Advanced Algebra

HHH

2025 年 12 月 17 日

目录

1 行列式 **1**

1.1 矩阵乘法与行列式 1

1.2 Cauchy-Binet 公式 3

1.3 分块初等变换和降阶公式 4

2 矩阵 **6**

2.1 特殊矩阵 6

2.2 可逆矩阵 8

2.3 伴随矩阵 8

2.4 迹 10

2.5 秩 11

2.5.1 13

2.5.2 15

2.6 16

3 Linear Maps **17**

3.1 特征值和特征向量 17

3.1.1 降阶公式 17

3.1.2 特征值和特征多项式的系数 17

3.2 $\mathcal{L}\left(M_{m\times n}\left(\mathbb{K}\right)\right)$ 18

3.2.1 Kronecker Product 18

3.2.2 Matrix Equation 19

3.3 有理标准型 20

3.3.1 循环子空间 20
3.3.2 乘法交换性诱导多项式表示 22
3.4 乘法交换性诱导的同时性质 24

Chapter 1

行列式

1.1 矩阵乘法与行列式

Question 1.1.1. 计算下列循环矩阵 A 的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

解作多项式 $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ ，令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 1 的所有 n 次方根. 又令

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \varepsilon_3^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

则

$$AV=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & \cdots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^2 f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \varepsilon_3^{n-1} f(\varepsilon_3) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

因此

$$|A||V|=|AV|=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n)|V|$$

因为 ε_i 互不相同，所以 $|V|\neq 0$ ，从而

$$|A|=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n)$$

Question 1.1.2. 计算下列矩阵 A 的行列式的值：

$$A=\begin{pmatrix} x & -y & -z & -w \\ y & x & -w & z \\ z & w & x & -y \\ w & -z & y & x \end{pmatrix}$$

解注意到

$$AA'=\begin{pmatrix} x & -y & -z & -w \\ y & x & -w & z \\ z & w & x & -y \\ w & -z & y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ -y & x & w & -z \\ -z & -w & x & y \\ -w & z & -y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

其中 $u=x^2+y^2+z^2+w^2$ ，因此

$$|A|^2=\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)^4.$$

在矩阵 A 中令 $x=1,y=z=w=0$ ，显然 $|A|=1$ ，故

$$|A|=\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)^2.$$

解法 *2* 令

$$B=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} z & w \\ w & -z \end{pmatrix}$$

则 $|A|=\begin{vmatrix} B & -C \\ C & B \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} |A| &= |B+\mathrm{i}C||B-\mathrm{i}C| \\ &= \begin{vmatrix} x+\mathrm{i}z & -y+\mathrm{i}w \\ y+\mathrm{i}w & x-\mathrm{i}z \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-\mathrm{i}z & -y-\mathrm{i}w \\ y-\mathrm{i}w & x+\mathrm{i}z \end{vmatrix} \\ &= \left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)^2 \end{aligned}$$

1.2 Cauchy-Binet 公式

Theorem 1.2.1. 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵，r 是一个正整数且 $r\leq m$. 则 AB 的 r 阶子式

$$AB\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}=\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_r\leq n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

Theorem 1.2.2. 设 A,B 分别是 $m\times n, n\times m$ 矩阵，求证：AB 和 BA 的 r 阶主子式之和（两个 σ_r）相等，其中 $1\leq r\leq \min\{m,n\}$

证明*:* 由 *Cauchy-Binet* 公式可得

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq m} AB\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ =&\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq m}\ \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ =&\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n}\ \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq m} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \\ =&\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n} BA\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remark *AB 与 BA 的非零特征值情况相同.*

Question 1.2.3. 设 A, B 都是 $m \times n$ 实矩阵，求证：

$$|AA'||BB'| \geq |AB'|^2$$

证明：若 $m > n$ ，则 $|AA'| = |BB'| = |AB'| = 0$ ，结论显然成立. 若 $m \leq n$ ，则由 $Cauchy - Binet$ 公式可得

$$\begin{aligned}
|AA'| &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}^2; \\
|BB'| &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}^2; \\
|AB'| &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

1.3 分块初等变换和降阶公式

Theorem 1.3.1 (行列式的降阶公式)**.** *设 A 是 m 阶矩阵，D 是 n 阶矩阵，B 是 $m \times n$ 矩阵，C 是 $n \times m$ 矩阵，证明：*

(1) 若 A 可逆，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \left| D - CA^{-1}B \right|$$

(2) 若 D 可逆，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \left| D \right| \left| A - BD^{-1}C \right|;$$

(3) 若 A, D 都可逆，则

$$\left| D \right| \left| A - BD^{-1}C \right| = |A| \left| D - CA^{-1}B \right|$$

Corollary 1.3.2. 设 A 是 $n \times m$ 阶矩阵，B 是 $m \times n$ 阶矩阵

$$|\lambda I_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda I_m - BA|$$

Theorem 1.3.3. 设 A, B 是 n 阶矩阵，求证：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B||A-\mathrm{i}B|$$

Corollary 1.3.4. 设 A, B 是实矩阵，则

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+\mathrm{i}B||A-\mathrm{i}B| = |\det(A+\mathrm{i}B)|^2 \geq 0$$

Chapter 2

矩阵

2.1 特殊矩阵

Theorem 2.1.1 (基础矩阵和标准单位向量). 标准单位向量 n 维标准单位列向量是指下列 n 个 n 维列向量：

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

向量组 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ 则被称为 n 维标准单位行向量. 设 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是 m 维标准单位列向量，

(1)

$$e_i' e_j = \delta_{ij}$$

$$e_i e_j' = E_{ij}$$

(2) 若 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵，则 Ae_i 是 A 的第 i 个列向量；

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, e_i = \alpha_i$$

$f_i'A$ 是 A 的第 i 个行向量；

$$f_i' \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \beta_i$$

(3) 若 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵，则 $f_i'Ae_j = a_{ij}$

(4)

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases}$$

(5) 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$ ，则 $E_{ij}A$ 的第 i 行是 A 的第 j 行，$E_{ij}A$ 的其他行全为零；

若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$ ，则 AE_{ij} 的第 j 列是 A 的第 i 列，AE_{ij} 的其他列全为零；

(6) 若 A 是 n 阶矩阵且 $A = (a_{ij})$ ，则 $E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}$.

Theorem 2.1.2 (基础循环矩阵). 设 n 阶基础循环矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 循环矩阵对多项式，转置，逆

(2) 循环矩阵的充要条件是可表示为 $f(C), f \in \mathbb{F}[x]$

(3) $AC = CA$ 的充要条件是 A 为循环矩阵

Theorem 2.1.3. 上（下）三角阵的加减，数乘，乘积（幂），多项式，伴随和求逆仍然是上（下）三角阵，并且所得上（下）三角阵的主对角元是原上（下）三角阵对应主对角元的加减，数乘，乘积（幂），多项式，伴随和求逆.

2.2 可逆矩阵

Theorem 2.2.1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，使得 I_m+AB 可逆，则 I_n+BA 也可逆.

$$(I_n+BA)^{-1}=I_n-B\left(I_m+AB\right)^{-1}A$$

证明*:* 注意到 $A\left(I_n+BA\right)=\left(I_m+AB\right)A$ ，故 $\left(I_m+AB\right)^{-1}A\left(I_n+BA\right)=A$ ，于是 $B\left(I_m+AB\right)^{-1}A\left(I_n+BA\right)=BA$ ，从而

$$\begin{aligned}I_n&=I_n+BA-BA=\left(I_n+BA\right)-B\left(I_m+AB\right)^{-1}A\left(I_n+BA\right)\\&=\left(I_n-B\left(I_m+AB\right)^{-1}A\right)\left(I_n+BA\right).\end{aligned}$$

于是 $\left(I_n+BA\right)^{-1}=I_n-B\left(I_m+AB\right)^{-1}A$

Corollary 2.2.2. 设 A,B 均为 n 阶可逆阵，使得 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，证明：$A+B$ 也可逆，并且

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}A^{-1}$$

Corollary 2.2.3 (Sherman-Morrison 公式)**.** 设 A 是 n 阶可逆阵，α,β 是 n 维列向量，且 $1+\beta'A^{-1}\alpha\neq 0$. 求证：

$$(A+\alpha\beta')^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}$$

2.3 伴随矩阵

Theorem 2.3.1. 设 $A=(a_{ij})$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶方阵，A^* 为 A 的伴随阵，试证明以下结论。

(1) 若 $\mathrm{r}(A)=n$ ，则 $\mathrm{r}\left(A^*\right)=n$

(2) 若 $\mathrm{r}(A)=n-1$ ，则 $\mathrm{r}\left(A^*\right)=1$，即 $A^*=\alpha\beta$

(3) 若 $\mathrm{r}(A)\leq n-2$ ，则 $\mathrm{r}\left(A^*\right)=0$ ，即 $A^*=O$

Theorem 2.3.2. 设方阵 A_i, 分块对角阵

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}$$

的伴随为

$$C^* = \begin{pmatrix} A_1^* \prod\limits_{i \neq 1} |A_i| & & & \\ & \prod\limits_{i \neq 2} |A_i| \, A_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod\limits_{i \neq 1} |A_n| \, A_n^* \end{pmatrix}$$

Theorem 2.3.3. *Jordan* 块

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

的伴随为

$$\begin{aligned} J_n(\lambda)^* &= |J_n(\lambda)| \, J_n(\lambda)^{-1} \\ &= \lambda^n \left(\lambda I_n + J_n\right)^{-1} \\ &= \lambda^{n-1} \left(I_n - \left(-\lambda^{-1} J_n\right)\right)^{-1} \\ &= \lambda^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\lambda^{-1} J_n\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \lambda^{n-1-k} J_n^k \end{aligned}$$

即为

$$\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & -\lambda^{n-2} & & (-1)^{n-2}\lambda & (-1)^{n-1} \\ & \lambda^{n-1} & -\lambda^{n-2} & & (-1)^{n-2}\lambda \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda^{n-1} & -\lambda^{n-2} \\ & & & & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

2.4 迹

Theorem 2.4.1. 设 A, B 是 n 阶矩阵，$k \in \mathbb{F}$，则

(1) $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$

(2) $\operatorname{tr}(kA)=k\operatorname{tr}(A)$

(3) $\operatorname{tr}(A')=\operatorname{tr}(A)$

(4) 若 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵, 则 $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$

(5) $\operatorname{tr}(P^{-1}AP)=\operatorname{tr}(A)$

Question 2.4.2. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，定义函数 $f(A)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$. 设 P 为 n 阶可逆矩阵，使得对任意的 n 阶方阵 A 成立：$f(PAP^{-1})=f(A)$. 证明：存在非零常数 c ，使得 $P'P=cI_n$

证明*: We compute that*

$$\begin{aligned} f(PAP^{-1}) &= \operatorname{tr}(PAP^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}\left(PAP^{-1}\left(PAP^{-1}\right)'\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(UAU^{-1}A'\right) \end{aligned}$$

where $U=P'P$. *We set*

$$A=\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$$

Then

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(UAU^{-1}A'\right) &= \operatorname{tr}\left(U\left(\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}\right)U^{-1}\left(\sum_{k,l} a_{kl}E_{kl}\right)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{i,j,k,l} a_{ij}a_{kl}Ue_ie_j'U^{-1}e_ke_l'\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{i,j,k,l} a_{ij}a_{kl}e_j'U^{-1}e_ke_l'Ue_i\right)\\ &= \sum_{i,j,k,l} a_{ij}a_{kl}\left(e_j'U^{-1}e_k\right)\left(e_l'Ue_i\right)\end{aligned}$$

and

$$\operatorname{tr}(A'A) = \sum_{m,n} a_{mn}^2$$

Therefore, we have

$$\sum_{i,j,k,l} a_{ij}a_{kl}\left(e_j'U^{-1}e_k\right)\left(e_l'Ue_i\right) = \sum_{m,n} a_{mn}^2$$

for all $(a_{ij})_{n\times n}$. *We conclude that* $U = cI_n$.

2.5 秩

Theorem 2.5.1. 矩阵秩的基本公式:

(1) 若 $k \neq 0, \mathrm{r}(kA) = \mathrm{r}(A)$

(1) $\mathrm{r}(AB) \leq \min\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\}$

(2) $\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

(3) $\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B), \mathrm{r}\begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

(4) $\mathrm{r}(A;B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B), \mathrm{r}\binom{A}{B} \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

(5) $\mathrm{r}(A+B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B), \mathrm{r}(A-B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

(6) $\mathrm{r}(A-B) \geq |\mathrm{r}(A) - \mathrm{r}(B)|$

Theorem 2.5.2 (Frobenius 不等式)**.** 证明: $\mathrm{r}(ABC) \geq \mathrm{r}(AB) + \mathrm{r}(BC) - \mathrm{r}(B)$

证明: 考虑下列分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}$$

可得

$$\mathrm{r}(ABC)+\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix} \geq \mathrm{r}(AB)+\mathrm{r}(BC)$$

由此即得结论.

Corollary 2.5.3 (Sylvester 不等式)**.** 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times t$ 矩阵，求证:

$$\mathrm{r}(AB) \geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n$$

证明: 考虑下列矩阵的分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix}$$

可得

$$\mathrm{r}(AB)+n=\mathrm{r}\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & AB \end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix} \geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$$

即 $\mathrm{r}(AB) \geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n$

Corollary 2.5.4. 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times t$ 矩阵且 $AB=O$ ，则 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n$

Corollary 2.5.5. 设 n 阶方阵 A

$$0 \geq r(A^{n+2})-r(A^{n+1}) \geq r(A^{n+1})-r(A^{n}) \geq \cdots \geq r(A)-n$$

Theorem 2.5.6 (秩的降阶公式)**.** 设有分块矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ，证明:

(1) 若 A 可逆，则 $\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}\left(D-CA^{-1}B\right)$

(2) 若 D 可逆，则 $\mathrm{r}(M)=\mathrm{r}(D)+\mathrm{r}\left(A-BD^{-1}C\right)$

(3) 若 A,D 都可逆，则 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}\left(D-CA^{-1}B\right)=\mathrm{r}(D)+\mathrm{r}\left(A-BD^{-1}C\right)$

2.5.1

Theorem 2.5.7. 设 $f_1,f_2,\ldots,f_k$ 为 $\mathbb{F}[x]$ 上的互素多项式 $\gcd(f_1,f_2,\ldots,f_k)=1$, A 是 n 阶方阵. 则

$$\sum_{i=1}^{k} n-r\left(f_i(A)\right)=n-r(f(A))$$

其中 $f(x)=\prod_{i=1}^{k} f_i(x)$.

证法一 $k=2$ 时, 作初等变换

$$\begin{pmatrix} f_1(A) & O \\ O & f_2(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_1(A) & u_1f_1(A)+u_2f_2(A) \\ O & f_2(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_1(A) & I_n \\ O & f_2(A) \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} f_1(A) & I_n \\ -f_1(A)f_2(A) & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & I_n \\ f_1(A)f_2(A) & O \end{pmatrix}$$

$k=2$ 的情况得证. 反复利用 $k=2$ 的结论，命题得证.

证法二线性方程核求解理论 *(*核空间*)* 证明

$$\ker f(A)=\oplus \ker f_i(A)$$

Question 2.5.8. 设 A,B 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵且 $AB=BA$ ，证明:

$$\mathrm{r}(A+B)\le \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-\mathrm{r}(AB)$$

法一矩阵的初等变换. 考虑如下分块矩阵的乘法:

$$\begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -B \\ I & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+B & -AB+BA \\ B & BA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}$$

可得

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\geq \mathrm{r}\begin{pmatrix}A+B & O\\ B & BA\end{pmatrix}\geq \mathrm{r}(A+B)+\mathrm{r}(AB),$$

由此即得结论.

证法 *2* 线性方程组的求解理论 *(*从核空间入手*)*. 设 V_A 是方程组 $Ax=0$ 的解空间,V_B, V_{AB}, V_{A+B} 的意义同理. 我们有 $V_A \cap V_B \subseteq V_{A+B}, V_A \subseteq V_{BA}, V_B \subseteq V_{AB}$. 因为 $AB=BA$,所以 $V_{BA}=V_{AB}$,从而 $V_A+V_B \subseteq V_{AB}$. 因此,我们有

$$\dim(V_A\cap V_B)\leq \dim V_{A+B}=n-\mathrm{r}(A+B)$$

和

$$\dim(V_A+V_B)\leq \dim V_{AB}=n-\mathrm{r}(AB)$$

将上面两个不等式相加,再由交和空间维数公式可得

$$\begin{aligned}n-\mathrm{r}(A+B)+n-\mathrm{r}(AB)&\geq \dim(V_A\cap V_B)+\dim(V_A+V_B)\\&=\dim V_A+\dim V_B\\&=n-\mathrm{r}(A)+n-\mathrm{r}(B)\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{r}(A+B)+\mathrm{r}(AB)\leq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$,结论得证.

$$\mathrm{r}(A+B)\leq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-\mathrm{r}(AB)$$

证法 *3* 线性空间理论 *(*从像空间入手*)* 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 A 的列分块,$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 为 B 的列分块. 记 $U_A=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 A 的列向量生成的 $\mathbb{K}^n$ 的子空间,U_B, U_{AB}, U_{A+B} 的意义同理.

显然,我们有 $U_{A+B}\subseteq U_A+U_B$. 注意到 $AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)$, 从而 $U_{AB}\subseteq U_A$. 又因为 $AB=BA$,故 $U_{AB}\subseteq U_A\cap U_B$. 最后,由上述包含关系以及交和空间维数公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(A+B)+\mathrm{r}(AB)&=\dim U_{A+B}+\dim U_{AB}\leq \dim(U_A+U_B)+\dim(U_A\cap U_B)\\&=\dim U_A+\dim U_B=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B).\end{aligned}$$

2.5.2

Theorem 2.5.9. 矩阵 A 的秩等于 r 的充要条件是 A 存在一个 r 阶子式 $|D|$ 不等于零，而 $|D|$ 的所有 $r+1$ 阶加边子式全等于零.

证明: 只需证明充分性. 不失一般性，我们可设 $|D|$ 是由 A 的前 r 行和前 r 列构成的 r 阶子式. 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

为矩阵 A 的行分块和列分块，记 $\tau_{\leq r}\alpha_i$ 为行向量 α_i 关于前 r 列的缩短向量，$\tau_{\leq r}\beta_j$ 为列向量 β_j 关于前 r 行的缩短向量. 由 $|D| \neq 0$ 可得 $\tau_{\leq r}\alpha_1, \cdots, \tau_{\leq r}\alpha_r$ 线性无关，可知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关. 我们只要证明 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 A 的行向量的极大无关组即可得到 $\mathrm{r}(A) = r$.

用反证法证明，若它们不是极大无关组，则可以添加一个行向量，不妨设为 α_{r+1} ，使得 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 线性无关. 设 A_1 是 A 的前 $r+1$ 行构成的矩阵，则 $A_1 = (\tau_{\leq r+1}\beta_1, \tau_{\leq r+1}\beta_2, \cdots, \tau_{\leq r+1}\beta_n)$ 且 $\mathrm{r}(A_1) = r+1$. 由 $|D| \neq 0$ 可得 $\tau_{\leq r}\beta_1, \cdots, \tau_{\leq r}\beta_r$ 线性无关，$\tau_{\leq r+1}\beta_1, \cdots, \tau_{\leq r+1}\beta_r$ 线性无关. 因为 $\mathrm{r}(A_1) = r+1$ ，故存在 A_1 的一个列向量，不妨设为 $\tau_{\leq r+1}\beta_{r+1}$ ，使得 $\tau_{\leq r+1}\beta_1, \cdots, \tau_{\leq r+1}\beta_r, \tau_{\leq r+1}\beta_{r+1}$ 线性无关. 设 $A_2 = (\tau_{\leq r+1}\beta_1, \cdots, \tau_{\leq r+1}\beta_r, \tau_{\leq r+1}\beta_{r+1})$ ，即 A_2 是 A 的前 $r+1$ 行和前 $r+1$ 列构成的方阵，则 $\mathrm{r}(A_2) = r+1$. 因此，$|A_2| \neq 0$ 是包含 $|D|$ 的 $r+1$ 阶加边子式，这与假设矛盾.

Theorem 2.5.10. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ ，且 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots$ ，α_{i_r} 是其极大无关组，又设 A 的 n 个列向量为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ ，且 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}$ 是其极大无关组. 证明：$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 和 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}$ 交叉点上的元素组成的子矩阵 D 的行列式 $|D| \neq 0$.

证明: 因为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是极大无关组，故 A 的任一行向量 α_s 均可表示为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 的线性组合. 记 $\widetilde{\alpha}_{i_1}, \widetilde{\alpha}_{i_2}, \cdots, \widetilde{\alpha}_{i_r}, \widetilde{\alpha}_s$ 分别是 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \alpha_s$ 在 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列处的缩短向量，则 $\widetilde{\alpha}_s$ 均可表示为 $\widetilde{\alpha}_{i_1}, \widetilde{\alpha}_{i_2}, \cdots, \widetilde{\alpha}_{i_r}$ 的线性组合. 考虑由列向量 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r}$ 组成的矩阵 $B = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r})$ ，这是一个

$m\times r$ 矩阵且秩等于 r . 由于矩阵 B 的任一行向量 $\widetilde{\alpha}_s$ 均可用 $\widetilde{\alpha}_{i_1},\widetilde{\alpha}_{i_2},\cdots,\widetilde{\alpha}_{i_r}$ 线性表示，并且 B 的行秩等于 r ，故 $\widetilde{\alpha}_{i_1},\widetilde{\alpha}_{i_2},\cdots,\widetilde{\alpha}_{i_r}$ 是 B 的行向量的极大无关组，从而它们线性无关．因此 D 是满秩阵，从而 $|D|\neq 0$.

2.6

Theorem 2.6.1. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，求证：

若 $\mathrm{r}(A)=n$ ，即 A 是列满秩阵，则必存在秩等于 n 的 $n\times m$ 矩阵 B ，使得 $BA=I_n$（这样的矩阵 B 称为 A 的左逆）；

若 $\mathrm{r}(A)=m$ ，即 A 是行满秩阵，则必存在秩等于 m 的 $n\times m$ 矩阵 C ，使得 $AC=I_m$（这样的矩阵 C 称为 A 的右逆）．

证明（*1*）设 P 为 m 阶非异阵，Q 为 n 阶非异阵，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}$$

因此 $(I_n,O)\,PAQ=I_n$ ，即 $(I_n,O)\,PA=Q^{-1}$ ，于是 $Q\,(I_n,O)\,PA=I_n$. 令 $B=Q\,(I_n,O)\,P$ 即可．（*2*）同理可证，或者考虑 A' 并利用（*1*）的结论．推论列满秩矩阵适合左消去律，即若 A 列满秩且 $AD=AE$ ，则 $D=E$ ．同理，行满秩矩阵适合右消去律，即若 A 行满秩且 $DA=EA$ ，则 $D=E$.

Theorem 2.6.2. 例 *3.92* （满秩分解）设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r ，证明：（*1*）$A=BC$ ，其中 B 是 $m\times r$ 矩阵且 $\mathrm{r}(B)=r,C$ 是 $r\times n$ 矩阵且 $\mathrm{r}(C)=r$ ，这种分解称为 A 的满秩分解；（*2*）若 A 有两个满秩分解 $A=B_1C_1=B_2C_2$ ，则存在 r 阶非异阵 P ，使得 $B_2=B_1P,C_2=P^{-1}C_1$.

Chapter 3

Linear Maps

3.1 特征值和特征向量

Theorem 3.1.1. 设 n 阶矩阵 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, f(x)$ 是一个多项式，求证：$f(A)$ 的全体特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$.

Theorem 3.1.2. 设 n 阶可逆矩阵 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ，求证：A^{-1} 的全体特征值为 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$.

Theorem 3.1.3. 设 n 阶矩阵 A 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ，求证：A^* 的全体特征值为 $\prod_{i\neq 1}\lambda_i, \prod_{i\neq 2}\lambda_i, \cdots, \prod_{i\neq n}\lambda_i$.

3.1.1 降阶公式

Theorem 3.1.4 (特征值的降阶公式)**.** 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，且 $m\geq n$ ．求证：

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n}\,|\lambda I_n - BA|$$

3.1.2 特征值和特征多项式的系数

Theorem 3.1.5. 设 n 阶矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

求证:

$$(-1)^r a_r = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_r} = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$$

Corollary 3.1.6. 设 A 是 n 阶矩阵. 下面三个命题等价

(1) A 是幂零矩阵

(2) A 的特征值均为 0

(2) $\operatorname{tr}\left(A^k\right)=0 \quad (1\le k\le n)$.

3.2 $\mathcal{L}(M_{m\times n}(\mathbb{K}))$

3.2.1 Kronecker Product

Definition 3.2.1.

Proposition 3.2.2. 假设下列运算均有意义

(1) $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$, $A\otimes(B+C) = A\otimes B + A\otimes C$

(2) $(kA)\otimes B = k(A\otimes B) = A\otimes(kB)$

(3) $(A\otimes C)(B\otimes D) = (AB)\otimes(CD)$

(4) $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$

(5) $I_m\otimes I_n = I_{mn}$

(6) $(A\otimes B)' = A'\otimes B'$

(7) 若 A, B 都是可逆矩阵，则 $A\otimes B$ 也是可逆矩阵，并且

$$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$$

(8) 若 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵，则 $|A\otimes B| = |A|^n|B|^m$

(9) 若 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵，则 $\operatorname{tr}(A\otimes B) = \operatorname{tr}(A)\cdot\operatorname{tr}(B)$

Proposition 3.2.3. 设 A, B 分别是 m, n 阶矩阵，A 的特征值为 λ_i, B 的特征值为 μ_j ，求证：$A\otimes B$ 的特征值为 $\lambda_i\mu_j$.

Proposition 3.2.4. 设 A, B 分别为 $m\times n, k\times l$ 矩阵，则 $\mathrm{r}(A\otimes B) = \mathrm{r}(A)\cdot\mathrm{r}(B)$

Theorem 3.2.5. $\mathcal{L}\left(M_{m\times n}\left(\mathbb{K}\right)\right)$ 上的线性变换

$$\varphi(X) = AXB$$

在基 $\{E_{1,1}\ldots,E_{1,n},E_{2,1}\ldots,E_{2,n},\ldots\ldots,E_{m,1}\ldots,E_{m,n}\}$ 的表示矩阵是

$$A\otimes B'$$

3.2.2 Matrix Equation

Theorem 3.2.6. 设 A,B 分别为 m,n 阶矩阵，V 为 $m\times n$ 矩阵全体构成的线性空间，V 上的线性变换 φ 定义为：$\varphi(X)=AX-XB$. φ 的表示矩阵为

$$A\otimes I_n - I_m\otimes B'$$

相似于上三角阵

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix}\otimes I_n - I_m\otimes\begin{pmatrix}\mu_1 & * & * & * \\ & \mu_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}$$

具有特征值 $\lambda_i-\mu_j$. 同时，下列命题等价

(1) φ 是单的（满的）

(2) $AX-XB=0$ 只有零解

(3) 对任意（存在）$C\in\left(M_{m\times n}\left(\mathbb{K}\right)\right)$, $AX-XB=C$ 有唯一解.

Theorem 3.2.7. 设 A,B,C 分别是 $m\times m, n\times n, m\times n$ 矩阵，满足：$AC=CB$, $\mathrm{r}(C)=r$. 则 A 和 B 至少有 r 个相同的特征值（计重数）.

证明：设 P 为 m 阶非异阵，Q 为 n 阶非异阵，使得

$$PCQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}$$

注意到问题的条件和结论在相抵变换：$C \mapsto PCQ, A \mapsto PAP^{-1}, B \mapsto Q^{-1}BQ$ 下保持不变，故不妨从一开始就假设 $C = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 是相抵标准型.

设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ 为对应的分块，则

$$AC = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & O \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}$$

由 $AC = CB$ 可得 $A_{11} = B_{11}, A_{21} = O, B_{12} = O$. 于是

$$|\lambda I_n - A| = |\lambda I_r - A_{11}| \cdot |\lambda I_{n-r} - A_{22}|, \quad |\lambda I_n - B| = |\lambda I_r - B_{11}| \cdot |\lambda I_{n-r} - B_{22}|,$$

从而 A, B 至少有 r 个相同的特征值（即 $A_{11} = B_{11}$ 的特征值）.

3.3 有理标准型

3.3.1 循环子空间

Theorem 3.3.1. 设 U 是 V 的 φ-不变子空间，则 U 为循环子空间的充要条件是 $\varphi|_U$ 在 U 的某组基下的表示矩阵为某个首一多项式的友阵.

证明：先证充分性. 设 $\varphi|_U$ 在 U 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ 下的表示矩阵是友阵 $C(d(\lambda))$ ，其中 $d(\lambda) = \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \cdots + a_{r-1}\lambda + a_r$ ，则 $\varphi(e_i) = e_{i+1} (1 \le i \le r-1), \varphi(e_r) = -\sum_{i=1}^r a_{r-i+1} e_i$. 因此 $e_i = \varphi^{i-1}(e_1) (2 \le i \le r)$ ，$U = L(e_1, e_2, \cdots, e_r) = C(\varphi, e_1)$ 为循环子空间.

再证必要性. 设 $U = C(\varphi, \alpha)$ 是 r 维循环子空间，则 $\{\alpha, \varphi(\alpha) \cdots, \varphi^{r-1}(\alpha)\}$ 是 U 的一组基. 设

$$\varphi^r(\alpha) = -a_r\alpha - a_{r-1}\varphi(\alpha) - \cdots - a_1\varphi^{r-1}(\alpha)$$

令 $d(\lambda) = \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \cdots + a_{r-1}\lambda + a_r$ ，容易验证：$\varphi|_U$ 在基 $\{\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{r-1}(\alpha)\}$ 下的表示矩阵就是友阵 $C(d(\lambda))$.

Theorem 3.3.2 (循环子空间直和分解)**.** 一般地，设 $\mathbb{K}$ 上的线性变换 φ 的 λ-矩阵相抵于 $\operatorname{diag}\{1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)\}$，其中 $d_i(\lambda)$ 是非常数首一多项式。(特别地是不变因子组或初等（准素）因子组时)。则由有理标准型理论可知，存在 V 的一组基，使得 φ 在这组基下的表示矩阵为

$$C=\operatorname{diag}\left\{C\left(d_1(\lambda)\right),C\left(d_2(\lambda)\right),\cdots,C\left(d_k(\lambda)\right)\right\}$$

此时 V 有一个循环子空间的直和分解：

$$V=C\left(\varphi,\alpha_1\right)\oplus C\left(\varphi,\alpha_2\right)\oplus\cdots\oplus C\left(\varphi,\alpha_k\right),$$

使得 $\varphi|_{C(\varphi,\alpha_i)}$ 在基 $\{\alpha_i,\varphi\left(\alpha_i\right),\cdots,\varphi^{r_i-1}\left(\alpha_i\right)\}$ 下的表示矩阵就是友阵 $C\left(d_i(\lambda)\right)$，其中 $r_i=\dim C\left(\varphi,\alpha_i\right)$.

Corollary 3.3.3. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，φ 的特征多项式和极小多项式分别为 $f(\lambda)$ 和 $m(\lambda)$，下 *4* 个结论等价：

(1) V 是关于线性变换 φ 的循环空间.（并一定是唯一的）

(2) φ 的行列式因子组或不变因子组为 $1,\cdots,1,f(\lambda)$

(2') φ 的初等（准素）因子组为 $P_1(\lambda)^{r_1},P_2(\lambda)^{r_2},\cdots,P_k(\lambda)^{r_k}$，其中 $P_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式.

(2") φ 的极小多项式 $m(\lambda)$ 等于特征多项式 $f(\lambda)$

Corollary 3.3.4. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，φ 的特征多项式为 $f(\lambda)$，*3* 个结论等价：

(1) V 只有平凡的 φ 一不变（循环）子空间

(1') V 中任一非零向量都是循环向量，使 V 成为循环空间；

(2) $f(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式.

Question 3.3.5. 存在 n 阶实方阵 A，满足 $A^2+2A+5I_n=O$ 的充要条件是 n 为偶数. 当 $n\geq 4$ 时，验证满足上述条件的矩阵 A 有无限个不变子空间.

证明*:* 必要性：注意到极小多项式 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$，特征多项式 $f(\lambda)=g(\lambda)^k$，于是 $n=\deg f(\lambda)=2k$ 为偶数.

充分性：设 $n=2k$ 为偶数，则由必要性的证明可知，A 的不变因子组为

$1,\cdots,1$ ，$g(\lambda),\cdots,g(\lambda)(k$ 个 $g(\lambda))$. 可用有理标准型构造满足条件的矩阵：

$$A=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}0&-5\\1&-2\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&-5\\1&-2\end{pmatrix}\right\}(k \text{ 个二阶方阵}).$$

当 $n\geq 4$ 时，设 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 是前 4 个标准单位列向量，则容易验证循环子空间 $\{C_l:=C(A,e_1+le_3)=L(e_1+le_3,e_2+le_4),l\in\mathbb{R}\}$ 是两两互异的 A 一不变子空间，故 A 有无限个不变子空间.

Question 3.3.6. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵，求证：若 $\operatorname{tr}(A)=0$ ，则 A 相似于一个 $\mathbb{K}$ 上主对角元全为零的矩阵。

证明: 对阶数进行归纳. 当 $n=1$ 时，$A=O$ ，结论显然成立.

设阶数小于 n 时结论成立，现证 n 阶的情形. 我们期望通过相似变换在让对角线上出现 0，便可直接利用归纳假设，这里借助有利标准型。由于题目的条件和结论在相似关系下不改变，故不妨从一开始就假设 A 是有理标准型

$$F=\operatorname{diag}\{F(d_1(\lambda)),\cdots,F(d_k(\lambda))\}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是 A 的非常数不变因子，$\deg d_i(\lambda)=r_i$ 若 r_i 都为 1. 则 $A=O$，结论成立. 以下假设存在某个 $r_i>1$ ，将第 $(1,1)$ 分块与第 (i,i) 分块对换，这是一个相似变换，此时矩阵的第 $(1,1)$ 元为零，故不妨设 A 的第 $(1,1)$ 元为零. 注意到矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&\alpha'\\\beta&B\end{pmatrix}$ ，其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}^{n-1},B\in M_{n-1}(\mathbb{K}),\operatorname{tr}(B)=0$. 由归纳假设，结论得证.

Corollary 3.3.7. 设 C 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵，求证：存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 A,B ，使得 $AB-BA=C$ 的充要条件是 $\operatorname{tr}(C)=0$.

3.3.2 乘法交换性诱导多项式表示

Theorem 3.3.8. 设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，则

$$C(\varphi)=\mathbb{F}[\varphi]$$

成立的充要条件是 φ 的极小多项式等于其特征多项式.

证明: 先证充分性. 设 φ 的极小多项式等于其特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ ，则 φ 只有一个非常数不变因子. 由有理标准型理论，存在 V 的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ ，使得 φ 在这组基下的表示矩阵为友阵

$$C(f(\lambda))=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

即有

$$\varphi\left(e_1\right)=e_2,\varphi\left(e_2\right)=e_3,\cdots,\varphi\left(e_{n-1}\right)=e_n,\varphi\left(e_n\right)=-a_ne_1-a_{n-1}e_2-\cdots-a_1e_n$$

任取 V 上满足 $\varphi\psi=\psi\varphi$ 的线性变换 ψ ，设

$$\psi\left(e_1\right)=b_ne_1+b_{n-1}e_2+\cdots+b_1e_n$$

令 $g(x)=b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$ ，我们来证明：$\psi=g(\varphi)$. 对任意的 e_k 有

$$\begin{aligned}\psi\left(e_k\right)&=\psi\left(\varphi^{k-1}\left(e_1\right)\right)=\varphi^{k-1}\left(\psi\left(e_1\right)\right)=\varphi^{k-1}\left(g(\varphi)\left(e_1\right)\right)\\&=g(\varphi)\left(\varphi^{k-1}\left(e_1\right)\right)=g(\varphi)\left(e_k\right)\end{aligned}$$

最后，注意到 ψ 与 $g(\varphi)$ 在基向量 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 上的取值都相等，故由线性扩张定理可知 $\psi=g(\varphi)$ 成立.

再证必要性。设 φ 的不变因子组为 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$ ，其中 $d_i(\lambda)$ 为非常数首一多项式，$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(1\leq i\leq k-1)$ ，则 φ 的有理标准型 $F=\operatorname{diag}\{F_1,F_2,\cdots,F_k\}$ ，其中 $F_i=F\left(d_i(\lambda)\right)$ 为 n_i 阶矩阵. 若 φ 的极小多项式不等于其特征多项式，则 $k\geq 2$. 构造分块对角矩阵

$$B=\operatorname{diag}\left\{I_{n_1},O_{n_2},\cdots,O_{n_k}\right\}$$

显然 $BF=FB$. 用反证法，若存在多项式 $g(x)$ ，使得 $B=g(F)$ ，即

$$B=\operatorname{diag}\left\{g\left(F_1\right), g\left(F_2\right), \cdots, g\left(F_k\right)\right\}$$

则 $g\left(F_1\right)=I_{n_1}, g\left(F_i\right)=O(i \geq 2)$. 由于 $d_k(\lambda)$ 是 F_k 的极小多项式（也是特征多项式），故 $d_k(\lambda) \mid g(\lambda)$ ，从而 $d_1(\lambda) \mid g(\lambda)$ ，于是 $g\left(F_1\right)=O$ ，矛盾！因此 B 不能表示为 F 的多项式，从而由 B 定义的线性变换 ψ 符合题目要求.

3.4 乘法交换性诱导的同时性质

Theorem 3.4.1. 设 φ, ψ 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 上乘法可交换的线性变换，即 $\varphi\psi=\psi\varphi$，则

(1) φ 的特征子空间（如果存在的话）是 ψ 的不变子空间，ψ 的特征子空间是 φ 的不变子空间.

(2) $R(\psi)$ 是 φ 不变子空间，$R(\varphi)$ 是 ψ 不变子空间.

Corollary 3.4.2. 设 φ, ψ 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 上的乘法可交换的线性变换，且 φ, ψ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中，则 φ, ψ 至少有一个公共的特征向量.

证明：任取线性变换 φ 的一个特征值 $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ ，设 V_0 是特征值 λ_0 的特征子空间，V_0 是 ψ 一不变子空间.

取 V_0 的一组基并扩张为 V 的一组基，则 ψ 在这组基下的表示矩阵为分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ ，其中 A 是 $\left.\psi\right|_{V_0}$ 在给定基下的表示矩阵，于是 $\left|\lambda I_V-\psi\right|=|\lambda I-A||\lambda I-B|$. 因为 ψ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中，故 A 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中，于是 $\left.\psi\right|_{V_0}$ 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中. 任取 $\left.\psi\right|_{V_0}$ 的一个特征值 $\mu_0 \in \mathbb{F}$ 及其特征向量 $\alpha \in V_0$ ，则 $\varphi(\alpha)=\lambda_0 \alpha, \psi(\alpha)=\mu_0 \alpha$ ，于是 α 就是 φ, ψ 的公共特征向量.

Corollary 3.4.3. 设数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两乘法可交换，且它们的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中，求证：它们在 $\mathbb{F}^n$ 中至少有一个公共的特征向量.

证明：对 m 进行归纳，设矩阵个数小于 m 时结论成立，现证 m 个矩阵的情形. 将所有的 A_i 都看成是列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换，任取 A_1 的一个特征值 $\lambda_1 \in \mathbb{F}$ 及其特征子空间 $V_1 \subseteq \mathbb{F}^n$，$V_1$ 是 $A_2, \cdots, A_m$ 的不变子空间. 将 $A_2, \cdots, A_m$ 限制在 V_1 上，它们仍然两两乘法可交换且特征值都在 $\mathbb{F}$ 中，故由归

纳假设可得 $A_2|_{V_1}, \cdots, A_m|_{V_1}$ 有公共的特征向量 $\alpha \in V_1$. 注意到 α 也是 A_1 的特征向量，于是 α 是 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的公共特征向量.

Theorem 3.4.4. 设数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵 A 的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中，求证：A 在 $\mathbb{F}$ 上可上三角化，即存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵.

证明：对阶数进行归纳. 当 $n=1$ 时结论显然成立，设对 $n-1$ 阶矩阵结论成立，现对 n 阶矩阵 A 进行证明. 设 $\lambda_1 \in \mathbb{F}$ 是 A 的一个特征值，存在特征向量 $e_1 \in \mathbb{F}^n$ ，使得 $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. 由基扩张定理，可将 e_1 扩张为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ ，于是

$$(Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$$

其中 A_1 是 $\mathbb{F}$ 上的 $n-1$ 阶矩阵. 令 $P=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ ，则 P 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵，且由上式可得 $AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$ ，即 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$. 由此可得 $|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)\,|\lambda I_{n-1} - A_1|$ ，从而 A_1 的特征值也全在 $\mathbb{F}$ 中，故由归纳假设，存在 $\mathbb{F}$ 上的 $n-1$ 阶可逆矩阵 Q ，使得 $Q^{-1}A_1Q$ 是上三角矩阵. 令

$$R = P\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}$$

则 R 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵，且

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}$$

是上三角矩阵.

Theorem 3.4.5. 设数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两乘法可交换，且它们的特征值都在 $\mathbb{F}$ 中，求证：它们在 $\mathbb{F}$ 上可同时上三角化，即存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}A_iP (1 \le i \le m)$ 都是上三角矩阵.

Theorem 3.4.6. 设 φ, ψ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，满足：$\varphi\psi = \psi\varphi$ 且 φ, ψ 都可对角化，求证：φ, ψ 可同时对角化

证明：对空间维数进行归纳．当 $n=1$ 时结论显然成立，设对维数小于 n 的线性空间结论成立，现对 n 维线性空间进行证明．设 φ 的全体不同特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{F}$ ，对应的特征子空间分别为 $V_1,\cdots,V_s$ ，则由 φ 可对角化可知

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s.$$

若 $s=1$ ，则 $\varphi=\lambda_1 I_V$ 为纯量变换，此时只要取 V 的一组基，使得 ψ 在这组基下的表示矩阵为对角矩阵，则 φ 在这组基下的表示矩阵为 $\lambda_1 I_n$ ，结论成立．若 $s>1$ ，则 $\dim V_i<n$，V_i 都是 ψ 一不变子空间．考虑线性变换的限制 $\varphi|_{V_i},\psi|_{V_i}$ ：它们乘法可交换，且由可对角化线性变换的性质可知它们都可对角化，故由归纳假设可知，$\varphi|_{V_i},\psi|_{V_i}$ 可同时对角化，即存在 V_i 的一组基，使得 $\varphi|_{V_i},\psi|_{V_i}$ 在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵．将 V_i 的基拼成 V 的一组基，则 φ,ψ 在这组基下的表示矩阵都是对角矩阵，即 φ,ψ 可同时对角化．

Theorem 3.4.7. 设数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两乘法可交换，且它们都在 $\mathbb{F}$ 上可对角化，求证：它们在 $\mathbb{F}$ 上可同时对角化．