UNIVERSITE GUSTAVE EIFFEL
MARNE LA VALEE
UFR des Mathématiques
2021-2022

Projet: **SIMULATIONS ET COPULES**:

Etudiants :

- Yassine BOUKHARI
- Khadim GUEYE

Professeur:

- Mr T. JEANTHEAU

[1]

[1] Projet 2021.... UPEM.

Dans le cadre de notre projet, nous présenterons les résultats suivant quatre méthodes d'approximation liées au calcul de l'intégrale d'une fonction $\varphi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\varphi(x, y) = 2xy(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

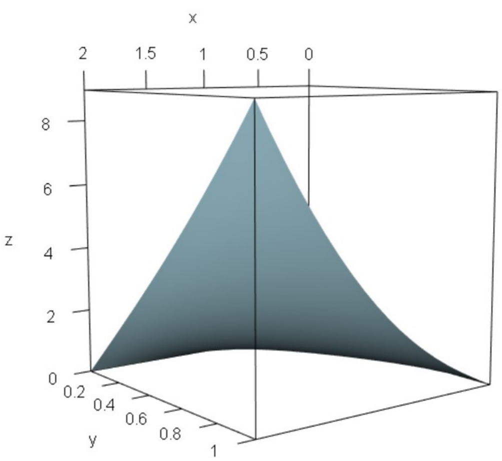
Notre but est d'approximer

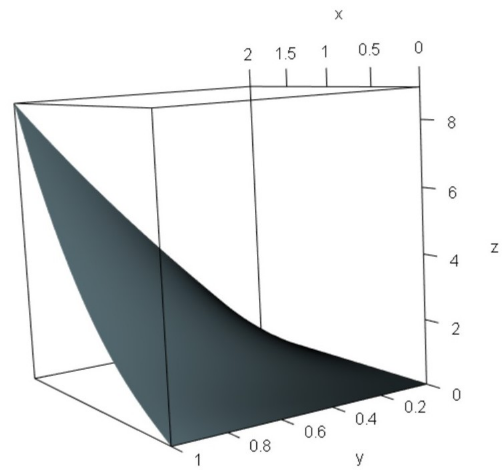
$$I = \int_a^b \int_c^d \varphi(x, y) dx dy$$

avec $[a, b] \times [c, d] = [0, 2] \times [0, 1]$.

- Méthode 1 : Approximation par fréquence empirique
- Méthode 2 : Calcul par composition de deux lois uniformes $(U, V) \sim \mathcal{U}[a, b] \times \mathcal{U}[c, d]$
- Méthode 3 : Approximation utilisant l'échantillonnage préférentielle à l'aide d'une densité p qui approche notre fonction φ
- Méthode 4: Approximation à l'aide de la copule de Clayton.

Avant de présenter les résultats obtenue respectivement par nos quatre méthodes commençont par présenter notre fonction φ.
La fonction $persp3d$ nous montre bien la régularité de φ :





on remarque que notre fonction atteint un pic en $(2, 1)$.

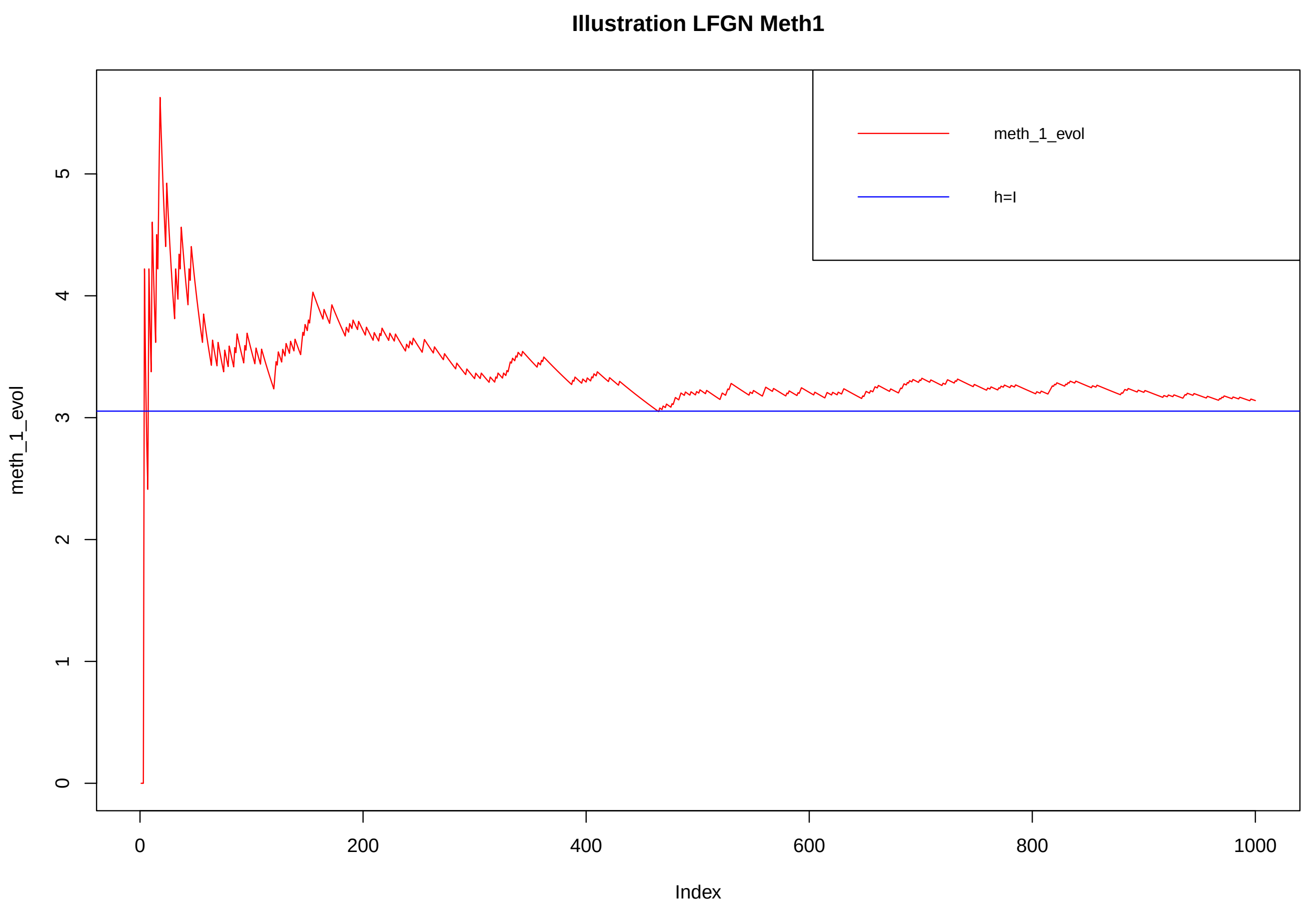
Le calcul exacte de la valeur notre intégrale I se fait à l'aide de la fonction $quad2d$ et donne $I = 3.05356$.

- **Première méthode** : Fréquence empirique

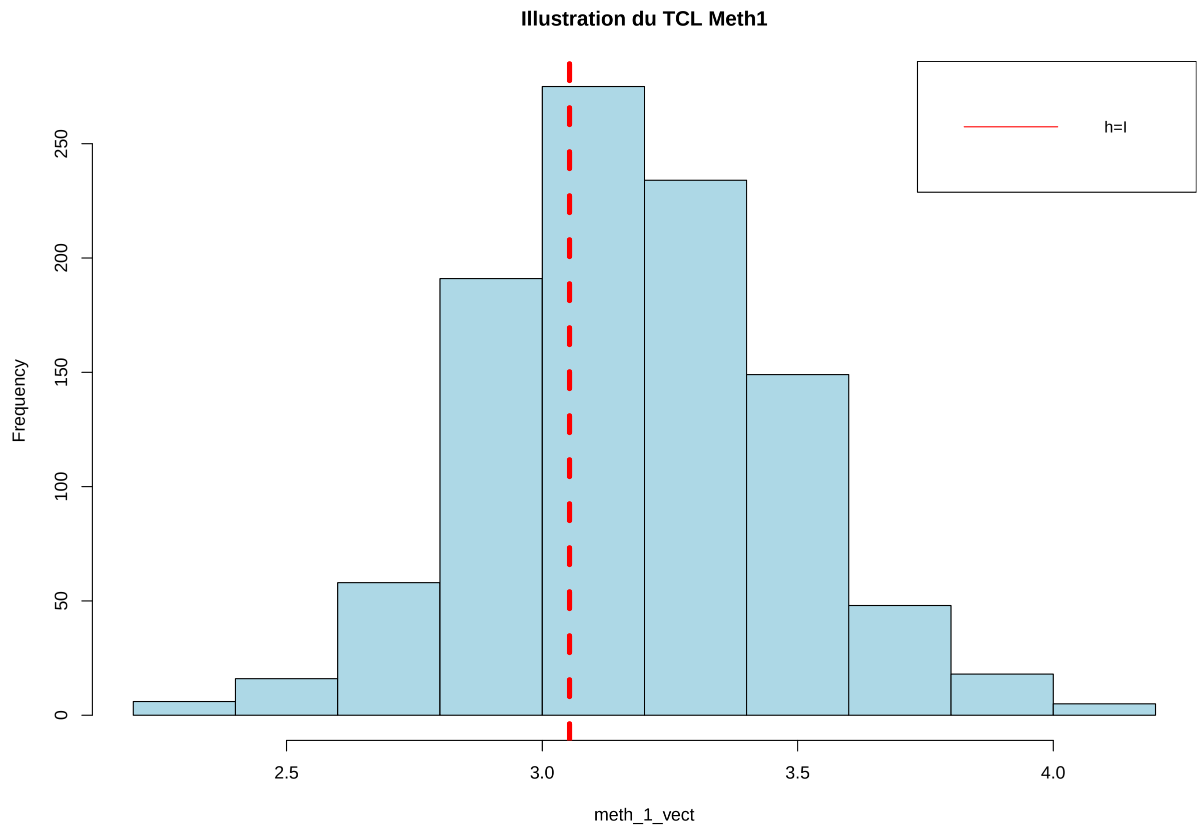
  Pour cette méthode nous allons compter le nombre de points qui se trouvent en dessous de la courbe de φ.
  Pour cela nous allons poser $K = \max(\varphi(x, y))$ puis simuler une autre variable aléatoire Z suivant une loi uniforme sur $[0, K]$.
  Donc nous avons:

$$\begin{aligned} I\_meth\_1 &= (2-0).(1-0).K.\text{sum}(Z < \varphi(U, V)) \\ &= 3.140169 \end{aligned}$$

En illustrant la méthode de la loi forte des grands nombres *(LFGN)* on obtient l'évolution qui suit :



On illustre maintenant le théorème centrale limite *(TCL)* qui montrera la dispersion de notre approximation autour de la valeur exacte de I

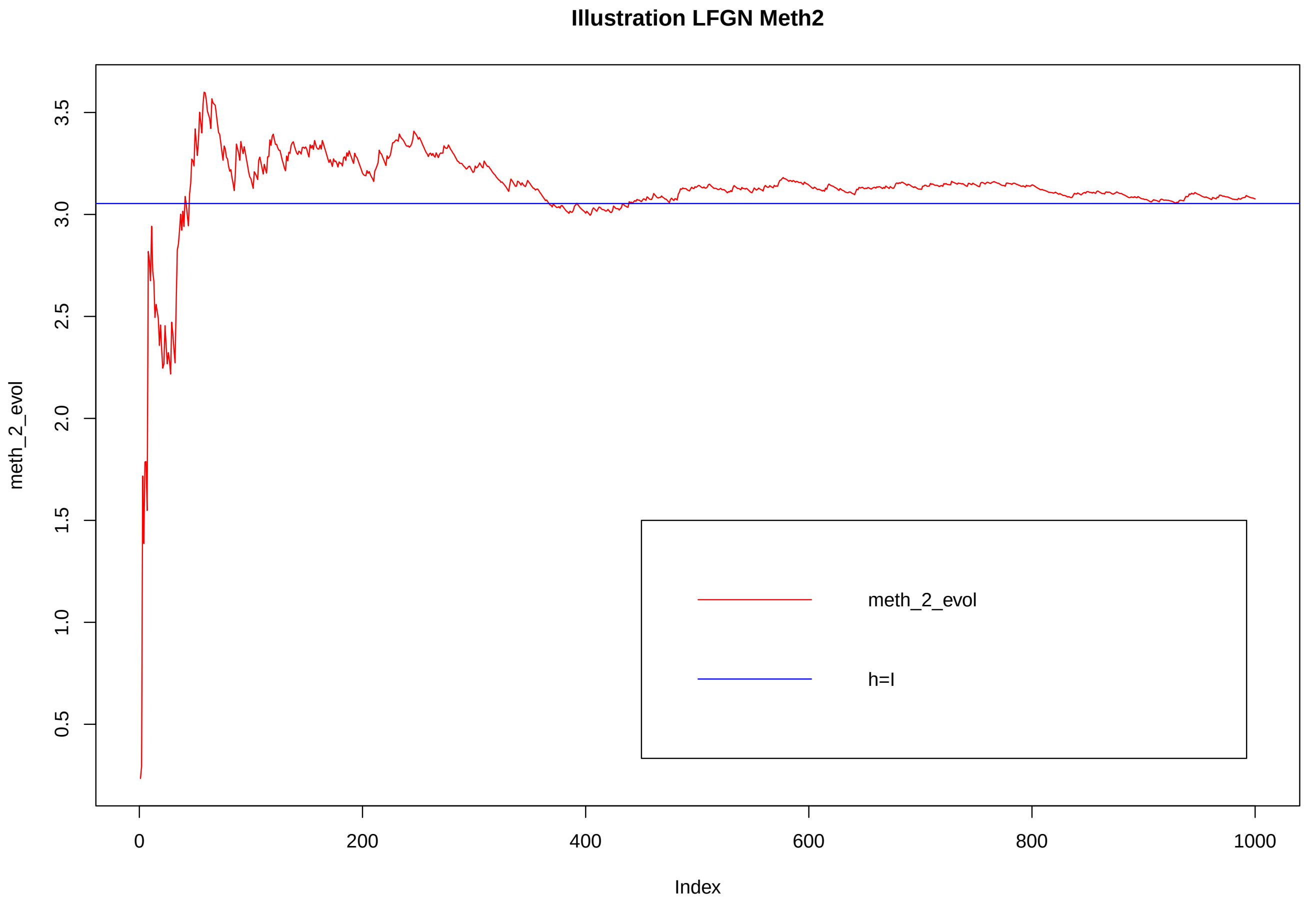


- **Deuxième méthode** : Avec deux lois uniformes indépendantes

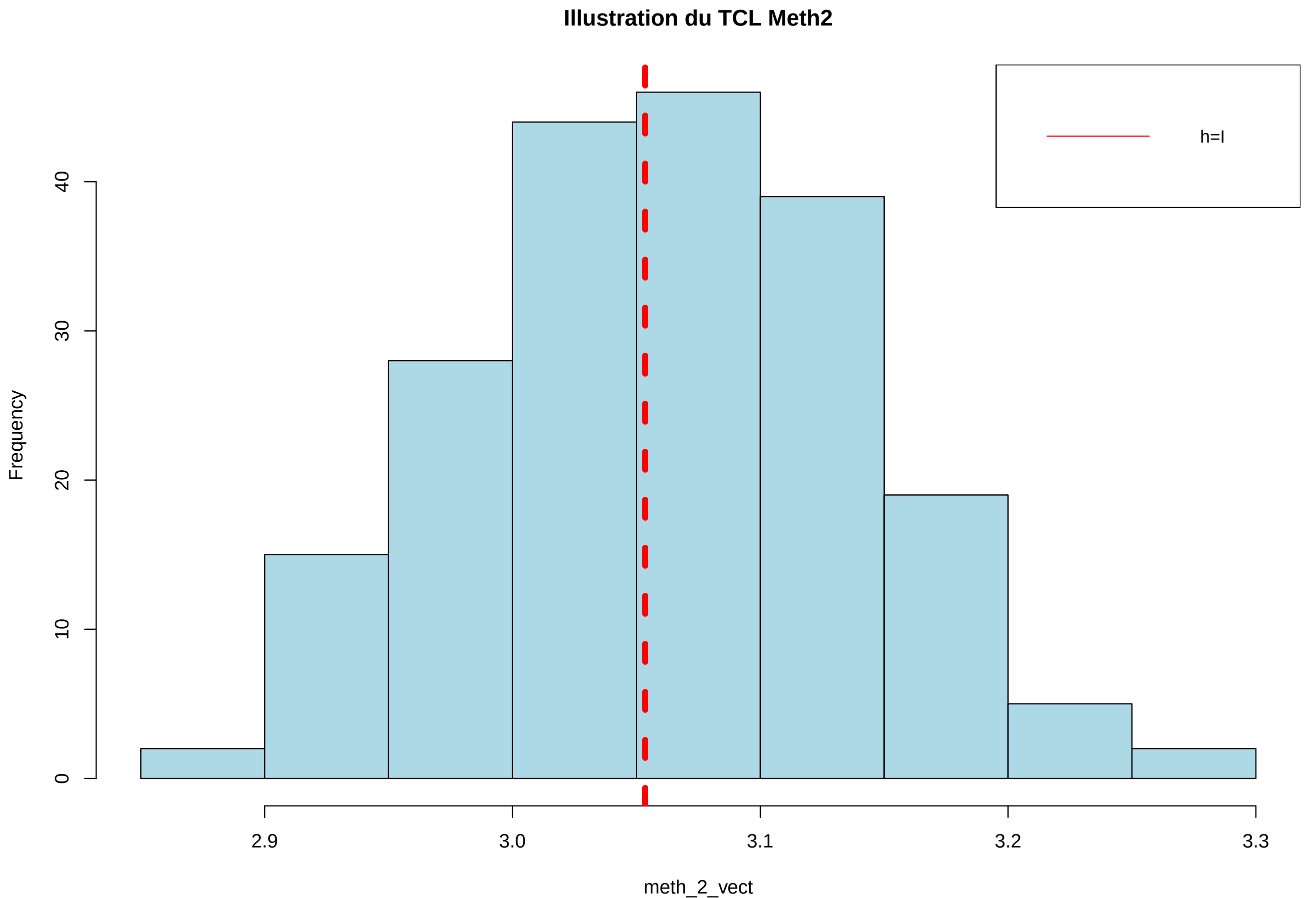
Après l'approximation par fréquence empirique on verra maintenant la méthode se basant sur deux lois uniformes indépendantes.
On simule U et V suivant respectivement des lois uniformes sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[0, 1]$ et qui sont indépendantes.
Nous avons :

$$\begin{aligned} I\_meth\_2 &= 2.\text{mean}(\varphi(U, V)) \\ &= 3.076362 \end{aligned}$$

En illustrant la méthode de la loi forte des grands nombres on obtient l'évolution qui suit :



On illustre maintenant le théorème centrale limite.
Nous avons :



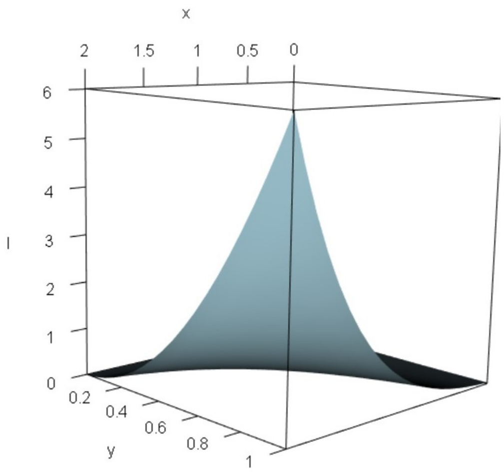
- **<u>Troixième méthode</u>** : Par échantillonnage préférentielle

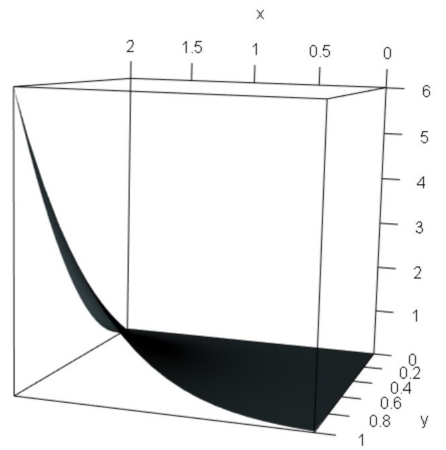
  Dans ce cas, on se ramène à l'approximation de l'intégrale I à l'aide de la méthode d'échantillonnage préférentielle.
  L'idée est de trouver une fonction p qui approche bien notre fonction φ avec $p(x, y) = p_1(x).p_2(y)$ où $p_1(x)$ et$p_2(x)$ sont deux densités pris par nos soins.

  Soient $p1(x) = \frac{6}{728}(1 + x)^5$ et $p2(y) = 3y^2$.

  Alors p1 et p2 sont des densités de probabilité.

Comme on peux le voir sur la figure, la fonction p admet bien une allure similaire à celle de notre fonction φ.
L'utilité de nos deux densités seront de simuler des variables x et y appartenant aux domaines fixés à l'aide des méthodes vu au chapitre 1.





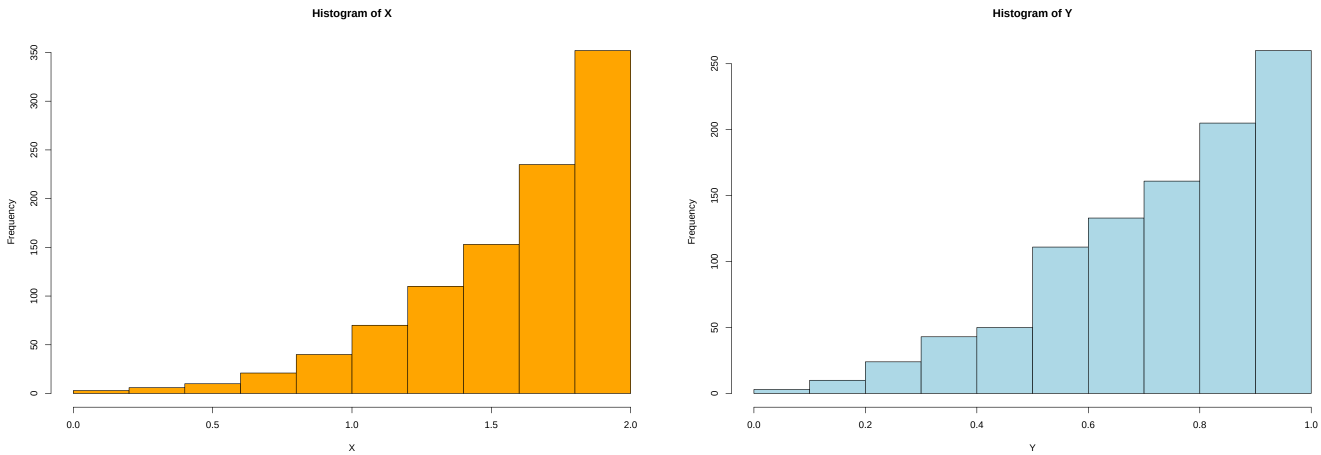
On note P_1 et P_2 leurs fonctions de repartitions respectives :

$$\Longrightarrow P_1(t) = \frac{6}{728}((1+t)^6 - 1) \text{ et } P_2(t) = t^3.$$

En calculant leur inverse, on trouve :

$$P_1^{-1}(u) = (728.u + 1)^{\frac{1}{6}} - 1 \text{ et } P_2^{-1}(u) = u^{\frac{1}{3}}.$$

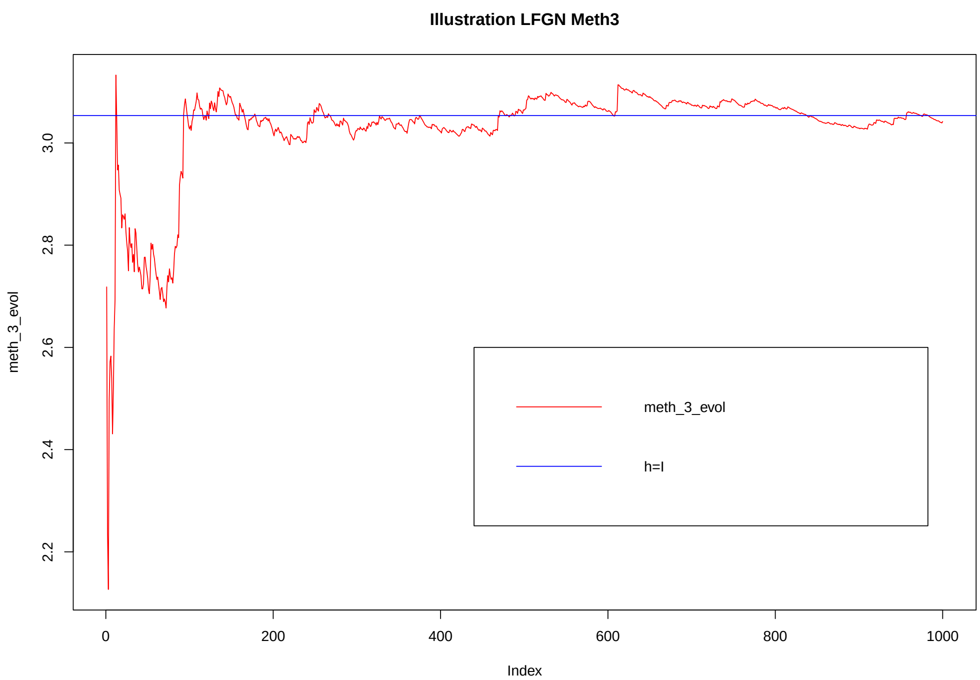
Ce qui va nous permettre d'obtenir par la méthode d'inversion, les histogrammes de X et de Y.



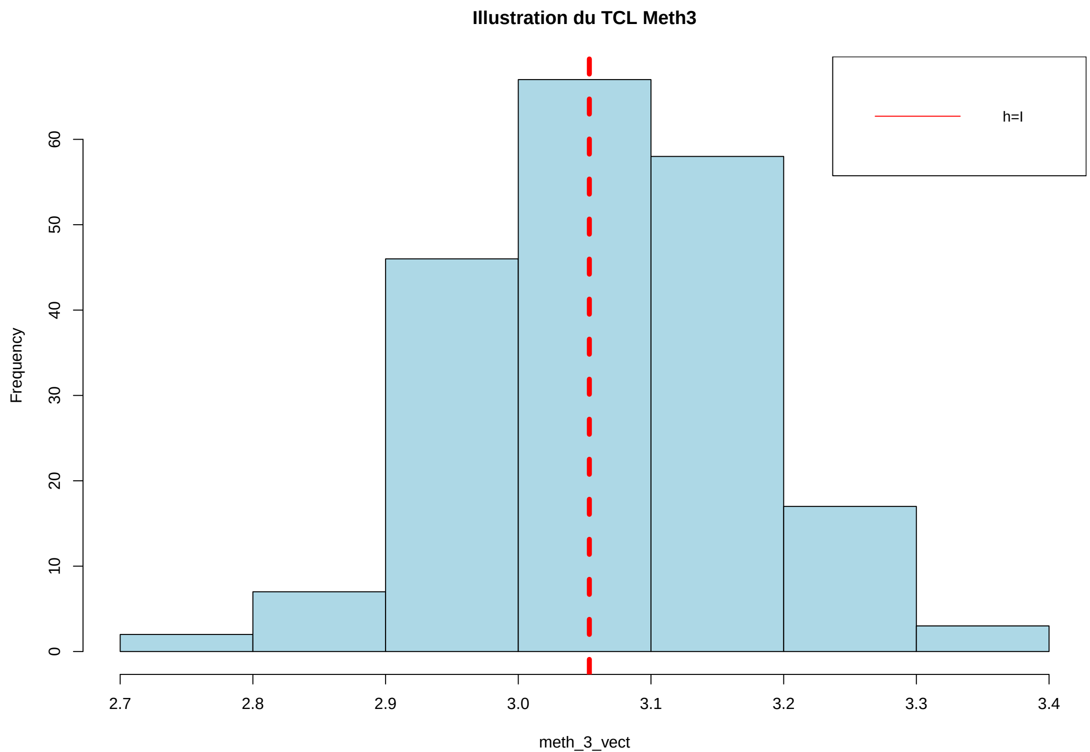
Après simulation nous obtenons :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I\_meth\_3} &= \boldsymbol{mean(\varphi(X,Y)/p(X,Y))} \\ &= \mathbf{3.041891.} \end{aligned}$$

Et par suite on illustre la loi forte des grands nombres de notre méthode grâce son évolution :

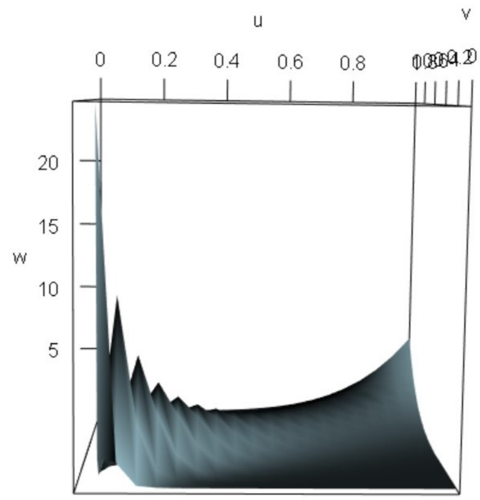


Suivi maintenant de l'illustration du théorème centrale limite qui montre la dispersion de notre approximation autour de la valeur exacte de I.



- **Quatrième méthode** :Avec les copules

Dans cette section on s'intéressera à l'approximation de notre intégrale à l'aide de la copule de Clayton avec paramètre $\theta = 5$.
On présentera par la suite les différentes approximations obtenues à l'aide de différents θ et par la suite en déduire graphiquement le plus optimal.
On admet que la fonction φ est haut en $(2, 1)$.
Commençons d'abords par simuler la densité de notre copule de Clayton.



Comme on le remarque le pic de notre copule est atteint en $(0,0)$, nous allons donc inverser le pic afin de le placer en $(1,1)$ cela grâce au changement de variable suivant :

$$U1 = 1 - U \text{ et } V1 = 1 - V.$$

Ce qui nous donne un pic en $(1,1)$ puis nous allons transformer les marges sur $[0,2]$ et sur $[0,1]$.

Soit c la densité de la copule alors :

$$c(u,v) = (1+\theta)(uv)^{-(\theta+1)}(u^{-t} + v^{-t} - 1)^{-2-\frac{1}{\theta}}$$

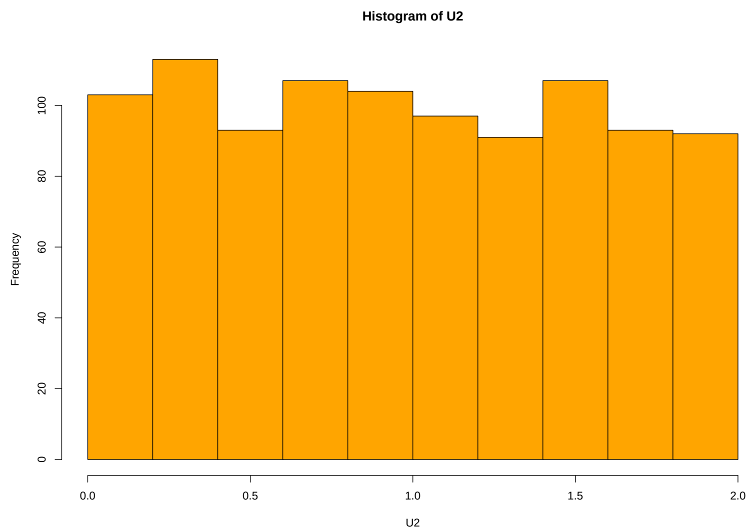
La fonction de répartion conditionnelle de V sachant U est donnée par :

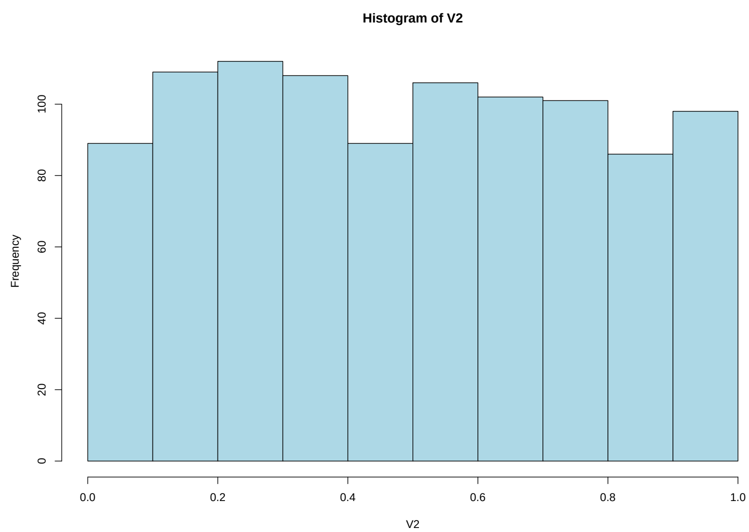
$$F_V(u) = \frac{\partial c(u,v)}{\partial u} = (u^{-t} + v^{-t} - 1)^{-\frac{\theta}{\theta+1}} u^{-(\theta+1)}$$

$$\Longrightarrow F_V^{-1}(u) = ((z^{-\frac{\theta}{\theta+1}} - 1)u^{-\theta} + 1)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

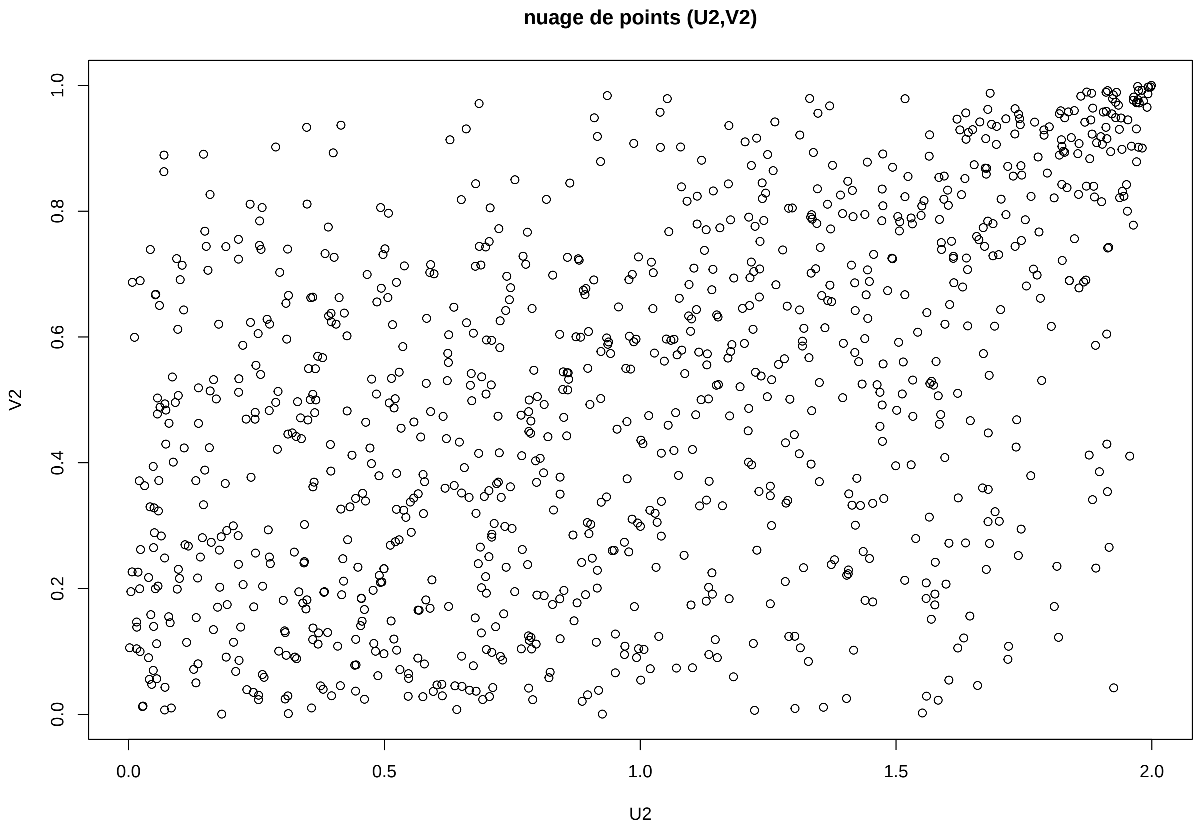
On a bien changé notre pic en $(1,1)$ reste à le changer maintenant en $(2,1)$ pour approcher le cas de notre fonction φ.

Pour simuler $U2$ et $V2$, on pose
$U2 = qunif(U1,0,2)$ et par la méthode d'inversion de la fonction de repartition conditionnelle, on simule $V2$, on obtient les histogrammes suivants :





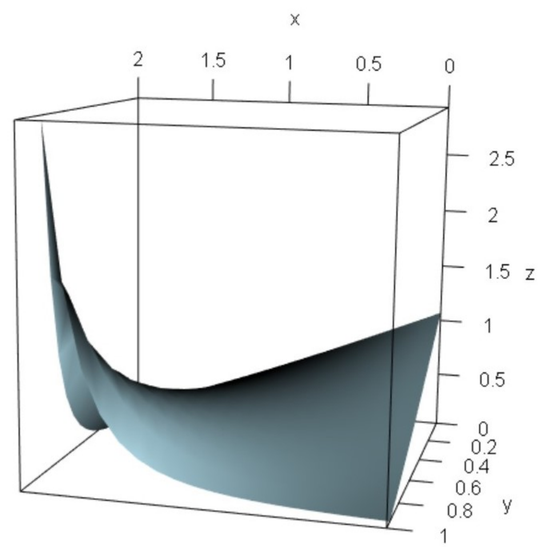
Le nuage de points nous donne :



On remarque qu'on a maintenant simulé plus de points en $(2, 1)$.

Afin d'approximer notre intégrale I à l'aide de la méthode il faut trouver un une fonction ph qui puisse approcher notre fonction φ. Une solution pour cela est donnée par **le Théorème de Sklar** ainsi pour le calcul de I_meth_4, on pose

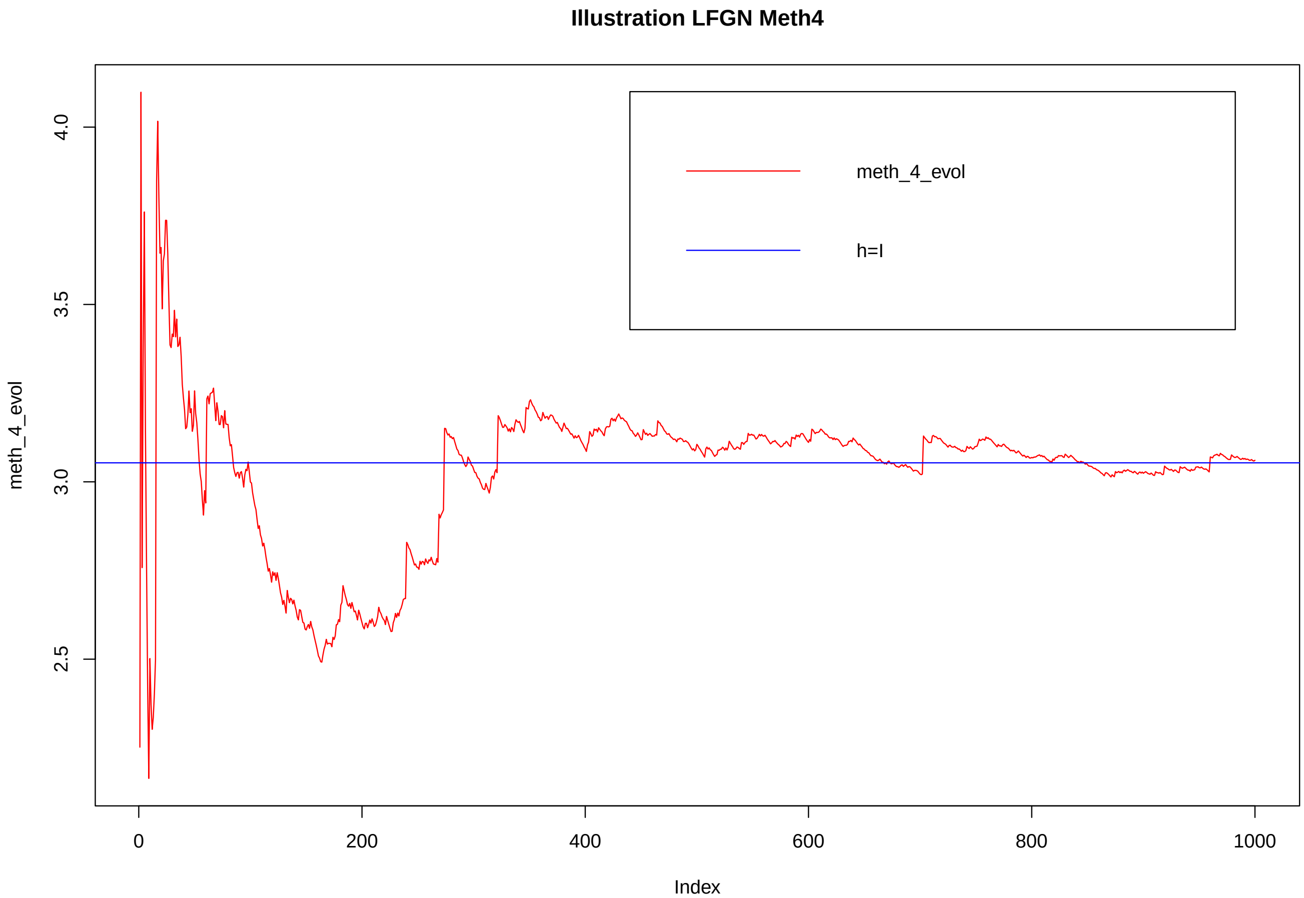
$$ph(x, y) = f(x)g(y)c(F(x), G(y)).$$



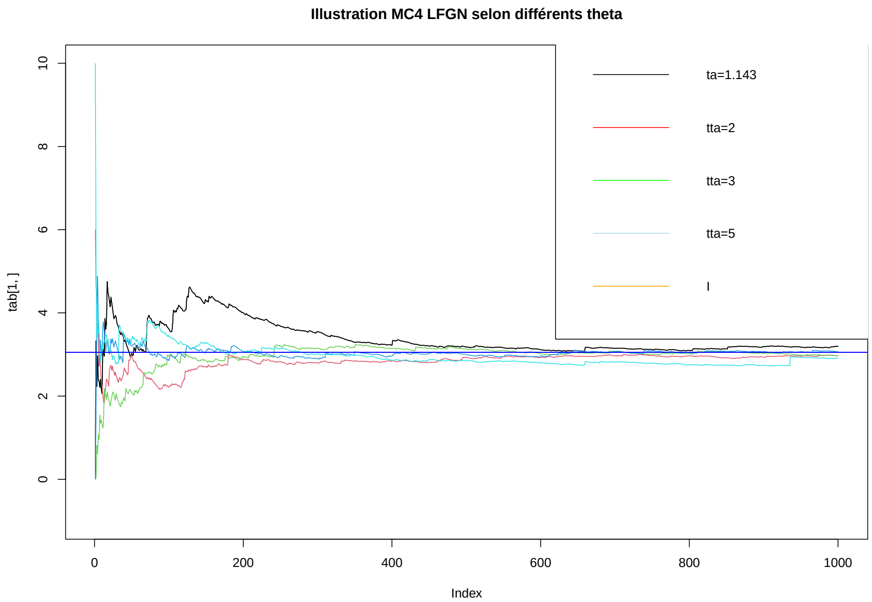
La fonction $\boldsymbol{ph}$ approche bien la fonction φ.
Reste plus que l'étape pour approximer notre intégrale :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I\_meth\_4} &= \text{mean}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi(U2, V2)}}{\boldsymbol{ph(U2, V2)}}\right) \\ &= \mathbf{3.060747} \end{aligned}$$

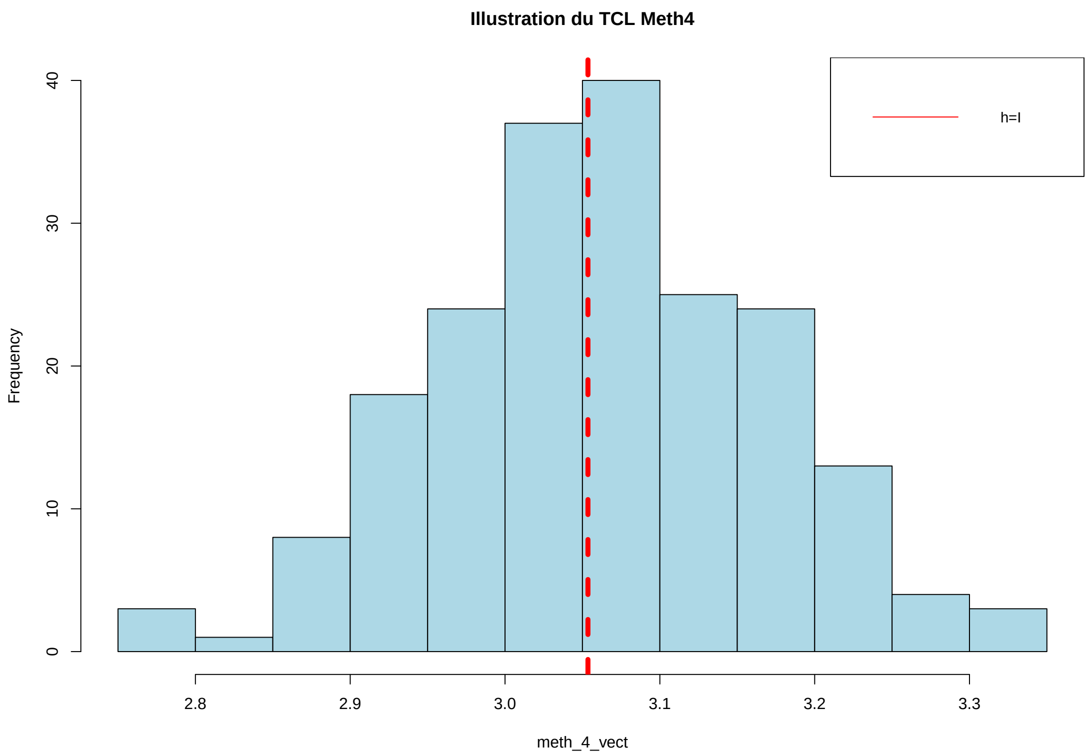
Par suite on illustre la loi forte des grands nombres de notre méthode:



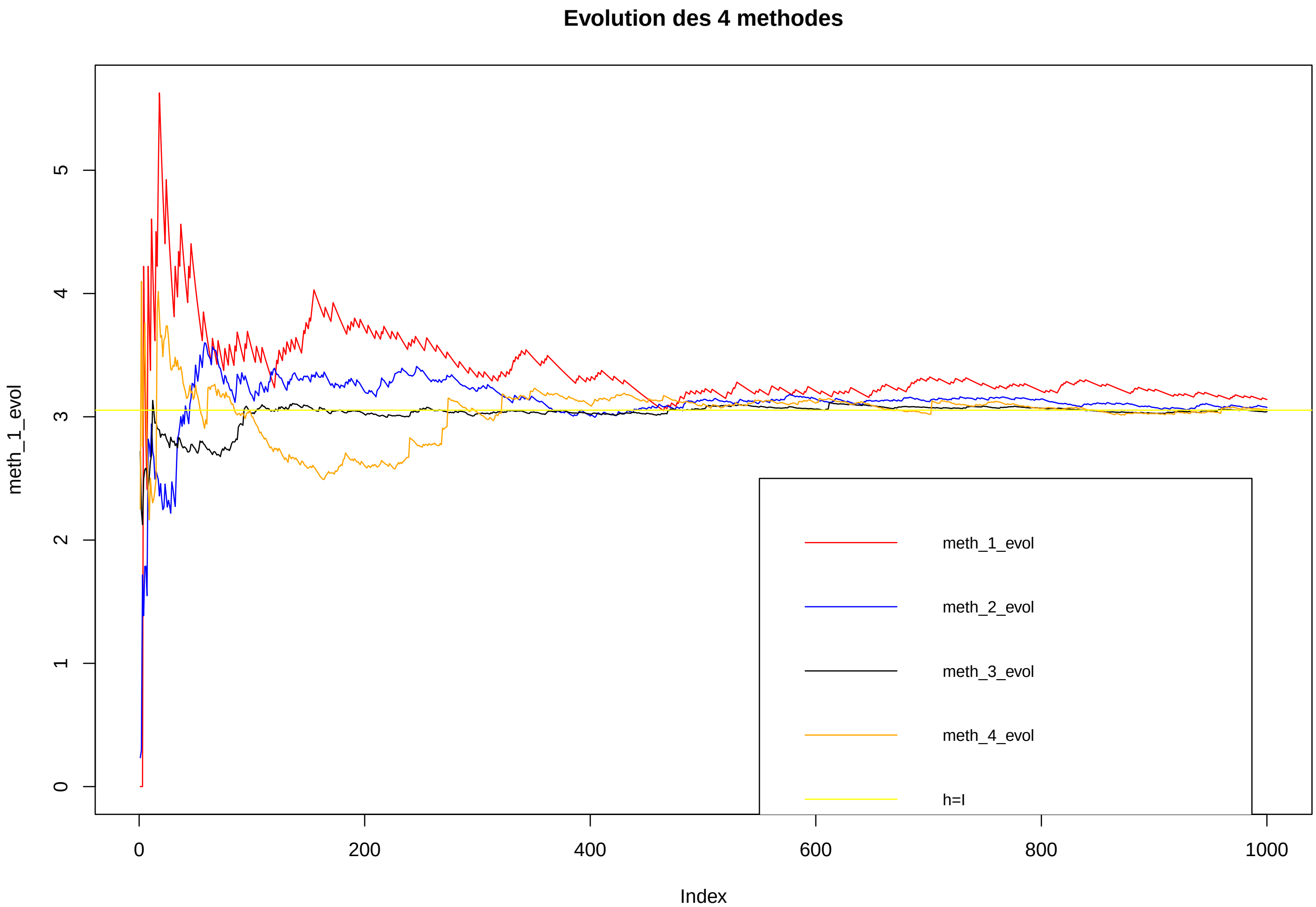
On essaie de voir maintenant pour différentes valaurs de θ choisies, l'évolution de la méthode.



Suivi maintenant de l'illustration du théorème centrale limite.



Si nous superposons les évolutions des quatre méthodes dans une seule figure nous obtenons :



Nous pouvons dire que les toutes les méthodes convergent.
Les méthodes 3 et 4 proposent une approximation plus proche de la valeur exacte de I.

Ci-dessous une comparison des moyennes et variances pour les méthodes :

	moyenne	*variance*
meth_1_vect	**2.804289**	**0.223522**
meth_2_vect	***3.06287***	**0.07953414**
meth_3_vect	***3.027808***	**0.109804**
meth_4_vect	***3.06317***	**0.107025**

La variance pour la méthode 1 est deux fois plus grande que celle de la méthode 3 et 4.