

# Fonction: Limites, continuité et dérivabilité

## 1 Limites et continuité d'une fonction

### 1.1 Notions de fonction

#### 1.1.1 Définition

##### Définition 1.1

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application  $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ , où  $D_f$  est une partie de  $\mathbb{R}$ . En général,  $D_f$  est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

On appelle  $D_f$  le domaine de définition de la fonction  $f$ . Il se note aussi  $D$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

##### Exemple 1.1

1.  $f(x) = \sqrt{x-2}$  a pour domaine de définition  $D_f = [2, +\infty[$ .
2.  $f(x) = \frac{1}{\ln(x+2)}$  a pour domaine de définition  $D_f = ]-2, -1[ \cup ]-1, +\infty[$ .

Le **graphe** d'une fonction  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  est la partie  $\Gamma_f$  de  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

#### 1.1.2 Opérations sur les fonctions

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D \subset \mathbb{R}$ . On définit les fonctions  $f+g$ ,  $fg$ ,  $(\lambda f)$  et  $\frac{f}{g}$  par :

1.  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  pour tout  $x \in D$
2.  $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$  pour tout  $x \in D$
3.  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$  pour tout  $x \in D$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$
4.  $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  pour tout  $x \in D$ .

#### 1.1.3 Parité et périodicité

##### Définition 1.2

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D \subset \mathbb{R}$ . On dit que :

1.  $f$  est paire si :

$$\forall x \in D, \quad (-x) \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x),$$

2.  $f$  est impaire si :

$$\forall x \in D, \quad (-x) \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

**Interprétation graphique:**

- $f$  est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- $f$  est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine  $O$ .

**Exemple 1.2**

- La fonction sinus est impaire:  $\sin(-x) = -\sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .
- La fonction cosinus est paire:  $\cos(-x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Définition 1.3**

Soit  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $T$  un nombre réel positif. La fonction  $f$  est dite périodique de période  $T$  si

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D, \quad f(x + T) = f(x).$$

**Exemple 1.3**

Les fonctions sinus et cosinus sont  $2\pi$ -périodiques. En effet,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**1.1.4 Fonctions majorées, minorées, bornées**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D \subset \mathbb{R}$ .

**Définition 1.4**

On dit que :

1.  $f$  est constante sur  $D$  si  $\exists C \in \mathbb{R}$ , tel que,  $\forall x \in D, \quad f(x) = C$ . En particulier,  $f$  est dite nulle si  $\forall x \in D, \quad f(x) = 0$
2.  $f$  est majorée sur  $D$  si  $\exists M \in \mathbb{R}$ , tel que,  $\forall x \in D, \quad f(x) \leq M$
3.  $f$  est minorée sur  $D$  si  $\exists m \in \mathbb{R}$ , tel que,  $\forall x \in D, \quad f(x) \geq m$
4.  $f$  est bornée sur  $D$  si  $f$  est à la fois majorée et minorée sur  $D$ .

**Exemple 1.4**

1. La fonction  $f(x) = \sin(x)$  est minorée par  $-1$  et majorée par  $1$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .
2. La fonction  $f(x) = \ln(x)$  n'est ni majorée ni minorée sur  $]0, +\infty[$ . Donc  $f$  n'est pas bornée sur  $]0, +\infty[$ .

**1.1.5 Fonctions croissantes, décroissantes**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D \subset \mathbb{R}$ .

**Définition 1.5**

On dit que :

1.  $f$  est croissante sur  $D$  si  $\forall x, y \in D, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
2.  $f$  est décroissante sur  $D$  si  $\forall x, y \in D, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
3. Une fonction monotone est une fonction qui est croissante ou décroissante.

**Exemple 1.5**

- La fonction partie entière  $E$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.6**

On dit que :

1.  $f$  est strictement croissante sur  $D$  si  $\forall x, y \in D, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
2.  $f$  est strictement décroissante sur  $D$  si  $\forall x, y \in D, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
3. Une fonction strictement monotone est une fonction qui est strictement croissante ou strictement décroissante.

**Exemple 1.6**

1. La fonction  $f(x) = e^{-x}$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
2. La fonction sinus  $f(x) = \sin(x)$  n'est ni croissante, ni décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Par contre  $f$  est strictement croissante sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

## 2 Limites

La notion intuitive de limite permet de mettre en évidence le comportement d'une fonction dans les cas suivants :

- Que se passe-t-il lorsque la variable  $x$  est proche d'une certaine valeur  $x_0$ ?
- Que se passe-t-il lorsque la variable  $x$  s'éloigne infiniment de 0 (limites en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ ) ?

### 2.0.1 Limite en un point

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  un point de  $I$  ou une extrémité de  $I$ .

**Définition 1.7**

Soit  $l \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  a pour limite  $l$  en  $x_0$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On dit aussi que  $f(x)$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ . On note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

**Autrement:** Tout intervalle ouvert de la forme  $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$  (avec  $\varepsilon > 0$ ) contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $x_0$ .

**Exemple 1.7**

- $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1.$

**Remarque 1.1**

Il n'est pas nécessaire que  $f$  soit définie en  $x_0$  pour qu'elle admette une limite en  $x_0$ .

**Exemple 1.8**

La fonction  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  n'est pas définie en 0. Mais  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

**Définition 1.8**

- On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $x_0$  si tout intervalle de la forme  $]A, +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $x_0$ . On note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .
- On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $x_0$ , si tout intervalle de la forme  $] - \infty, A[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $x_0$ . On note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

**Exemple 1.9**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

**2.0.2 limite en l'infinie**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a, +\infty[$ .

**Définition 1.9**

- On dit que  $f$  a pour limite  $l$  en  $+\infty$  si tout intervalle de la forme  $]l - r, l + r[$  (avec  $r > 0$ ) contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand. On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .
- On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si tout intervalle de la forme  $]A, +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand. On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**Remarque 1.2**

On définirait de la même manière la limite en  $-\infty$  pour des fonctions définies sur les intervalles du type  $I = ] - \infty, a[$ .

**2.0.3 Limite à gauche et à droite**

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble de la forme  $]a, x_0[ \cup ]x_0, b[$ .

**Définition 1.10**

- On dit que  $f$  admet une limite à droite  $l$  en  $x_0$  si la restriction de  $f$  à  $]x_0, b[$  admet pour limite  $l$  en  $x_0$ . On note  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$  ou  $\lim_{x > x_0} f(x) = l$ .
- On dit que  $f$  admet une limite à gauche  $l$  en  $x_0$  si la restriction de  $f$  à  $]a, x_0[$  admet pour limite  $l$  en  $x_0$ . On note  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$  ou  $\lim_{x < x_0} f(x) = l$ .

**Exemple 1.10**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

**Proposition 1.1**

- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .
- Si l'une des limites  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  n'existe pas ou s'elles existent mais elles sont différentes alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  n'existe pas.

**Exemple 1.11**

- La fonction partie entière  $E$  n'admet pas de limite en 2. En effet

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} E(x) = 2.$$

## 2.0.4 Propriétés

### Proposition 1.2

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Dans la suite, on supposera que  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $I$ , et  $x_0$  un point, fini ou infini, appartenant à  $I$ , ou extrémité de  $I$ .

### Théorème 1.1

- Si pour tout  $x \in I$   $f(x) \leq g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .

### Théorème 1.2 (Théorème des gendarmes)

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur  $I$ .

Si pour tout  $x \in I$   $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

### Exercice 1.1

Déterminer la limite de la fonction  $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$  en 0.

### Théorème 1.3

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$  alors :

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = l_1 l_2$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l_1$
4. Si de plus  $l_2 \neq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\frac{f}{g})(x) = \frac{l_1}{l_2}$ .
5. Si de plus  $\lim_{x \rightarrow l_1} g(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = l$

### Exemple 1.12

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(\frac{1}{x}) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ .

## 2.1 Tableaux des limites

Dans tout ce paragraphe,  $f$  et  $g$  sont deux fonctions,  $l_1$  et  $l_2$  désignent deux nombres réels, et  $x_0$  désigne  $+\infty$  ou  $-\infty$  ou un nombre réel.

### 2.1.1 Limite d'une somme de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$	$l_1$	$l_1$	$l_1$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =$	$l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) =$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme Ind.

Les quatre formes indéterminées de base sont exprimés sous forme abrégée par :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

**Exemple 1.13**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1 + \frac{1}{x}) = +\infty.$$

**2.1.2 Limite d'un produit de deux fonctions**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$	$l_1$	$l_1 \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =$	$l_2$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) =$	$l_1 \times l_2$	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	Forme Ind.

(\*) Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**Exemple 1.14**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x^2 \left( \frac{1}{x} - 1 \right)$ .

- On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$ . Nous sommes en présence de la forme indéterminée  $\infty \times 0$ .

Or pour tout réel  $x$  non nul,  $x^2 \left( \frac{1}{x} - 1 \right) = x - x^2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - x^2 = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

**2.1.3 Limite d'un quotient de deux fonctions**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$	$l_1$	$l_1 \neq 0$	$l_1$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =$	$l_2 \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$l_1$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f}{g} \right)(x) =$	$\frac{l_1}{l_2}$	$\pm\infty^*$	0	$\pm\infty^*$	Forme Ind.	Forme Ind.

(\*) Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**Remarque 1.3**

Au quatre formes indéterminées précédentes s'ajoutent les trois suivantes :

$$1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

qui proviennent de la limite d'une fonction de la forme  $f(x) = u(x)^{v(x)}$ .

On pose  $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$ .

**Exemple 1.15**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1.$$

**2.1.4 Limites usuelles****Propriété 1.1**

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \ln(x) = 0$$

**Exemple 1.16**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

**Propriété 1.2**

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^p e^x = 0.$$

**Exemple 1.17**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

**2.2 Continuité****Définition 1.11**

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si :  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Exemple 1.18**

1. La fonction  $f(x) = x^2$  est continue en 0, car  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  existe et  $f(0) = 0$ .
2. La fonction partie entière  $f(x) = E(x)$  n'est pas continue en 2, car  $\lim_{x \rightarrow 2} E(x)$  n'existe pas.

**2.2.1 Continuité à droite et à gauche****Définition 1.12**

- Soit  $f$  une fonction définie à droite de  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est continue à droite de  $x_0$  si et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  existe et  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .
- Soit  $f$  une fonction définie à gauche de  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est continue à gauche de  $x_0$  si et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  existe et  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

**Exemple 1.19**

1. La fonction partie entière  $f(x) = E(x)$  est continue à droite de 2, car  $\lim_{x \rightarrow 2^+} E(x) = 2$  et  $E(2) = 2$ .  
 Mais elle n'est pas continue à gauche de 2, car  $\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 1 \neq E(2)$

**2.2.2 Continuité sur un intervalle****Définition 1.13**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- Une fonction  $f$  est continue sur  $I = ]a, b[ \iff \forall x_0 \in I, f$  est continue en  $x_0$ .
- Une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b] \iff f$  est continue sur  $]a, b[$  et continue à droite de  $a$  et à gauche de  $b$ .

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe "sans lever le crayon", c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.

**Exemple 1.20**

La fonction partie entière  $f(x) = E(x)$  est continue sur chaque intervalle  $[n, n+1[$ , mais n'est pas continue en  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Théorème 1.4**

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors :

1. Les fonctions  $\alpha f + \beta g$  et  $f \cdot g$  sont continues sur  $I$ .
2. La fonction  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $I$  si  $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ .
3. La fonction  $g \circ f$  est continue sur  $I$  si  $f(I) \subset I$ .

**Exemple 1.21**

Les fonctions réelles de la variable réelle suivantes sont continues sur  $\mathbb{R}$  :

$$p(x) = \text{polynôme}, \quad f(x) = \frac{6x^4 + 2x - 5}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{\sin(x)}.$$

**2.2.3 Prolongement par continuité****Définition 1.14**

Soit  $I$  un intervalle,  $x_0$  un point de  $I$  et  $f : I \setminus \{x_0\} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction.

- On dit que  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0$  si  $f$  admet une limite finie en  $x_0$ . Notons alors  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- On définit alors la fonction  $\tilde{f} : I \mapsto \mathbb{R}$  en posant pour tout  $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Alors  $\tilde{f}$  est continue en  $x_0$  et on l'appelle le prolongement par continuité de  $f$  en  $x_0$ .

**Exemple 1.22**

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = |x| \sin(\frac{1}{x})$ . Montrons que  $f$  admet un prolongement par continuité en 0 ?

Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  on a  $-|x| \leq f(x) \leq |x|$ , donc en appliquant le théorème de comparaison on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} |x| \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**2.2.4 Théorème des valeurs intermédiaires****Théorème 1.5**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a, b]$ .

Pour tout réel  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = y$ .

**Autrement dit :** l'équation  $f(x) = y$  admet au moins une solution appartenant à l'intervalle  $[a, b]$ . Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.



**Corollaire 1.1**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a, b]$ .

Si  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ .

**Autrement dit :** l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution appartenant à l'intervalle  $[a, b]$ .

**Exemple 1.23**

Soit  $f(x) = \cos(x) - x$ . Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

On a  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $f$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

D'autre part, on a  $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$  et  $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$ . Donc  $f(0) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0$ .

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $\exists c \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $f(c) = 0$ .

**Remarque 1.4**

Si de plus, dans le Théorème 1.5 et Corollaire 1.1  $f$  est **strictement monotone** sur  $[a, b]$  alors  $c$  est **unique**.

**2.2.5 Fonction réciproque****Définition 1.15**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I = [a, b]$ . Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$ , alors  $f$  est bijective et sa réciproque  $f^{-1}$  est définie dans le cas où  $f$  est croissante par :

$$\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in [f(a), f(b)] \end{cases} \iff \begin{cases} y = f(x) \\ x \in [a, b]. \end{cases}$$

**Remarque 1.5**

- Si par exemple  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $I = ]a, b[$ , alors  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $J = ]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$ .
- Si par exemple  $f$  est strictement décroissante sur  $I = [a, +\infty[$ , alors  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $J = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$ .

**Remarque 1.6**

Le graphe  $C_{f^{-1}}$  de  $f^{-1}$  est le symétrique de  $C_f$  par rapport à la première bissectrice  $y = x$ .

**Exemple 1.24**

La fonction réciproque de  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$   
 $x \mapsto \ln(x)$   $x \mapsto \exp(x)$ .

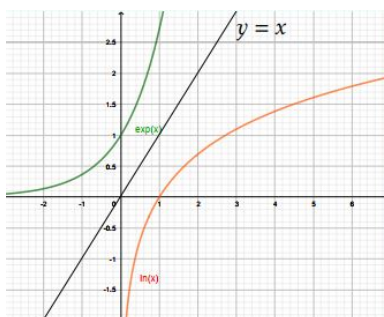


Figure 2.1:  $\exp(\cdot)$  et  $\ln(\cdot)$

### 3 Dérivée d'une fonction

#### 3.1 Généralités

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in I$ .

##### 3.1.1 Définitions

###### Définition 1.16

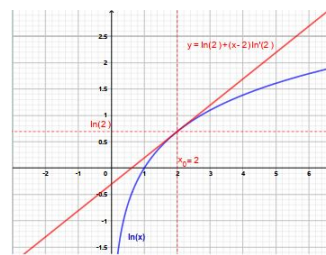
On dit que  $f$  est dérivable au point  $x_0$  si le taux d'accroissement  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ . Cette limite est appelée alors la dérivée de  $f$  au point  $x_0$  et notée  $f'(x_0)$ .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Géométriquement:** cela signifie que  $C_f$  admet au point  $M(x_0, f(x_0))$  une droite tangente d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La dérivée  $f'(x_0)$  correspond à la pente de la tangente.



###### Exemple 1.25

La tangente à la courbe de  $f(x) = 2x^2 + 1$  en  $x_0 = 2$  a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 9 + 8(x - 2) = 8x - 7.$$

###### Remarque 1.7

Physiquement, une dérivée s'interprète comme une taux instantané de croissance ou une vitesse instantanée.

###### Définition 1.17

On dit que :

- $f$  est dérivable à droite de  $x_0$  si la limite  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et finie. On note

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- $f$  est dérivable à gauche de  $x_0$  si la limite  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et finie. On note

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

###### Proposition 1.3

$f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f'_d(x_0)$  et  $f'_g(x_0)$  existent et  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ .

###### Propriété 1.3

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \implies f \text{ est continue en } x_0.$$

L'exemple suivant montre que la réciproque est **fausse**.

### Exemple 1.26

La fonction valeur absolue  $f(x) = |x|$  est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc  $f'_d(0) = 1$  et  $f'_g(0) = -1$ . Par conséquent,  $f$  n'est pas dérivable en 0.

## 3.2 Dérivabilité sur un intervalle, dérivées successives

- On dit que  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  s'elle est dérivable en tout point de  $]a, b[$ . On dit qu'elle est dérivable sur  $[a, b]$  s'elle est dérivable en tout point de  $]a, b[$ , dérivable à droite en  $a$  et à gauche en  $b$ .
- Si  $f'$  est dérivable on dit que  $f$  est deux fois dérivable, la dérivée de  $f'$  est notée  $f''$  et est appelée dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2 de  $f$ . On définit de même  $f''' = f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)} \dots$  par la formule de récurrence :  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$  et par la convention  $f^{(0)} = f$ .
- Si  $f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$  existent on dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable ou dérivable jusqu'à l'ordre  $n$ .
- $f$  est dite de classe  $C^n$  si  $f^{(n)}$  existe et est continue.
- $f$  est dite de classe  $C^\infty$  si  $f$  est de classe  $C^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3.2.1 Opérations et dérivée

#### Théorème 1.6

Soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur  $I$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors :

1.  $\alpha f + \beta g$  est dérivable sur  $I$  et on a  $\forall x \in I$  :  $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ .
2.  $f \cdot g$  est dérivable sur  $I$  et on a  $\forall x \in I$  :  $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3. La fonction  $\frac{f}{g}$  est dérivable sur  $I$  si  $\forall x \in I$ ,  $g(x) \neq 0$  et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

4.  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  si  $f(I) \subset I$  et on a  $\forall x \in I$  :  $(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$ .

#### Proposition 1.4

- Si  $f$  est paire alors  $f'$  s'il existe est impaire.
- Si  $f$  est impaire alors  $f'$  s'il existe est paire.

### 3.2.2 Dérivées des fonctions usuelles

$f$	$D_f$	$f'$	$D_{f'}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$a^x \ (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$	$\mathbb{R}$

$f$	$D_f$	$f'$	$D_{f'}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$D_f$
$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\tanh(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\mathbb{R}$

Ici  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  et  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ .

## 3.3 Étude de variation d'une fonction

### 3.3.1 Dérivée et variations

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ .

#### Théorème 1.7

- $\forall x \in I, f'(x) = 0 \iff f$  est constante sur  $I$  ( $f \equiv C^{te}$ ).
- $\forall x \in I, f'(x) \geq 0 \iff f$  est croissante sur  $I$ .
- $\forall x \in I, f'(x) \leq 0 \iff f$  est décroissante sur  $I$ .
- $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- $\forall x \in I, f'(x) < 0 \implies f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

La réciproque au point 4) (et aussi au 5)) est fausse. Par exemple la fonction  $f(x) = x^3$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  mais sa dérivée  $f'(x) = 3x^2$  s'annule en 0 (car  $f'(0) = 0$ ).

### 3.3.2 Dérivée et extremum

#### Définition 1.18

On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) relatif en  $x_0$  si :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

Si la fonction  $f$  admet un maximum ou un minimum relatif en  $x_0$ , on dit que  $f$  admet un extremum en  $x_0$ .

#### Théorème 1.8

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

- Si  $f$  admet un extremum en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .
- Si la dérivée  $f'$  s'annule en  $x_0$  **en changeant de signe**, alors  $f$  admet un extremum relatif en  $x_0$ .

#### Remarque 1.8

Dans la proposition 2. du théorème 1.8 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

Considérons la fonction  $f(x) = x^3$  qui a pour dérivée  $f'(x) = 3x^2$ .

On a  $f'(0) = 0$  et  $f'(x) > 0 \ \forall x \neq 0$ . Donc  $f$  n'admet pas d'extremum en 0.

### 3.3.3 Branches infinies et asymptotes

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

#### Définition 1.19

1. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  alors  $C_f$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  alors  $C_f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = b$ .
3. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  on recherche une éventuelle direction asymptotique en étudiant  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ .
  - i) Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  on dit qu'il y a une branche parabolique de direction asymptotique l'axe ( $Ox$ ).
  - ii) Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$  on dit qu'il y a une branche parabolique de direction asymptotique l'axe ( $Oy$ ).
  - iii) Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$  alors  $C_f$  présente une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation  $y = ax$ .
  - iv) Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$  alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à  $C_f$ .

## 3.4 Théorèmes fondamentaux

### 3.4.1 Théorème de Rolle

#### Théorème 1.9 (Théorème de Rolle)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,
- $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ ,
- $f(a) = f(b)$ .

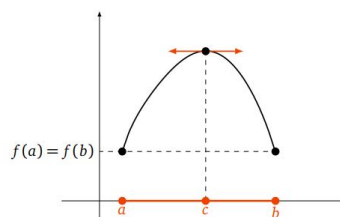
Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

#### Exemple 1.27

Soit  $P$  la fonction polynômiale définie par  $P(x) = 3x^2 - 6x + 2$ . Montrer que  $P'$  s'annule au moins une fois sur  $]0, 2[$ .

La fonction  $P$  est continue sur  $[0, 2]$  et dérivable sur  $]0, 2[$ . De plus,  $P(0) = P(2) = 2$ . Donc d'après le théorème de Rolle,  $\exists c \in ]0, 2[$  tel que  $P'(c) = 0$ .

**Géométriquement:** il existe au moins un point du graphe de  $f$  où la tangente est horizontale.



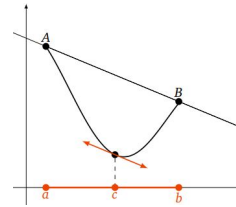
### 3.4.2 Théorème des Accroissements Finies

#### Théorème 1.10 (T.A.F.)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

**Géométriquement:** il existe au moins un point du graphe de  $f$  où la tangente est parallèle à la droite  $(AB)$  où  $A = (a, f(a))$  et  $B = (b, f(b))$ .



### Remarque 1.9

Le théorème de Rolle est un cas particulier du théorème des accroissements finies, quand  $f(a) = f(b)$ .

### 3.4.3 Règle de L'Hôpital

#### Proposition 1.5 (Règle de L'Hôpital)

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables tel que  $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \ g'(x) \neq 0$ .

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  présente l'une des formes indéterminées  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Alors, si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, on aura

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

### Remarque 1.10

Cette règle est valable aussi si  $x_0 = \pm\infty$  ou si  $x \rightarrow x_0^\pm$ .

### Exemple 1.28

- La limite de  $\frac{\sin(x)}{x}$  en 0.

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}$ , alors d'après la Règle de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

## 3.5 Fonctions trigonométriques réciproques

### Théorème 1.11

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow J$  qui admet une fonction réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$ . On suppose que  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors pour tout  $x \in J$  on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

#### 3.5.1 Fonction Arcsinus

La fonction **sinus** est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , impaire et périodique de période  $2\pi$ . Elle est continue et strictement croissante sur  $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et prend ses valeurs sur  $J = [-1, 1]$ .

Donc la restriction de **sinus** à l'intervalle  $I$  admet une fonction réciproque qui est définie, continue et strictement croissante sur  $J$ , il prend ses valeurs dans  $I$ . On l'appelle fonction **Arcsinus** et on la note arcsin. On a par définition :

$$\begin{cases} x = \arcsin(y) \\ y \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} y = \sin(x) \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

La fonction  $\arcsin$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

### 3.5.2 Fonction Arccosinus

La fonction **cosinus** est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , paire et périodique de période  $2\pi$ . Elle est continue et strictement décroissante sur  $I = [0, \pi]$  et prend ses valeurs sur  $J = [-1, 1]$ .

Donc la restriction de **cosinus** à l'intervalle  $I$  admet une fonction réciproque qui est définie, continue et strictement décroissante sur  $J$ , il prend ses valeurs dans  $I$ . On l'appelle fonction **Arccosinus** et on la note  $\arccos$ . On a par définition :

$$\begin{cases} x = \arccos(y) \\ y \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

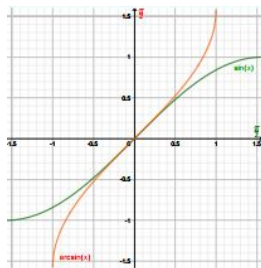


Figure 3.1:  $\sin(\cdot)$  et  $\arcsin(\cdot)$

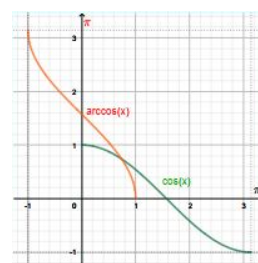


Figure 3.2:  $\cos(\cdot)$  et  $\arccos(\cdot)$

La fonction  $\arccos$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

### 3.5.3 Fonction Arctangente

La fonction tangente est définie, continue et dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$  et périodique de période  $\pi$ .

Sa restriction à l'intervalle  $I = ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est continue et strictement croissante et prend ses valeurs sur  $J = \mathbb{R}$ . Elle admet donc une fonction réciproque qui est définie, continue et strictement croissante sur  $J$ , elle prend ses valeurs dans  $I$ . On l'appelle fonction **Arctangente** et on la note  $\arctan$ . On a par définition :

$$\begin{cases} x = \arctan(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \tan(x) \\ x \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

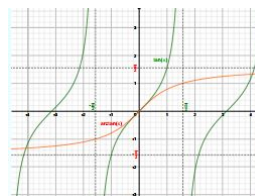


Figure 3.3:  $\tan(\cdot)$  et  $\arctan(\cdot)$

La fonction  $\arctan$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$