



# Цифровая обработка сигналов

## Лабораторная работа № 1

### Генерация тонов

#### Содержание

1 Теоретические сведения.....	3
1.1 Базовые детерминированные сигналы.....	3
1.2 Относительная циклическая частота.....	3
1.3 Логарифмическая шкала.....	4
2 Практические сведения.....	5
3 Задание на лабораторную работу.....	6
3.1 Генерация чистого тона.....	6
3.2 Генерация затухающего составного тона.....	6
3.3 Творческая часть.....	8
4 Формат сдачи.....	9
5 Контрольные вопросы.....	9

*Ты слышишь музыку в гудении осы  
И в шорохе опавшего листочка.  
Пусть капают минуты и часы  
И разбивают время на кусочки,*

*Но музыку разъять нельзя никак,  
Она течет единою волною,  
И, как морской прилив, за тактом такт,  
Всё заполняет музыка собою.*

*Татьяна Зубкова, [«Ты и музыка»](#)*

## 1 Теоретические сведения

### 1.1 Базовые детерминированные сигналы

Название	Обозначение	Определение
Единичный импульс	$\delta[n]$	$\begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$
Единичный скачок	$u[n]$	$\begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$
Прямоугольный импульс	$\Pi_N[n]$	$\begin{cases} 1, & 0 \leq n < N; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$
Правосторонняя экспонента	—	$\begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} = a^n u[n]$
Гармонический сигнал (синусоида или косинусоида)	—	$\cos(\omega n + \varphi)$
Комплексная экспонента	—	$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$

### 1.2 Относительная циклическая частота

Рассмотрим непрерывный периодический сигнал  $\cos(\Omega t)$ . Данный сигнал характеризуется **циклической (угловой, круговой) частотой**  $\Omega \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$ . Если косинус рассматривать как проекцию равномерного вращательного движения, то эта частота численно равна углу [в радианах], на который вращаемое тело поворачивается за 1 с. Поделив угол полного оборота  $2\pi$  на  $\Omega$ , можно найти период сигнала  $T = \frac{2\pi}{\Omega} \text{ [с]}$ .

**Линейной частотой**  $f \text{ [Гц]}$  называют количество колебаний (повторений, периодов) совершаемых объектом за 1 с. Напомним очевидные соотношения:  $\Omega = 2\pi f$ ,  $T = \frac{1}{f}$ . Обозначение  $f$  происходит от английского слова «frequency» (частота).

**Шаг дискретизации**  $\Delta$  — время между замерах отсчётов при равномерной дискретизации сигнала. Измеряется в [с]. Например, если непрерывный сигнал  $\cos(\Omega t)$  дискретизируется с равномерным шагом  $\Delta$ , начиная с момента времени  $t = 0$  с, то получается дискретный сигнал  $x[n] = \cos(\Omega \cdot \Delta \cdot n)$ . Отметим, что получаемый дискретный сигнал в зависимости от значения  $\Omega \cdot \Delta$  может оказаться как периодическим, так и непериодическим.

**Частота дискретизации**  $f_s$  — количество производимых замеров в секунду при равномерной дискретизации. Измеряется в  $\left[ \frac{\text{отсчёт}}{\text{с}} = \Gamma_{\text{ц}} \right]$ . Индекс  $s$  в обозначении происходит от английского слова «sampling» (дискретизация). Шаг дискретизации связан с частотой дискретизации соотношением  $\Delta = \frac{1}{f_s}$ .

Вернёмся к дискретному гармоническому сигналу  $\cos(\Omega \cdot \Delta \cdot n)$ . Часто такая форма записи, требующая знание шага дискретизации, оказывается неудобной. Поэтому вводят понятие **относительной циклической частоты**  $\omega = \Omega \cdot \Delta$ . Такую частоту иногда ещё называют нормированной к частоте дискретизации, т. к.  $\Omega \cdot \Delta = 2\pi \frac{f}{f_s}$ . Эта величина измеряется в  $\left[ \frac{\text{рад}}{\text{отсчёт}} \right]$ , является безразмерной и для равномерного вращательного движения численно равна углу [в радианах], на который тело поворачивается за один дискретный отсчёт. Обратим внимание на отличие от обычной циклической частоты — привязка к физической шкале времени, измеряемой в секундах, заменена на привязку к безразмерным номерам отсчётов. Относительная циклическая частота позволяет оперировать дискретным гармоническим сигналом, записанный в форме  $\cos(\omega n)$ , без привязки к физической шкале времени и без знания частоты/шага дискретизации (однако знание частоты/шага дискретизации потребуется, если понадобится перейти от отсчётов к физической шкале времени).

### 1.3 Логарифмическая шкала

Диапазон амплитуд звукового давления, воспринимаемый человеческим ухом, крайне широк и изменяется примерно от 20 мкПа (порог слышимости) до 60 Па (сирена, мотоцикл без глушителя). Верхний и нижний порог отличаются в  $\frac{60}{20 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^6$  (миллионы!) раз, что делает неудобным использование линейной шкалы для измерения громкости звука.

**Бел** [Б] — единица логарифмического отношения двух физических величин, выражающая отношение двух мощностей как десятичный логарифм этого отношения:  $1 \text{ Б} = \lg \frac{P_2}{P_1}$ . Если вместо энергетической величины  $P$  (мощности, интенсивности звука) нужно использовать силовую  $F$  (звуковое давление), то с учётом  $P \propto F^2$  получаем  $1 \text{ Б} = \lg \frac{F_2^2}{F_1^2} = 2 \lg \frac{F_2}{F_1}$ .

Если выразить  $F_2$  через  $F_1$ , то получим  $F_2 = F_1 \cdot 10^{B/2}$ . Таким образом, изменение звукового давления на 1 Б означает увеличение звукового давления в

$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \approx 3,16$  раз. На практике целый Бел практически не употребляется, вместо него используется десятая часть Бела — **децибел** [дБ].

Часто в качестве знаменателя  $F_1$  выступает некая общепринятая исходная (опорная) величина. Тогда отношение принято называть **уровнем**. Для **уровня звукового давления** опорное значение составляет 20 мкПа. Например, уровень звукового давления 40 дБ означает амплитуду звукового давления, равную  $20 \text{ мкПа} \cdot 10^{\frac{4}{2}} = 2 \text{ мПа}$  и примерно соответствует тихому разговору/шуму компьютера или кондиционера.

## 2 Практические сведения

Пакет	Функция
matplotlib	<a href="#">matplotlib.pyplot.stem</a>
	<a href="#">matplotlib.pyplot.show</a>
numpy	<a href="#">numpy.linspace</a>
	<a href="#">numpy.cos</a> или <a href="#">numpy.sin</a>
scipy	<a href="#">scipy.io.wavfile.write</a>
	<a href="#">scipy.signal.sawtooth</a>
	<a href="#">scipy.signal.square</a>

В приведённом фрагменте кода не соблюдены принципы хорошего кода и он предназначен исключительно для иллюстрации работы некоторых функций.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

from scipy.io.wavfile import write

# Создаём массив с моментами времени: 0, 1/16000, 2/16000, ..., 15999/16000, 1 с
# Частоту дискретизации полагаем равной 16 кГц
t = np.linspace(0, 1, 16000 + 1)

# Вычисляем гармонический сигнал sin с циклической частотой 2700 рад/с
# При частоте дискретизации 16 кГц это примерно соответствует 430 Гц
x = np.sin(2700 * t)

# Сохраняем полученный сигнал в аудиофайл со значением частоты дискретизации 16 кГц
write('example.wav', 16000, x)

# Рисуем график полученного сигнала на интервале от 0 до 5 мс
# Для ускорения отображения большого количества точек можно использовать plot вместо stem
plt.xlim(0, 0.005)
plt.stem(t, x, use_line_collection=True)
plt.show()
```

### 3 Задание на лабораторную работу

#### 3.1 Генерация чистого тона

Напишите функцию `tone` для генерации звукового тона. Функция должна иметь следующие параметры:

- 1) `f` — частота сигнала (в герцах);
- 2) `t` — длительность сигнала (в секундах);
- 3) `waveform` — [форма](#) сигнала (значение по умолчанию: гармоническая);
- 4) `fs` — частота дискретизации (в герцах, значение по умолчанию: 44100).

Параметр формы сигнала передавать в виде строки или перечисления. Функция должна поддерживать как минимум следующие формы:

- 1) гармоническая (см. [cos](#) или [sin](#));
- 2) меандр со скважностью 2 (см. [square](#));
- 3) треугольная (см. [sawtooth](#) с нужным значением параметра `width`);
- 4) пила (см. [sawtooth](#) со значением параметра `width` по умолчанию).

Функция должна возвращать `numpy`-массив значений типа `np.float`. Амплитуда создаваемого сигнала должна равняться 1 (значения сигнала изменяются от  $-1$  до  $+1$ ).

Проверьте корректность реализации:

- 1) визуально, нарисовав сигнал или его часть с помощью [stem](#);
- 2) аудиально, сохранив сигнал с помощью [write](#) в wav-файл и проверив на слух полученный аудиофайл с использованием онлайн-сервиса [Tone Generator](#).

#### 3.2 Генерация затухающего составного тона

Напишите функцию `musical_tone` для генерации затухающего составного тона. Об обязательных параметрах функции см. в конце данного подраздела.

В составном тоне присутствует ряд чистых тонов с частотами  $f$ ,  $2f$ ,  $3f$ ,  $4f$  и т. д. Частоту  $f$  называют **основной частотой**, кратные ей частоты  $2f$ ,  $3f$  и т. д. — **обертонами**.

Для генерации сигнала составного тона необходимо создать сигналы нужных чистых тонов и сложить их. Амплитуду основного тона выбрать равной 1. Относительная интенсивность обертонов (значения их амплитуд) может быть различной — в частности, именно благодаря этому обеспечивается специфика звучания разных музыкальных инструментов. Значения этих амплитуд выбрать по своему усмотрению. Некоторые возможные примеры приведены на [рисунке 1](#). На приведённой ил-

люстрации используется понятие **амплитудного спектра** — графика, показывающего зависимость амплитуды гармоник от её частоты. Учтите, что частота последнего обертона не должна превышать 20 кГц (порог слышимости человека).

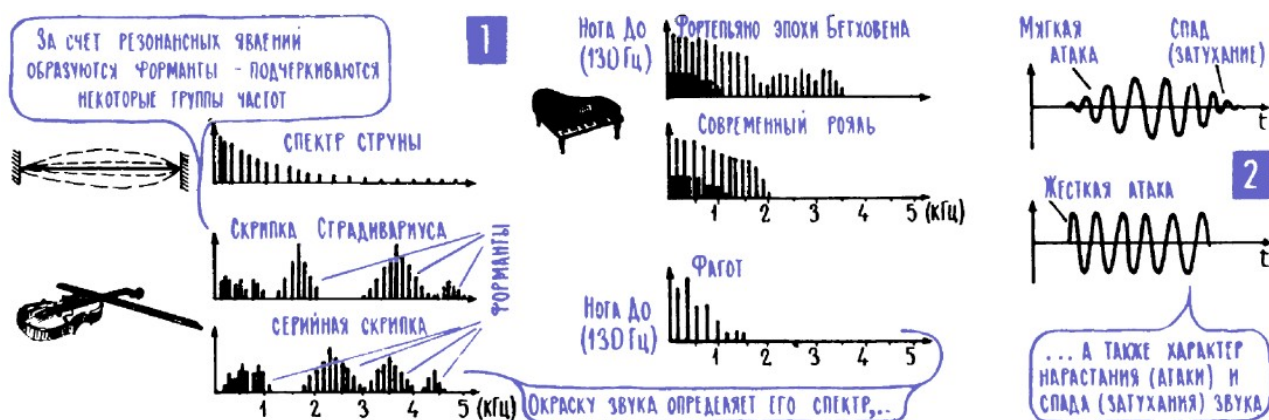


Рисунок 1 — Особенности музыкальных звуков

Источник: [Сворень Р. А., «Электроника шаг за шагом»](#) (рисунок 14.3)

После сложения всех чистых тонов должен получиться незатухающий периодический сигнал сложной формы с периодом  $\frac{1}{f}$ . Поскольку амплитуда полученного сигнала будет превышать 1, необходимо его нормировать (привести амплитуду к 1).

Затухание сигнала с течением времени можно обеспечить умножением полученного сигнала на правостороннюю экспоненту. Так как при программировании все операции производятся с конечными по длительности сигналами, то формально умножение происходит на правостороннюю экспоненту, ограниченную прямоугольным импульсом —  $a^n \cdot \Pi_N[n]$ , где  $0 < a \leq 1$  — параметр затухания,  $N$  — количество отсчётов в сигнале.

С учётом всего вышеизложенного, функция `musical_tone` должна иметь следующие параметры:

- 1) `f` — частота основного тона (в герцах);
- 2) `t` — длительность сигнала (в секундах);
- 3) `waveform` — **форма** сигнала, используемая для генерации чистых тонов (значение по умолчанию: гармоническая);
- 4) `fs` — частота дискретизации (в герцах, значение по умолчанию: 44100);
- 5) `db` — уровень затухания (в децибелах) амплитуды в конце сигнала относительно единичной амплитуды (предоставить значение по умолчанию, которое подбирать по своему вкусу).

Примечание 1. Значение параметра затухания  $a$  для правосторонней экспоненты должно вычисляться на основе значений параметров функции  $t$ ,  $fs$  и  $db$ .

Примечание 2. Уровень затухания  $db$  — неположительное число (при нуле обеспечить отсутствие затухания). При передаче положительного числа допускается как генерировать исключение, так и обеспечить противоположный эффект (усиление вместо затухания).

Примечание 3. Опционально можно предусмотреть параметры, позволяющие регулировать тембровую окраску звука (относительную интенсивность обертонов) и/или более тонко задавать параметры нарастания и спада (см. [рисунок 1](#)). Допускается обеспечение затухания не на всей длительности сигнала, а только на некой конечной части (т. е. умножение на затухающую экспоненту происходит не для всего сигнала целиком, а только для какого-то количества последних секунд). Данный пункт не является обязательным к выполнению.

### 3.3 Творческая часть

Используя функцию `musical_tone`, написать код, который создаёт простенькое музыкальное произведение небольшой длительности (ориентировочно от 8 до 20 секунд). Для стыковки фрагментов, звучащих в разные моменты времени, могут быть полезными функции [numpy.concatenate](#), [numpy.roll](#), [numpy.zeros](#).

Возможный вариант выполнения:

1. На сайте <https://virtualpiano.net> зайти в раздел [Music Sheets](#), подобрать произведение по вкусу (рекомендуется выбрать произведение не выше 4-го уровня сложности) и перейти на страницу этого произведения (пример страницы: [Fur Elise](#); разумеется, вы должны использовать любое другое произведение).

2. На странице отображается список нот в виде клавиш английской раскладки клавиатуры. Объяснение используемой нотации можно посмотреть в секции «Semantics of music sheets» раздела [Learn/Teach](#).

3. Внизу страницы можно нажать на кнопку «Play this song», чтобы загрузить указанные ноты в виртуальное пианино, прослушать произведение (кнопка «Auto Play») и выбрать небольшую часть композиции для воспроизведения в собственном скрипте. Пример виртуального пианино с загруженными нотами: [Fur Elise](#).

4. Для того, чтобы узнать значения основных частот используемых клавиш, необходимо включить американскую стандартную систему нотации. Это делается с помощью переключателя «Note Labels». На странице произведения этот переключатель находится внизу, после нот; на странице виртуального пианино — в меню «Key



Assist». В итоге должны появиться обозначения в американской системе нотации — в виде букв C, D, E, F, G, A, B с цифрой (буква означает ноту, цифра — октаву).

5. Используя сопоставление нот с соответствующими основными частотами (например: [Table of note frequencies](#)), реконструировать часть композиции в собственном скрипте с использованием функции `musical_tone`.

#### 4 Формат сдачи

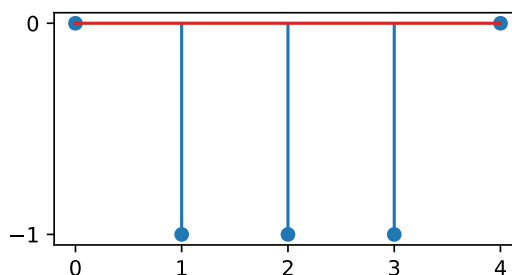
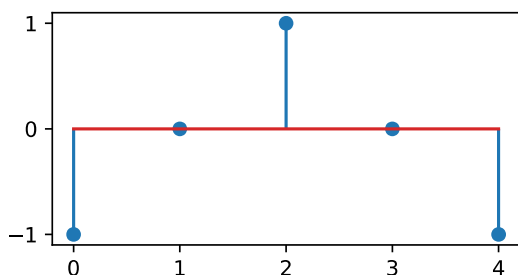
Предоставить скрипт и wav-файл, содержащий музыкальное произведение из творческой части задания.

Скрипт должен содержать:

- 1) реализованную функцию `tone`;
- 2) реализованную функцию `musical_tone`;
- 3) код генерации предоставляемого wav-файла с музыкальным произведением.

#### 5 Контрольные вопросы

1. Определение единичного импульса, единичного скачка, правосторонней экспоненты, комплексной экспоненты, гармонического сигнала.
2. Запишите единичный скачок в виде импульсной декомпозиции (в виде линейной комбинации единичных импульсов). Подсказка: нужно использовать знак  $\sum$ .
3. Запишите комплексную экспоненту в виде импульсной декомпозиции.
4. Запишите импульсные декомпозиции для следующих сигналов:



5. Определение частоты: линейной, циклической, относительной циклической.
6. Дан дискретный сигнал  $x[n] = (-1)^n$ . Какой линейной частоте может соответствовать такой сигнал, если частота дискретизации равна  $4 \Gamma_{\text{ц}}$ ?
7. Для дискретного сигнала  $x[n] = \cos(\omega n)$  приведите примеры конкретных значений циклической частоты  $\omega$ , при которых дискретный сигнал будет: 1) периодическим; 2) непериодическим.
8. Почему для частоты дискретизации используют весьма специфическое значение  $44,1 \text{ кГц}$ , а не, например, «красивое» круглое значение  $40 \text{ кГц}$ ?

9. Амплитуда звукового давления некоторого сигнала равна 50 мкПа. Сигнал был усилен на 2 Б. Чему равна амплитуда звукового давления усиленного сигнала?

10. Оцените, какая сила действует на барабанную перепонку при уровне звукового давления 100 дБ? Площадь барабанной перепонки принять равной 65 мм<sup>2</sup>. Ответ выразить в ньютонах. Справочно: указанный уровень звукового давления примерно соответствует громкому автомобильному сигналу на расстоянии 5 м.

11. Как можно на пальцах объяснить тот факт, что сигналы чистых тонов 1 Гц, 5 Гц, 9 Гц и т. д., генерируемых функцией `tone` при  $f_s = 4$  Гц, являются неразличимыми? Поясните наблюдаемый эффект на схематичном графике. Как с учётом этого эффекта может измениться ответ на задачу № 6?