Chapitre 1

Fonctions numériques d'une variable réelle

1 Limites et continuite d'une fonction

1.1 Notions de fonction

1.1.1 Définition

Définition 1.1
Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, où D_f est une partie de $\mathbb{R}$. En général, D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles.
On appelle D_f le domaine de définition de la fonction f. Il se note aussi D s'il n'y a pas d'ambiguité.

Exemple 1.1

1. $f(x) = \sqrt{x-2}$ *a pour domaine de définition* $D_f = [2, +\infty[$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x+2)}$ *a pour domaine de définition* $D_f =]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$.

Le **graphe** d'une fonction $f : D \mapsto R$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid \quad x \in D\}.$$

1.1.2 Opérations sur les fonctions

Soint f et g deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$. On définit les fonctions $f+g$, fg , (λf) et $\frac{f}{g}$ par :

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in D$
2. $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ pour tout $x \in D$
3. $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in D$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in D$.

1.1.3 Parité et périodicité

Définition 1.2
Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que :

1. *f est paire si :*
$$\forall x \in D, \quad (-x) \in D \quad \textit{et} \quad f(-x) = f(x),$$
2. *f est impaire si :*
$$\forall x \in D, \quad (-x) \in D \quad \textit{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Interprétation graphique:

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine O.

Exemple 1.2

- *La fonctions sinus est impaire:* $\sin(-x) = -\sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- *La fonction cosinus est paire:* $\cos(-x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel positif. La fonction f est dite périodique de période T si

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D, \quad f(x + T) = f(x).$$

Exemple 1.3
Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. En effet,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1.1.4 Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.4
On dit que :

1. *f est constante sur D si $\exists C \in \mathbb{R}$, tel que, $\forall x \in D, \quad f(x) = C$. En particulier, f est dite nulle si $\forall x \in D, \quad f(x) = 0$*
2. *f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que, $\forall x \in D, \quad f(x) \leq M$*
3. *f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que, $\forall x \in D, \quad f(x) \geq m$*
4. *f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D.*

Exemple 1.4

1. *La fonction $f(x) = \sin(x)$ est minorée par -1 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction $f(x) = \ln(x)$ n'est ni majorée ni minorée sur $]0, +\infty[$. Donc f n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$.*

1.1.5 Fonctions croissantes, décroissantes

Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.5
On dit que :

1. *f est croissante sur D si $\forall x, y \in D, \qquad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$*
2. *f est décroissante sur D si $\forall x, y \in D, \qquad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$*
3. *Une fonction monotone est une fonction qui est croissante ou décroissante.*

Exemple 1.5

- *La fonction partie entière E est croissante sur $\mathbb{R}$.*

Définition 1.6
On dit que :

1. f *est strictement croissante sur* D *si* $\forall x, y \in D, \qquad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
2. f *est strictement décroissante sur* D *si* $\forall x, y \in D, \qquad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
3. *Une fonction strictement monotone est une fonction qui est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exemple 1.6

1. *La fonction* $f(x) = e^{-x}$ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction sinus* $f(x) = \sin(x)$ *n'est ni croissante, ni décroissante* $\mathbb{R}$. *Par contre* f *est strictement croissante sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2 Limites

La notion intuitive de limite permet de mettre en évidence le comportement d'une fonction dans les cas suivants :

- Que se passe-t-il lorsque la variable x est proche d'une certaine valeur x_0?
- Que se passe-t-il lorsque la variable x s'éloigne infiniment de 0 (limites en $+\infty$ ou en $-\infty$) ?

2.0.1 Limite en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 1.7
Soit $l \in \mathbb{R}$. *On dit que* f *a pour limite* l *en* x_0 *si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On dit aussi que $f(x)$ *tend vers* l *quand* x *tend vers* x_0. *On note* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Autrement: Tout intervalle ouvert de la forme $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de x_0.

Exemple 1.7

- $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0.$ • $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1.$

Remarque 1.1
Il n'est pas nécessaire que f *soit définie en* x_0 *pour qu'elle admet une limite en* x_0.

Exemple 1.8
La fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ *n'est pas définies en* 0. *Mais* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Définition 1.8

- *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de x_0. On note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.*
- *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0, si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de x_0. On note $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

Exemple 1.9

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

2.0.2 limite en l'infinie

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 1.9

- *On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]l - r, l + r[$ (avec $r > 0$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.*
- *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.*

Remarque 1.2

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $I =]-\infty, a[$.

2.0.3 Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 1.10

- *On dit que f admet une limite à droite l en x_0 si la restriction de f à $]x_0, b[$ admet pour limite l en x_0. On note $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$.*
- *On dit que f admet une limite à gauche l en x_0 si la restriction de f à $]a, x_0[$ admet pour limite l en x_0. On note $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$.*

Exemple 1.10

$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$, $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} = 0$

Proposition 1.1

- *Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.*
- *Si l'une des limites $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ n'existe pas ou s'elles existent mais elles sont différentes alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas.*

Exemple 1.11

- *La fonction partie entière E n'admet pas de limite en 2. En effet*

$$\lim_{x \to 2^-} E(x) = 1 \quad \lim_{x \to 2^+} E(x) = 2.$$

2.0.4 Propriétés

Proposition 1.2
Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Dans la suite, on supposera que f et g sont deux fonctions définies sur I, et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I, ou extrémité de I.

Théorème 1.1

- *Si pour tout* $x \in I \quad f(x) \leq g(x)$ *et si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Théorème 1.2 (Théorème des gendarmes)
Soient f, g *et* h *trois fonctions définies sur* I.
Si pour tout $x \in I \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *et si* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exercice 1.1
Déterminer la limite de la fonction $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ *en* 0.

Théorème 1.3
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ *alors :*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = l_1 l_2$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l_1$
4. *Si de plus* $l_2 \neq 0$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$.
5. *Si de plus* $\lim\limits_{x \to l_1} g(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$

Exemple 1.12

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin(\frac{1}{x}) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

2.1 Tableaux des limites

Dans tout ce paragraphe, f et g sont deux fonctions, l_1 et l_2 désignent deux nombres réels, et x_0 désigne $+\infty$ ou $-\infty$ ou un nombre réel.

2.1.1 Limite d'une somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) =$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme Ind.

Les quatres formes indéterminées de base sont exprimés sous forme abrégée par :

$$+\infty - \infty\,, \qquad 0 \times \infty\,, \qquad \frac{0}{0}\,, \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

Exemple 1.13
$\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 1 + \frac{1}{x}) = +\infty.$

2.1.2 Limite d'un produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$	l_1	$l_1 \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$	l_2	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) =$	$l_1 \times l_2$	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	Forme Ind.

(*) Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 1.14
Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.

- *On a $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée $\infty \times 0$.*

  Or pour tout réel x non nul, $x^2\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = x - x^2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x - x^2 = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

2.1.3 Limite d'un quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$	l_1	$l_1 \neq 0$	l_1	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$	$l_2 \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	l_1	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$\dfrac{l_1}{l_2}$	$\pm\infty^*$	0	$\pm\infty^*$	Forme Ind.	Forme Ind.

(*) Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque 1.3
Au quatre formes indéterminées précédentes s'ajoutent les trois suivantes :

$$1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

qui proviennent de la limite d'une fonction de la forme $f(x) = u(x)^{v(x)}$.

On pose $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) ln(u(x))}$.

Exemple 1.15

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1.$$

2.1.4 Limites usuelles

Propriété 1.1

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^* \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^p \ln(x) = 0$$

Exemple 1.16

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Propriété 1.2

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^* \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^p e^x = 0.$$

Exemple 1.17

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

2.2 Continuité

Définition 1.11
Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit que f est continue en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 1.18

1. *La fonction $f(x) = x^2$ est continue en 0, car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ existe et $f(0) = 0$.*
2. *La fonction partie entière $f(x) = E(x)$ n'est pas continue en 2, car $\lim\limits_{x\to 2} E(x)$ n'existe pas.*

2.2.1 Continuité à droite et à gauche

Définition 1.12

- *Soit f une fonction définie à droite de $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit que f est continue à droite de x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*
- *Soit f une fonction définie à gauche de $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit que f est continue à gauche de x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*

Exemple 1.19

1. *La fonction partie entière $f(x) = E(x)$ est continue à droite de 2, car $\lim\limits_{x\to 2^+} E(x) = 2$ et $E(2) = 2$.*
   Mais elle n'est pas continue à gauche de 2, car $\lim\limits_{x\to 2^-} E(x) = 1 \neq E(2)$

2.2.2 Continuité sur un intervalle

Définition 1.13
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- *Une fonction f est continue sur $I =]a,b[\iff \forall x_0 \in I$, f est continue en x_0.*
- *Une fonction f est continue sur $[a,b] \iff f$ est continue sur $]a,b[$ et continue à droite de a et à gauche de b .*

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe "sans lever le crayon", c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.

Exemple 1.20
La fonction partie entière $f(x) = E(x)$ est continue sur chaque intervalle $[n, n+1[$, mais n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.4
Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

1. *Les fonctions $\alpha f + \beta g$ et $f \cdot g$ sont continues sur I.*
2. *La fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I si $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$.*
3. *La fonction $g \circ f$ est continue sur I si $f(I) \subset I$.*

Exemple 1.21
Les fonctions réelles de la variable réelle suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$p(x) = \text{polynôme}, \qquad f(x) = \frac{6x^4 + 2x - 5}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{sin(x)}.$$

2.2.3 Prolongement par continuité

Définition 1.14
Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \backslash \{x_0\} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction.

- *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$*
- *On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \mapsto \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 1.22
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = |x| \sin(\frac{1}{x})$. Montrons que f admet un prolongement par continuité en 0 ?
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $-|x| \leq f(x) \leq |x|$, donc en appliquant le théorème de comparaison on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} |x| \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2.2.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.5
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Autrement dit : l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution appartenant à l'intervalle $[a, b]$. Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 1.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Autrement dit : l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution appartenant à l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 1.23

Soit $f(x) = \cos(x) - x$. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On a f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
D'autre part, on a $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$. Donc $f(0) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0$.
Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists c \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque 1.4

*Si de plus, dans le Théorème 1.5 et Corollaire 1.1 f est **strictement monotone** sur $[a, b]$ alors c est **unique**.*

2.2.5 Fonction réciproque

Définition 1.15

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a, b]$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f est bijective et sa réciproque f^{-1} est définie dans le cas où f est croissante par :

$$\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in [f(a), f(b)] \end{cases} \iff \begin{cases} y = f(x) \\ x \in [a, b]. \end{cases}$$

Remarque 1.5

- *Si par exemple f est continue et strictement décroissante sur $I =]a, b[$, alors f est une bijection de I vers $J =]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)[$.*
- *Si par exemple f est strictement décroissante sur $I = [a, +\infty[$, alors f est une bijection de I vers $J =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a)]$.*

Remarque 1.6

Le graphe $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} est le symétrique de C_f par rapport à la première bissectrice $y = x$.

Exemple 1.24

La fonction réciproque de $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x) \end{aligned}$ *est* $\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \exp(x). \end{aligned}$

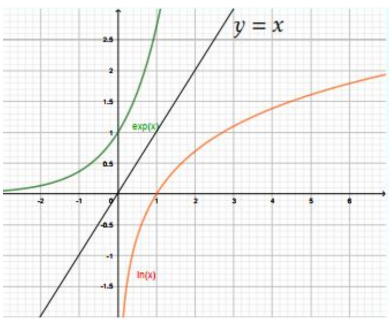


Figure 2.1: $exp(\cdot)$ et $\ln(\cdot)$

3 Dérivée d'une fonction

3.1 Généralités

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

3.1.1 Définitions

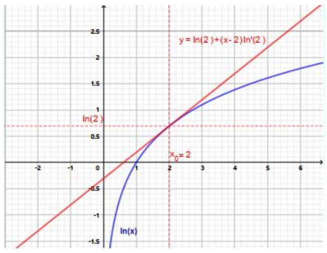
Définition 1.16
On dit que f est dérivable au point x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Cette limite est appelée alors la dérivée de f au point x_0 et notée $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Géométriquement: cela signifie que C_f admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une droite tangente d'équation

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$

La dérivée $f'(x_0)$ correspond à la pente de la tangente.



Exemple 1.25
La tangente à la courbe de $f(x) = 2x^2 + 1$ en $x_0 = 2$ a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 9 + 8(x-2) = 8x - 7.$$

Remarque 1.7
Physiquement, une dérivée s'interprète comme une taux instantané de croissance ou une vitesse instantanée.

Définition 1.17
On dit que :

- *f est dérivable à droite de x_0 si la limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. On note*

$$f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

- *f est dérivable à gauche de x_0 si la limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. On note*

$$f_g'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Proposition 1.3
f est dérivable en x_0 si et seulement si $f_d'(x_0)$ et $f_g'(x_0)$ existent et $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$.

Propriété 1.3

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \implies f \text{ est continue en } x_0.$$

L'exemple suivant montre que la réciproque est **fausse**.

Exemple 1.26

La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{-x}{x} = -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc $f_d'(0) = 1$ et $f_g'(0) = -1$. Par conséquent, f n'est pas dérivable en 0.

3.2 Dérivabilité sur un intervalle, dérivées successives

- On dit que f est dérivable sur $]a, b[$ s'elle est dérivable en tout point de $]a, b[$. On dit qu'elle est dérivable sur $[a, b]$ s'elle est dérivable en tout point de $]a, b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b.

- Si f' est dérivable on dit que f est deux fois dérivable, la dérivée de f' est notée f'' et est appelée dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2 de f. On définit de même $f''' = f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)} \cdots$ par la formule de récurrence : $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ et par la convention $f^{(0)} = f$.

- Si $f', f'', f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ existent on dit que f est n fois dérivable ou dérivable jusqu'à l'ordre n.

- f est dite de classe C^n si $f^{(n)}$ existe et est continue.

- f est dite de classe C^∞ si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2.1 Opérations et dérivée

Théorème 1.6

Soient f et g sont deux fonctions dérivables sur I, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

1. *$\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et on a $\forall x \in I$: $\quad (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.*

2. *$f \cdot g$ est dérivable sur I et on a $\forall x \in I \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$*

3. *La fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I si $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$ et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

4. *$g \circ f$ est dérivable sur I si $f(I) \subset I$ et on a $\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$.*

Proposition 1.4

- *Si f est paire alors f' s'il existe est impaire.*

- *Si f est impaire alors f' s'il existe est paire.*

3.2.2 Dérivées des fonctions usuelles

f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$a^x \quad (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$	$\mathbb{R}$

f	D_f	f'	$D_{f'}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	D_f
$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\tanh(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$	$\mathbb{R}$

Ici $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

3.3 Étude de variation d'une fonction

3.3.1 Dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

Théorème 1.7

1. $\forall x \in I$, $f'(x) = 0 \iff f$ *est constante sur* I *(*$f \equiv C^{te}$*).*
2. $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0 \iff f$ *est croissante sur* I.
3. $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0 \iff f$ *est décroissante sur* I.
4. $\forall x \in I$, $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ *est strictement croissante sur* I.
5. $\forall x \in I$, $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ *est strictement décroissante sur* I.

La réciproque au point 4) (et aussi au 5)) est fausse. Par exemple la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 (car $f'(0) = 0$).

3.3.2 Dérivée et extremum

Définition 1.18
On dit que f *admet un maximum (resp. minimum) relatif en* x_0 *si :*

$$\exists \alpha > 0 \quad \backslash \quad \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \qquad f(x) \leq f(x_0) \quad (\textit{resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

Si la fonction f admet un maximum ou un minimum relatif en x_0 , on dit que f admet un extremum en x_0.

Théorème 1.8
Soit f *une fonction dérivable sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$.

1. *Si* f *admet un extremum en* x_0*, alors* $f'(x_0) = 0$.
2. *Si la dérivée* f' *s'annule en* x_0 ***en changeant de signe****, alors* f *admet un extremum relatif en* x_0.

Remarque 1.8
Dans la proposition 2. du théorème 1.8 l'hypothèse ***en changeant de signe*** *est importante.*
Considérons la fonction $f(x) = x^3$ *qui a pour dérivée* $f'(x) = 3x^2$.
On a $f'(0) = 0$ *et* $f'(x) > 0\ \forall x \neq 0$. *Donc* f *n'admet pas d'extremum en* 0.

3.3.3 Branches infinies et asymptotes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Définition 1.19

1. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *alors* C_f *admet une asymptote verticale d'équation* $x = a$.
2. *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ *alors* C_f *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = b$.
3. *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *on recherche une éventuelle direction asymptotique en étudiant* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   - i) *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ *on dit qu'il y a une branche parabolique de direction asymptotique l'axe* (Ox).
   - ii) *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ *on dit qu'il y a une branche parabolique de direction asymptotique l'axe* (Oy).
   - iii) *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \infty$ *alors* C_f *présente une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation* $y = ax$.
   - iv) *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ *alors la droite d'équation* $y = ax + b$ *est asymptote à* C_f.

3.4 Théorèmes fondamentaux

3.4.1 Théorème de Rolle

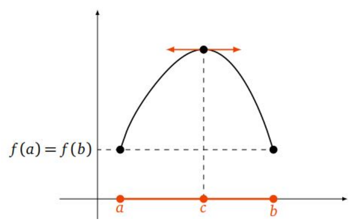
Théorème 1.9 (Théorème de Rolle)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

- f *est continue sur* $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Exemple 1.27
Soit P *la fonction polynômiale définie par* $P(x) = 3x^2 - 6x + 2$. *Montrer que* P' *s'annule au moins une fois sur* $]0, 2[$.
La fonction P *est continue sur* $[0, 2]$ *et dérivable sur* $]0, 2[$. *De plus,* $P(0) = P(2) = 2$. *Donc d'après le théorème de Rolle,* $\exists c \in]0, 2[$ *tel que* $P'(c) = 0$.

Géométriquement: il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

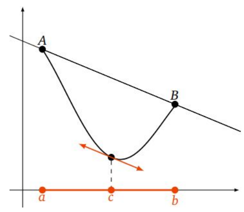


3.4.2 Théorème des Accroissements Finies

Théorème 1.10 (T.A.F.)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *Il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Géométriquement: il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Remarque 1.9

Le théorème de Rolle est un cas particulier du théorème des accroissements finies, quand $f(a) = f(b)$.

3.4.3 Règle de L'Hôpital

Proposition 1.5 (Règle de L'Hôpital)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables tel que $\forall x \in I \backslash \{x_0\}$ $g'(x) \neq 0$.

On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ présente l'une des formes indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Alors, si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, on aura

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque 1.10

Cette règle est valable aussi si $x_0 = \pm\infty$ ou si $x \to x_0^{\pm}$.

Exemple 1.28

- *La limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0.*
  Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}$, alors d'après la Règle de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

3.5 Fonctions trigonométriques réciproques

Théorème 1.11

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ qui admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$. On suppose que f' ne s'annule pas sur I, alors pour tout $x \in J$ on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

3.5.1 Fonction Arcsinus

La fonction **sinus** est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 2π. Elle est continue et strictement croissante sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et prend ses valeurs sur $J = [-1, 1]$.

Donc la restriction de **sinus** à l'intervalle I admet une fonction réciproque qui est définie, continue et strictement croissante sur J, il prend ses valeurs dans I. On l'appelle fonction **Arcsinus** et on la note $\arcsin$. On a par définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \arcsin(y) \\ y \in [-1, 1] \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \sin(x) \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \end{array} \right.$$

La fonction $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.5.2 Fonction Arccosinus

La fonction **cosinus** est définie et continue sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2π. Elle est continue et strictement décroissante sur $I = [0,\pi]$ et prend ses valeurs sur $J = [-1,1]$.
Donc la restriction de **cosinus** à l'intervalle I admet une fonction réciproque qui est définie, continue et strictement décroissante sur J, il prend ses valeurs dans I. On l'appelle fonction **Arccosinus** et on la note $\arccos$. On a par définition :

$$\begin{cases} x = \arccos(y) \\ y \in [-1,1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \cos(x) \\ x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

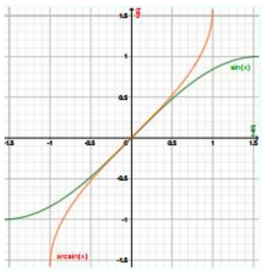


Figure 3.1: $\sin(\cdot)$ et $\arcsin(\cdot)$

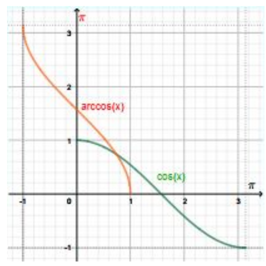


Figure 3.2: $\cos(\cdot)$ et $\arccos(\cdot)$

La fonction $\arccos$ est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.5.3 Fonction Arctangente

La fonction tangente est définie, continue et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ et périodique de période π.
Sa restriction à l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est continue et strictement croissante et prend ses valeurs sur $J = \mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque qui est définie, continue et strictement croissante sur J, elle prend ses valeurs dans I. On l'appelle fonction **Arctangente** et on la note $\arctan$. On a par définition :

$$\begin{cases} x = \arctan(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \tan(x) \\ x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

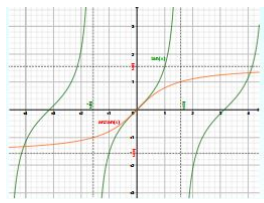


Figure 3.3: $\tan(\cdot)$ et $\arctan(\cdot)$

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$