Obliczenia naukowe
lista 5

Jacek Piwoński

1 Opis problemu

Dany jest problem polegający na rozwiązywaniu układu równań liniowych

$$Ax = b$$

dla macierzy $A \in R^{n\times n}$ i wektora prawych stron $b \in R^n$. Macierz A jest macierzą rzadką i blokową o następującej strukturze:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_2 & A_2 & C_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_3 & A_3 & C_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_{v-2} & A_{v-2} & C_{v-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_{v-1} & A_{v-1} & C_{v-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & B_v & A_v \end{pmatrix}$$

gdzie $v = n/l$ i zakładając, że n jest podzielne przez l, gdzie l jest rozmiarem wszystkich kwadratowych bloków A_k, B_k, C_k. $A_k \in R^{l\times l}$ jest macierzą gęstą, 0 jest kwadratową macierzą zerową stopnia l, macierz $B_k \in R^{l\times l}$ jest następującej postaci:

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1^k \\ 0 & \cdots & 0 & b_2^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_l^k \end{pmatrix}$$

a $C_k \in R^{l\times l}$ jest macierzą diagonalną:

$$C_k = \begin{pmatrix} c_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_l^k - 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_l^k \end{pmatrix}$$

Dane są następujące polecenia:

1. Napisać funkcję rozwiązującą układ $Ax = b$ metodą eliminacji Gaussa
2. Napisać funkcję wyznaczającą rozkład LU macierzy A metodą eliminacji Gaussa
3. Napisać funkcję rozwiązującą układ $Ax = b$ metodą eliminacji Gaussa dla danego rozkładu LU.

Implementacja powyższych zadań powinna uwzględniać zarówno wariant bez jak i z wyborem elementu głównego, oraz powinna wykorzystywać fakt specyficznej postaci macierzy.

2 Rozwiązania

Do efektywnego przechowywania danych została wykorzystana struktura $SparseMatrixCSC$ dostępna w języku $Julia$, która przechowuje dane w skompresowanym porządku kolumnowym. W przypadku macierzy takich jak A dana w zadaniu jest to o tyle istotne, że w większości składają się z zer, więc stosowanie zwykłych tablic jest bardzo nieefektywne. Dana struktura umożliwia łatwy i szybki dostęp do wszystkich elementów takiej macierzy.

2.1 Eliminacja Gaussa

W algorytmie eliminacji Gaussa można wydzielić dwa zasadnicze etapy. W pierwszym zerujemy w kolejnych iteracjach elementy znajdujące się pod przekątną. W danym przypadku warto zwrócić uwagę na to, że znamy dokładną budowę macierzy i ta budowa umożliwia nam znaczne zmniejszenie zakresów, po jakich algorytm będzie iterował. Dla danych n - wielkość macierzy, l - wielkość pojedynczego bloku w macierzy oraz możemy ustalić granicę dla kolumn:

$$min\{n, row + l\}$$

oraz dla wierszy:

$$min\{n, l + l * |\frac{column}{l}|\}$$

. Drugim etapem jest podstawianie wstecz gdzie korzystamy ze wzoru:

iterując po całej macierzy od samego dołu. W tym wypadku również można ograniczyć zakres iteracji dzięki czemu po przyjęciu, że l jest stałe, otrzymujemy funkcję o złożoność $O(n)$. Wariant wyboru elementu głównego różni się jedynie tym, że wybiera w danym momencie wiersz, dla którego wartość $\|a_{ij}^k\|$ jest w danej iteracji największa. Pozwala to używać algorytmu w przypadkach gdy na przekątnej występują zera(standardowa wersja nie pozwala na to).

2.2 Rozkład LU

W rozkładzie LU korzystamy w dużej mierze z algorytmu z poprzedniego podpunktu. Różnica jest taka, że nie zerujemy elementów pod przekątną a uzupełniamy je tzw. mnożnikami, które wyliczamy ze wzoru:

$$multiplier_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_i i}$$

W rezultacie otrzymamy dwie macierze zapisane na jednej, gdzie jedna znajduje się od przekątnej w górę, a druga pod przekątną (do tej należy jeszcze przekątna złożona z samych jedynek).

2.3 Eliminacja Gaussa z rozkładu LU

3 Wyniki

n	16	10000	50000
Gauss	3.764642516196825^{-15}	6.601103276235578^{-14}	2.985915849811188^{-14}
Gauss*	5.019079962760611^{-16}	3.8352702191602213^{-16}	4.1456863517183594^{-16}
LUGauss	3.6912828624410226^{-15}	7.997607911218936^{-14}	2.6390293711611795^{-14}
LUGauss*	4.886873367543069^{-16}	3.8612145848957116^{-16}	4.1975093875529163^{-16}

*wariant z wyborem elementu głównego

4 Wnioski

Analizując wyniki można dojść do wniosku, że jeśli priorytetem jest dokładność wyników to najlepszą opcją jest zastosowanie algorytmu eliminacji Gaussa w wariancie z wyborem elementu głównego jako, iż jest on o $1 - 2$ rzędy wielkości dokładniejszy. Nie ma tutaj znaczenia natomiast czy korzystamy z algorytmu przyjmującego rozkład LU czy też nie, ponieważ rozbieżności są marginalne (wyniki są tego samego rzędu).