MATEMATIKA DISKRIT

Universitas Multimedia Nusantara
2020/2021

HIMPUNAN

Pengertian

- Himpunan: sekumpulan obyek yang berbeda-beda

  - Obyek dapat dinyatakan dalam urutan acak

    { 1, 6, 7, 2, 9} = { 6, 7, 1, 2, 9 }

  - Obyek yang sama cukup disebutkan satu kali

    { a, a, d, d, e, e, 1, 2, 3 } = { a, d, e, 1, 2, 3 }

Cara Penulisan

1. Enumerasi

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: A = {1, 2, 3, 4}.
- C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
- R = { a, b, {a, b, c}, {a, c} }
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: {1, 2, ..., 100 }
- Himpunan bilangan bulat: {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}

2. Simbol-simbol Baku

N = *natural numbers* = {0,1,2,3….}

Z = *integers numbers* = {…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…}

Z^+ = *positive integers* = {1,2,3,…..}

Q = *rational numbers* = $\{p/q \mid p,q \in Z, \text{ and } q \neq 0\}$

R = *real numbers*

R^+ = *positive real numbers*

C = *complex numbers*

Himpunan semesta (universal), disimbolkan dengan U

Misalkan: U = {1, 2, 3, 4, 5}

A adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: $\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}$

Contoh:

- A adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5

  A = { x | x bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

  atau $A = \{ x \mid x \in Z^+, x < 5 \}$,

  ekivalen dengan A = {1, 2, 3, 4}

- M = { x | x adalah mahasiswa mengambil kuliah Matdis}

4. Diagram Venn

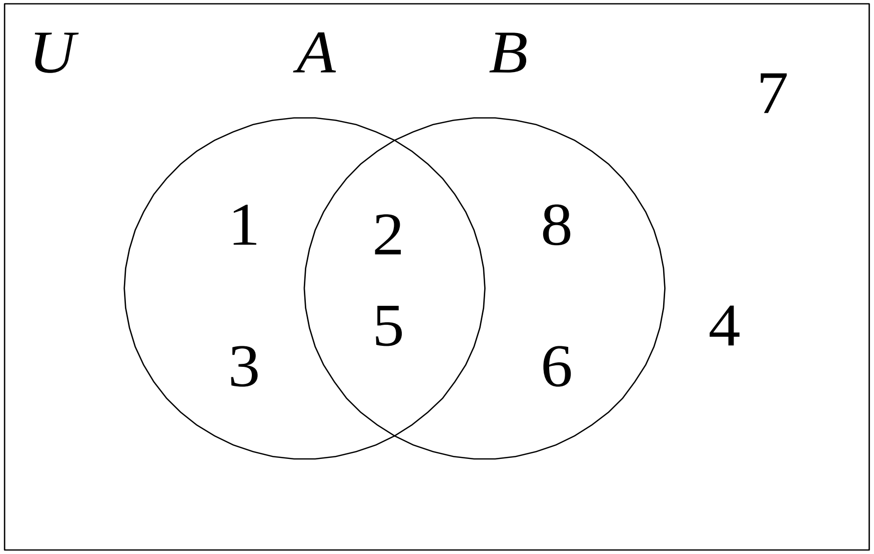
Misalkan:

U = {1, 2, …, 7, 8}

A = {1, 2, 3, 5}

B = {2, 5, 6, 8}

Diagram Venn:



Keanggotaan

- $x \in A$: x merupakan anggota himpunan A
- $x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A

Misalkan:

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$
- $K = \{\{\}\}$

maka

$3 \in A$; $5 \notin A$

$a \in R$; $\{a, b, c\} \in R$; $\{a, b\} \notin R$; $c \notin R$; $\{ \} \notin R$

$\{ \} \in K$

Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A

Notasi: n (A) atau $|A|$

Contoh:

- B = { x | x adalah bilangan prima lebih kecil dari 20 },

  atau B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}, maka $|B| = 8$
- T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$
- A = {a, {a}, {{a}} }, maka $|A| = 3$

Himpunan Kosong (*null set*)

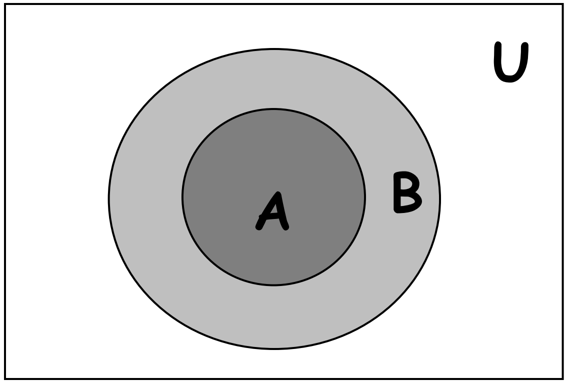
- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong
- Notasi: $\varnothing$ atau {}
- Himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing\}$
- $\{\varnothing\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong

Contoh:

- $E = \{x \mid x < x\}$, maka $n(E) = 0$
- P = {orang Indonesia yang pernah ke bulan}, maka $n(P) = 0$
- $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0\}$, $n(A) = 0$

Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B, jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. "every element of A is also in B" or $\forall x\ ((x \in A) \rightarrow (x \in B))$
- Dalam hal ini, B dikatakan superset dari A
- Notasi: $A \subseteq B$
- Untuk setiap himpunan A: $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$
- Diagram Venn:



Contoh:

- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

TEOREMA 1.

Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri: $A \subseteq A$.

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A: $\varnothing \subseteq A$

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

$A \subset B$ berbeda dengan $A \subseteq B$

- $A \subset B$: A adalah himpunan bagian (subset) dari B, namun $A \neq B$.

  A adalah himpunan bagian sebenarnya (proper subset) dari B.

  Contoh:

  {1} dan {2, 3} adalah proper subset dari {1, 2, 3}

- $A \subseteq B$: A adalah himpunan bagian (subset) dari B,

  memungkinkan $A = B$.

Himpunan Sama

- A = B, jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- A = B, jika dan hanya jika A adalah himpunan bagian dari B dan sebaliknya B adalah himpunan bagian dari A
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh:

- Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$
- Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$
- Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Himpunan Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B, jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

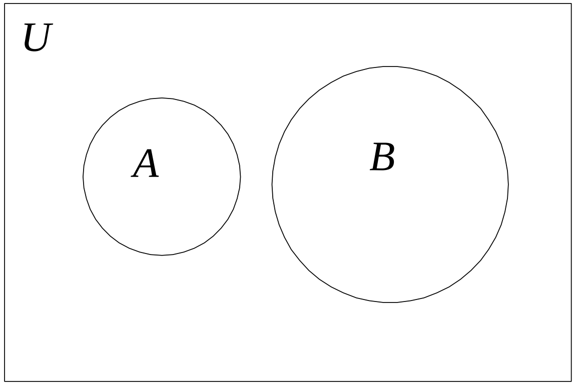
Contoh:

$A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$,

maka $A \sim B$, karena $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (disjoint), jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama, atau $A \cap B = \varnothing$
- Notasi : A // B
- Diagram Venn:



Contoh:

- Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka A // B
- Jika A = { 1, 2, 3 }, B = { 9, 10 }, C = { 2, 9 }, maka A dan B dikatakan saling lepas, sedangkan A dan C tidak saling lepas

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (power set) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.
- Notasi : P(A) atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$

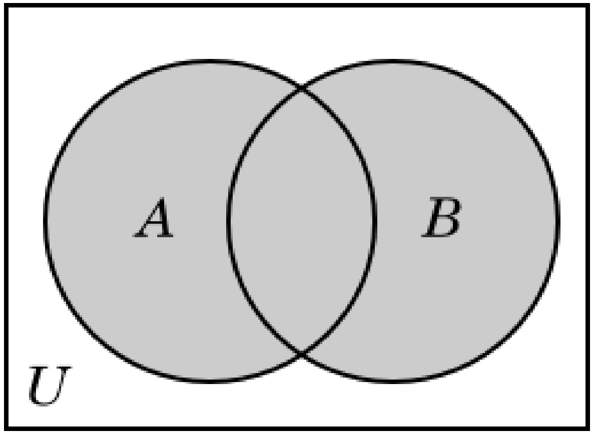
Contoh:

- Jika A = { 1, 2 }, maka P(A) = { ∅, { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}
- Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah P(∅) = {∅}
- Himpunan kuasa dari himpunan {∅} adalah P({∅}) = {∅, {∅}}

Gabungan (Union)

Gabungan dari himpunan A dan B adalah

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$$



Contoh:

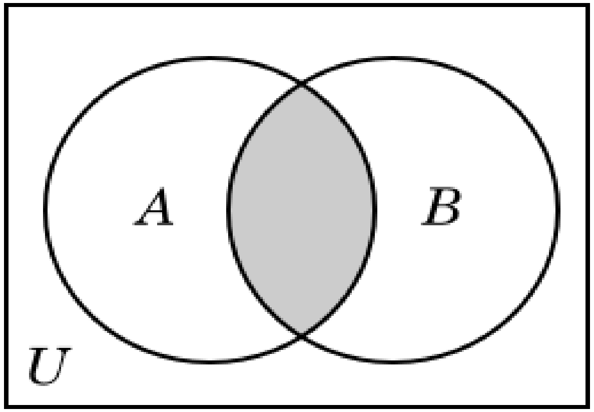
A = { 1, 2, 3 } dan B = { 1, 6 },

$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 6 \}$

Irisan (Intersection)

Irisan dari himpunan A dan B adalah

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$$



Contoh:

$A = \{ 1, 2, 3 \}$ dan $B = \{ 1, 6 \}$

$A \cap B = \{ 1 \}$

Komplemen (Complement)

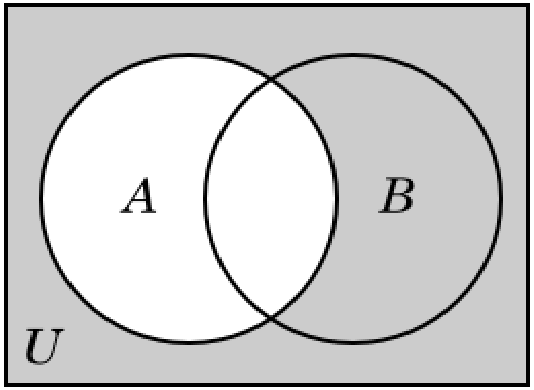
Komplemen dari himpunan adalah

$$\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$$

Catatan:

$\overline{\varnothing} = U$

$\overline{U} = \varnothing$



Contoh:

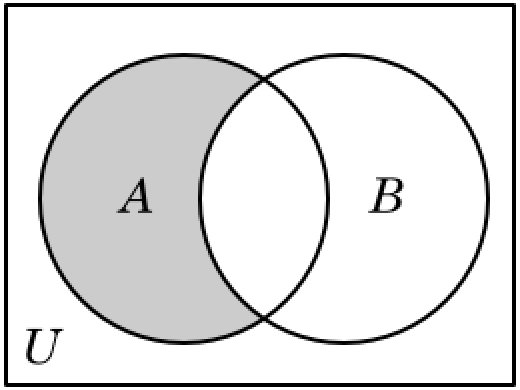
$A = \{x \in N \mid x \text{ adalah bilangan ganjil}\}$

$\overline{A} = \{x \in N \mid x \text{ adalah bilangan genap}\}$

Selisih (Difference)

Selisih dari himpunan A dan B adalah:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \}$$



Contoh:

A = { 2, 3, 4, 5 } dan B = { 3, 4, 7, 9 }

A - B = { 2, 5 }

B - A = { 7, 9 }

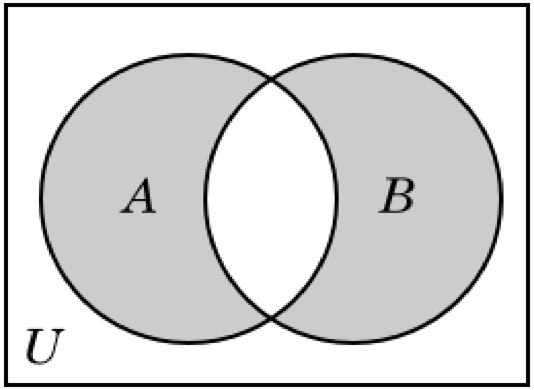
A - B ≠ B - A

Tidak komutatif

Beda Setangkup (Symmetric Difference)

Beda setangkup dari himpunan A dan B adalah:

$A \oplus B = \{ x \mid (x \in A \text{ dan } x \notin B) \text{ atau } (x \in B \text{ dan } x \notin A)\}$



Contoh:

$A = \{ 2, 3, 4, 5 \}$ dan $B = \{ 3, 4, 7, 9 \}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{ 2, 5, 7, 9 \}$

Perkalian Kartesian (Cartesian Product)

Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Contoh:

A= { a, b } dan B= { 1, 2 }

$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b ,2) \}$

$B \times A = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b) \}$

$A \times B \neq B \times A$

Tidak komutatif

Pada umumnya,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

$$| A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$$

Prinsip Inklusi- Eksklusi

Berapakah kardinalitas dari $A \cup B$?

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Contoh:

$A = \{ 1, 2, 3 \}$ dan $B = \{ 1, 6 \}$

$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 6 \}$

$A \cap B = \{ 1 \}$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= 3 + 2 - 1 = 4$$

Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_r$, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|$$

Latihan Soal

1. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

2. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 1000 yang habis dibagi 3 atau 5 atau 7?

Hukum-Hukum Himpunan

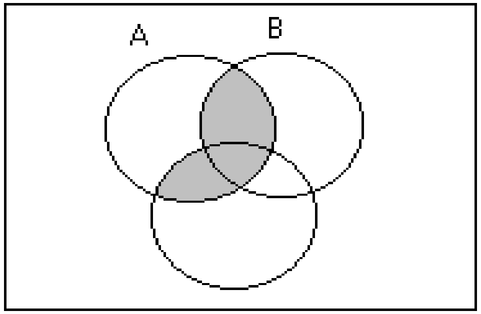
TABLE 1 **Set Identities.**

Identity	*Name*
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	Identity laws
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation law
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive laws
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws

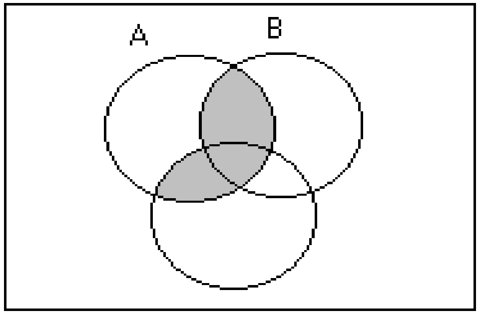
1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan.

Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua diagram Venn memberikan area arsiran yang sama.

Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Misalkan A, B, dan C adalah himpunan.

Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama,

maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan

Misalkan A dan B himpunan.

Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

$$
\begin{aligned}
A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) && \text{(Definisi operasi selisih)} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) && \text{(Hukum distributif)} \\
&= (A \cup B) \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\
&= A \cup B && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

Referensi:

1. Johnsonbaugh. 2005. *Discrete Mathematics. New Jersey: Pearson Education Inc.*
2. Kenneth H. Rosen. 2005. Basic Structures: Sets, Functions, Sequences and Sums. *Discrete Mathematics & its Applications*. 6th edition. Mc Graw-Hill.
3. Rinaldi Munir. Himpunan. Bahan kuliah IF2091 Struktur Diskrit. Program Studi Teknik Informatika. STEI – ITB.