SUBJECT: [illegible] ریاضی ۲ DATE: / /

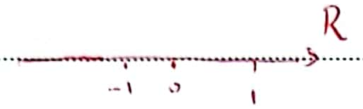
فهرست

FATER

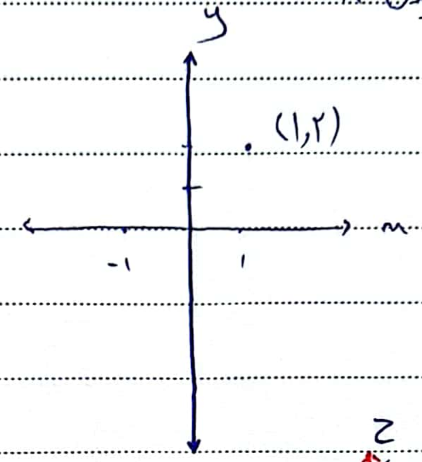
بردارها در فضای R^3 :

فضای اقلیدسی R^n :

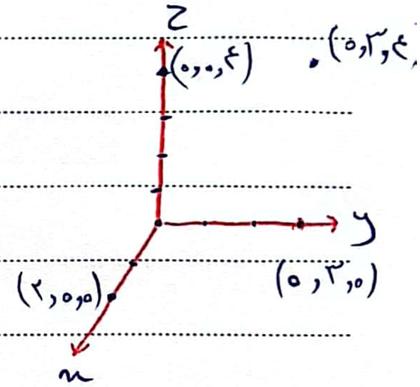
$n=1$



$n=2$, $R^2=\{(x,y) \mid x,y\in R\}$



$n=3$ $R^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in R\}$



tip: قاعده دست راست، چهار انگشت x ها، چرخش به سمت y ها و شست به سمت z ها.

tip: منظور از یک هشت اول در فضای R^3 فضاییست که هر ۳ مولفه مثبت هستند

فاصله دو نقطه $A(a_1,b_1,c_1)$ و $B(a_2,b_2,c_2)$ را با $|AB|$ نشان می‌دهیم

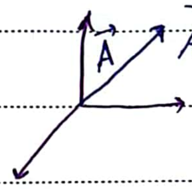
$$|AB|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

مثال: $A(1,2,3)$, $B(3,4,4)$

$$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{4+4+1}=3$$

بردار: هر کمیتی که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز باشد بردار نامیده می‌شود. بدیهی است که بردارهای هم اندازه و هم جهت و موازی را بردارهای هم سنگ یا هم ارز می‌گیریم.

منظور از بردار $\vec{AB}$ برداری است که نقطه A را به B وصل می‌کند به طور مشابه منظور از بردار $\vec{A}$ برداری است که O یا مبدا را به نقطه A وصل می‌کند برای نشان دادن چنین برداری کافیست مولفه‌های نقطه A را بدانیم.



$\vec{A}=(a,b,c)$

برداری که نقطه A با مولفه (a_1,b_1,c_1) را به نقطه $B(a_2,b_2,c_2)$ وصل می‌کند را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\vec{AB}=((a_2-a_1),(b_2-b_1),(c_2-c_1))$$

(ex $A(۳,۴,۵)$ $B(۲,۱,۶)$ $\vec{AB}=((۲-۳),(۱-۴),(۶-۵))$

$(-۱,-۳,۱)$

$\vec{BA}=((۳-۲),(۴-۱),(۵-۶))=(۱,۳,-۱)=-\vec{AB}$

ویژگی‌ها

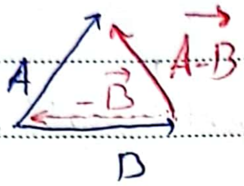
$\vec{A}=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{B}(a_2,b_2,c_2)$

۱) قرینه: $-\vec{A}=(-a_1,-b_1,-c_1)$ تعبیر هندسی: جهت عوض می‌شود

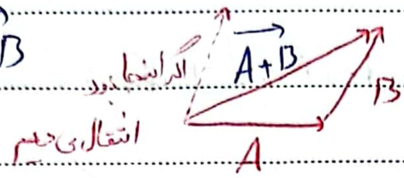
۲) ضرب عددی $r\vec{A}=(ra_1,rb_1,rc_1)$ $r\in R$

۳) اندازه (طول) بردار: $|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$

۴) جمع و تفریق بردارها: $\overrightarrow{A \mp B} = (a_1 \mp a_2 , b_1 \mp b_2 , c_1 \mp c_2)$



$\overrightarrow{A-B}$



۵) ضرب داخلی $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

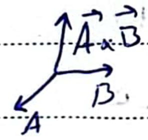
دترمینان

$\vec{A} = (a_1, b_1, c_1)$

$\vec{B} = (a_2, b_2, c_2)$

۶) ضرب خارجی $\vec{A}\times\vec{B} = ((b_1c_2 - c_1b_2), -(a_1c_2 - c_1a_2), (a_1b_2 - b_1a_2))$

بردار ضرب خارجی بر هر دو بردار عمود است جهت آن به وسیلهٔ قانون دست راست مشخص می شود



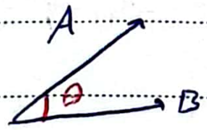
و اندازهٔ آن: $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\sin\theta$ که θ زاویهٔ بین A و B است

مثال) $\vec{A} = (3, 5, 4)$ و $\vec{B} = (2, 1, 0)$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 3\times2 + 5\times1 + 4\times0 = 11$

$\vec{A}\times\vec{B} = ((5\times0 - 4\times1), -(3\times0 - 4\times2), (3\times1 - 5\times2)) = (-4, 8, -7)$

زاویه بین دو بردار:



$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|A|.|B|}$$

زاویه بین دو بردار $\vec{A} = (2, 3, -1)$ و $B = (1, 0, 2)$ را بیابید

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 2\times1 + 3\times0 + (-1)\times2 = 0$

$|A| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

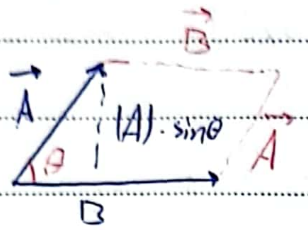
$|B| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = 0$

$\theta = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

$\vec A \perp \vec B \Leftrightarrow \vec A \cdot \vec B = 0$ tip

مساحت متوازی الاضلاع



مساحت متوازی الاضلاع $S = |\vec A \times \vec B| = |A| \times |B| \times \sin\theta$

$h = |A| \cdot \sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{h}{|A|}$

em) مساحت مثلثی که رئوس آن $A(1,0,2)$ و $B(3,1,1)$ و $C(-1,2,5)$ هست را بیابید

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{|AB \times AC|}{2}$$

$AC = (3-1, 1-0, 1-2)$

$AB = (-1-1, 2-0, 5-2)$

$AB = (2, 1, -1)$

$AC = (-2, 2, 3)$

$AB \times AC = (3+2, -(6-2), 4+2) = (5, -4, 6)$

$$|AB \times AC| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{77}$$

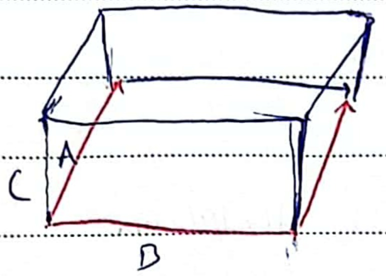
$$S = \frac{\sqrt{77}}{2}$$

$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cos\theta$

CV

$\vec A \times \vec B = -(\vec B \times \vec A)$

حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط ۳ بردار $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$



ضرب سه گانه حجم $V = |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$

$= |\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C})|$

$= |\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})|$

$$|A \cdot (\vec{B} \times \vec{C})| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ساروس

tip : اگر حاصلضرب سه گانه صفر بشود در یک صفحه هستند و برعکس.

بردار یکه : طولش یک است. یک $\vec{A} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ یکه است زیرا $|A| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = 1$

$\vec{i} = (1, 0, 0)$ $\quad \vec{j} = (0, 1, 0)$ $\quad K = (0, 0, 1)$

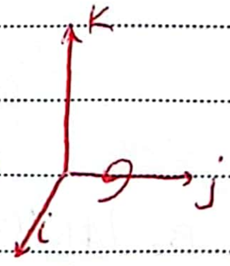
$\vec{A} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{K}$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ $\quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ $\quad \vec{K} \cdot \vec{K} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ $\quad \vec{K} \cdot \vec{j} = 0$ $\quad \vec{i} \cdot \vec{K} = 0$

$i \times i = 0$ $\quad j \times j = 0$ $\quad K \times K = 0$

(الف)



الف) $i \times j = K$ $\quad j \times K = i$ $\quad K \times i = j$ پادساعتگرد

$j \times i = -K$ $\quad i \times K = -j$ $\quad K \times j = -i$ ساعتگرد

SUBJECT: ۲K $-j$ DATE: / /

حل) $(2i-k)\times(j+k) = 2i\times j + 2i\times k - k\times j + -k\times k = 2k-2j+i$

$= (1,-2,2)$

روش بسط:

$$A\times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

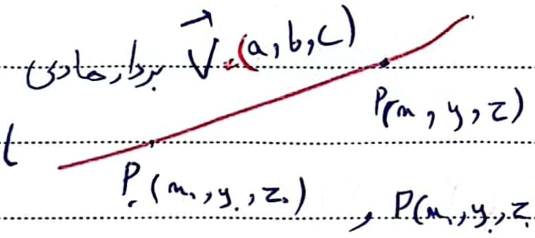
$$=(-1)^2(a_2b_3-a_3b_2)i+(-1)^{1+3}(a_1b_3-a_3b_1)j+(-1)^{1+3}(a_1b_2-a_2b_1)k$$

tip: بردار یکه متناظر با بردار A را با $\vec{U}_A$ و برابر است با $\vec{U}_A=\frac{\vec{A}}{|A|}$

حل) $A=(1,2,2)$ بردار یکه متناظر با بردار یک مسئله را به دست آورید $|A|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

$U_A=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

فصل دوم: خط و صفحه در فضای ۳ بعدی



هر خط در فضای ۳ بعدی توسط یک نقطه از آن مانند $P(x_0,y_0,z_0)$ و یک بردار موازی با آن مانند $V=(a,b,c)$ که بردار هادی نوشته می‌شود به صورت منحصر به فرد مشخص می‌شود

tip: $P_0P \parallel \vec{V}$ ⇐ $\vec{P_0P}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$

$\vec{V}=(a,b,c)$ $P_0P=tV$ t ضریب است $(t\in R)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-x_0=at \\ y-y_0=bt \\ z-z_0=ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

فرم پارامتری معادلهٔ خط است

$z = 4x - 5$

SUBJECT: DATE: / /

فرم کلاسیک معادله خط $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t$

اگر $b=0$ $\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c} , y=y_0$

اگر $c=0$ $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} , z=z_0$

ex) معادله خط راستی بنویسید که از نقطه P_0 بگذرد و موازی با بردار هادی V باشد

$P_0 = (1,2,3)$ $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5} = t$

$V = (3,4,5)$

پارامتری $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \\ z = 3+5t \end{cases}$ نقطه دیگر بخواهیم $t=1$ $P_1(4,6,8)$

$l_1 = \begin{cases} x = 3t-5 \\ y = 4 \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = (3,0,2)$

$P_0(-5,4,0)$

$l_2 = \{ z = 4x-5 , y=3 \Rightarrow \vec{V} = (1,0,4)$

$P_0(0,3,-5)$

$\frac{x-0}{1} = \frac{z+5}{4}$

FATER

$L_1: \begin{cases} P_1(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{V_1}(a_1, b_1, c_1) \end{cases}$ $L_2: \begin{cases} P_2(x_2, y_2, z_2) \\ V_2 = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$

الف) $L_1 \parallel L_2$ هرگاه اگر $\vec{V_1} \parallel V_2$ (موازی)

ب) متقاطع اند هرگاه $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{V_1} \times \vec{V_2}) = 0$ و V_1 هم موازی با V_2 نباشد

$\vec{V_1} \nparallel \vec{V_2}$

ج) متنافرند هرگاه $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{V_1} \times \vec{V_2}) \neq 0$

د) عمود هستند هرگاه متقاطع باشند و $\vec{V_1} \perp \vec{V_2}$

وضعیت نسبی دو خط زیر را مشخص کنید
در صورت متقاطع بودن نقطه تقاطع را بیابید

$L_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ $P_1(1, 2, 0)$ $V_1(2, 3, 1)$

$L_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+5}{3}$

$P_2 = (1, 1, -5)$ $V_2 = (1, 2, 3)$

V_1 و V_2 هم راستا نیستند پس موازی نیستند

$P_1P_2 = (1-1, 1-2, -5-0) = (0, -1, -5)$

$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = \big((3\times3 - 2), -(2\times3 - 1), (2\times2 - 3)\big)$
$\qquad\qquad 7 \qquad\qquad 5 \qquad\qquad 1$

$(7, -5, 1) \cdot (0, -1, -5)$ $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0 \times 7 + 5 - 5 = 0$

متقاطع

SUBJECT: DATE: / /

$$L_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = -5+3t \end{cases}$$

$$L_1: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+t_1 = 1+2t_2 \\ 3t_1+2 = 1+2t_2 \end{cases}$$

$$\times -2 \Rightarrow \begin{cases} -4t_1 + 2t_2 = 0 \\ 3t_1 - 2t_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow -t_1 = -1 \Rightarrow t_1 = 1$$

$$t_2 = 2$$

$$t_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2(1) = 3 \\ y = 2+3(1) = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

معادله صفحه

① نقطه از صفحه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad P(x, y, z)$

② بردار عمود بر صفحه (صفحه نرمال) $n(a, b, c)$

$$n \perp \vec{P_0P} \Rightarrow n \cdot \vec{P_0P}$$

$$\vec{P_0P}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$$(a, b, c) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

$$\Rightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

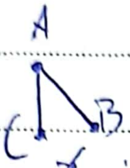
$$ax + by + cz - D = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = D$$

$$ax + by + cz - (\overbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}^{D}) = 0$$

SUBJECT: DATE: / /

$n = (-1, 3, 5)$ | $P(2, 1, 4)$

$$-1(x-2)+3(y-1)+5(z-4)=0$$



$B(-1,4,2)$ $\vec{AB}\times\vec{AC}$ معادله صفحه‌ای را بنویسید که هم راستا نیست

صفحه یکتا

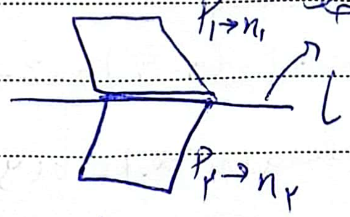
$= n(a, b, c)$

سوال مهم

دو صفحه متقاطع یک خط مشترک دارند برای دو نقطه معادله خطی نمی‌نویسیم بعد

$x - y + 2z = 4$

$3x - y + z = 10$



n_1, n_2 عمود بر L نقطه‌ای از خط در هر دو صفحه به دو چیز نیاز داریم هادی خط

و یک نقطه دلخواه از صفحه

$n_1 \times n_2$

معادله خط پارامتری باشد !

۲ پارامتری خط را در صفحه جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$$

$$x - 2y + 3z = 4$$

$$(3-t) - 2(2+3t) + 3(-4t) = 4$$

$$-19t = 5$$

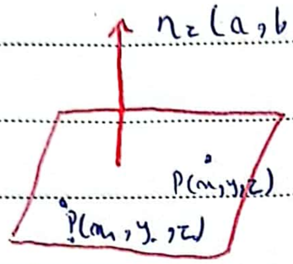
$$t = -\frac{5}{19}$$

$$\left(3+\frac{5}{19},\ 2-\frac{15}{19},\ \frac{20}{19}\right)$$

FATER

هر صفحه در فضای R^3 به وسیله‌ی یک نقطه درون آن مثل $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و یک بردار

عمود بر آن مثل $n=(a,b,c)$ به صورت یکتا مشخص می‌شود بردار n را بردار نرمال



صفحه‌ی نامیم یعنی بر تمام بردارهای درون صفحه عمود است

$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P}\cdot n=0$

$((x-x_0),(y-y_0),(z-z_0))\cdot(a_1,b_1,c_1)=0$

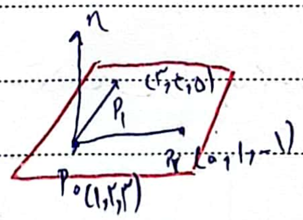
معادله‌ی صفحه $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

معادله‌ی صفحه‌ای بنویسید که از نقطه‌ی (۵ و ۰ و ۱) بگذرد و عمود بر بردار $n=(2,3,4)$ باشد

$$2(x-1)+4(z-5)+3y=0$$

$$2x+3y+4z=22$$

معادله‌ی صفحه‌ای بنویسید که از ۳ نقطه‌ی $P_0(1,2,3)$ ، $P_1(3,4,5)$ ، $P_2(0,1,-1)$ باشد



$n=\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}$

$\overrightarrow{P_0P_1}=(2,2,2)$

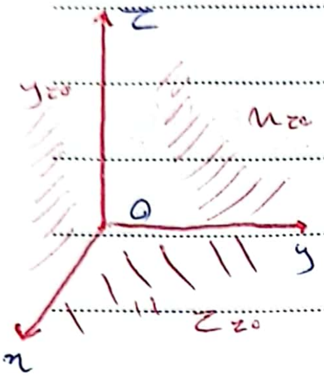
$\Rightarrow n=\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}=(-6),-(-6),(0)$

$\overrightarrow{P_0P_2}=(-1,-1,-4)$

$$(\underbrace{-6}_{a},\underbrace{6}_{b},\underbrace{0}_{c})$$

$-4(x-1)+4(y-2)=0 \Rightarrow -4x+4y=4$

$\div -4 \quad x-y+1=0$



صفحات مختصات:

منظور از صفحات مختصات x, y یعنی $z=0$
(xoy)

به طور مشابه منظور از صفحه xoz یعنی $y=0$ است

و منظور از صفحه y, z یا yoz یعنی $x=0$ است

وضعیت نسبی ۲ صفحه

دو صفحه

$P_1: \; P_1(x_1,y_1,z_1), \; n=(a_1,b_1,c_1) \Rightarrow a_1x+b_1y+c_1z=d_1$

$P_2: \; P_1(x_2,y_2,z_2), \; n=(a_2,b_2,c_2) \Rightarrow a_2x+b_2y+c_2z=d_2$

الف) ۲ صفحه موازی هم هستند $P_1 \parallel P_2$ اگر $n_1 \parallel n_2$ باشد

ب) متقاطع اگر $n_1 \nparallel n_2$ باشد

ج) اگر $n_1 \perp n_2$ دو صفحه نسبت به هم عمودند

مثال:

$P_1: x+y-z=4$

$P_2: 2x+2y-2z=5$

$n_1 \parallel n_2 \Rightarrow 2n_1 = n_2 \Rightarrow P_1 \parallel P_2$

SUBJECT: DATE: / /

وضعیت نسبی دو صفحه زیر را مشخص کنید در صورت متقاطع بودن فصل مشترک آن را بیابید

$P_1 : 2x + y - z = 1 \qquad n_1 = (2, 1, -1)$

$\rightarrow n_1 \nparallel n_2 \Rightarrow P_1 \nparallel P_2$

$P_2 : 3x - y + 2z = 0 \qquad n_2 = (3, -1, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} l \in P_1 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp l \Rightarrow V \perp n_1 \\ l \in P_2 \Rightarrow n_2 \perp l \Rightarrow V \perp n_2 \end{array}\right\} \vec{V} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

* یعنی بردار هادی فصل مشترک همیشه برابر است با حاصلضرب خارجی بردارهای نرمال ۲ صفحه

$V = (1, -7, -5)$

برای به دست آوردن نقطه P_0 دستگاه ۲ معادله ۳ مجهول زیر را حل می کنیم

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow[x=0]{\text{دلخواه}} \begin{cases} y - z = 1 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \qquad y = 2$$

$z = 1$

$P_0(0, 2, 1)$ (x_0, y_0, z_0)

$\vec{V} = (1, -7, -5)$

$$L : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 7t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

FATER

SUBJECT: DATE: / /

۲ـ فاصله‌ی نقطه از خط

$\vec{V}(a,b,c)$

$P_0(x_0,y_0,z_0)$

$P(x,y,z)$

فاصله‌ی d نقطه P از خط L $= \dfrac{|\vec{P_0P} \times \vec{V}|}{|\vec{V}|}$

فاصله‌ی نقطه از صفحه

$P_0(x_0,y_0,z_0)$

$P: ax+by+cz-d=0$

فاصله‌ی P_0 از صفحه‌ی P $= \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

۳ـ فاصله‌ی دو خط متنافر

$d = \dfrac{|\vec{P_1P_2} \cdot (\vec{V_1} \times \vec{V_2})|}{|\vec{V_1} \times \vec{V_2}|}$

تمرین: معادله صفحه‌ای بنویسید که از فصل مشترک ۲ صفحه بگذرد و عمود بر صفحه‌ی $x+y+z=0$ باشد.

$P_1: 2x-4y+3z=5$

$P_2: 3x+y+z=3$

FATER

توابع برداری: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

توابع حقیقی $\quad t \in \vec{R}$

مثال: $\vec{R}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $\quad (t \in R)$

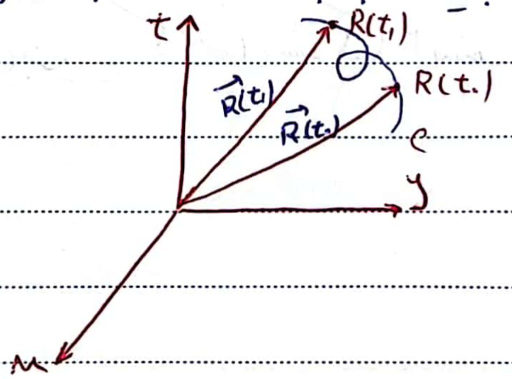
تعبیر هندسی توابع برداری: فرض کنید یک ذره (متحرک) در فضای ۳ بعدی روی مسیر C در حال حرکت است.

اگر متحرک در لحظه $t = t_0$ در نقطه $P_0 = \vec{R}(t_0)$ باشد چنانچه از مبدأ دستگاه به نقطه P_0 برداری را رسم کنیم این بردار

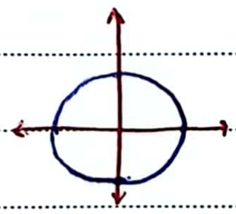
دارای ۳ مولفه مکانی (x, y, z) است که در لحظه t_0 با $\vec{R}(t_0)$ نمایش داده می‌شود بدیهی است با تغییر

متغیر t موقعیت بردار تغییر می‌کند. بنابراین هر تابع برداری در فضای ۳ بعدی مسیر حرکت یک ذره در فضای

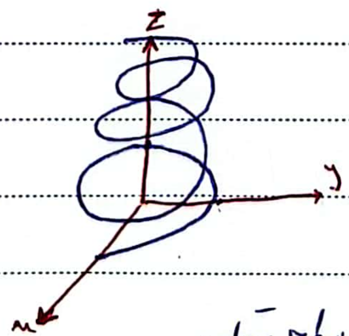
۳ بعدی را نمایش می‌دهد و بالعکس.



$\vec{R}(t) = (\cos t, \sin t)$



$\vec{R}(t) = (\cos t, \sin t, t)$



R، مارپیچی است که حول استوانه با سطح مقطع

به شعاع یک دوران می‌کند.

تمام مباحثی که برای توابع یک متغیر آموخته ایم برای توابع برداری نیز به کار برد.

$\vec{R}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

(۱) $\vec{R}$ دامنه: $D_{\vec{R}} = D_x \cap D_y \cap D_z$

(۲) $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{R}(t) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} x(t), \lim\limits_{t\to t_0} y(t), \lim\limits_{t\to t_0} z(t)\right)$

(۳) پیوستگی $\vec{R}(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{R}(t) \Rightarrow$ تابع $\vec{R}$ در $t=t_0$ پیوسته است

(۴) $\vec{R}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ پریم یعنی مشتق گرفتیم نسبت به t

(۵) $\int \vec{R}(t)\,dt = \left(\int x(t)\,dt, \int y(t)\,dt, \int z(t)\,dt\right)$

مثال

$R(t) = \left(\overbrace{\ln t}^{x(t)}, \underbrace{\frac{1}{t-1}}_{y(t)}, \underbrace{\sqrt{t+1}}_{z(t)}\right)$

$D_x = (0, +\infty) \qquad D_y = \mathbb{R} - \{1\} \qquad D_z = [-1, +\infty)$

$D_R = (0,1) \cup (1, +\infty) \qquad \lim\limits_{t\to 2} R(t) = \left(\lim\limits_{t\to 2} \ln t, \lim\limits_{t\to 2} \frac{1}{t-1}, \lim\limits_{t\to 2} \sqrt{t+1}\right)$

$= (\ln 2, 1, \sqrt{3}) \qquad R'(t) = \left((\ln t)', \left(\frac{1}{t-1}\right)', (\sqrt{t+1})'\right)$

$= \left(\frac{1}{t}, \frac{-1}{(t-1)^2}, \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right)$

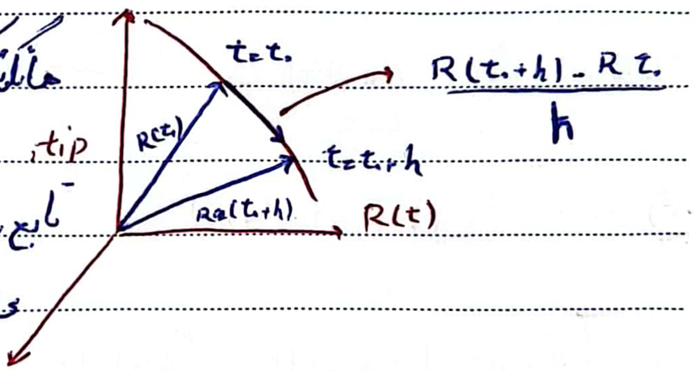
تابع $\vec{R}(t)$ در نقطه t_0 پیوسته نیست چون تابع R در t_0 حد ندارد (مربوط به مثال قبل)

$$\int R(t)\,dt = \left(\int \ln t\,dt,\ \int \frac{1}{t-1}\,dt,\ \int \sqrt{t+1}\,dt\right)$$

$$= \left(t\ln t - t,\ \ln|t-1|,\ \frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\right)$$

تعبیر هندسی مشتق تابع برداری:

$$R'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{R}(t_0+h) - \vec{R}(t_0)}{h}$$



همانگونه که مشاهده می‌شود چنانچه h میل کند به صفر بردار مشتق تابع برداری مماس بر مسیر حرکت منحنی در لحظه $t=t_0$ می‌شود همچنین می‌دانیم تعبیر فیزیکی مشتق نیز سرعت متحرک در لحظه $t=t_0$ است به همین دلیل از این به بعد گاهی بردار $R'(t)$ را با $V(t)$ نمایش می‌دهیم.

بردار شتاب $\vec{R}''(t) = \vec{a}(t)$

$$|V(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + z'(t)^2} = V(t)$$

تندی متحرک

قضیه:

اگر تابع برداری اندازه ثابت باشد آنگاه خودش بر مشتقش عمود است

$\vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $\quad |R(t)| = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)} = c$ مقدار ثابت (عدد)

$$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t) = c^2$$

$$2x(t).x'(t) + 2y(t).y'(t) + 2z(t).z'(t) = 0$$

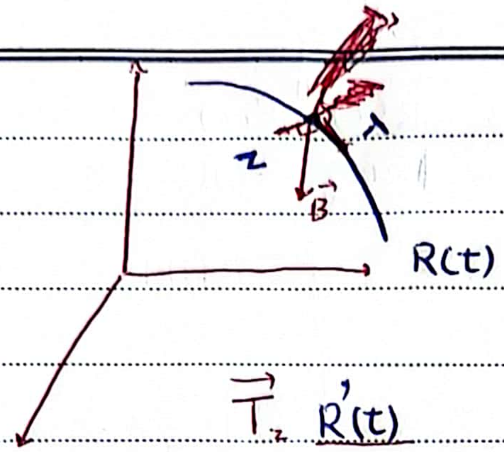
$\div 2$

$$x(t).x'(t) + y(t).y'(t) + z(t).z'(t) \qquad \vec{R}(t).\vec{R}'(t) = 0$$

$$(x(t), y(t), z(t)).(x'(t), y'(t), z'(t)) = 0 \Rightarrow R(t) \perp R'(t)$$

ضرب داخلی

SUBJECT: DATE: / /



! سه‌تایی فرنه : (T, N, B)

$\vec{T}$: بردار یکه مماس : $\vec{T} = \dfrac{R'(t)}{|R'(t)|}$

$\vec{N}$: بردار یکه قائم اول : $N = \dfrac{T'(t)}{T'(t)}$

$\vec{B}$: بردار یکه قائم دوم : (هم بر T عمود است هم بر N) وجهت آن توسط قانون دست راست تعیین می‌شود

$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ (ضرب خارجی) روابط دیگر: $\vec{N} \times \vec{B} = \vec{T}$ (1) $\vec{B} \times \vec{T} = \vec{N}$ (2)

(مثال $\vec{R}(t) = (t^2, t, \sin t)$

$R'(t) = (2t, 1, \cos t)$

$|R'(t)| = \sqrt{4t^2 + 1 + \cos^2 t}$

$\vec{T} = \left(\dfrac{2t}{\sqrt{4t^2+1+\cos^2 t}}, \dfrac{1}{\sqrt{4t^2+1+\cos^2 t}}, \dfrac{\cos t}{\sqrt{4t^2+1+\cos^2 t}} \right)$

محاسبه N و B با استفاده از این روش در بیشتر موارد سخت است بر همین خاطر سه‌تایی فرنه را

از روش (صفحه بعد) محاسبه می‌کنیم.

FATER

SUBJECT: ضرب خارجی DATE: / /

$$\vec{T} = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} \qquad B = \frac{R'(t) \times R''(t)}{|R'(t) \times R''(t)|}$$

ضرب خارجی

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

ضرب خارجی

مثال) سه تایی فرنه را برای تابع برداری زیر محاسبه کنید

$$\vec{R}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ \sqrt{3}\, t$$

$$R'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ \sqrt{3} \qquad R''(t) = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

$$R' \times R'' = (+\sqrt{3}\sin t,\ -\sqrt{3}\cos t,\ 1)$$

$$|R'(t) \times R''(t)| = \sqrt{3\sin^2 t + 3\cos^2 t + 1} = 2$$

$$|R'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 3} = 2$$

$$\vec{B} = \left(\frac{\sqrt{3}\sin t}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{T} = \left(\frac{-\sin t}{2},\ \frac{\cos t}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$N = \vec{B} \times \vec{T} = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

$2\cos^2 x$

$3\sin^2 x$

FATER

سه‌تایی فرنه برای تابع برداری را در نقطه $t=1$ بدست آورید! $R(t) = (t^3, t^2, t)$

$R'(t) = (3t^2, 2t, 1) \xrightarrow{t=1} R'(1) = (3, 2, 1)$

$R'(1) \times R''(1) = (-2, 6, -6)$

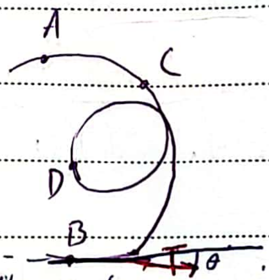
$R''(t) = (6t, 2, 0) \xrightarrow{t=1} R''(1) = (6, 2, 0)$

$|R'(1) \times R''(1)| = \sqrt{4+36+36} = \sqrt{76}$ $\qquad |R'| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{76}}(-2, 6, -6)$

$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{76} \cdot \sqrt{14}}\right)(18, -16, -22)$

$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1)$



انحنای منحنی: ~~[illegible]~~ (K) $\qquad K(D) > K(C) > K(A) > K(B)$

$K(t) = \frac{d\theta}{dt}$

تعریف: از نظر هندسی انحنای منحنی در نقطه $t = t_0$ برابر است با میزان تمایل منحنی به خروج از خط مماس
انحنای

از نظر ریاضی انحنای منحنی را می‌توان آهنگ تغییرات زاویه بین بردار مماس و خط افق تعریف می‌شود

روش محاسبه برای انحنای منحنی

$K(t) = \frac{|V \times a|}{|V|^3} = \frac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$

tip: انحنای خط راست برابر با صفر است. $\qquad$ خط راست: $y = ax + b \quad (a, b \in R)$

اثبات:

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at + b \\ z(t) = k \quad (k \in R) \end{cases}$ $\qquad R(t) = (t, at+b, k) \qquad R''(t) = (0, 0, 0)$

$R'(t) = (1, a, 0) \qquad R'(t) \times R''(t) = (0, 0, 0)$

$|R'(t) \times R''(t)| = 0$

$K = 0$

SUBJECT: DATE: / /

انحنای دایره به شعاع R: $R(t)=(\alpha+r\cos\theta,\ \beta+r\sin t,\ k)$:فرم پارامتری

(x,y) $\underset{(\alpha,\beta)}{r}$

$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r$

$R'(t)=(-r\sin t,\ r\cos t,\ 0)$

دایره‌ای به شعاع r و مرکز (α,β)

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\\ z=k\end{cases}$$

$R''(t)=(-r\cos t,\ -r\sin t,\ 0)$

$\div r^2$

$$\underbrace{\left(\frac{x-\alpha}{r}\right)^2}_{\cos t}+\underbrace{\left(\frac{y-\beta}{r}\right)^2}_{\sin t}=1$$

$$K(t)=\frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$$

$$\begin{cases}\frac{x-\alpha}{r}=\cos t\\ \frac{y-\beta}{r}=\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(t)=\alpha+r\cos t\\ y(t)=\beta+r\sin t\\ z(t)=k\end{cases}$$

$R'(t)\times R''(t)=(\ (\ \ ),-(0),(\underbrace{r\sin^2 t+r\cos^2 t}_{r^2})\ )$

$=(0,0,r^2)\longrightarrow |R'(t)\times R''(t)|=\sqrt{0^2+0^2+(r^2)^2}=r^2$

$|R'(t)|=\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}=\sqrt{r^2}=r$

$$K(t)=\frac{|R'\times R''|}{|R'(t)|^3}=\frac{r^2}{r^3}=\frac{1}{r}$$

:tip
انحنا با شعاع دایره رابطه عکس دارد.

$\vec{R}(t)=(t,t^2,t^3)$ فرض کنید:

$t=1$ $K(1)=?$ مطلوب است محاسبه:

$R'(t)=(1,2t,3t^2)$ $R'(t)=(1,2,3)$

$R''(t)(0,2,6t)$ $|R'(t)|=\sqrt{14}$

$\Downarrow$

$R''(t)=(0,2,6)$ $R'(1)\times R''(1)=(6,-6,2)$ $|R'\times R''|=\sqrt{76}$

$$K(1)=\frac{\sqrt{76}}{(\sqrt{14})^3}$$

FATER

FATER

SUBJECT: DATE: / /

حالت خاص: انحنای منحنی در دو بعد

$R(t) = (x(t), y(t), 0)$

$R'(t) = (x', y', 0)$

$R''(t) = (x'', y'', 0)$

$\Rightarrow R' \times R'' = (0, 0, x'y'' - x''y')$

$R' = \sqrt{x'^2 + y'^2} \qquad |R' \times R''| = |x'y'' - x''y'|$

$$K(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

حالت خاص ۲: انحنای منحنی $y = f(x)$ (دو بعد)

$R(t) = (\underset{x(t)}{t}, \underset{y(t)}{f(t)}, 0)$

$x'(t) = 1, \quad x''(t) = 0$

$$K = \frac{|1 \times y''(t) - 0|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|y''(t)|}{(\sqrt{1 + y'^2})^3}$$

مثال: انحنای منحنی $y = e^x$

$y' = e^x, \quad y'' = e^x$

$$K = \frac{|e^x|}{(\sqrt{1 + (e^x)^2})^3} = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$$

یادتمرین:

سوال امتحانی تمرین: منحنی $y = e^x$ در کدام نقطه دارای بیشترین انحناست (پیدا کردن max) مشتق می‌گیریم $= 0$

$\max K(x)$

$$K(x) = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$$

$$K'(x) = \frac{e^x (1 + e^{2x})^{3/2} - \left(\frac{3}{2}(1 + e^{2x})^{1/2} \cdot 2e^{2x}\right) e^x}{(1 + e^{2x})^3} = 0$$

درنتیجه چون مخرج بزرگتر از صفر است صورت را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$e^x (1 + e^{2x})^{3/2} - \left(\frac{3}{2}(1 + e^{2x})^{1/2} \cdot 2e^{2x}\right) e^x = 0$

$\underbrace{e^x (1 + e^{2x})^{1/2}}_{\neq 0} \left((1 + e^{2x}) - 3e^{2x} \right) = 0 \Rightarrow (1 + e^{2x} - 3e^{2x}) = 0 \Rightarrow (1 - 2e^{2x}) = 0$

$\Rightarrow 2e^{2x} = 1 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \ln \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$

SUBJECT: DATE: / /

تاب منحنی: تاب منحنی از نظر هندسی برابر است با تمایل منحنی به خروج از سطح صاف. (τ)

~~$\tau(t) = R' \cdot (R'' \times R''')$~~ $\tau(t) = \dfrac{(R' \times R'') \cdot R'''}{|R' \times R''|^2}$

مماسی — قائم

$R''(t) = \vec{a}(t) = \dfrac{dv}{dt}\vec{T} + Kv^2 \vec{N}$ مولفه‌های مماسی و قائم بردار شتاب

a_T مولفه مماسی بردار شتاب — a_N مولفه قائم بردار شتاب

$v \longleftrightarrow$ (اندازه سرعت)

منحنی زیر، انحنا، تاب و مولفه‌های مماسی و قائم بردار شتاب را به دست آورید.

$R(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}t), \quad t=0$ $K = \dfrac{|R' \times R''|}{|R'|^3}$ $T = \dfrac{R'}{|R'| \to v}$

$R' = (-\sin t, \cos t, \sqrt{3}) \xrightarrow{t=0} |R'| = 2, \quad R' = (0, 1, \sqrt{3})$ $\tau = \dfrac{R''' \cdot (R' \times R'')}{|R' \times R''|^2}$ $B = \dfrac{R' \times R''}{|R' \times R''|}$

$|R'(t)| = v(t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 3} = 2$ $a_T = \dfrac{dv}{dt}$ $N = \vec{B} \times \vec{T}$

$a_N = Kv^2$

$R'' = (-\cos t, -\sin t, 0) \xrightarrow{t=0} R'' = (-1, 0, 0) \to R' \times R'' = (0, -\sqrt{3}, 1) \Rightarrow |R' \times R''| = 2$

$R'''(t) = (\sin t, -\cos t, 0) \xrightarrow{t=0} R''' = (0, -1, 0)$ $R''' \cdot (R' \times R'') = 0 \times 0 + \sqrt{3} + 0 = \sqrt{3}$

$T = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ $K = \dfrac{2}{2^3} = \dfrac{2}{8}$

$B = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ $N = (-1, 0, 0)$

عدد ثابت شد پس صفر است

$\tau = \dfrac{\sqrt{3}}{2^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $a_T = \dfrac{d2}{dt} = 0$ $a_N = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$

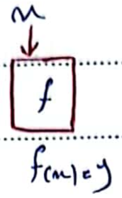
$R''(0) = (-1, 0, 0) = \vec{N}$ پس a_N

شتاب در جهت قائم است

FATER

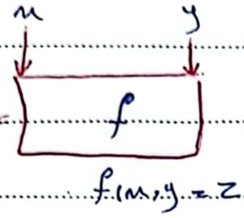
توابع چند متغیره

$f: R^n \to R$ تابع یک متغیره $n=1$ به عبارت دیگر یک ورودی و یک خروجی



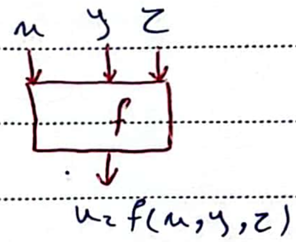
$f(x)=x^2+1$

$n=2$



$f(x,y)=x^2y-y^3+5$ $f(1,2)=1^2\times 2-2^3+5=-1$

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ $f(1,2,3)=1^2+2^2+3^2=14$



واضح است که همهٔ مفاهیمی که برای توابع یک متغیره در فصل های پیش آموخته ایم را می توان برای توابع چند متغیره نیز تعمیم داد

در اینجا ما تنها به معرفی حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال می پردازیم

حد توابع چند متغیره: گام اول: جایگذاری

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+x^3y-1}{1+x^2y}=\frac{1+1\times 2-1}{1+1^2\times 2}=\frac{2}{3}$$

گاهی اوقات به هنگام جایگذاری با عبارت $\frac{0}{0}$ روبه رو می شویم، در اینصورت یا باید اثبات کنیم که حد وجود دارد که بررسی آن در این درس از شما خواسته نمی شود اما مسئله مهم عدم وجود حد هست. چند متغیره بی نهایت حد دارد

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}$$

مسیر ۱ $y=0$ $\lim \frac{2(x)(0)}{x^2+0}=\frac{0 \text{ مطلق}}{\text{حدی}}=0$

مسیر ۲ $x=0$ $\frac{2(0)y}{0+y}=\frac{0 \text{ مطلق}}{\text{حدی}}=0$

مسیر ۳ $x=y$ $\lim_{x\to 0} \frac{2xx}{x^2+x^2}=\frac{2x^2}{2x^2}=1$

پس حد وجود ندارد

SUBJECT: DATE: / /

برای نشان دادن عدم وجود حد کافیست یک مسیر پیدا کنیم که تابع در آن مسیر حد نداشته باشد

یا دو مسیر متمایز پیدا کنیم که حد تابع در آن دو مسیر یکسان نباشد.

توضیح نمودار صفحه قبل: همانگونه که مشاهده می‌شود مقدار حد در دو مسیر متفاوت یکسان نیست پس حد

وجود ندارد.

tip: یک راه ساده‌تر برای اثبات عدم وجود حد استفاده از مسیر های کلی زیر است.

$y = mx \qquad x = my$

$y = mx^2 \qquad x = my^2$

$y = mx^3 \qquad x = my^3$

چنانچه حاصل حد در یکی از این مسیرها وابسته به m شد نتیجه می‌گیریم که حد موجود نیست.

مسیر $y = mx$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2} \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cancel{x^2}m}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{2m}{1+m^2}$

حاصل حد وابسته به m شد این یعنی با تغییر m مقدار حد تغییر می‌کند. (حد موجود نیست)

نشان دهید حد موجود نیست؟ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+2y^2}$

$y = mx$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2(mx)}{x^4+2m^2x^2} \to \lim \frac{3x^3m}{x^4+2m^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3mx^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(x^2+2m^2)}$

$= \frac{0}{2m^2} = 0$ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت

$y = mx^2 \quad \lim \frac{3x^2(mx^2)}{x^4+2m^2x^4} = \frac{3\cancel{x^4}m}{\cancel{x^4}(1+2m^2)} = \frac{3m}{1+2m^2}$ عدم وجود حد

در این روش باید کاری کنیم توان صورت و مخرج را برابر کنیم

FATER

SUBJECT: DATE: / /

سوال امتحان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^8}{y^{16}+3x^4} \qquad x=my^4 \qquad \lim \frac{3m^2y^8y^8}{y^{16}+3m^4y^{16}}$$

$$= \lim \frac{3m^2\cancel{y^{16}}}{\cancel{y^{16}}(1+3m^4)} = \frac{3m^2}{1+3m^4}$$ حد موجود نیست

مشتق: تحلیل حساسیت ~~...~~ داده‌های ورودی نسبت به خروجی — مشتق جزئی

$$f'(x) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (3,4)\ \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(3,4) = 24$$

$\boxed{f(x,y) = x^2y}$ (x: ۳٫۰۱، y: ۴ ثابت می‌ماند) ⇐ ۳۶٫۲۴

مشتق f نسبت به x

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(3,4) = 9$$

$\boxed{f(x,y) = x^2y}$ (x: ۳، y: ۴٫۰۱) ⇐ ۳۶٫۰۹

مشتق نسبت به y: $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

~~مثال~~

همانگونه که از تعریف مشتق‌های جزئی پیداست مشتق‌های جزئی بسیار شبیه به مشتق معمولی هستند تنها

تفاوت در این است که وقتی مشتق نسبت به x می‌گیریم فرض می‌کنیم y ثابت است و وقتی مشتق نسبت

به y می‌گیریم فرض می‌کنیم x ثابت است. $f(x,y) = x^2y$

$$f_x = 2xy \rightarrow f_x(3,4) = 2\times3\times4 = 24 \qquad f_y(3,4) = x^2(1) = 9$$

(۲) $f(x,y) = 4x^3y^2 - 5xe^{y^2} + y^3 - 4y + 5x - 16$

$$f_x = 4y^2(3x^2) - 5e^{y^2}(1) + 0 + 0 + 5 \qquad f_y = 4x^3(2y) - 5x(2ye^{y^2}) + 3y^2 - 4 + 0$$

FATER

SUBJECT: DATE: / /

$y^4 \cos$

$$f(x,y) = \frac{(x^3 e^{xy^2})}{y^4 \sin y x^3}$$

$$\cancel{f_x = 3x^2 e^{y^2}(y^4 \sin y x^3) - (y^4 \sin y x^2)(x e^{3xy^2}) \over (y^4 \sin y x^3)^2}$$

$f(x,y)_x =$

$$f_x = \frac{(x^3 e^{xy^2})_x\, y^4 \sin(x^3 y) - (y^4 \sin(x^3 y))_x\, x^3 e^{xy^2}}{(y^4 \sin y x^3)^2}$$

① $(x^3 e^{xy^2})_x = 3x^2 . e^{xy^2} + (y^2 e^{xy^2})\, x^3$

② $(y^4 \sin(\underbrace{x^3 y}_{u}))_x = y^4 (y(3x^2) \cos(y x^3))$

$u' . \cos u$ $\quad (e^u)' = u' . e^u$

$$f_y = \frac{(x^3 e^{xy^2})_y (y^4 \sin(y x^3)) - (y^4 \sin(x^3 y))_y\, x^3 e^{xy^2}}{(y^4 \sin y x^3)^2}$$

$f_y = (x^3 e^{xy^2}) = x^3 (2xy . e^{xy^2})$

$f_y = (y^4 \sin(x^3 y)) = 4y^3 \sin(y x^3) + y^4 (x^3 \cos(x^3 y))$

$f(x,y) = x^y \quad f_x = y\, x^{y-1} \quad f_y = x^y \ln x$

$(a^y)' = a^y \ln a \qquad x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

$(\ln x)' = \frac{x'}{x}$

$f(x,y,z) = (x^2 + y^3 + z^4)^{(x^3+z^4)}$ $\quad f_y$

$f_y = (x^3+z^4)(x^2+y^3+z^4)^{(x^3+z^4-1)}\,(0 + 3y^2 + 0)$

$$f_x = \left((3x^2) \ln(x^2+y^3+z^4) + (x^3+z^4) \frac{2x}{x^2+y^3+z^4}\right)(x^2+y^3+z^4)^{x^3+z^4}$$

$$(f^g)' = (e^{\ln f^g})' = (e^{g \ln f})' = (g' . \ln f + g \frac{f'}{f})\, e^{g \ln f}$$

$e^{g\ln f} = f^g$

FATER

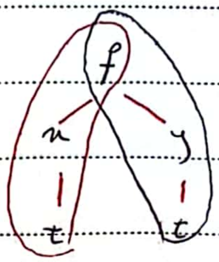
SUBJECT: (قاعده زنجیره‌ای)   DATE: / /

یادآوری: u برحسب x ، f تابعی برحسب u

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

f برحسب x و y ، x و y برحسب t

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

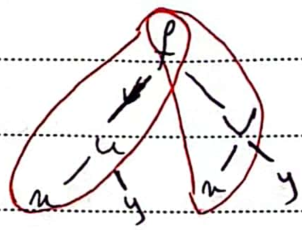


$f(x,y)=x^2+y^2 \qquad x=t^2 \;,\; y=t^3$

$$\frac{df}{dt}=(2\underset{t^2}{x})(2t)+(3\underset{t^3}{y}^2)(3t^2)\overset{\text{جایگذاری}}{=}4t^3+9t^8$$

$$f(x,y)=x^2+y^3=(t^2)^2+(t^3)^3=t^4+t^9\overset{\frac{d}{dt}}{=}4t^3+9t^8$$

f برحسب u و v ، u و v برحسب x و y

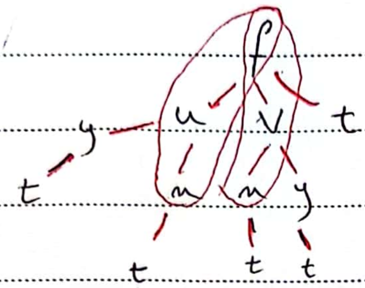


$$f_x=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x$$

$$f_y=f_u\cdot u_y+f_v\cdot v_y$$

فرض کنید
$$\begin{cases} f(u,v,t) = u^2 + v^3 + t^4 \\ u(x,y) = x^2 y \quad , \quad v(x,y) = x y^2 \\ x = t^2 \quad , \quad y = t^3 \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه $\dfrac{df}{dt}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial x}$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = 2u \cdot (2xy) + (3v^2)(y^2)$$

$(t^4)' = 4t^3$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial t}$

$$\frac{df}{dt} = f_u \cdot u_x \cdot x' + f_u \cdot u_y \cdot y' + f_v \cdot v_x \cdot x' + f_v \cdot v_y \cdot y' + f_t$$

$$= (2u)(2xy)(2t) + (2u)(x^2)(3t^2) + (3v^2)(y^2)(2t) + (3v^2)(2xy)(3t^2) + 4t^3$$

مشتق ضمنی :

فرض کنید y تابعی برحسب x و $f(x,y)=0$

در این صورت $y' = ?$

فرض کنید y تابعی برحسب x و $x^2 y + y^3 = 5$ $\quad y' = ?$ مشتق نسبت x

$$2x \cdot y + y' \cdot x^2 + 3y^2 \cdot y' = 0$$

$$y'(x^2 + 3y^2) = -2xy$$

$$y' = \frac{-2xy}{x^2 + 3y^2}$$

$$f_x + f_y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y}$$

ج)

$x = x_0 + V_x t \quad (V_0 \cos 40)$ $\qquad x_0 = 0$

$y = y_0 + V_y t - \frac{1}{2} g t^2$ $\qquad y_0 = 2m$

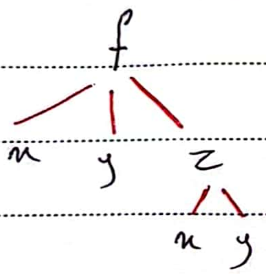
$V_x = V_0 \cos 40$

$= 2 + V_0 \sin 40\, t - \frac{1}{2}\, 9.81\, t^2$ $\qquad V_y = V_0 \sin 40$

$g = 9.81$

فرض کنید z تابعی برحسب x و y باشد و داشته باشیم $f(x,y,z)=0$ در اینصورت برای

به دست آوردن $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ می‌توان از مشتق گیری ضمنی استفاده کرد



چون $f(x,y,z)=0$ پس مشتقاتش صفره

$f_x = 0$

$f_y = 0$

$f_x + f_z \cdot z_x = 0$

$f_z \cdot z_x = -f_x \Rightarrow z_x = -\frac{f_x}{f_z}$ $\qquad z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = -\frac{f_y}{f_z}$

فرض کنید داشته باشیم $xz^3 - yz + x^3 - 4xyz^2 - 5x + 6 = 0$ اگر بدانیم z تابعی برحسب x و y است در اینصورت

$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید

$xz^3 - yz + x^3 - 4xyz^2 - 5x + 6 = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-f_x}{f_z} = -\frac{(z^3 - (0) + 3x^2 - 4yz^2 - 5)}{x(3z^2) - y + (0) - 8xyz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(-z + 0 - 4xz^2)}{3xz^2 - y - 8xyz}$$

در مثال قبل اگر فرض‌مان این بود که y تابعی برحسب x و z باشد در اینصورت

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y} \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_y}$$

به طور مشابه اگر x تابعی برحسب y و z باشد در اینصورت

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_x} \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_x}$$

برای تمرین میتونی از ex قبل استفاده کنیم

بهینه‌سازی توابع چند متغیره، نقطه بحرانی: تعریف: (x_0, y_0) را نقطه بحرانی تابع f می‌نامیم هرگاه

مشتق نسبت به x

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

مشتق نسبت به y

بدیهی است برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع f دستگاه دو معادله، دو مجهول $f_x = 0$ و $f_y = 0$ را حل کنیم.

ex) به عنوان (ex) نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید

① $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 8y - 17$

$$\begin{cases} f_x = 8x - 2y - 6 = 0 \\ f_y = -2x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

$6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$-2(-\frac{1}{3}) + 2y + 8 = 0$

$2y = -\frac{26}{3}$

$y = -\frac{13}{3}$

نقطه بحرانی $(-\frac{1}{3}, -\frac{13}{3})$

SUBJECT: DATE: / /

۲) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3y^2 - 24x + 15$

$$\begin{cases} f_x = 0 \quad 3x^2 + 3y^2 - 24 = 0 \quad (1) \\ f_y = 0 \quad 6xy - 6y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow 6y(x-1) = 0$ → $6y = 0 \Rightarrow y = 0$; → $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$(+\sqrt{8}, 0)$ $(-\sqrt{8}, 0)$

$(?, 0) \xrightarrow{y=0} 3x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

$(1, ?) \xrightarrow{x=1} 3 + 3y^2 - 24 = 0 \Rightarrow 3y^2 = 21 \Rightarrow y = \pm\sqrt{7}$

$(1, \sqrt{7})$, $(1, -\sqrt{7})$

آزمون مشتق دوم برای تعیین ماهیت نقاط بحرانی:

فرض کنید (x_0, y_0) نقطهٔ بحرانی تابع f باشد در اینصورت قرار می‌دهیم $\Delta(x,y) =$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$f_{xy} = f_{yx}$ ترتیب فرقی ندارد

در اینصورت

الف) اگر $\Delta(x_0, y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ آنگاه نقطهٔ (x_0, y_0) min نسبی تابع f است

اگر $\Delta(x_0, y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ آنگاه نقطهٔ (x_0, y_0) max تابع f است

اگر $\Delta(x_0, y_0) < 0$ آنگاه (x_0, y_0) نه max نه min

اگر $\Delta(x_0, y_0) = 0$ آنگاه آزمون مشتق دوم هیچ نتیجه‌ای نمی‌دهد

SUBJECT: DATE: / /

ماهیت نقاط بحرانی سوال های قبل را بیابید.

$f_{xx} = 6x \qquad f_{xy} = 6y$

$f_{yx} = 6y \qquad f_{yy} = 6x - 6 \qquad \Delta(x,y) = (6x)(6x-6) - (6y)^2$

$\Delta(\sqrt{8}, 0) = (6\sqrt{8})(6\sqrt{8} - 6) - (6(0))^2 > 0$

$f_{xx} = 6x \Big|_{(\sqrt{8}, 0)} = 6\sqrt{8} > 0$

} min نسبی

$\Delta(-\sqrt{8}, 0) = \underbrace{(-6\sqrt{8})(-6\sqrt{8} - 6)}_{+} - (6(0))^2 > 0$

$f_{xx} = 6x \Big|_{(-\sqrt{8}, 0)} = -6\sqrt{8} < 0$

} max نسبی

$\Delta(1, \sqrt{7}) = 6(1)(6-6) - (6\sqrt{7})^2 < 0$ min نه max نه

$\Delta(1, -\sqrt{7}) = 6(6-6) - (6(-\sqrt{7}))^2 < 0$ min نه max نه

FATER

SUBJECT: DATE: / /

FATER

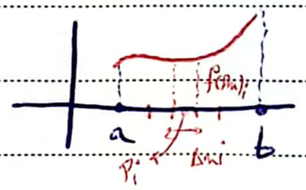
انتگرال دوگانه: محاسبه انتگرال دوگانه وقتی حدود آن مشخص باشد

$$\int_0^1 \left[\int_0^2 (x^3y^2 - 4x)\,dx\right] dy = \int_0^1 \left[y^2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 dy$$

$$\int_0^1 \left[\left(y^2\left(\frac{2^4}{4}\right) - 2(2)^2 - (0)\right]dy = \int_0^1 (4y^2 - 8)\,dy = \frac{4y^3}{3} - 8y\Big|_0^1$$

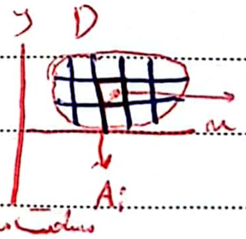
$$\frac{4}{3}(1)^3 - 8 - 0 = -\frac{20}{3}$$

مفهوم:



$D = [a, b]$

مساحت زیر نمودار $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$



دوگانه

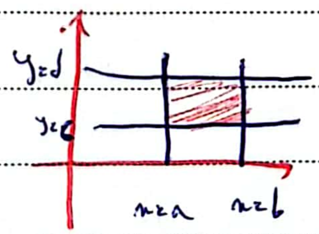
نقطه دلخواه (p_i, q_i)

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i)\cdot \Delta A_i$$

حجم بین نمودار و صفحه xoy

نکته: اگر $f(x,y)=1$ باشد $f(x,y)=1 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA = D$ مساحت ناحیه

تعیین حدود انتگرال دوگانه:



الف) ناحیه D مستطیلی باشد

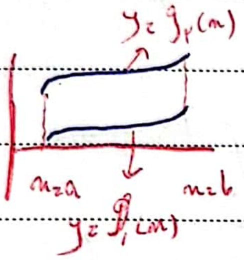
$$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{matrix}\right\}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال) فرض کنید $f(x,y)=x^3y^2-4x$ ، $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 1\end{matrix}\right\}$ مطلوبست محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dA$

$$\iint_D (x^3y^2-4x)\,dA = \int_0^1\int_0^2 (x^3y^2-4x)\,dx\,dy \underset{\text{مثال قبل}}{=} -\frac{20}{3}$$

ب) ناحیه D نوع اول باشد (y ساده)

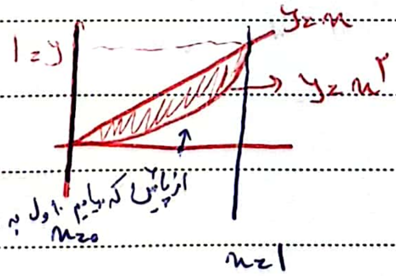


$$D=\begin{cases} a\le x\le b\\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

مثال: $f(x,y)=x^2y^3$ و D ناحیه بین نمودارهای ($y=x$ ، $y=x^2$ ، $x=0$ ، $x=1$)

مطلوبست محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dA$



$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le x\end{matrix}\right\}$$

$$\iint_D x^2y^3\,dA = \int_0^1\int_{x^2}^{x} x^2y^3\,dy\,dx = \int_0^1 x^2\frac{y^4}{4}\Big|_{x^2}^{x}\,dx$$

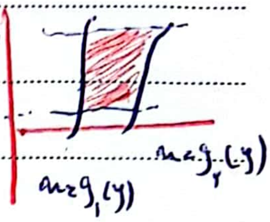
$$=\int_0^1 \frac{x^2}{4}(x^4-x^8)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (x^6-x^{10}) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^7}{7}-\frac{x^{11}}{11}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=\frac{1}{77}$$

ج)

ناحیه نوع دوم (x به سادگی)

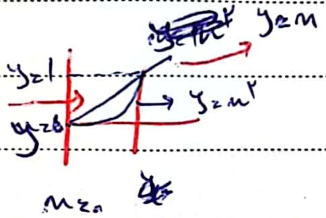
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy \quad D\left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{array}{l} a \le y \le b \\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \end{array}\right\}$$



فرض کنید $f(x,y)=x^2y^3$ ناحیه ای بین منحنی های $y=x$ و $y=x^2$ ($x=1$، $x=0$) و مطلوب است

محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dA$

از پهلو نگاه می کنیم و اول $y=x$ را می بینیم



نوع دوم $D \left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le \sqrt{y} \end{array}\right\}$

$$\iint_D x^2y^3\,dA = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} x^2y^3\,dx\,dy$$

$y=x \Rightarrow x=y$

$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}$

$$= \int_0^1 \left[y^3 \frac{x^3}{3}\right]_y^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(y^{\frac{9}{2}} - y^6\right) dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{11}y^{\frac{11}{2}} - \frac{y^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{11} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{77}$$

حاصل انتگرال زیر را بیابید

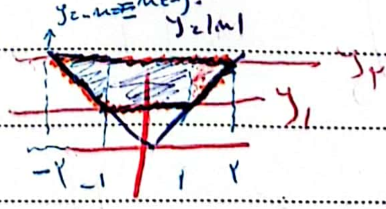
$$\iint_D x^3y^2\,dA$$

که در آن D ناحیه بین منحنی های $y=|x|$ و $y=1$ و $y=2$ است

متفاوت است

اگر بخواهیم به عنوان ناحیه اول در نظر بگیریم چون ۳ ضابطه ای است و باید تفکیک ناحیه کنیم

و باید ۳ تا انتگرال بگیریم



نوع دوم $D: \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ -y \le x \le y \end{cases}$

$$\iint_D x^2y^2\,dA = \int_1^2\int_{-y}^{y} x^2y^2\,dx\,dy = \int_1^2 y^2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-y}^{y} dy$$

$$= \int_1^2 \frac{y^5}{3} - \left(-\frac{y^5}{3}\right) dy = \int_1^2 \frac{2y^5}{3}\,dy = \frac{2}{3}\int_1^2 y^5\,dy$$

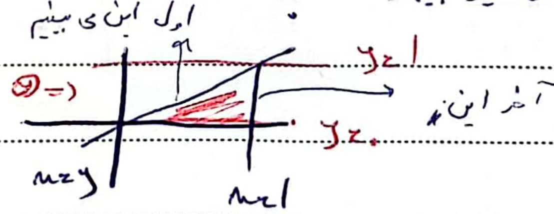
$$= \frac{2}{3}\left[\frac{y^6}{6}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left[\frac{2^6}{6} - \frac{1^6}{6}\right] = \frac{2}{3}\left(\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{63}{9} = 7$$

تغییر حدود انتگرال

گاهی اوقات انتگرال دوگانه با ترتیب حدود داده شده غیرقابل حل است یعنی تابع اولیه (پادمشتق) برای تابع داده شده وجود ندارد. مثل e^{x^2} در اینصورت می بایست ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم کرد سپس ناحیه را تغییر داد و انتگرال جدید را با ترتیب تغییر یافته حل کرد.

حاصل انتگرال زیر را بیابید

$$\int_0^1\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$$



$y=0 \quad y=1$

D نوع دوم: $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$

$x=y \quad x=1$

D نوع اول $= \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

$$I = \int_0^1\left[\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy\right]dx$$

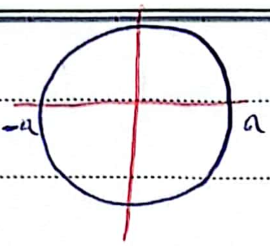
$$= \int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x}\right) y\Big|_0^x\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin x}{\cancel{x}}\,\cancel{x}\,dx = \int_0^1 \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^1$$

$$= \cos 0 - \cos 1 = 1 - \cos 1$$

۴) ناحیه دایره‌ای (تغییر متغیر قطبی)

$x^2+y^2=a^2$



$$x^2+y^2=a^2 \begin{cases} y=\mp\sqrt{a^2-x^2} \\ x=\pm\sqrt{a^2-y^2} \end{cases}$$

نوع اول $D =$
$$\begin{cases} -a\le x\le a \\ -\sqrt{a^2-x^2}\le y\le \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$$

اگر ناحیه دایره‌ای شکل باشد چه ناحیه را به صورت نوع اول یا دوم در نظر بگیریم حدود انتگرال شامل عبارت های رادیکالی می شود و محاسبه آن پیچیده به همین دلیل از تغییر مختصات قطبی استفاده می کنیم

نوع دوم $D =$
$$\begin{cases} -a\le y\le a \\ -\sqrt{a^2-y^2}\le x\le \sqrt{a^2-y^2} \end{cases}$$

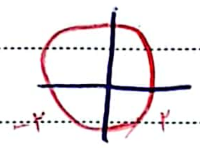
$$\begin{cases} dA = dx\,dy = dy\,dx \\ x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \xRightarrow{\text{تغییر متغیر قطبی}} \begin{cases} dA = r\,dr\,d\theta \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \sqrt{x^2+y^2}=r \end{cases}$$

دایره کامل به شعاع r: $D =$
$$\begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le \theta\le 2\pi \end{cases}$$
دایره کامل

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^a\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

SUBJECT: DATE: / /

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA$$ حاصل انتگرال

$r=\sqrt{x^2+y^2}$  که در آن شعاع دایره ۲ و مرکز (۰و۰)

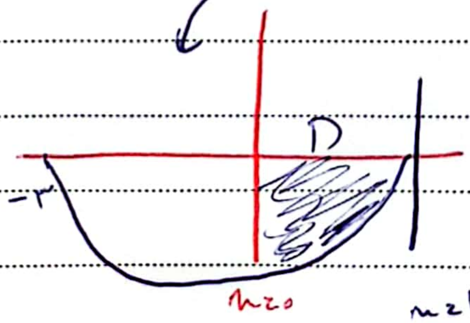
$$D=\begin{cases} 0\le r\le 2 \\ 0\le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r \quad r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3}\, d\theta \Rightarrow \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} 1\,\theta = \frac{8}{3}\,\theta\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow \frac{16\pi}{3}$$

$$\int_0^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx \quad =$$ حاصل انتگرال زیر را بیابید

همیشه باید رسم کرد



$$D=\begin{cases} 0\le x\le 3 \\ -\sqrt{9-x^2}\le y\le 0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

$y=-\sqrt{9-x^2}$

$$\text{قطبی } D=\begin{cases} 0\le r\le 3 \\ -\frac{\pi}{2}\le \theta\le 0 \end{cases} \qquad \int_0^{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{r\cos\theta}{r}\,\cancel{r}\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r\cos\theta\, d\theta\, dr$$

$$\int_0^{3} \Big[r\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} dr$$

$$= \int_0^{3} \big[r(0) - r(-1)\big]\,dr = \int_0^{-3} r\,dr = \frac{r^2}{4} = \frac{9}{4}$$

FATER