Цифровая обработка сигналов

Лабораторная работа № 3

Хорус-эффект

Содержание

Кафедра геоинформатики и информационной безопасности
Самарского университета

Проходит год, как день,

То длится день, как год,

И, оглянувшись, можно убедиться,

Что время то ползет,

То медленно идет,

То будто слишком быстро мчится.

Леонид Утёсов, «О времени»

1 Теоретические сведения

1.1 Интерполяция сигнала

Интерполяция — нахождение промежуточных значений сигнала по имеющемуся дискретному набору значений.

Задача интерполяции возникает, в частности, при сдвиге (задержке) сигнала на величину, которая не кратна шагу дискретизации сигнала. Например, на рисунке 1 проиллюстрирована проблема задержки сигнала на половину шага дискретизации.

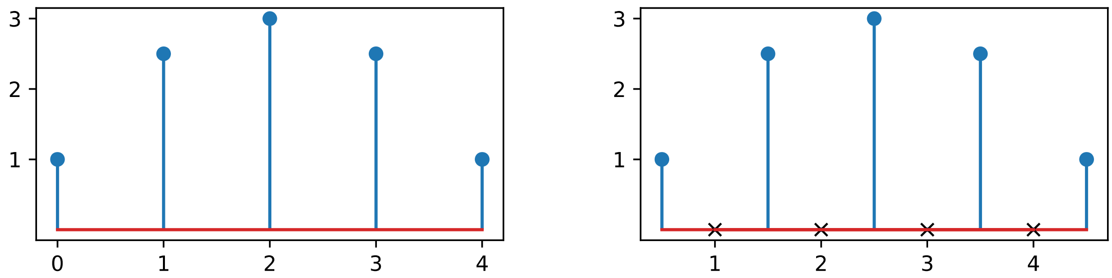

Рисунок 1 — Пример сдвига сигнала на половину шага дискретизации

При таком сдвиге необходимо определить неизвестные значения сигнала в точках $n = 1, 2, 3, 4$ при известных значениях в точках $n = 0{,}5;\ 1{,}5; \ldots;\ 4{,}5$. Необходимость определения значений сигнала в граничных точках $n = 0$ и $n = 5$ зависит от решаемой задачи. В большинстве случаев граничными точками можно пренебречь.

Простейшим способом решения такой задачи «в лоб» является кусочно-линейная интерполяция. Значения в промежуточных точках определяются по уравнениям прямолинейных сегментов, которыми соединяются соседние точки. Для вычисления значения в промежуточной точке $n \in [n_1; n_2]$, где n_1 и n_2 – соседние точки, в которых значения сигнала известны и равны a и b соответственно (рисунок 2), используется формула линейной интерполяции: $x(n) = a + \dfrac{b-a}{n_2 - n_1} \cdot (n - n_1)$.

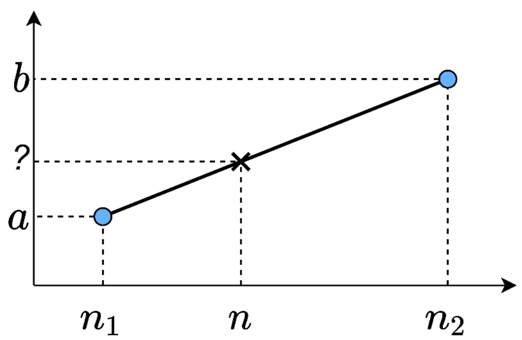

Рисунок 2 — Линейная интерполяция

1.2 Интерполяционная формула Уиттекера-Шеннона

Если непрерывный сигнал имеет ограниченный спектр и дискретизируется с частотой, превышающей удвоенную верхнюю частоту сигнала, то получаемый дискретный сигнал содержит достаточно информации для однозначного восстановления непрерывной версии. В этом случае задача интерполяции сводится к вычислению соответствующего значения непрерывного сигнала.

Формула восстановления непрерывного сигнала из теоремы Котельникова (за рубежом эту формулу называют интерполяционной формулой Уиттекера-Шеннона), имеет следующий вид:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\Delta} - n\right),$$

где Δ — шаг дискретизации и $\operatorname{sinc}(x)$ — нормированная sinc-функция:

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

В приведённой формуле неявно подразумевается, что дискретный отсчёт $n = 0$ соответствует моменту времени $t = 0$.

Таким образом, если дискретный сигнал рассматривать как полученный из некоторого непрерывного сигнала путём равномерной дискретизации без каких-либо потерь, то интерполяционная формула Уиттекера-Шеннона позволяет осуществить «идеальный» сдвиг — результат будет неотличим от ситуации, когда бы тот же самый непрерывный сигнал подвергся дискретизации со смещённым временем начала.

1.3 Хорус-эффект

Хорус-эффект заключается в сложении сигнала с одной или более задержанными копиями, при этом время задержки каждой копии не является постоянным во времени и непрерывно изменяется. В рамках данной работы положим, что задержка $\Delta_t(t)$ определяется постоянной частью Δ_0 и переменной частью $A_\triangle \sin(2\pi f_\triangle t)$, где $A_\triangle$ — амплитуда переменной части задержки, $f_\triangle$ — частота изменения времени задержки.

Создание задерживаемой копии сигнала проиллюстрировано в виде четырёх диаграмм (1), (2), (3) и (4) на рисунке 3. Здесь цветные кружочки на временной оси означают **моменты времени, в которых известно значение сигнала**. При этом сами значения сигнала на рисунке не отображены, т. к. не принципиальны для понимания сути происходящего. Для особо скрупулёзных можно положить, что значения закодированы цветом кружочка.

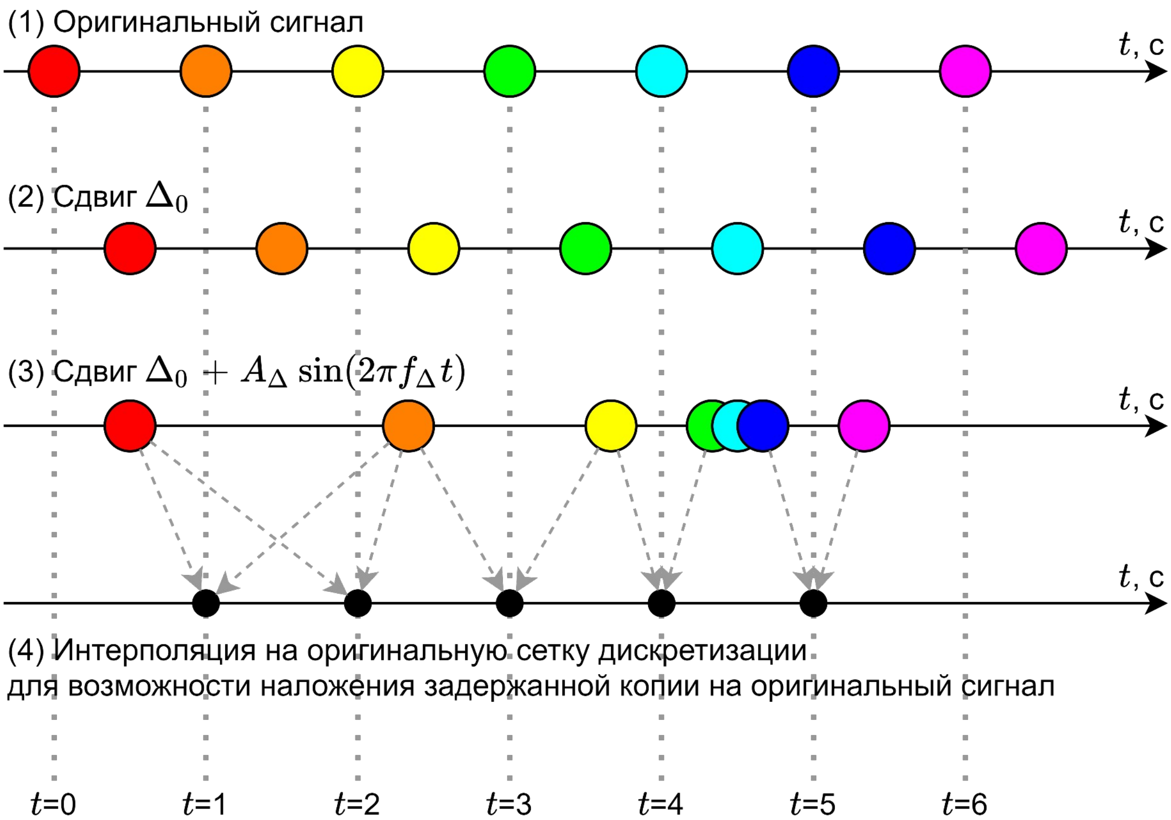

Рисунок 3 — Иллюстрация задержки сигнала на переменную величину

Для простоты примера положим, что шаг дискретизации равен 1 с, а красный отсчёт диаграммы (1) соответствует моменту времени $t = 0$ с.

На вышеприведённом рисунке диаграмма (2) иллюстрирует применение только постоянной части задержки, диаграмма (3) — применение постоянной и переменной частей. При этом $\Delta_0 = \dfrac{1}{2}$ с, $A_\Delta = \dfrac{7}{6}$ с и $f_\Delta = \dfrac{1}{8}$ Гц, то есть $\Delta_t(t) = 0{,}5 + \dfrac{7}{6}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)$.

Например, смещение розового отсчёта на диаграмме (3):

— относительно диаграммы (2) определяется переменной частью задержки $\dfrac{7}{6}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\cdot 6\right)$. и составляет $-\dfrac{7}{6}$ с.

— относительно диаграммы (1) определяется итоговым выражением $\Delta_t(t)$ и составляет $\Delta_t(6) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{6}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\cdot 6\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{6} = -\dfrac{2}{3}$ с.

Для возможности сложения оригинального сигнала и его задержанной копии необходимо, чтобы эти сигналы были определены в одни и те же моменты времени.

Кроме того, задержанная копия на диаграмме (3) вообще оказывается определена на **не**равномерной сетке дискретизации. Для решения этой проблемы применяется интерполирование сигнала — определение неизвестных значений сигнала в чёрных точках на диаграмме (4) по известным значениям в точках на диаграмме (3). На рисунке каждая чёрная точка связана серыми стрелками с теми известными отсчётами, которые понадобятся для вычисления значения сигнала в этой точке при использовании линейной интерполяции.

Обратим внимание на два момента.

Во-первых, параметры $A_\triangle$ и $f_\triangle$ должны быть аккуратно подобраны относительно друг друга, т. к. при слишком резком изменении времени задержки возможна ситуация, когда последовательный порядок отсчётов будет нарушен. Такой ситуации следует избегать. В рамках данной работы допускается ограничиться эмпирической проверкой на строгое возрастание значений отсчётов последовательности диаграммы (3) с помощью конструкции `numpy.all(numpy.diff(t) > 0)`. Если данная проверка не проходит, рекомендуется как минимум вывести в консоль сообщение с предупреждением.

Во-вторых, из-за получающейся неравномерной сетки дискретизации невозможно использование интерполяционной формулы Уиттекера-Шеннона. Поэтому в приведённом выше примере упоминалась линейная интерполяция.

2 Практические сведения

Пакет	Функция
`numpy`	`numpy.all`
	`numpy.diff`
	`numpy.sinc`
`scipy`	`scipy.interpolate.interp1d`

3 Задание на лабораторную работу

Шаг 1. С помощью микрофона запишите короткий отрывок речи. Можно использовать тот же самый входной файл, что и для прошлой лабораторной работы.

Шаг 2. Напишите функцию `shift` для получения смещённой версии сигнала с переменной задержкой. Функция должна принимать входной сигнал `x`, частоту дискретизации `fs` и параметры меняющейся задержки — постоянную часть `dt` (в секундах), амплитуду переменной части `at` (в секундах) и частоту `f` (в герцах) изменения переменной части.

Шаг 3. Напишите код, который накладывает эффект хоруса на записанный отрывок речи. Количество складываемых копий и параметры задержки каждой копии (для каждой копии они могут быть свои) подобрать по своему вкусу. В качестве ориентировочных начальных значений, от которых можно отталкиваться: $\Delta_0 = 20$ мс, $A_\Delta = 10$ мс и $f_\Delta = 3$ Гц.

Опциональное усложнение. В качестве переменной задержки использовать не идеальный гармонический закон, а случайный низкочастотный сигнал. Для его генерации придётся немножко наперёд изучить дискретное преобразование Фурье и его свойства. Суть заключается в том, что сначала подготавливается массив со случайными комплексными спектральными отсчётами. При этом, с учётом свойств ДПФ, нулевой отсчёт должен быть вещественным (и будет пропорционален постоянной части задержки). Далее ненулевыми и случайными должны быть только низкочастотные спектральные отсчёты, высокочастотные должны равняться нулю. Для получения исключительно вещественных значений задержки подготовленный спектр также должен удовлетворять свойствам симметрии. После этого к дискретному спектру применяется обратное ДПФ (использовать `numpy.fft.ifft` или `scipy.fft.ifft`). Если всё сделано правильно, должен получиться вещественный массив случайных плавно изменяющихся значений задержки. При необходимости разброс значений полученного массива можно нормировать к предпочтительной амплитуде переменной части задержки. **Важно:** используйте наперёд заданное фиксированное начальное значение генератора псевдослучайных чисел (seed) для воспроизводимости результатов.

4 Формат сдачи

Предоставить скрипт, входной `wav`-файл и выходной `wav`-файл с наложенным хорус-эффектом.

Скрипт должен содержать:

1) реализованную функцию `shift`;

2) код генерации выходного `wav`-файла;

3) если используется усложнение в виде замены гармонического закона в модулирующем задержку сигнале на случайный низкочастотный сигнал — визуализировать получаемый сигнал задержки (по одному графику на каждую суммируемую копию; если графиков более двух — каждый должен рисоваться в отдельном окне).

5 Контрольные вопросы

1. Линейная интерполяция.
2. Теорема Котельникова.
3. Интерполяционная формула Уиттекера-Шеннона.
4. Алгоритм хорус-эффекта.
5. Дан сигнал $x[n] = u[n] - u[n-4]$. В предположении, что дискретизация проводилась при выполнении условий теоремы Котельникова, напишите код, который рисует восстановленный непрерывный сигнал $x(t)$. Так как на компьютере доступна отрисовка только дискретных сигналов, допустить упрощение, что непрерывный сигнал — это дискретный сигнал с очень мелким шагом.
6. Для приведённого ниже дискретного сигнала восстановите различные непрерывные версии, используя разные алгоритмы интерполяции, доступные в функции `scipy.interpolate.interp1d`, а также используя интерполяционную формулу Уиттекера-Шеннона:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n < 5; \\ n-5, & 5 \le n < 10; \\ n-10, & 10 \le n < 15; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$