

Date: _____

Subject: _____

$$r^2 = 16 \cos 2\theta$$

مثال: مطلوب است رسم نمودار منحنی $r = 4 \cos 2\theta$ با معادله

$$r^2 > 0 \Rightarrow \cos 2\theta > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

جواب

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$r^2 = 16 \cos 2\theta \Rightarrow \begin{cases} r = 4\sqrt{\cos 2\theta} & (1) \\ r = -4\sqrt{\cos 2\theta} & (2) \end{cases}$$

$$r = -4\sqrt{\cos 2\theta} \quad (2)$$

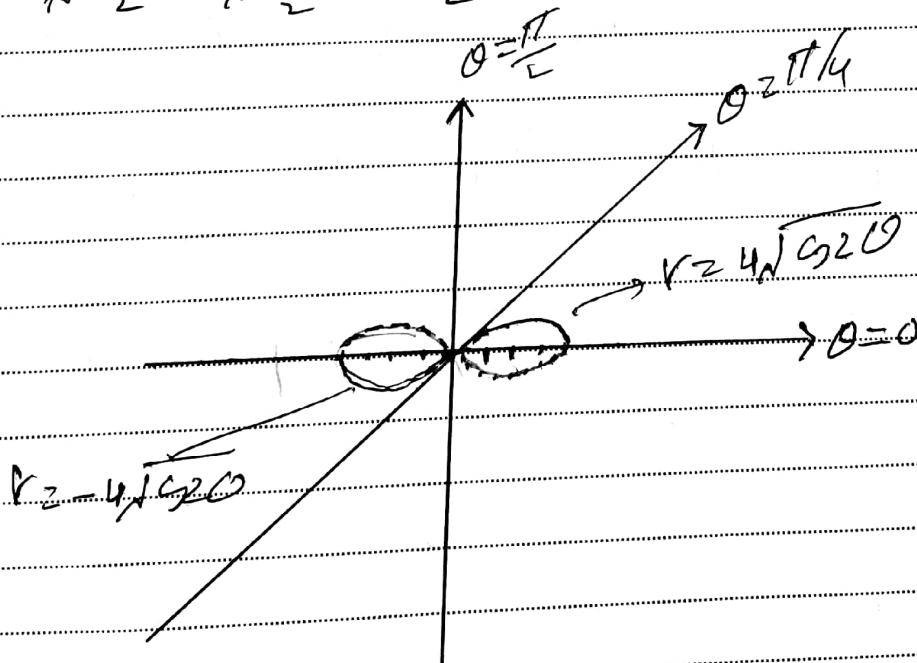
ابتدا نمودار معادله (1) را رسم می کنیم و سپس به استفاده از آن نمودار معادله

(2) را رسم می کنیم. نمودار معادله (1) فقط نسبت به محور قطبی تقارن دارد

(چون) پس آنرا در فاصله $[0, \frac{\pi}{4}]$ رسم می کنیم و به استفاده از فاصله

تقارن آنرا تکمیل می کنیم

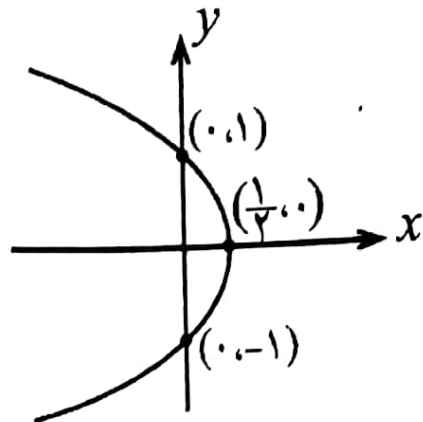
θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	4	$4\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$4\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$4\sqrt{\frac{1}{2}}$	0



مثال ۳۴.۱۷.

$$r = 1/(1 + \cos \theta)$$

حل: چون با تبدیل (r, θ) به $(r, -\theta)$ معادله عوض نمی‌شود پس شکل نسبت به محور قطبی متقارن است، از طرفی وقتی $\theta \rightarrow \pi$ میل کند، $r \rightarrow \infty$ میل می‌کند، لذا ممکن است مجانب داشته باشیم معادلات پارامتری را می‌نویسیم



$$x = r \cos \theta = \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$y = r \sin \theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

و چون $\lim_{\theta \rightarrow \pi} x = \infty$ و $\lim_{\theta \rightarrow \pi} y = \infty$ ، لذا مجانب موازی محورهای x و y نداریم، برای رسم این شکل می‌توان از روش زیر استفاده کرد (این روش را در اکثر موارد می‌توانیم مورد استفاده قرار دهیم) ابتدا فرم دکارتی معادله را می‌نویسیم و سپس آن را رسم می‌کنیم. (شکل در دستگاه‌های متفاوت تغییر نمی‌کند.)

$$r^2(1 + \cos \theta)^2 = 1$$

$$r^2 + r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \cos \theta = 1 \Rightarrow y^2 + x^2 + x^2 + 2xr = 1$$

$$\square \quad 2x(x + r) = 1 - y^2 \Rightarrow xr(\cos \theta + 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2$$

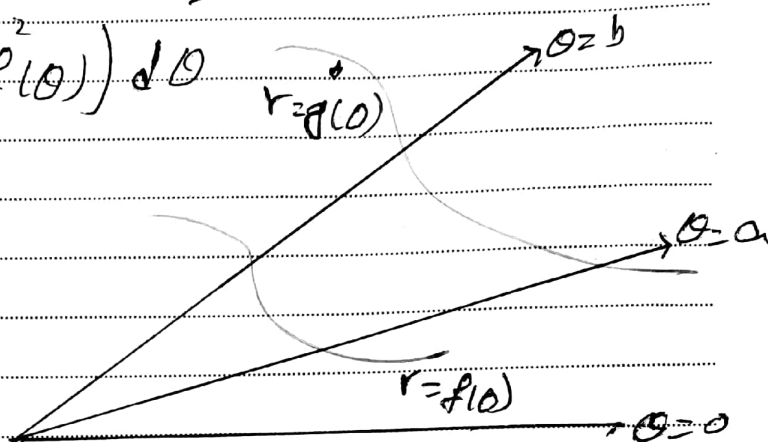
Date:

Subject:

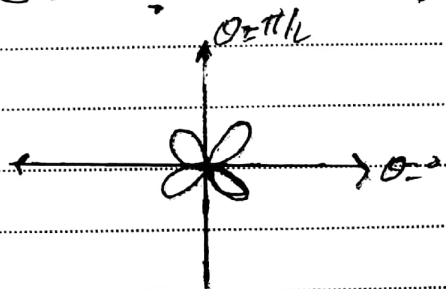
محاسبه مساحت ناحیه در دستگاه مختصات قطبی

فرض کنید توابع $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته وبرای هر θ در فاصله $[a, b]$ ، $f(\theta) \leq g(\theta)$ باشد. اگر مساحتناحیه محدود به خطوط $\theta = a$ ، $\theta = b$ ، $r = g(\theta)$ و $r = f(\theta)$ را A نشان دهیم آنوقت

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b (g^2(\theta) - f^2(\theta)) d\theta$$

مثال مساحت ناحیه درون منحنی C به معادله $r = \sin 2\theta$ را حساب کنید

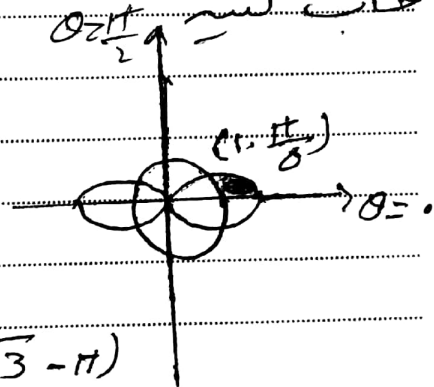
$$A = \frac{4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

مثال مساحت ناحیه واقع در داخل $r^2 = 2 \cos 2\theta$ و خارج دایره $r = 1$ را

$$\begin{cases} r = 1 \\ r^2 = 2 \cos 2\theta \end{cases} \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$A = \frac{4}{2} \int_0^{\pi/6} (2 \cos 2\theta - 1) d\theta$$

$$= \frac{1}{3} (3\sqrt{3} - \pi)$$



Kian

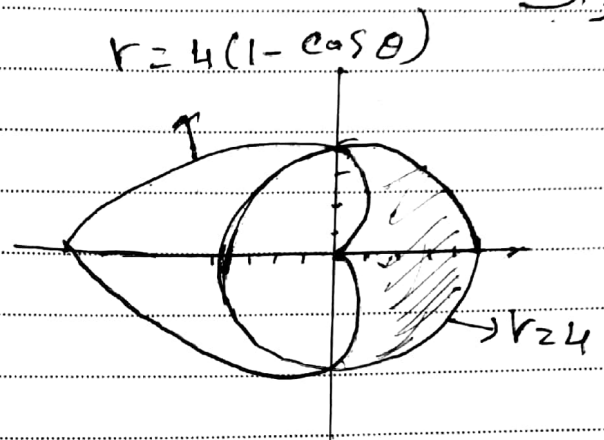
Date:

Subject:

1/4

18

مثال: ناحیه واقع در داخل دایره $r=4$ و خارج دایره $r=4(1-\cos\theta)$ را حساب کنید.
جواب:



$$A = \frac{2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4^2 - (4-4\cos\theta)^2] d\theta$$

مثال: مساحت ناحیه مشترک محدود به دو منحنی زیر را حساب کنید.

$$r = \cos 2\theta, \quad r = \sin 2\theta$$

$$\text{جواب: مساحت مشترک} = 8 \left(\frac{9\pi}{16} - \frac{9}{8} \right)$$