# در این فصل خواهیم آموخت:

- اثبات چیست؟
- حساب گزاره ها
- حروف پیوندی پایه
- جدول درستی گزاره های هم ارز
- گزاره های شرطی
- حساب گزاره نماها
- اثبات راستی گزاره های سوردار
- استقرای ریاضی

# اثبات(Proof)

- اثبات چیست؟ بررسی راست بودن یک جمله یا قضیه می باشد.
- در ریاضیات، علوم کامپیوتر و سایر علوم دیگر اغلب با این سوال روبرو هستیم که آیا «جمله» ای راست است یا نه
- برای جملاتی که آشکارا راست و یا دروغ است، معمولاً مشکل زیادی در اثبات و یا ابطال آن نداریم.
- اما برای جملاتی که درستی آنها ناشناخته است، بهتر است شرایط را با دقت بیشتری بررسی نمود.

# استدلال(Argument)

- هر یک از عبارات استفاده شده برای رسیدن به نتیجه را <u>فرض</u> یا <u>مقدم</u> و عبارت آخر را <u>نتیجه</u> یا <u>تالی</u> می نامیم.
- یک استدلال زمانی معتبر است که: «اگر فرض های آن درست باشند، نتیجه نیز درست باشد»
- مثال:
  – اگر کامپیوترها راه خود را به خانه های اقشار متوسط بازکنند، قیمت بعضی از سیستمهای کامپیوتری زیر ۱۰۰۰ دلار خواهد شد. شرکتهای محلی، سیستمهای کامپیوتری زیر ۱۰۰۰ دلار دارند، بنابراین کامپیوترها، راه خود را به خانه های اقشار متوسط باز کرده اند.

# گزاره(Propositions) و قضیه(Theorem)

- گزاره یک جمله خبری است که درست یا نادرست باشد ولی نه هر دو.
(به طور قطعی میتوان در مورد درستی و نادرستی آن تصمیم گرفت)

- یخ روی آب شناور است.
- به هر عدد صحیح n>2، $x^n + y^n = z^n$ به ازای $x$ و $y$ و $z$ های صحیح، هیچ جوابی وجود ندارد.
- اگر $x$ یک عدد صحیح است، آنگاه $x^2$ یک عدد صحیح و مثبت است.
- $2+2 = 5$
- $2+2 = 4$
- 5 یک عدد اول نیست.
- تورنتو مرکز کانادا است.

Z={ … , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …}

# گزاره(Propositions) و قضیه(Theorem)

عبارتهای زیر گزاره نیستند.

- ساعت چند است ؟
- عبارت $x + 1 = 0$ دارای یک جواب است.
- تمریناتت را انجام بده.
- این برنامه بد است.
- با دقت درس بخوان.

Z={ … , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …}

- قضیه گزاره‌ای است که راست بودن آن را در یک سیستم ریاضی بتوان اثبات نمود.

# گزاره(Propositions)

کدام یک از عبارات زیر گزاره هستند؟

- علی دانشجوی خوبی است.
- اگر $x < y$ باشد آنگاه $x^2 < y^2$ است.
- $2+2 = 6$
- عبارت $x^2 - 1 = 0$ دارای دو جواب است.
- تمریناتت را انجام بده.
- دو جواب برای $x^2 + 4 = 20$ وجود دارد و هر دو جواب اعداد صحیح هستند.

# گزاره(Propositions)

قاعده طرد شق ثالث (سوم)

- اگر گزاره ای راست نیست، پس دروغ است.
- اگر گزاره ای دروغ نیست، پس راست است.
- اگر عبارتی راست است، پس دروغ نیست.
- اگر عبارتی دروغ است، پس راست نیست.

# نام‌گذاری گزاره‌ها(variables propositional)

گزاره ها را با حروف کوچک زبان انگلیسی با شروع از حرف ... ,p , q , r نام گذاری می کنیم.

p : $2 + 2 = 6$

q : اگر $x$ یک عدد صحیح است، آنگاه $x^2$ یک عدد صحیح و مثبت است.

r : یخ روی آب شناور است.

هر گزاره میتواند دارای ارزش درستی T (true) به معنای راست بودن و ارزش درستی F (false) به معنای دروغ بودن داشته باشد.

# تشکیل گزاره‌های جدید(حروف پیوندی)

گزاره ها میتوانند از ترکیب چند گزاره دیگر حاصل شوند.

- دو جواب برای $x^2 + 4 = 20$ وجود دارد و هر دو جواب اعداد صحیح هستند.
- علی در درس ساختمانهای گسسته قبول میشود یا در درس ریاضی عمومی ۲ نمره قبولی نمی آورد.
- هر گاه ماه بدرخشد و هوا برفی نباشد ، آنگاه محمد به پیاده روی میرد.

# تشکیل گزاره‌های جدید(حروف پیوندی)

گزاره ها میتوانند از ترکیب چند گزاره دیگر حاصل شوند.

- دو جواب برای $x^2+4=20$ وجود دارد و هر دو جواب اعداد صحیح هستند.
- علی در درس ساختمانهای گسسته قبول میشود یا در درس ریاضی عمومی ۲ نمره قبولی نمی آورد.

انواع حروف پیوندی برای تشکیل گزاره های جدید

- ❑نقیض یک گزاره: Not، ¬ ، ~
- ❑حرف پیوندی و : and ، عطف، ∧
- ❑حرف پیوندی یا : نماد or ، فصل ، ∨
- ❑ ترکیب شرطی: اگر p آنگاه q . نماد حرف شرطی p→q در این صورت به p مقدم و q تالی
- ❑ترکیب دو شرطی: اگر p اگر و تنها اگر q . نماد آن $p \leftrightarrow q$
- ❑یای انحصاری (Exclusive or) $p \oplus q$

# تشکیل جدول درستی

برای تجزیه و تحلیل درستی و یا نادرستی گزاره ها از جدول درستی استفاده می شود.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

ترکیب عطفی *q, p*

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

ترکیب فصلی *q, p*

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

نقیض *p*

# ترجمه جملات زبان به عبارت منطقی

مثال: من ماشین را میشویم یا باران نخواهد آمد.

| گزاره | نماد |
|---|---|
| ماشین را میشویم | p |
| باران خواهد بارید | q |

$[\, p \vee \sim q]$

# ترجمه جملات زبان به عبارت منطقی

مثال: هوا مرطوب و ابری است، یا هوا بارانی است، اما در عین حال چنین نیست که هوا هم مرطوب و هم بارانی است.

| گزاره | نماد |
|---|---|
| **هوا مرطوب است** | **p** |
| **هوا ابری است.** | **q** |
| **هوا بارانی است.** | **r** |

$$[ ( p \wedge q ) \vee r] \wedge [\sim ( P \wedge r) ]$$

# نام‌گذاری گزاره‌ها(variables propositional)

نخست داخلی‌ترین پرانتز ها را ارزیابی میکنیم.

- برای داخلی ترین پرانتزها اولویت انجام محاسبه به صورت زیر است:
- در مرحله اول ¬ عمل انجام میشود
- در مراحل بعدی اعمال $\wedge$ و $\vee$ از چپ به راست انجام میشود.

$$( ( p \wedge q ) \vee r) \wedge (\sim ( P \wedge r) )$$

$\neg(p \ \wedge \ \neg q)$

# جدول درستی(Truth Table)

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | T | | | T |
| T | F | | T | | | F |
| F | T | | F | | | T |
| F | F | | F | | | F |

→

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | T | | F | T |
| F | T | | T | | T | F |
| F | F | | F | | F | T |
| F | F | | F | | T | F |

→

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | T | F | F | T |
| F | T | | T | T | T | F |
| F | F | | F | F | F | T |
| F | F | | F | F | T | F |

→

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | F | F | T |
| F | T | F | T | T | T | F |
| F | F | T | F | F | F | T |
| F | F | T | F | F | T | F |

$\neg(p \land \neg q)$

# جدول درستی(Truth Table)

| $p$ | $q$ | $p$ | $\neg q$ | $(p \land \neg q)$ | $\neg(p \land \neg q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | T | $F$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | T | $T$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | F | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | F | $T$ | $F$ | $T$ |

# جدول درستی(Truth Table)

اگر $x=3$ , $y=1$ , $z=13$ آیا پیام مربوط به دستور زیر چاپ میشود؟

```
if ( (x<y) and (y=1) or (z=12) ) and  ( not(x<y) and (z=12) )
   Write("Hello")
```

$$[\ ((\ p \wedge q\ ) \vee r) \wedge (\sim (\ P \wedge r)\ )\ ]$$

| نماد | گزاره |
|---|---|
| p | X < y |
| q | Y=1 |
| r | Z=12 |

(p q r) = (F T F)

# جدول درستی(Truth Table)

| $p$ | $q$ | $r$ | $((p$ | $\wedge$ | $q)$ | $\vee$ | $r)$ | $\wedge$ | $(\sim$ | $(p$ | $\wedge$ | $r))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | F | F | T | T | T |
| T | T | F | T | T | T | T | F | T | T | T | F | F |
| T | F | T | T | F | F | T | T | F | F | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F | F | F | F | T | T | F | F |
| F | T | T | F | F | T | T | T | T | T | F | F | T |
| F | T | F | F | F | T | F | F | F | T | F | F | F |
| F | F | T | F | F | F | T | T | T | T | F | F | T |
| F | F | F | F | F | F | F | F | F | T | F | F | F |

# گزاره های همیشه درست-راستگو(tautology)

اگر در جدول درستی گزاره‌ای صرف‌نظر از ارزش گزاره‌های مبنای تشکیل‌دهنده آنها، همواره درست باشد، راستگو خوانده میشود. در واقع گزاره مرکبی که به ازای تمام ترکیبات ارزشی گزاره های تشکیل دهنده آن همواره درست است.

$(p \ \wedge \ q) \vee (\sim p \ \vee \ \sim q)$

| p | q | (p | ∧ | q) | ∨ | ( ~ | p | ∨ | ~ | q) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | F | T | F | F | T |
| T | F | T | F | F | T | F | T | T | T | F |
| F | T | F | F | T | T | T | F | T | F | T |
| F | F | F | F | F | T | T | F | T | T | F |

# گزاره های همیشه نادرست-تناقض

اگر در جدول درستی گزاره‌ای صرف‌نظر از ارزش گزاره‌های مبنای تشکیل‌دهنده آنها، همواره نادرست باشد، تناقض خوانده میشود. در واقع گزاره مرکبی که به ازای تمام ترکیبات ارزشی گزاره های تشکیل دهنده آن همواره نادرست است.

$p \wedge (\sim p \wedge q)$

| $\boldsymbol{p}$ | $\boldsymbol{q}$ | $\sim \boldsymbol{p}$ | $(\sim \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$ | $\boldsymbol{p}$ | $\boldsymbol{p} \wedge (\sim \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{T}$ | $\boldsymbol{T}$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ |
| $\boldsymbol{T}$ | $\boldsymbol{F}$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ |
| $\boldsymbol{F}$ | $\boldsymbol{T}$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ |
| $\boldsymbol{F}$ | $\boldsymbol{F}$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |

# گزاره‌های هم‌ارز(Logical Equivalence)

دو گزاره را هم ارز گوییم، اگر به ازای هر ترکیب همسان از ارزش گزاره های مبنای تشکیل دهنده آنها، مقادیر درستی یکسانی داشته باشند. علامت $p \equiv q$ بیانگر این است که p و q از نظر منطقی برابر هستند.

هم ارز بودن دو گزاره، این امکان را به ما خواهد داد تا گزاره های پیچیده تر را با گزاره های ساده تر جایگزین نماییم.

$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

| p | q | ~ | ( p | ∧ | q ) |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | T |
| T | F | T | T | F | F |
| F | T | T | F | F | T |
| F | F | T | F | F | F |

| p | q | ~ | p | V | ~ | q ) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | T | F |
| F | T | T | F | T | F | T |
| F | F | T | F | T | T | F |

# خواص جبری گزاره‌ها(Laws of the algebra of propositions)

- خاصیت جابجایی

$p \vee q \equiv q \vee p$
$p \wedge q \equiv q \wedge p$

- خاصیت شرکت پذیری

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

- خاصیت پخش پذیری

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- قانون دمورگان

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

# خواص جبری گزاره‌ها(Laws of the algebra of propositions)

- خاصیت خودتوانی

$p \equiv p \vee p$

$p \equiv p \wedge p$

- خاصیت همانی، اگر درست=T و نادرست= F باشد

$p \equiv p \vee F$ | $T \equiv p \vee T$

$p \equiv p \wedge T$ | $F \equiv p \wedge F$

- خاصیت متمم

$T \equiv p \vee \sim p$

$F \equiv p \wedge \sim p$

- خاصیت جذبی

$p \equiv p \vee (p \wedge q)$

$p \equiv p \wedge (p \vee q)$

- خاصیت نقیض دوگانه

$\sim \sim p \equiv p$

# یای انحصاری

- $p \oplus q \quad : p\ XOR\ q$

| $p$ | $q$ | $p \oplus q$ |
|---|---|---|
| *T* | *T* | F |
| *T* | *F* | T |
| *F* | *T* | $T$ |
| *F* | *F* | F |

# گزاره‌های شرطی

- فرض کنید پدری به فرزندش گفته است: " اگر در درس ساختمانهای گسسته نمره الف بگیری، برایت یک دوچرخه خواهم خرید"

| گزاره | نماد |
|---|---|
| **علی نمره الف بگیرد** | **p** |
| **پدر علی برای او دوچرخه میخرد.** | **q** |

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

- "اگر p آنگاه q"
- نماد حرف شرطی p→q
- P مقدم و q تالی

# هم ارزی گزاره‌های شرطی

| | | |
|---|---|---|
| $p \to q \equiv \sim p \vee q$ | $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ | $p \to q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$ |

همچنین میتوان از گزاره $p \to q$ به تعاریف زیر دست یافت:

| تعریف | نماد |
|---|---|
| وارون | $\sim p \to \sim q$ |
| عکس نقیض | $\sim q \to \sim p$ |
| عکس | $q \to p$ |

# گزاره‌های دوشرطی(Biconditional propositions)

در این نوع پیوند اگر ارزش دو گزاره تشکیل دهندهٔ آن یکسان باشد، آنگاه ارزش آن راست و در غیر اینصورت ارزش آن دروغ است. و از نماد $\leftrightarrow$ استفاده می شود.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

در ریاضیات برخی از قضایا بصورت دو شرطی بیان می شوند:

- دو مثلث مساوی هستند، اگر و تنها اگر، اضالع متناظرآنها مساوی باشند.
- دو خط متوازیند، اگر و تنها اگر، ضریب زوایای مساوی داشته باشند.

# گزاره‌های دوشرطی(Biconditional propositions)

به کمک جدول درستی، مشاهده میشود که عبارتهای زیر هم ارزند:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

با توجه به تعریف گزاره‌های دو شرطی و هم‌ارز، نتیجه میشود که اگر $p \leftrightarrow q$ راستگو باشد،آنگاه گزاره های $p,q$ هم ارزند.

# روش های اثبات

اگر گزاره شرطی $p \to q$ یک راستگو باشد، گوییم که q بطور منطقی از p نتیجه می شود و یا p نتیجه می دهد q را .

در این عبارت p و q می توانند گزاره های مرکبی باشند.

بطور مثال اگر $(p_1 \land p_2 \land \dots p_n) \to q$ راستگو باشد، گوییم:

- q از $p_1$ و $p_2$ و ... $p_n$ نتیجه می شود.
- $(p_1, p_2, \dots p_n) \vdash q$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array}}$$

$p_i$ ها را مقدم و یا مفروضات و q را نتیجه و مجموعه فوق را استنتاج می نامیم.

# چند قاعده استنتاج

| قانون | تاتولوژی | نام قانون |
|---|---|---|
| $\begin{array}{l} \mathrm{p} \\ \mathrm{p} \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$ | $(\mathrm{p} \wedge (p \to q)) \to q$ | قیاس استنتاجی |
| $\begin{array}{l} \mathrm{p} \to q \\ \mathrm{q} \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$ | $((\mathrm{p} \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ | قیاس تعدی |
| $\begin{array}{l} \neg q \\ \mathrm{p} \to q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$ | $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ | قیاس عکس |

# چند قاعده استنتاج

| قانون | تاتولوژی | نام قانون |
|---|---|---|
| $p$<br>$\therefore (p \vee q)$ | $p \rightarrow (p \vee q)$ | قیاس فصلی |
| $p \wedge q$<br>$\therefore p$ | $(p \wedge q) \rightarrow p$ | قیاس تخصیص |
| $p$<br>$q$<br>$\therefore p \wedge q$ | ($p$ و $q$) $\rightarrow p \wedge q$ | قیاس عطفی |

# روش های اثبات : استفاده از جدول درستی

| گزاره | نماد |
|---|---|
| امروز باران ببارد | p |
| ما در خانه می مانیم | q |

- فرضیات زیر را در نظر بگیرید
  - اگر امروز باران ببارد، ما خانه می مانیم.
  - امروز ما خانه نماندیم.
  - آیا میتوان نتیجه گرفت که امروز باران نباریده ؟
- این قیاس بصورت: $p \to q$ و $\sim q \vdash \sim p?$
- برای اینکه نشان دهیم قیاس معتبر از جدول درستی کمک میگیریم:

$$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$$

| p | q | [( p | → | q) | ∧ | ~ | q ] | → | ~ | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | F | F | T | T | F | T |
| T | F | T | F | F | F | T | F | T | F | T |
| F | T | F | T | T | F | F | T | T | T | F |
| F | F | F | T | F | T | T | F | T | T | F |

# روش های اثبات : استفاده از جدول درستی

- استدلال غلط، استدلالی است که : برای بعضی از حالت، همه مقدم های آن راست ولی تالی دروغ باشد.
- مثال : استدلال زیر را در نظر بگیرید:
  - اگر علی در درس ساختمانهای گسسته نمره الف بگیرد آنگاه پدر وی برایش یک دوچرخه خواهد خرید.
  - پدر علی برایش دوچرخه خریده است.

آیا میتوان نتیجه گرفت که علی در درس ساختمان گسسته نمره الف گرفته است؟

$p \to q$ و $q \vdash p$

| نماد | گزاره |
|---|---|
| **p** | **علی در درس گسسته نمره الف بگیرد** |
| **q** | **پدر علی برای او دوچرخه میخرد.** |

$\boxed{[(p \to q) \land q] \to p \ ?}$

# روش های اثبات : استفاده از جدول درستی

- با ملاحظه سطر سوم، مشاهده می شود که زمانی که p نادرست و q درست باشد، استدلال مزبور غلط است زیرا در این حالت، هر دو مقدم درست ولی تالی دروغ است.

| p | q | [( p | → | q) | ∧ | q ] | → | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | F | T | F | F | F | F | T | T |
| F | T | F | T | T | T | T | F | F |
| F | F | F | T | F | F | F | T | F |

بنابراین استدلال غلط است

# روش های اثبات : استفاده از قواعد استنتاج

| گزاره | نماد |
|---|---|
| **امروز باران ببارد** | **p** |
| **ما در خانه می مانیم** | **q** |

- فرضیات زیر را در نظر بگیرید
  - اگر امروز باران ببارد، ما خانه می مانیم.
  - امروز ما خانه نماندیم.
  - آیا میتوان نتیجه گرفت که امروز باران نباریده ؟
- این قیاس بصورت: $p \to q$ و $\sim q \vdash \sim p$?

| | **گزاره ها** | **دلایل** |
|---|---|---|
| ۱ | $p \to q$ | فرض اول |
| ۲ | $\sim q$ | فرض دوم |
| ۳ | $\sim p$ | قیاس عکس |

# روش های اثبات : استفاده از قواعد استنتاج

- آیا قیاس زیر معتبر است؟ $[(p\rightarrow q) \wedge (\sim r \rightarrow \sim q) \wedge \sim r] \rightarrow \sim p$

حل:

| دلایل | گزاره ها | |
|---|---|---|
| فرض | $p\rightarrow q$ | ۱ |
| نقیض عکس ۱ | $\sim q\rightarrow \sim p$ | ۲ |
| فرض | $\sim r \rightarrow \sim q$ | ۳ |
| قیاس تعدی ۲و۳ | $\sim r \rightarrow \sim p$ | ۴ |
| فرض | $\sim r$ | ۵ |
| قیاس استثنا ۴و۵ | $\sim p$ | ۶ |

# روش های اثبات : استفاده از قواعد استنتاج

- آیا قیاس زیر معتبر است؟ $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \sim s \vdash r \wedge (p \vee q)$

**حل:**

| | گزاره ها | دلایل |
|---|---|---|
| ۱ | $p \rightarrow s$ | فرض |
| ۲ | $\sim s$ | فرض |
| ۳ | $\sim p$ | قیاس عکس ۱و۲ |
| ۴ | $p \vee q$ | فرض |
| ۵ | $\sim p \rightarrow q$ | نقیض دوگانه برای p و عکس نقیض ۴ |
| ۶ | $q$ | قیاس استثنایی ۳ و ۵ |
| ۷ | $q \rightarrow r$ | فرض |
| ۸ | $r$ | قیاس استثناء |
| ۹ | $r \wedge (p \vee q)$ | قیاس تخصیص ۴و۸ |

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

# روش های اثبات : غیر مستقیم

- یک روش مهم در اثبات قضایا است و از راستگوی زیر نتیجه شده است:

$$(p \to p) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$$

- بجای اینکه نشان دهیم اگر p راست باشد آنگاه q نیز راست است، به صورت غیر مستقیم نشان میدهیم اگر p دروغ باشد آنگاه q نیز دروغ است.
- **مثال:** نشان دهید اگر $n^2$ فرد باشد آنگاه $n$ نیز فرد است.
- **حل:** فرض میکنیم $n$ فرد نباشد آنگاه:

$$n = 2k$$

$$n^2 = (2k)^2$$

$$n^2 = 2(2k^2)$$

ما نشان دادیم اگر $n$ زوج باشد آنگاه $n^2$ نیز زوج است. که عکس نقیض گزاره فوق است و با آن هم ارز است.

# حساب گزاره نماها

عبارتی است با متغیر که اگر مقادیر متغیرهای به کار رفته در آن مشخص شوند به گزاره تبدیل خواهد شد.

عبارات زیر همه گزاره‌نما هستند:

- $x + 3 = 5$
- اگر $x < y$ باشد آنگاه $x^2 < y^2$ است.
- $x + y = 10$
- $x + y = 5$ اگر و تنها اگر $x = 5 - y$

# حساب گزاره نماها

- گزاره نمای ۱ - مکانی : گزاره نماهایی که تنها شامل یک متغیر باشند.
- در حالت کلی گزاره نمایی که شامل $n$ متغیر باشد ، گزاره نمای $n$ – مکانی نامیده میشود.
- جهان متغیر : مجموعه مقادیری که می توانند جایگزین متغیرهای موجود در گزاره نما شوند.

از مقادیر جهان متغیر آنهایی که بتوانند گزاره‌نما را به گزاره راست تبدیل کنند گوییم این مقادیر گزاره نما را تایید کرده اند.

عموماً گزاره نما ها را با حروف بزرگ مانند ... , R, Q, P نمایش داده و پس از نام آنها، متغیرهای مورد استفاده را درون پرانتز می نویسیم. , P(x) , Q(x) , R(x,y)

# حساب گزاره نماها

| نمایش گزاره‌نما | گزاره‌نما |
|---|---|
| $P(x)$ | $x + 3 = 5$ |
| $Q(x,y)$ | اگر $x < y$ باشد آنگاه $x^2 < y^2$ است. |
| $R(x,y)$ | $x + y = 10$ |
| $T(x,y)$ | $x + y = 5$ اگر و تنها اگر $x = 5 - y$ |

# حساب گزاره نماها

دو گزاره نمای هم ارز: هر گاه به ازای کلیه مقادیر ممکن از متغیرهایشان ارزش درستی یکسان داشته باشند.
و به صورت $X(x) \equiv Y(y)$ نمایش داده میشود.
عنوان مثال در درس جبر می گفتیم :
مقدار ۱ - معادله $x + 4 = 3$ را براورده می کند، در واقع معادله مزبور یک گزاره نماست و حل معادله، معادل با پیدا کردن تمام مقادیر ممکن برای x است که گزاره نما را براورده کند.

# حساب گزاره نماها

فرض کنید a, b, c نشانگر اعداد اعشاری هستند، می دانیم برای هر a, b, c داریم:

1) $a + b = b + a$

2) $a + ( b + c ) = ( a + b ) + c$

3) $a + 0 = 0 + a = a$

4) به ازای هر عدد a، عددی مثل b وجود دارد به طوری که $a + b = 0$ و $b + a = 0$

5) اگر $a < b$ ، آنگاه عدد مثبتی مانند k وجود دارد، به طوری که $a + k = b$

6) اگر $a < b$ و $b < c$ ، آنگاه $a < c$

در واقع

- در عبارتهای بالا اگر عبارتی مانند "برای هر a, b, c"
- در ابتدای جملات فوق قرار نگیرد
- همه موارد فوق، گزاره نمایی بیش نیستند.

# سورها

- حال چگونه می توان گزاره نمای $P(a,b)\colon a+b \equiv b+a$ را به یک گزاره تبدیل نمود.
- b, aرا نباید به چشم دو متغیر و یا مقادیر ویژه ای نگریست.
- عبارت فوق به ازای تمام مقادیر a و b برقرار است.
- در چنین حالتی خواهیم گفت که متغیرهای b, a مسور جهانی هستند. و ∀ نماد سور جهانی است. به صورت :

$$\boxed{\forall a\, \forall b\, P(a,b)}$$

- خوانده میشود "به ازای هر $a$ و به ازای هر $b$، $P(a,b)$ راست است"
- جمله دوم و سوم در اسلاید قبل:

$$\boxed{\forall a\ \ \forall b\ \ \forall c\ \ P(a,b,c)} \qquad \boxed{\forall a\ \ P(a)}$$

# سورها

- به ازای هر عدد مثل $a$، عددی مثل $b$ وجود دارد به طوری که: $a + b = 0$ و $b + a = 0$
- در چنین حالتی خواهیم گفت که متغیرهای a مسور جهانی و b مسور وجودی هستند و $\exists$ نماد سور وجودی است.

$$\boxed{\forall a\, \exists b\, S(a, b)}$$

- به ازای هر $a$ مقداری برای $b$ وجود دارد به طوری که $S(a,b)$ راست است.

**مهم:**

- تغییر جای سورها باعث عوض شدن معنی جمله خواهد شد. $\boxed{\forall a\, \exists b\, S(a,b) ,\exists b\, \forall a\, S(a,b)}$
- پرانتزها، کروشه ها و آکولادها، محدوده قلمروی هر یک از سورها را مشخص می کنند.

$$\boxed{\forall a\, P(a) \rightarrow Q(a)} \qquad \boxed{\forall a\, [P(a) \rightarrow Q(a)]}$$

# سورها

مهم:

- $\exists b\ \forall a\ S(a,b)$ : حداقل یک مقدار برای b وجود دارد که با انتخاب آن گزاره نمای $S(a,b)$ صرف نظر از مقداری که برای a انتخاب میشود میتواند به یک گزاره راست تبدیل شود.
- , $\forall a\ \exists b\ S(a,b)$ : به ازای هر مقدار a حداقل یک مقدار برای b وجود دارد که به طوری که $S(a,b)$ راست است.

# سورها

- $\forall a\, P(a)$ تمام مقادیر از جهان متغیر $a$ گزاره نمای $P(a)$ برآورده میکند.
- $\exists a\, P(a)$ دست کم یک مقدار از جهان متغیر $a$ وجود دارد که گزاره نمای $P(a)$ را براورده میکند.

**تعریف:** دو گزاره نما را هم ارز می گوییم هرگاه به ازای کلیه ی مقادیر ممکن از متغیرهایشان ارزش درستی یکسان داشته باشند. به عبارت دیگر گوییم $Q(x)$ و $P(x)$ هم ارز هستند هرگاه:

$$\boxed{P(x) \equiv Q(x)}$$

# سورها

- **مثال:**
- با فرض اینکه :
- $x$ مسن تر از $y$ است. $P\ (x,y)$
- $x$ عاقل تر از $y$ است. $Q\ (x,y)$
- $x$ بی سواد است. $R\ (x)$

در این صورت هر یک از گزاره های زیر را به فارسی ترجمه کنید:

- $\forall x\ \exists y\ [P\ (x,y) \rightarrow (Q(x,y) \wedge R(y))]$ (برای هر $x$، $y$ ای وجود دارد به گونه ای که اگر $x$ مسن تر از $y$ باشد در این صورت $x$ عاقل تر از $y$ و $y$ بی سواد است )
- $\forall x \forall y\ [Q(x,y) \rightarrow R(y)]$ (اگر $x$ مسن تر از $y$ باشد در این صورت $y$ بیسواد است )
- $\forall x[\forall y\ \sim P(x,y) \rightarrow R(x)]$ (اگر $x$ مسن تر از $y$ نباشد(دروغگو باشد) $y$ آنگاه بیسواد است )

# سورها

- **مثال:**

با فرض اینکه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ درستی یا غلطی عبارات زیر را تعیین کنید:

- $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$
- $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$
- $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$
- $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$

# نقیض سورها

نقیض گزاره های سوردار:

- $\exists x \sim P\ (x) \equiv \sim [\forall x\ P(x)]$
- $\forall x \sim P\ (x) \equiv \sim [\exists x\ P(x)]$

مثال: نقیض گزاره ی زیر را بدست آورید.

- $\exists x\ \ \forall y\ P(x, y)$

جواب:

$$\sim (\exists x\ \ \forall y\ P(x, y)) \equiv \forall x\ \ \exists y \sim P(x, y)$$

# قواعد استنتاج سورها

اگر جهان متغیر در یک گزاره نما متناهی باشد، آنگاه

سور جهانی مانند ترکیب عطفی و سور وجودی مانند ترکیب فصلی عمل خواهند کرد.

**قواعد استنتاج:**

| | |
|---|---|
| $P(a) \vdash \exists x\, P(x)$ | تعمیم وجودی |
| $P(a) \vdash \forall x\, P(x)$ | تعمیم جهانی |
| $\exists x\, P(x) \vdash P(a)$ | وجود لحظه ای |
| $\forall x\, P(x) \vdash P(a)$ | جهان لحظه ای |

# استنتاج سورها

تمام پرندگان پر دارند.

تمام گنجشک ها پرنده هستند.

آیا میتوان استنتاج کرد که تمام گنجشکها پر دارند؟؟

| | |
|---|---|
| $\mathrm{F}(x)$ | $x$ پرنده است |
| $G(x)$ | $x$ گنجشک است |
| $P(x)$ | $x$ پر دارد |

$$\forall x\ [F(x) \rightarrow P(x)]$$
$$\forall x\ [G(x) \rightarrow F(x)]$$

---

$$\forall x\ [G(x) \rightarrow P(x)]$$

# استنتاج سورها

| | |
|---|---|
| $\forall x\ [F(x) \rightarrow P(x)]$ | فرض |
| $F(c) \rightarrow P(c)$ | جهان لحظه ای |
| $\forall x\ [G(x) \rightarrow F(x)]$ | فرض |
| $G(c) \rightarrow F(c)$ | جهان لحظه ای |
| $G(c) \rightarrow P(c)$ | قیاس تعدی |
| $\forall x\ [G(x) \rightarrow P(x)$ | تعمیم جهانی |

$$\begin{array}{c} \forall x\ [F(x) \rightarrow P(x)] \\ \forall x\ [G(x) \rightarrow F(x)] \\ \hline \forall x\ [G(x) \rightarrow P(x)] \end{array}$$

# استقرای ریاضی

- یک حالت ویژه ولی بسیار مهم اثبات گزاره های سوردار اثبات گزاره هایی مانند$\forall n\, P(n)$ است که در آن جهان مورد بحث مجموعه اعداد طبیعی $n$ است.گزاره هایی نظیر : برای هر عدد طبیعی $n$،مجموع اولین $n$ عدد فرد برابر $n^2$ است.
- اصل استقرای ریاضی قاعدهی استنتاجی را در اختیار ما قرار می دهد که می توانیم عباراتی مانند عبارات بالا را اثبات نماییم:

$$P(n_0), \forall k\ [P(k) \rightarrow P(k+1)] \mapsto \forall n P(n) \qquad n \in N$$

- مبنای استقرا : نشان میدهیم که $P(n_0)$ راست است.
- فرض استقرا : نشان میدهیم که برای هر $\mathrm{k} \geq n_0$ ، $P(k)$ راست است.
- مرحله استقرا: با استفاده از فرض استقرا نسان میدهیم که $P(k+1)$ راست است.

# استقرای ریاضی

نشان دهید $7^{2n+1} + 6^{n+2}$ بر ۴۳ قابل قسمت است.

- مبنای استقرا : نشان میدهیم که $P(n_0)$ راست است.
- $n_0 = 1 \quad 7^{2+1} + 6^{1+2} = 7^3 + 6^3 = 559 = 43 * 13$
- فرض استقرا : نشان میدهیم که برای هر $\mathrm{k} \geq n_0$ ، $P(k)$ راست است.
- $7^{2k+1} + 6^{k+2} = 43m$
- مرحله استقرا: با استفاده از فرض استقرا نشان میدهیم که $P(k+1)$ راست است.

$\boxed{(43 + 6)}$

$7^{2(k+1)+1} + 6^{(k+1)+2} = 7^{2k+3} + 6^{k+3} = 49(7^{2k+1}) + 6(6^{k+2})$

$(43 + 6)(7^{2k+1}) + 6(6^{k+2}) = 6(7^{2k+1} + 6^{k+2}) + 43 * 7^{2k+1}$

$6(43m) + 43 * 7^{2k+1} = 43(6 + 7^{2k+1})$

# تمرینات فصل اول

۲ – همه
۳ : الف د ه
۴ ج
۵ الف
۸ ج
۱۱ د
۱۴ د
۱۵ ب
۲۳
۲۲ ب د و
۳۸ ب

مهلت تحویل: ۱۰ اسفند ماه ۱۴۰۱