Facultad de Economía

Materia: Álgebra Lineal

Profesor: Jorge Cely

Estudiantes: José María Rodriguez, Javier Fernando Vivas.

Proyecto de Álgebra Lineal

Nombre del proyecto: Álgebra lineal en la restauración de sonidos

Objetivo general:

Diseñar un modelo matemático de un filtro para restaurar varios sonidos que estén contaminados por la misma distorsión (ruido).

Objetivos específicos:

- Encontrar una solución al problema usando lo visto en el curso de Álgebra Lineal.
- Desarrollar un algoritmo eficiente para hallar el filtro que nos permita optimizar tiempo y memoria computacional, apoyándonos en el programa Matlab.

Justificación:

La conversión de los sonidos ruidosos a uno de carácter limpio es una pieza importante en la reconstrucción de piezas antiguas musicales y cinematográficas. El proceso de coger un elemento "corrompido" y devolver a su estado puro original es una cuestión meramente algebraica, debido a la naturaleza de las ondas de sonido. Es por esta razón que el álgebra lineal y el uso de la conversión de matrices se presta para resolver esta problemática y puede ayudar a no perder importantes piezas culturales.

Metodología:

Con un sonido sucio que es una sucesión, por medio del proceso de Hankelización convertiremos ese sonido en una matriz, la cual denominaremos como matriz A. Después, debemos encontrar un vector que al multiplicarlo con la matriz A nos retorne un sonido limpio.

Procedimiento:

Con dos sonidos los cuales son sucesiones, se ha de crear un filtro digital que reciba un sonido ruidoso y aplicado a un filtro nos debe retornar un sonido limpio o al menos una aproximación a este. Mediante la solución de la ecuación Ax=b, donde A es una matriz de diseño formada a partir del sonido contaminado, x es el vector que representa los coeficientes del filtro y b es el vector que representa el sonido filtrado, solucionaremos el sistema de ecuaciones para hallar los valores del filtro.

Teniendo un sonido ruidoso, el cual está representado como una sucesión definida por $S_n = \left[s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_n\right]$, donde $s_n \in R$. Además, podemos interpretar a S_n como un vector de tamaño $1 \times n$, esto con el fin de poder crear nuestra matriz A.

Ahora, para la creación de nuestra matriz A, emplearemos el uso de la expansión de bloques de Hankel. Una matriz es denominada Hankel si sus entradas en cada antidiagonal son iguales y se le denomina “bloques de Hankel” cuando la matriz resultante es cuadrada. Hacemos uso de este tipo de matriz, ya que nos permite utilizar un vector unidimensional y poder transformarlo en una matriz. Luego, definiremos a *p,* donde *p* es el orden del filtro y este ha de satisfacer $p < n$ (ya que si $p \geq n$, no habrían los suficientes datos para poder utilizar el método de expansión).

Construimos nuestra matriz de Hankel A de tal manera que:

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n-p+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n-p+2} \\ s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & s_{n-p+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_p & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_n \end{bmatrix}$$

Teniendo nuestra matriz A lista, donde $A \in R^p$, solo nos queda resolver el sistema de ecuaciones dado por:

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n-p+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n-p+2} \\ s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & s_{n-p+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_p & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

Al tener ya nuestra matriz A y a nuestro vector *y* que representa el sonido limpio (el cual está dado por la sucesión $Y_n = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, donde $y_n \in R$). Podemos interpretar este problema como la solución de un sistema de ecuaciones de la forma A*x*=*y*. Donde *x* es el vector que representa las variables de nuestro filtro y está dado por $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, donde $x_n \in R$. Por lo tanto, la combinación lineal de las columnas de la matriz D nos ha de producir una cercanía a los valores del sonido limpio. Con este filtro podemos limpiar sonidos que estén corrompidos con la misma distorsión.

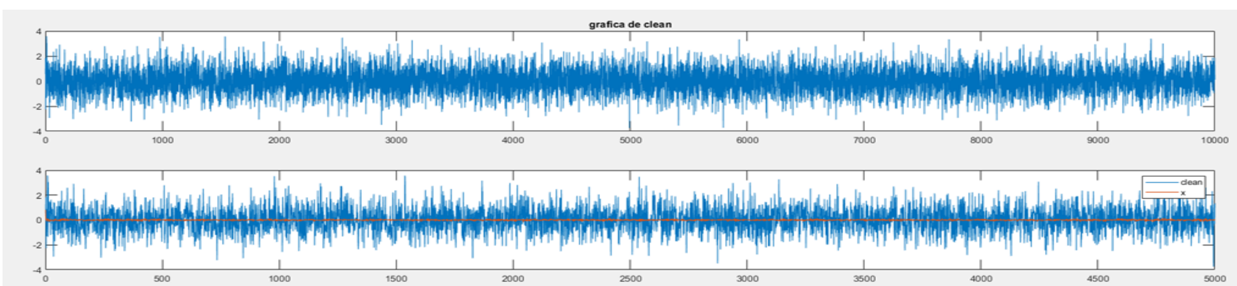
➔ Para ver el código del programa de Matlab y las señales que fueron usadas: https://github.com/itsjaviervivas/Proyecto_Algebra_Lineal_Finanzas

Gráficas:

Sonido 1:

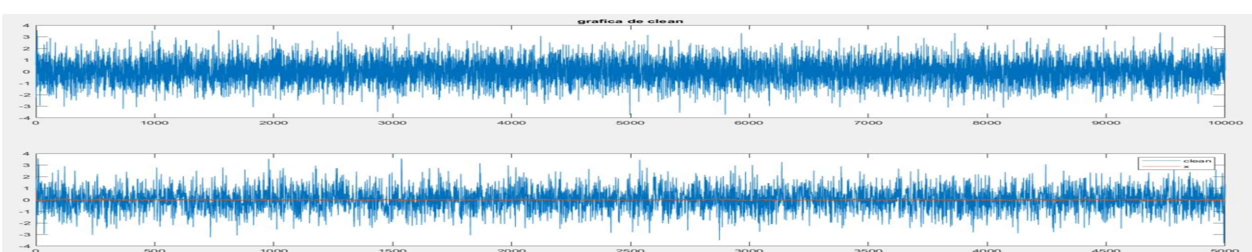
- **Cuando p=100**

  n=5000



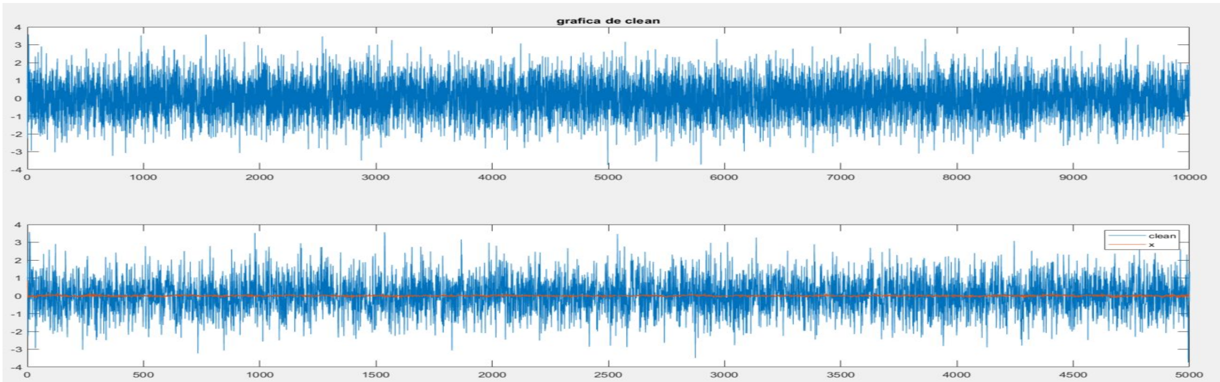
- **Cuando p=2500**

  n=5000



- **Cuando p=777**

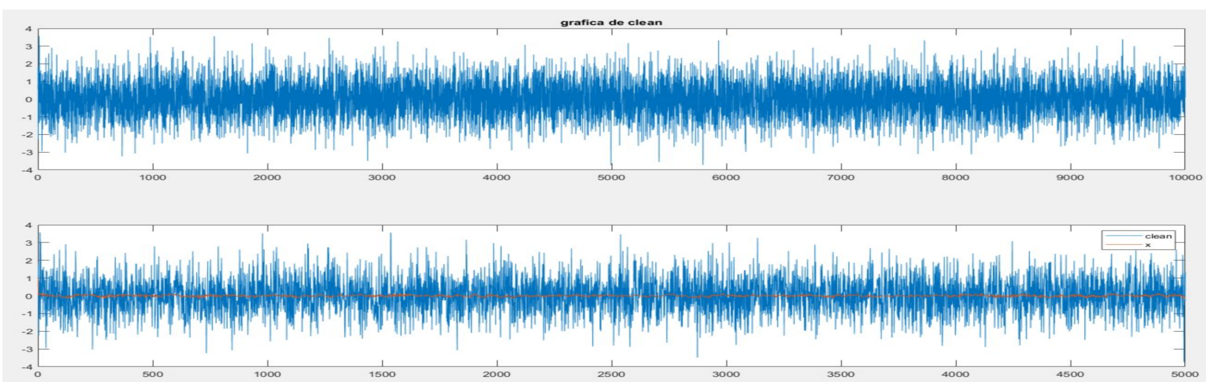
n=5000



Sonido 2:

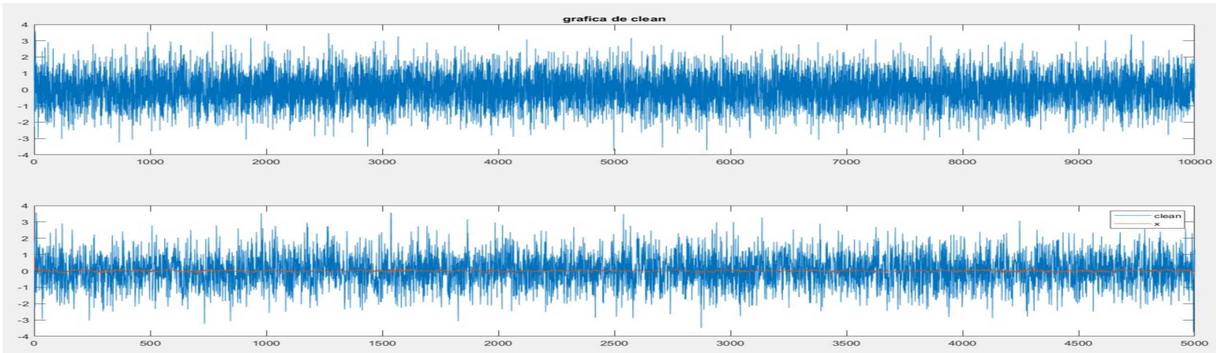
- **Cuando p=100**

n=5000



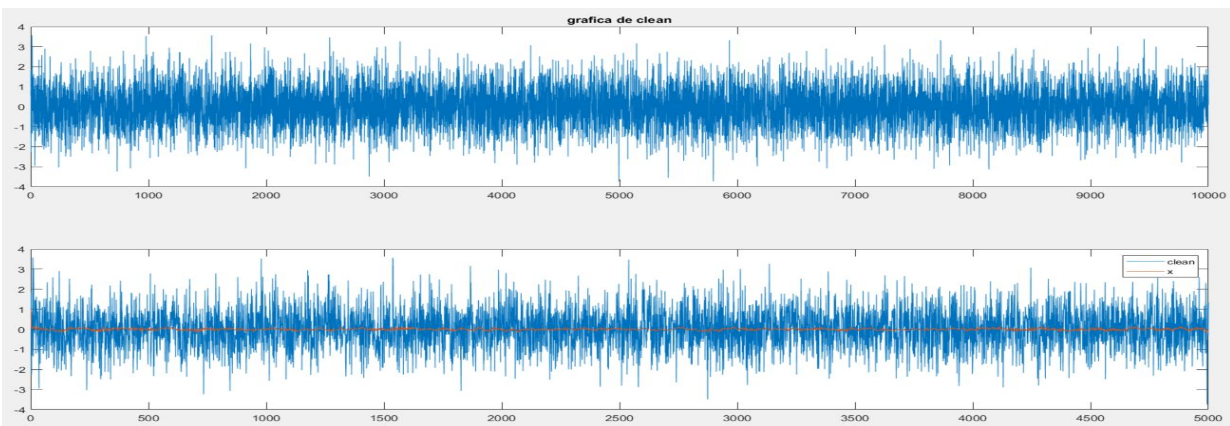
- **Cuando p=1000**

  n=5000



- **Cuando p=10**

  n=5000



Conclusiones:

Cuando se le aplica el filtro x a la matriz A (la cual representa el sonido corrompido), obtenemos un vector y que representa el sonido sin corromper. Como podemos observar en las gráficas, al aumentar los valores de p (que viene a ser el orden de nuestro filtro), más nos acercamos al sonido limpio. Además, podemos evidenciar que mediante el uso de las combinaciones lineales podemos resolver problemas de este tipo y junto con una buena herramienta computacional podemos generar algoritmos que nos permitan optimizar tiempo y memoria durante el proceso. De esta manera, podemos evidenciar que el Álgebra Lineal es una ayuda demasiado poderosa al momento de resolver este tipo de cuestiones y sus aplicaciones en el mundo computacional son demasiado diversas y aún están en desarrollo; ayudándonos así a gastar menos memoria y tiempo, lo cual resulta en un gran beneficio económico. Además, la recuperación de piezas históricas del audio de diversas películas y música es una aplicación que aún está en desarrollo y en un futuro nos permitirá escuchar con mejor fidelidad distintos clásicos.

Bibliografía:

1. Cadzow, J.: Signal enhancement a composite property mapping algorithm. IEEE Trans. Acoust., Speech, Sig. Process. **36**, 49–62 (1988)
2. Lu, L., Xu, W., & Qio, S. (2014). *A fast SVD for multilevel block Hankel matrices with minimal memory storage*. Recuperado de https://www.cas.mcmaster.ca/~qiao/publications/LXQ15.pdf
3. Hankel matrix. *Encyclopedia of Mathematics.* URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Hankel_matrix&oldid=35212
4. Oropeza, V.E., Sacchi, M.D.: Simultaneous seismic data denoising and reconstruction via multichannel singular spectrum analysis. Geophysics 76(3), 25–32 (2011)
5. Weisstein, Eric W. "Hankel Matrix." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HankelMatrix.html