается, что $f^{'}(x) = 0$ при $x = 0$ или $x = \pm\theta\sqrt{2}$
$f_\xi(0) = 0$
$f_\xi(-\theta\sqrt{2}) = 0$
$f_\xi(\theta\sqrt{2}) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{2}{e\theta}$. Данная величина > 0 при $\forall\theta \in R^+$. Значит при x $= \sqrt{2}\theta$ функция достигает своего наибольшего значения $\Rightarrow M_O = \sqrt{2}\theta$

Найдем квантиль распределения заданного уровня γ:
По определению: $F\xi(x_\gamma) = \gamma$, значит квантиль распределения - решение уравнения

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}x_\gamma \exp(-\frac{x_\gamma^2}{2\theta^2}) + 2F_N(x_\gamma) = \gamma$$

Здесь $F_N(x)$ - функция распределения N(0,1)

Найдем медиану распределения: Из определения M_e - квантиль распределения уровня $\gamma = \frac{1}{2}$. Значит M_e - решение уравнения

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}M_e\xi \exp(-\frac{(M_e\xi)^2}{2\theta^2}) + 2F_N(M_e\xi) = \frac{1}{2}$$

Найдем характеристическую функцию:

$$f(t) = \int\limits_R e^{itx} f_\xi(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\theta^3}\exp(itx - \frac{x^2}{2\theta^2})dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\int\limits_0^{+\infty} x^2\exp(itx - \frac{x^2}{2\theta^2})dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\int\limits_0^{+\infty} x^2\exp(-\frac{(\frac{x}{\theta} - it\theta)^2 - (t\theta)^2}{2})dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\exp\left(-\frac{(t\theta)^2}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty} x^2\exp(-\frac{(\frac{x}{\theta} - it\theta)^2}{2})dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\exp\left(-\frac{(t\theta)^2}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty} x^2\exp(-\frac{(x - it\theta^2)^2}{2\theta^2})dx = /*\text{замена } y = x - it\theta^2 */ =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3}\exp\left(-\frac{(t\theta)^2}{2}\right)\int\limits_{-it\theta^2}^{+\infty} (y^2 + 2yit\theta^2 - t\theta^2)\exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})dx = /*\text{по св-ву линейности}*/ = J_1 + J_2 + J_3$$

Константу перед интегралом пока не будем учитывать.

$$J_1 = \int\limits_{-it\theta^2}^{+\infty} y^2\exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})dy = /*\text{ далее по частям }*/ = -y\theta^2\exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})\Big|_{-it\theta^2}^{+\infty} + \theta^2\int\limits_{-it\theta^2}^{+\infty}\exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})dy =$$

$$= it\theta^4\exp(\frac{(t\theta)^2}{2}) + \theta^2(1 - \int\limits_{-\infty}^{-it\theta^2}\exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})dy) = it\theta^4\exp(\frac{(t\theta)^2}{2}) + \theta^2 - \theta^3\sqrt{2\pi}F_\xi(-it\theta^2)$$

Здесь $\xi \sim N(0,\theta)$.

$$J_2 = \int\limits_{-it\theta^2}^{+\infty} 2yit\theta^2\exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})dy = /*d(y^2) = 2ydy*/ = it\theta^2\int\limits_{-it\theta^2}^{+\infty}\exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})d(y^2) = /*d(\frac{y^2}{2\theta^2}) = \frac{d(y^2)}{2\theta^2}*/ =$$

$$= -2it\theta^4\int\limits_{-it\theta^2}^{+\infty}\exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})d(\frac{y^2}{2\theta^2}) = -2it\theta^4\exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})\Big|_{-it\theta^2}^{+\infty} = 2it\theta^4\exp(\frac{(t\theta)^2}{2}$$

$$J_3 = \int\limits_{-it\theta^2}^{+\infty} -t\theta^2 \exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})dy = -t\theta^2 \int\limits_{-it\theta^2}^{+\infty} \exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})dy = -t\theta^2(1 - \int\limits_{-\infty}^{-it\theta^2} \exp(-\frac{y^2}{2\theta^2})dy) = -t\theta^2 +$$

$$+ t\theta^2\theta\sqrt{2\pi}F_\xi(-it\theta^2) = -t\theta^2 + t\theta^3\sqrt{2\pi}F_\xi(-it\theta^2)$$

Здесь $\xi \sim N(0, \theta)$.
"Соберем"$J_1 + J_2 + J3$:

$$J_1 + J_2 + J3 = it\theta^4 \exp(\frac{(t\theta)^2}{2}) + \theta^2 - \theta^3\sqrt{2\pi}F_\xi(-it\theta^2) + 2it\theta^4 \exp(\frac{(t\theta)^2}{2} - t\theta^2 + t\theta^3\sqrt{2\pi}F_\xi(-it\theta^2) =$$

$$= (t-1)\theta^3\sqrt{2\pi}F_\xi(-it\theta^2) + 3it\theta^4 \exp(\frac{(t\theta)^2}{2}) + \theta^2(1-t)$$

Итоговый интеграл имеет вид:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta^3} \exp\left(-\frac{(t\theta)^2}{2}\right)\left((t-1)\theta^3\sqrt{2\pi}F_\xi(-it\theta^2) + 3it\theta^4 \exp(\frac{(t\theta)^2}{2}) + \theta^2(1-t)\right) =$$

$$= 2(t-1)F_\xi(-it\theta^2)\exp\left(-\frac{(t\theta)^2}{2}\right) + 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}it\theta + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{(t\theta)^2}{2}\right)$$

С помощью характеристической функции случайной величины вычислим 1, 2 и 3 моменты случайной величины(если они существуют).
Я попытался...но не вышло... +

2 Поиск примеров событий, которые могут быть описаны выбранными случайными величинами

2.1 Связи выбранных распределений с другими

2.1.1 Для геометрического распределения

Геомметрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения с параметрами r = 1 и p = 1- θ. Т. е. $\mu \sim \overline{Bin}(1, p) \sim Geom(p)$.
Рассмотрим $\overline{Bin}(1, 1-\theta)$. P(x) = $C^x_{x-r-1}p^x(1-p)^r = C^x_{x+r-1}\theta(1-\theta)^x = \theta(1-\theta)^x$. Здесь $x \in N_0$
Если имеются независимые геометрические распределения с параметром p ($Geom_i(p), i \in 1, \dots, r$), то $\sum\limits_{i=1}^{r} Geom_i(p) \sim \overline{Bin}(r, p)$

В работе Пьявченко А.Н. "Пособие для определения основных характеристик биномиального и связанных с ним распределений вероятностей 2011, https://ria-stk.ru/mmq/doc/posobie_pyavchenko.pdf, приведено доказательство связи геометрического распределения с экспоненциальным распределением в пункте 3.2.4 на стр. 49, а также рассмотрены некоторые примеры приммененения данного распределения.
В данном пункте было рассмотрена дополнительная функция к функции геометрического распределения - $\overline{F}(k, q) = (1-q)^k$. Теперь, связывая каждое испытание с моментом времени Δt, можно получить следующую формулу:

$$(1 - \frac{qk\Delta t}{k\Delta t})^k = \left(1 - \frac{q}{\Delta t}\frac{t}{k}\right)^k \text{ при } t = k\Delta t$$

Рассмотрим отрезки времени $\Delta t \to 0$ и, для корректности следующего предела, примем отношение $\frac{q}{\Delta t} = c(const)$, тогда $\overline{F}(k, q) = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1 - c\frac{t}{k}\right)^k = e^{-ct}$. Таким образом, пределе геометрическое распределение переходит в экспоненциальное распределение. +

Что за чушь

2.1.2 Для распределения Максвелла

Так как распределение Максвелла представляет собой представляет собой величину 3-мерного вектора, компоненты которого независимы и нормально распределены со средним значением 0 и стандартным отклонением a:

$$Maxwell(a) = \sqrt{N^2(0, a) + N^2(0, a) + N^2(0, a)},$$

тор распределение Максвелла можно связать с распределением Кси-квадрат как:

$$Maxwell(a) = a\chi^2(3)$$

2.2 Примеры интерпретации выбранных распределений

2.2.1 Для геометрического распределения

Для последовательных независимых испытаний с одинаковой вероятностью успеха для каждого испытания (всего возможно два исхода для каждого испытания) моделью может выступать геометрическое распределение.Пример такого применения описан в книге "Приложения теории вероятностей в инженерном деле"Х.Б. Хордонского, 1963,
https://dl.booksee.org/genesis/852000/8ec7c25b5c361b947f76b8c446f71f07/_as/[Kordonsky_H.B.]_Prilozheniya_teorii_veroyatnostei(BookSee.org).pdf.

Рассмотрим задачу нахождения вероятного безотказного времяни роботы оборудования по изготовлению деталей. Пусть при изготовлении любой детали рабочий инструмент может получить повтреждение с вероятностью θ. Какова вероятность, что замена произойдет при изготовлении k-ой детали?

Обозначим за А = {"Оборудование поломалось при изготовлении детали"}, В = {"Оборудование не поломалось при изготовлении детали"}, С = {"Оборудование поломалось при изготовлении k-ой детали"}

Так как по условию вероятность поломки оборудования при изготовлении деталей - Р(А) = θ. Значит Р(В) = 1 - Р(А) = 1 - θ. Так как замена происходит на k-ой детали, то k-1 деталь была изготовлена без поломки. Таким образом, Р(С) = $P(B_1)P(B_2)\dots P(B_{k-1})P(A) = (1-\theta)^{k-1}\theta$. Данное равенство показывает, что $P(\xi = k-1) = (1-\theta)^{k-1}\theta \Rightarrow \xi$ имеет геометрическое распределение.

Вычислим теперь вероятность того, что замена произойдет не ранее чем при изготовлении k-ого изделия.

$$P(\xi \geq k) = P(\xi = k) + P(\xi = k+1) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty}(1-\theta)^{i-1}\theta = 1 - P(\xi \leq k-1) = 1 - F_{\xi}(k-1) = 1 - 1 + (1-\theta)^{k-1}$$

Получаем искомую вероятность равную $(1-\theta)^{k-1}$.

2.2.2 Для распределения Максвелла

Распределение Максвелла лежит в основе кинетической теории газов, объясняющей многие фундаментальные свойства газов, включая давление и диффузию. С его помощью вычисляются средние и наиболее вероятные скорости и энергии молекул газа. Оно также применимо для описания электронных процессов переноса и других явлений в физике и химии.

В научной статье "Изучение распределения Максвелла с помощью компьютерной модели и в натурном эксперименте"по специальности "Нанотехнологии"Кравченко Надежда Степановна и Ревинская Ольга Геннадьевна анализируют методические возможности и примеры практической реализации использования метода пространственного разделения частиц, имеющих разные скорости, за счет влияния силы тяжести на дальности их полета при изучении распределения Максвелла.