Estudi del Mètode Schulze

Mireia Mauricio, Martí Gimeno, Àlex Gómez i Marc Homs

***Abstract*—Buscant aprofundir en el mètode de Schulze, s'ha elaborat un treball que arriba al rerefons de les votacions, fent-se preguntes sobre eleccions i matemàtica. La relació entre aquests conceptes es troba analitzant tant criteris com mètodes d'elecció. Finalment, s'aboquen tots els coneixements reunits en un programa que busca facilitar la comprensió i divulgació del mètode que és, actualment, el referent en quant a presa de decisions col·lectives.**

I. Introducció

Des dels inicis de la societat, ens hem vist amb la necessitat de prendre decisions col·lectives i de formar un òrgan representatiu per a totes les tasques humanes que puguem arribar a imaginar: des de l'elecció del cap de la tribu, encarregat de la relació entre pobles, fins a la formació de l'actual Parlament de Catalunya. I és que la representació de col·lectius és quelcom intrínsecament relacionat amb l'ésser humà, ja que no comprendríem el comportament dels mateixos sense ells. És lògic pensar, que un tema tan comú en la vida d'un humà en societat, porti controvèrsia i sigui un tema de discussió molt freqüent.

Les decisions i els mètodes emprats per a l'elecció de representants eren, en un principi, absolutament intuïtius. Ara bé, ja a l'antiga Grècia i Roma van detectar que, triar un representant, no era tan senzill quan hi havia més de dues opcions. Ho mostraren amb un problema que ha passat a la història amb una moralina molt clara: l'opció més votada pot ésser, alhora, la més indesitjada. Tal contradicció representativa va obrir les portes a altres mètodes que intenten ser més justos.

Actualment per a considerar un mètode com a just, cal que acompleixi unes condicions prefixades. Un dels mètodes que en satisfà més és el conegut mètode de Schulze, el qual acompleix gairebé la totalitat d'aquestes. És per aquest motiu que hem decidit fer-ne un estudi exhaustiu i centrar-nos, per tant i de manera indirecta, en el problema de la presa de decisions col·lectives.

II. Objectius

S'ha volgut donar un enfoc transversal a aquest treball, és per això que els objectius són diversos i aborden múltiples disciplines.

Per començar, s'ha fet un estudi exhaustiu del mètode de Schulze, que permet entendre el sistema donat que, a priori, no és senzill. La comprensió del sistema és un dels objectius claus sobre el qual pivota tot el treball. Entendre el mètode implica conèixer els punts forts i febles, tot buscant tant teoria com exemples.

El mètode de Schulze és complicat, no només d'entendre sinó també de computar. Un altre objectiu és, per tant, facilitar-ne el càlcul i dissenyar un programa versàtil que permeti extreure resultats ràpids i entenedors donada una matriu d'entrada.

Es vol donar una dimensió addicional al treball fent arribar el programa mitjançant la publicació del codi en una pàgina web plena d'aportacions. D'aquesta forma es fa una col·laboració a la comunitat.

III. El mètode de Schulze [4]

El mètode de Schulze va ser ideat per Markus Schulze el 1997 i va ser originalment dissenyat per a proclamar un únic guanyador a partir de vots preferencials. Tot i així, el mètode també aporta informació sobre la gradació de les diferents opcions de la mateixa votació.

El mètode de Schulze és utilitzat per diferents entitats força conegudes, tals com Debian, Ubuntu, Wikipedia i Gentoo, per a fer votacions internes.

A. Butlleta

La butlleta i la forma d'expressar les preferències són el que fan, d'aquest mètode, una alternativa fresca als mètodes usats fins ara.

A la butlleta s'hi troben les n opcions amb un requadre al costat on s'hi expressa la preferència d'opcions des de l'1, essent la preferència més alta, fins a n, essent l'opció menys desitjada. Hi ha, però, diferents possibilitats de vot:

- Donar la mateixa preferència a dues o més opcions.
- No pronunciar-se sobre alguna o algunes de les opcions. Aquest fet s'interpreta de manera que les opcions no mencionades es troben immediatament per sota de l'opció amb la pitjor valoració feta.

B. Recompte

Actualment, en el mètode de Schulze, hi ha un front obert a discussió ja que hi ha certs aspectes que generen controvèrsia en el recompte dels vots perquè modificarien els resultats finals. El problema apareix quan l'expressió de preferències no es fa de manera complerta, és a dir, quan el votant no es pronuncia sobre totes les opcions, ja que llavors es podria interpretar que les opcions sobre les quals no s'ha pronunciat tenen la mateixa preferència, o bé, ignorar-les.

També s'ha de tenir en compte el fet que pugui haver-hi empats i la manera de considerar-los, és a dir, existeix tant la proposta d'assignar mig vot a cada opció empatada com la de no assignar cap valor a l'empat.

Hi ha dues vessants del mètode de Schulze: el primer és conegut com el "mètode dels màxims" i utilitza el valor més gran d'entre dues opcions de la taula de comparació per parelles per tal de generar el graf de Schulze, és a dir, si A guanya a B 25 a 20 s'utilitza el valor 25; en canvi, el segon mètode anomenat "mètode de la resta" empra la diferència dels valors del nombre de vots d'A i B.

En cas que tots els vots estiguin definits, és indiferent l'ús del mètode de la resta o el mètode dels màxims com es mostra en la Proposició 1.

En canvi, en cas contrari, quan no tots els vots tenen perquè estar definits, utilitzar mètodes diferents pot provocar que els resultats no siguin coincidents. En aquest treball s'ha decidit utilitzar el mètode dels màxims.

C. Mètodes

Per començar, s'introduirà el mètode de màxims el qual diu que, siguin $n \in \mathbb{N}$ el nombre d'opcions, es defineixen com a E_i amb $i \in \mathbb{N}_n$ les diferents opcions a vot.

Sigui $d[E_i, E_j]; i \neq j$ el nombre de votants que prefereixen E_i per sobre de E_j.

Es defineix el conjunt de camins de E_i a E_j com: $C_{i,j} \equiv \{C_s | s \in \mathbb{N}_m\}$ on es defineix C_s com una seqüència d'opcions $C(1)...C(r)$ tal que:

- $C(1) = E_i, C(r) = E_j$
- $\forall k \in \mathbb{N}_{r-1}, \quad d[C(k), C(k+1)] > d[C(k+1), C(k)]$

Un camí C_s té força p_s si

- $\forall k \in \mathbb{N}_{r-1}, \quad d[C(k), C(k+1)] \geq p$
- $\exists k \in \mathbb{N}_{r-1}, \quad d[C(k), C(k+1)] = p$

A partir d'aquí, es defineix un "Camí preferent" entre E_i i E_j com a C_g tal que $p_g \geq p_s \quad \forall s \in \mathbb{N}_m$

Ara es denota la força entre E_i i E_j com $p[E_i, E_j]$

$$p[E_i, E_j] \equiv p_g$$

S'anomena la matriu de resultats com la matriu $S_1 \in M_n(\mathbb{Q})$ tal que $[S_1]_{ij} = p[E_i, E_j]$ si $i \neq j$ i $[S]_{ij} = 0$ si $i = j$.

Llavors es diu que E_i és millor que E_j, si i només si, $p[E_i, E_j] \geq p[E_j, E_i]$.

A més, es diu que l'opció E_i és una possible guanyadora, si i només si, $p[E_i, E_j] \geq p[E_j, E_i], \quad \forall j \neq i$.

És possible demostrar que la relació de ser millor entre dues opcions és transitiva. Conseqüentment, es pot garantir que, com a mínim, hi haurà un possible guanyador. Si només n'hi ha un de possible, llavors es diu que és el guanyador.

És possible, però, que hi hagi més d'un guanyador. Llavors s'ha de buscar un altre mecanisme per resoldre aquest empat. El mateix Schulze ja va proposar diferents mètodes per aconseguir-ho [4]. En aquest treball, però, no es tractaran aquest casos.

L'altre mètode, ja esmentat anteriorment, és el mètode de restes. Per tal d'utilitzar-lo cal, en primer lloc, definir $d'[E_i, E_j]; i \neq j$ com el nombre de votants que prefereixen E_i a E_j. Llavors es defineix $d[E_i, E_j] \equiv d'[E_i, E_j] - d'[E_j, E_i]$. Després d'aquest primer pas, el mètode continua exactament igual que el mètode de màxims.

1) Mètode d'ordenació d'opcions: En cas que es vulgui conèixer l'ordenació de totes les opcions, en lloc d'obtenir només un únic guanyador, cal aplicar el mètode de la mateixa manera però afegint-hi la repetició del següent algoritme recursivament $\forall j \in \mathbb{N}_{n-1}$, a continuació.

Sigui E_i l'opció en la posició j, llavors es considera la matriu $S_{j+1} = S_j^{ii}$ on $S_j^{ii} \in M_{n-j}(\mathbb{Q})$ denota la matriu que es forma a l'eliminar la fila i i la columna i de la matriu S_j. Llavors se sap que $\exists k \in \mathbb{N}_{n-j}$ tal que $[S_{j+1}]_{ks} = p[E_{k'}, E_{s'}] \geq [S_{j+1}]_{sk} = p[E_{s'}, E_{k'}]$ $\forall s \in \mathbb{N}_{n-j}$. Si hi ha un únic k que compleix aquesta condició, es diu que $E_{k'}$ ocupa la posició $j+1$. En cas que hi hagi més d'una opció, s'utilitzarà un mètode per resoldre empats i trobar la k guanyadora d'entre aquestes. Així doncs, l'opció $E_{k'}$ corresponent ocupa la posició $j+1$.

Proposició 1. *Si les butlletes són complertes, el conjunt format pels possibles guanyadors és independent del mètode aplicat (mètode dels màxims o mètode de la resta).*

Demostració. Considerant la notació ja explicada pel mètode de màxims, se sap que, al tenir vots complerts, $d[E_i, E_j] + d[E_j, E_j] = m$ on m representa el nombre de votants, per tant, $d[E_j, E_i] = m - d[E_i, E_j]$. Sent ara $f[E_i, E_j] = d[E_i, E_j] - d[E_j, E_j] = d[E_i, E_j] - (m - d[E_i, E_j]) = 2d[E_i, E_j] - m$.

Si s'utilitza el mètode de màxims, l'algoritme s'executa pels diferents $d[E_i, E_j]$. En cas contrari, si s'utilitza el mètode de restes, el paper dels $d[E_i, E_j]$ el fan els diferents $f[E_i, E_j]$.

Llavors s'observa que $\forall i, j, k, l \quad f[E_i, E_j] \geq f[E_k, E_l] \Leftrightarrow 2d[E_i, E_j] - m \geq 2d[E_k, E_l] - m \Leftrightarrow d[E_i, E_j] \geq d[E_k, E_l]$. Per tant, $f[E_i, E_j] \geq f[E_j, E_i]$ $\forall i \neq j$, si i només si, $d[E_i, E_j] \geq d[E_j, E_i]$ $\forall i \neq j$ i es conclou que una opció E_i és una possible guanyadora en el mètode de restes, si i només si, també és un possible guanyador en el mètode de màxims. És més, és evident que, en el cas que no es busqui un únic guanyador sinó una ordenació de les opcions, aquesta tampoc dependrà del mètode utilitzat.

□

D. Exemple

Per tal d'entendre el mètode de Schulze, la millor manera és utilitzant un cas particular.

Es disposa doncs de 5 opcions i 100 votants. S'anomena les opcions A, B, C, D, E i cada votant ha d'ordenar-les de major preferència a menor. A continuació es fa el recompte i s'obtenen els següents resultats, mostrats a la Taula I:

A	25	23	16	12
21	B	35	28	35
19	27	C	12	26
21	32	29	D	30
20	24	36	22	E

Taula I: Votacions Exemple

A partir d'aquesta taula comparativa de votacions és possible construir el graf de Schulze mostrat a la Figura 1. Aquest es genera comparant per parelles les opcions i agafant únicament el valor guanyador de l'emparellament, el qual serà indicat pel sentit de la fletxa i la intensitat del camí. Per exemple: si s'observa la parella $A - B$, es veu que A guanya a B 25 vegades i que B guanya a A 21 vegades. Així doncs, el sentit de la unió entre A i B serà A, com a origen, i B, com a arribada, i tindrà una intensitat de 25 vots.

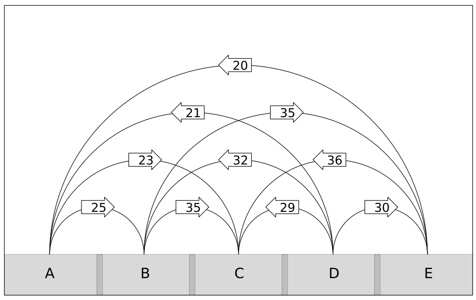

Figura 1: Graf Exemple

A partir del graf de Schulze es pot extreure la taula de Schulze, la qual determina la classificació de les opcions. Per omplir la taula s'ha d'anar des de cada opció fins a cadascuna de les altres per mitjà dels camins que permeten la circulació, en el sentit que indica la fletxa. De cada camí possible que uneix les opcions, s'agafa el valor mínim de les unions entre les opcions per les quals es passa. Dels diferents valors mínims dels camins, s'agafa el de valor màxim. Aquest serà el que s'introdueix a la taula de Schulze i s'indicarà, a posteriori, als resultats. A continuació es mostra, a la Figura 2, Figura 3, Figura 4 i Figura 5, un exemple dels camins de l'opció A:

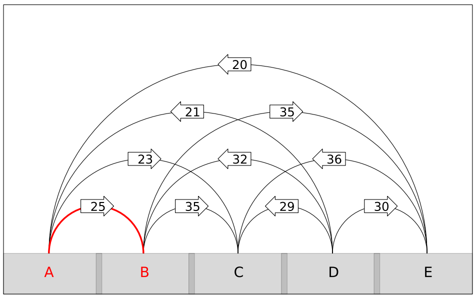

Figura 2: Camí de A a B

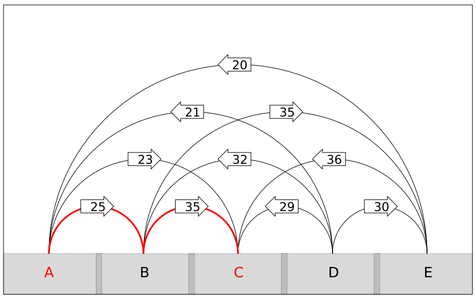

Figura 3: Camí de A a C

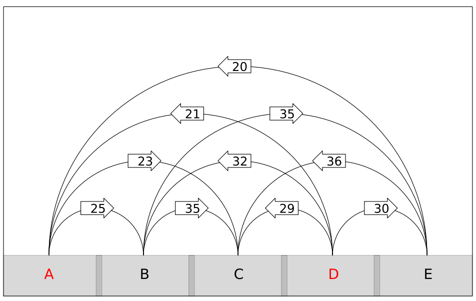

Figura 4: Camí de A a D (No n'hi ha)

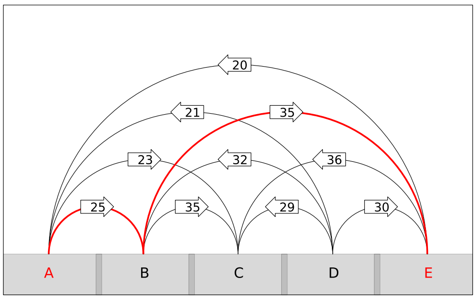

Figura 5: Camí de A a E

I a continuació es construeix la taula a partir dels valors mínims de cada camí, mostrada a la Taula II:

A	25	25	-	25
20	B	35	-	35
-	-	C	-	-
21	32	32	D	32
20	20	36	-	E

Taula II: Schulze Exemple

S'observa que hi ha un empat entre les opcions A i el C ja que tenen el mateix nombre de victòries. Aquest és un exemple de votació estudiada amb el mètode de Schulze.

IV. Criteris fonamentals

Existeixen diverses característiques que determinen la consistència dels sistemes d'elecció entre diferents opcions. Cada característica aporta una propietat diferent al sistema. Algunes característiques són molt difícils de satisfer i el fet d'imposar-les no permet que altres propietats més bàsiques s'acompleixin.

Es considera que un sistema de votacions ha d'acomplir els següents criteris bàsics:

1) Determinista
   Aquest criteri el satisfan tots els sistemes d'eleccions que, tenint dues votacions amb exactament els mateixos vots, tenen els mateixos resultats. És a dir, si es repeteixen les eleccions i els votants no modifiquen el seu vot, aquest criteri garanteix que el resultat ha de ser igual en les dues votacions.
2) No-dictatorial
   Aquest criteri el satisfan tots els sistemes de votacions que no només tenen en compte el vot d'un sol votant sense considerar cap dels altres

vots. Si un sistema no acompleix aquest criteri, es diu que és dictatorial.

3) Domini no-restringit
Aquest criteri el satisfan tots els sistemes de votacions que permeten total llibertat en l'ordenament de les opcions.

A. Criteris que satisfà

1) Criteris d'elecció d'un únic guanyador:

- Criteri de la majoria
Els sistemes d'eleccions que acompleixen aquest criteri garanteixen que, si una opció és la preferida per més del 50% dels votants, aquesta serà la guanyadora de les eleccions.
De la mateixa manera, existeix el criteri del perdedor de la majoria el qual afirma que, si més del 50% dels vots li atorguen l'última opció, llavors aquesta opció no serà la guanyadora.

- Criteri de la majoria mútua
Els sistemes d'eleccions que acompleixen aquest criteri garanteixen que, si existeix un subconjunt d'opcions tal que més del 50% dels votants prefereixen cadascuna de les opcions situades dins d'aquest subconjunt per sobre de les opcions de fora, aleshores el guanyador formarà part del primer subconjunt. És a dir:
Sigui O el conjunt d'opcions de vot i V el conjunt de votants, llavors un mètode acompleix el criteri de la majoria mútua si, en cas que $\exists T \subseteq O$ i $\exists B \subseteq V$ tal que $|B| > \frac{|V|}{2}$ i $\forall x \in B$, x prefereix a tot $y \in T$ sobre tot $z \in T^C$, llavors sigui $a \in O$ l'opció guanyadora, $a \in T$.
S'observa que el criteri de la majoria és un cas particular d'aquest criteri, en concret quan $|T| = 1$.

- Criteri de Condorcet
Els sistemes d'eleccions que acompleixen aquest criteri garanteixen que, si una opció es compara amb cadascuna de les altres individualment i té més suport en cada cas, llavors aquesta opció serà la guanyadora de les eleccions. És a dir:
Sigui O el conjunt d'opcions, un mètode acompleix el criteri de Condorcet si, en el cas que $\exists a \in O$ tal que $d[a,b] > d[a,b]$ $\forall b \in O, b \neq a$, llavors a serà l'opció guanyadora.
De manera similar, existeix el criteri del perdedor de Condorcet el qual afirma que, si una opció es compara amb cadascuna de les altres individualment i té menys suport en cada cas, llavors aquesta opció no serà la guanyadora de les eleccions.

- Criteri de Smith
Els sistemes d'eleccions que acompleixen aquest criteri garanteixen que l'opció guanyadora es troba al conjunt d'Smith, el qual és el conjunt d'opcions més petit possible tal que qualsevol de les opcions dins del conjunt és estrictament preferida respecte les que no en formen part. Es a dir:
Sigui O el conjunt d'opcions, llavors es diu que un $T \subseteq O$ és un possible conjunt d'Smith si $\forall a \in T$ i $\forall b \in T^C$, $d[a,b] > d[b,a]$ i $T \neq \emptyset$. Sigui doncs P el conjunt dels possibles conjunts d'Smith, llavors $\exists S \in P$ tal que $|S| < |D|$ $\forall D \in P, D \neq P$ s'anomena a aquest conjunt S conjunt d'Smith.
Llavors es diu que un mètode acompleix el criteri d'Smith si, sent g l'opció guanyadora, llavors $g \in S$.

- Simetria inversa
Els sistemes d'eleccions que acompleixen aquest criteri garanteixen que, si hi ha una opció guanyadora i s'inverteix l'ordre de totes les butlletes, llavors l'opció que abans guanyava ja no ho farà.

- Criteri de participació
Aquest criteri garanteix el fet que, si en unes eleccions guanya una opció i s'afegeix una butlleta on es prefereix l'opció guanyadora abans que qualsevol altra opció, llavors el guanyador de les eleccions no pot canviar de l'opció guanyadora inicial a cap de les altres.

- Consistència
Aquest criteri garanteix que, si al dividir els vots

d'unes eleccions arbitràriament en dos o més parts i, en cadascuna d'aquestes parts guanya la mateixa opció, llavors l'opció guanyadora del conjunt de tots els vots ha de ser la mateixa que la de les parts.

- Criteri de resolució
  En general, aquest criteri garanteix que hi ha una baixa probabilitat d'empats en el resultat de les votacions. Hi ha diferents maneres d'interpretar aquest fet i d'aquí que n'hi hagi de diferents tipus:
  En la versió de Nicolaus Tideman, la resolució ha de garantir que si hi ha un empat entre guanyadors, sempre es pugui afegir una butlleta de manera que faci que el guanyador sigui únic. Aquesta interpretació és la que satisfà el mètode de Schulze.
  En la versió de Douglas R. Woodall, la resolució garanteix que la proporció d'empats tendeix a 0 quan el número de votats tendeix a infinit. Aquesta versió no la satisfà el mètode de Schulze.

2) Criteris d'ordenació d'opcions i d'elecció de guanyador:

- Criteri de monotonia
  El sistema que satisfà aquest criteri garanteix que l'augment de la posició d'una opció en una butlleta, mantenint la resta d'opcions amb les seves posicions relatives iguals, no causarà que el resultat final d'aquesta opció empitjori. Similarment, si es disminueix la seva posició a la butlleta, no podrà millorar el seu resultat final. Es a dir:
  Sigui O el conjunt d'opcions i $x, y, z \in O$, i prenent l'ordre inicial d'una de les butlletes com $y > x > z$, llavors es diu que un mètode és monòton si en substituir aquesta per una d'ordre $x > y > z$, llavors l'opció x només pot millorar o mantenir el seu resultat final.
  S'observa, però, que si el canvi de butlleta és de $y > x > z$ a $x > z > y$ llavors tot i que x millora la posició a la butlleta, el fet que l'ordre relatiu entre y i z hagi canviat, fa que ja no es tracti d'un cas de monotonia i, per tant, tot i que el sistema fos monòton, podria ser que el resultat final de x empitjorés.
  Si, a més a més d'acomplir el criteri de monotonia, el resultat final d'una opció no pot empitjorar en afegir butlletes només amb aquesta opció, llavors es dirà que el sistema és "mono-add-plump".

- Temps polinòmic
  Un algoritme és de temps polinòmic si el seu temps d'execució està acotat superiorment per una funció polinòmica segons la mesura de l'entrada. És considerat que algoritmes que no entren en aquesta categoria són intractables, és a dir, requereixen grans quantitats de temps de computació una vegada les entrades comencen a adquirir una certa mida.
  Llavors es diu que un mètode acompleix el criteri de temps polinòmic, si la seqüència de passos o algoritme que s'ha d'efectuar per obtenir es pot fer en temps polinòmic.
  Si un algoritme no dóna la solució en temps polinòmic i, tenint en compte que aquest depèn de totes les butlletes, es podria necessitar un temps força elevat per a obtenir el resultat d'unes eleccions.

- Criteri d'independència de clons [3][5]
  En primer lloc cal definir conjunt clon com a un conjunt d'opcions que tot votant ordena consecutivament (l'ordre pot variar). Es diu que un sistema d'eleccions acompleix aquest criteri si satisfà les dues característiques següents:
  - En l'ordre resultant, els elements del conjunt clon ocupen una posició consecutiva.
  - Al suprimir o afegir un element del conjunt clon en el resultat, només pot variar l'ordre relatiu dels elements d'aquest mateix conjunt.

  Es pot observar la importància d'aquest criteri en un exemple. Es pren que en una escola els alumnes han d'escollir quina activitat volen fer. Inicialment hi ha dues opcions: A, jugar a futbol, i B, ballar. Llavors, algú que prefereix la opció A, pot proposar la divisió de l'opció

B en dues opcions: B_1, ballar Hip-hop, i B_2, Breakdance. Amb un sistema electoral amb dependència de clons podria ser que, per mitjà d'aquesta divisió, s'aconseguís passar d'una majoria inicial que preferia ballar i, per tant, que era la opció guanyadora, a una victorià final de l'opció de jugar a futbol. Aquest fet es deuria a la divisió dels vots per l'opció del ball. Si s'utilitza un mètode independent de clons es pot evitar que aquesta situació pugui aparèixer.

- Votació tàctica
  En sistemes de votacions de més de dues opcions, la votació tàctica apareix quan un votant dóna suport a una opció que no coincideix amb la seva preferència sincera per tal de prevenir un resultat que no desitja. Tal com afirma el Teorema 2 (Teorema de Gibbard-Satterthwaite), un mètode lliure totalment d'estratègia serà o bé dictatorial o bé no-determinista.
  Un tipus de votació tàctica és l'anomenat vot útil en què un votant ordena una opció com a preferida encara que no ho sigui perquè té més possibilitats de guanyar que la seva preferida, per tal que no guanyi una opció encara més indesitjada.
  Un altre tipus de votació tàctica es basa en col·locar una alternativa, que podria tenir molts vots, en última posició per tal de garantir més possibilitats de guanyar a la que realment es prefereix. Aquest tipus és anomenat "burying" (sepultar o enterrar).

B. Criteris que no satisfà

1) Criteris d'elecció de guanyador:

- Criteri de Consistència
  El criteri de consistència requereix el compliment de la següent condició:
  - Si es divideixen els vots en dos o més parts arbitràriament i en cadascuna de les parts guanya la mateixa opció, el recompte total dels vots com a un sol conjunt de votacions ha de mantenir el guanyador de les parts.

  Aquesta condició també es pot expressar com:

Sigui O el conjunt d'opcions, V el conjunt de votants i $n \in \mathbb{N}$ el nombre de parts en que es divideix V. Siguin $A_i \subset V$ $\forall i \leq n$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ les diferents parts en que es divideixen els vots. Llavors es diu que un mètode és consiste si, en el cas que $x \in O$ sigui el guanyador de E_i $\forall i \leq n$, llavors x és el guanyador en V.
Així doncs, es pren un exemple amb els següents vots mostrats a la Taula III:

A	4	3	2
5	B	3	3
2	0	C	2
0	2	1	D

Taula III: Vots de la primera agrupació (Consistència).

Amb la qual es construeix el graf de Schulze, mostrat en la Figura 6

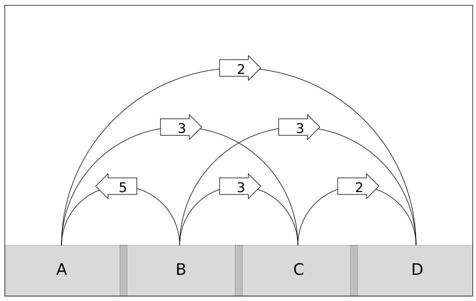

Figura 6: Graf de la taula III

I se n'extreuen els resultats mostrats en la Taula IV

A	2	3	2
5	B	3	3
2	2	C	2
-	-	-	D

Taula IV: Resultats de la primera agrupació (Consistència).

S'observa que el guanyador de la primera agrupació és la opció B.
Els resultats de la segona agrupació es mostren a la Taula V.

A	2	4	2
0	B	3	2
2	1	C	1
3	2	2	D

Taula V: Vots de la segona agrupació (Consistència).

Amb el corresponent gràfic de Schulze, mostrat en la Figura 7:

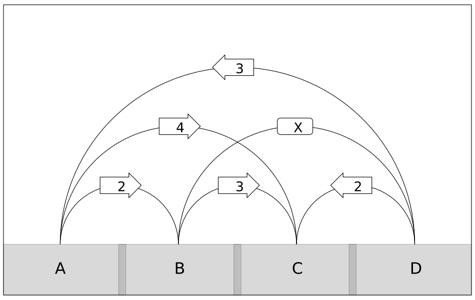

Figura 7: Graf de la taula V

I la taula de resultats, mostrada a la Taula VI:

	A	B	C	D
A	0	2	4	2
B	3	0	2	3
C	-	-	0	-
D	2	2	2	0

Taula VI: Resultats de la segona agrupació (Consistència).

S'observa que el guanyador de la segona agrupació és també l'opció B.

A continuació es mostra a la Taula VII comparativa per parelles del conjunt total dels vots.

A	6	7	4
5	B	2	6
4	3	C	2
3	2	2	D

Taula VII: Vots de la segona agrupació (Consistència).

Amb el corresponent gràfic de Schulze, mostrat a la Figura 8:

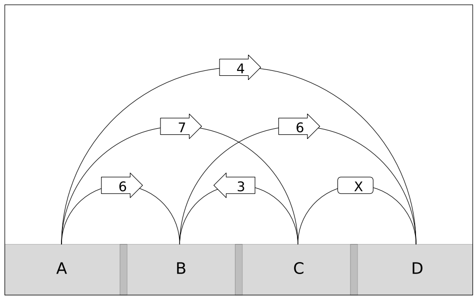

Figura 8: Graf de la taula VII

I els resultat que es veuen a continuació, mostrat a la Taula VIII:

A	6	7	4
-	B	-	6
-	3	C	-
-	-	-	D

Taula VIII: Resultats total (Consistència).

S'observa que si s'empra el conjunt complert de vots, el guanyador és A i no pas B, així doncs queda provat amb un contraexemple que el mètode Schulze no compleix el criteri de consistència.

2) Criteris d'ordenació d'opcions i d'elecció de guanyador:

- LIIA
  El criteri conegut com a $LIIA$ (local independence of irrelevant alternatives) o independència d'alternatives irrellevants requereix el compliment de les condicions explicades a continuació:
  - Si l'opció que resulta en última posició és eliminada, l'ordre relatiu de la resta de preferències s'ha de conservar.
  - Si l'opció guanyadora és eliminada, la posició relativa de les opcions restants ha de mantenir-se invariant.

  El criteri de $LIIA$ es pot expressar d'una manera equivalent i més senzilla de comprendre:
  - Si s'agafa un subconjunt de les opcions, que en el resultat de les eleccions estant ordenades consecutivament, a l'eliminar totes les altres opcions, l'ordre relatiu d'aquestes s'ha de mantenir invariant.

El mètode Schulze no acompleix el criteri $LIIA$. A continuació se n'exposa un cas a tall d'exemple:

A la Taula IX de vots preferencials entre les diferents opcions es pot observar que:

A	10	8	2
7	B	3	4
2	1	C	7
5	10	3	D

Taula IX: Comparativa de vots($LIIA$).

A partir d'aquestes dades es crea el graf de Schulze, mostrat a la Figura 9:

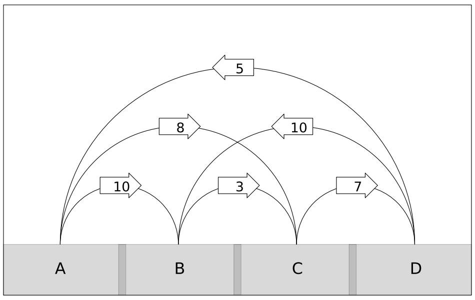

Figura 9: Graf de la taula IX

Se n'extreuen els resultats, mostrats en la Taula X:

A	10	8	7
3	B	3	3
5	7	C	7
5	10	5	D

Taula X: Resultats ($LIIA$).

Per tal de comprovar el no-compliment de la restricció de $LIIA$, i tal com es mostra a la Taula XI, s'elimina l'opció C, cosa que permet veure les diverses pertorbacions que apareixen, respecte la classificació inicial.

A	10	2
7	B	4
5	10	D

Taula XI: Modificada ($LIIA$).

Amb el corresponent graf de Schulze, mostrat a la Figura 10:

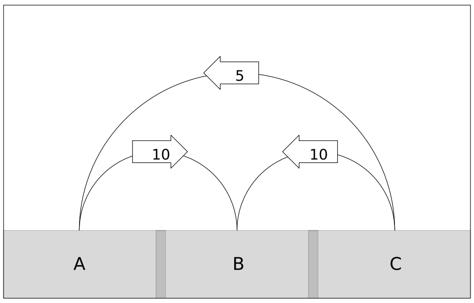

Figura 10: Graf de la taula XI

I la Taula XII de resultats:

A	10	-
-	B	-
5	10	D

Taula XII: Resultats II ($LIIA$).

Es pot comprovar que la taula de resultats mostra un clar guanyador: l'opció D. Aquesta, abans de l'eliminació de C, era la penúltima de les opcions i ara ha passat a ser-ne la guanyadora. D'altra banda, s'observa que l'A, anterior guanyador, passa a una segona posició.

- Criteri de Participació
  El criteri de participació requereix el compliment de la següent condició:
  - Si en una votació l'opció A es troba en una posició per sobre de l'opció B, a l'afegir un vot on l'opció A es trobi en una situació de preferència per davant de B, llavors A ha de seguir guanyant a B en la nova votació.

  El mètode de Schulze no acompleix tal restricció, i s'empra un exemple per tal de mostrar-ho:
  La taula de comparació queda representada a la Taula XIV

A	2	2	1
0	B	2	1
3	1	C	2
0	4	1	D

Taula XIII: Comparativa de vots (Participació).

A partir d'aquestes dades es representa el graf de Schulze, mostrat a la figura 11:

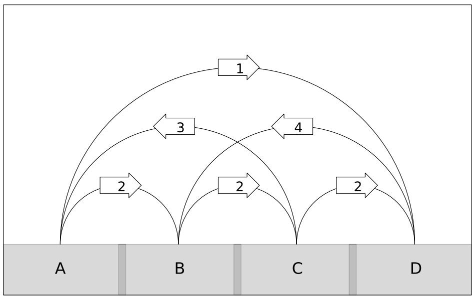

Figura 11: Graf de la taula XIII

Amb la seva corresponent Taula XIV de resultats:

A	2	2	2
2	B	2	2
3	2	C	2
2	3	2	D

Taula XIV: Resultats (Participació).

S'observa que les opcions C i D es troben empatades, amb una victòria per cap. Si es donés el cas que s'afegís una butlleta amb la següent preferència: $B > C > D > A$, la taula de votacions quedaria modificada com s'observa a la Taula XV:

A	2	2	1
1	B	3	2
4	1	C	3
0	4	1	D

Taula XV: Comparativa de vots amb la butlleta nova (Participació).

I, al tornar a representar-ne el graf mostrat a la Figura 12,:

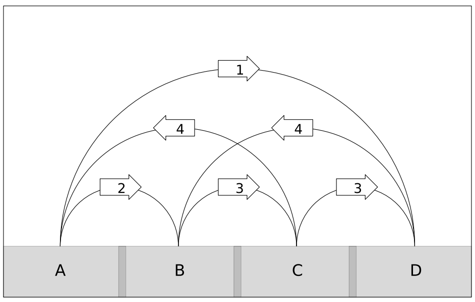

Figura 12: Graf de la taula XV

Amb la corresponent Taula XVI de resultats:

A	2	2	2
3	B	3	3
4	3	C	3
3	4	3	D

Taula XVI: Resultats modificada (Participació)

Es pot veure que, a l'afegir una butlleta on C es troba per davant de D, es provoca que D acabi per davant de C tot i que la butlleta afegida indiqui una preferència contrària al resultat final. Queda provat per mitjà d'un contraexemple que el mètode Schulze no compleix el criteri de participació.

C. *Teoremes d'impossibilitat*

Teorema 1 (Teorema d'Arrow)**.** *Cap sistema de votació per mitjà de butlletes ordenades pot crear un ordre final (complet i transitiu) de les diferents opcions i alhora acomplir tots els criteris següents: no-dictatorial, de domini no-restringit, d'eficiència de Pareto i d'independència d'alternatives irrellevants.*

Teorema 2 (Teorema de Gibbard-Satterhwaite)**.** *Cap sistema de votacions pot satisfer totes les característiques següents: no-dictatorial, determinista, no susceptible a votació tàctica i la possibilitat de què tota opció sigui susceptible de ser la guanyadora.*

Demostració. Conseqüència del Teorema d'Arrow. □

V. Implementació en Python

Per tal d'elaborar els grafs, matrius i taules del treball, s'ha dissenyat un programa que automatitza tots els càlculs. S'ha programat en el llenguatge Python, utilitzant l'ecosistema Scipy, que inclou les llibreries Numpy, Pandas i Matplotlib, les quals han ajudat al tractament de dades i creació de grafs. S'ha treballat en el medi IPython Notebook. El programa en qüestió és molt versàtil. A continuació es descriuen les diferents característiques de l'algoritme.

A. Input

Per inicialitzar el programa cal determinar els següents paràmetres que definiran els futurs passos lògics:

- Nombre d'opcions
- Mètode: Vots guanyadors o Restes
- Creació de matriu d'entrada: Manual o Aleatòria

A partir d'aquí, el programa genera una matriu $M \in M_n(\mathbb{Q})$ on n és el nombre d'opcions. La posició M_{ij} és el nombre de vots on la opció i és preferent a la j. La diagonal principal són zeros.

B. Algoritme de Floyd-Warshall

Aquest algoritme [2] permet trobar el camí més curt entre dos punts d'un graf, considerant la ponderació de cada camí, sumant el pes de cada aresta. En teoria de grafs, un camí és una combinació d'arestes que passen per diferents nodes. Fent l'analogia amb el mètode de Schulze, els nodes són les opcions $1, 2, ..., i, j, ..., n$; les arestes representen la comparació de nodes per parelles; i la ponderació de cada aresta es defineix com $max(M_{ij}, M_{ji})$.

```
for i in range(n):
 for j in range(n):
  if i != j :
   for k in range(n):
    if M[i][j] > M[i][k] + M[k][j]:
     M[j][k] = M[j][i] + M[i][k]
```

Per tal de trobar la matriu de Schulze s'ha de modificar aquest algoritme perquè no satisfà tots els requisits necessaris. La manera de recórrer la matriu seguint el mètode de Floyd-Warshall és molt eficaç i, per tant, es manté l'estructura a l'elaborar el nou algoritme. Tot i així, s'ha de canviar la última condició per tal que seleccioni el camí amb una força mínima més elevada, en comparació amb els altres camins. El codi modificat és el següent:

```
for i in range(n):
 for j in range(n):
  if i != j :
   for k in range(n):
     M[j][k] = max( M[j][k],
                    min(M[j][i], M[i][k])
                   )
```

C. Algoritme de reconeixement del camí

A l'hora d'entendre com es construeix la matriu de Schulze, és molt útil representar el camí entre cadascuna de les opcions. Per tal de fer-ho, cal donar una nova dimensió a la matriu per tal de poder emmagatzemar la informació referent al camí. Aquesta nova matriu disposa de més informació per cel·la. M_{ij} ja no és només un número, sinó que és un vector amb el valor i una seqüència de nombres que indiquen el camí.

Aquest nou algoritme recicla part del Floyd-Warshall, però aquest cop guardant i/o sobreescrivint la seqüència de números que representa el camí. Per exemple, si l'algoritme arriba a la cel·la M_{ij} i troba un camí alternatiu que passa per k, aquesta cel·la és substituïda pel valor de la força del nou camí, seguit per una nova seqüència i,k,j que substitueix el camí de i a j per un que fa un altre recorregut des de i passant per k fins arribar a j. A mesura que l'algoritme avança, comprova tots els camins d'una única aresta i hi incorpora un vèrtex entremig si ho troba convenient. A partir d'aquí hi ha camins amb una aresta i camins amb dues. El programa continua afegint vèrtexs entremig als camins que es poden substituir fins que acaba de recorre la matriu.

Per començar a aplicar el nou algoritme, s'inicialitza una matriu $D \in M_n(\mathbb{Q})$ plena de zeros i s'omple seguint els passos següents:

```
for i in range(n):
 for j in range(n):
  if i != j :
   if matriu.iloc[i,j] > matriu.iloc[j,i]:
    D[i][j] = [matriu.iloc[i,j], i, j]

   else:
```

```
    D[i][j] = [0, i, j]
```

Una vegada s'obté la matriu amb la informació inicial a cada cel·la, es pot aplicar el nucli de l'algoritme:

```
for i in range(n):
 for j in range(n):
  if i != j :
   for k in range(n):
    if i != k and j != k:
      if D[j][k][0] < min(D[j][i][0], D[i][k][0]):
       D[j][k] = [min(D[j][i][0], D[i][k][0])]

       for l in range(len(D[j][i])-1):
        D[j][k].append(D[j][i][1+l])

       for m in range(len(D[i][k])-2):
        D[j][k].append(D[i][k][2+m])
```

Com es pot veure, el codi manté la mateixa estructura, fet que fa que la matriu sigui recorreguda de la mateixa manera. Aquest cop, si s'efectua un canvi a la matriu, s'enregistra en la seqüència de números, de tal forma que després és fàcilment accessible a nous canvis o a representacions de graf.

D. *Disseny del graf*

Com s'ha dit prèviament, un graf és una representació que serveix per entendre visualment la relació entre diferents *nodes*. Normalment, els nodes s'acostumen a representar amb punts i estan el més allunyats possible els uns dels altres. Unir els nodes amb *arestes* acaba creant una estructura simètrica com es pot veure a la figura 13.

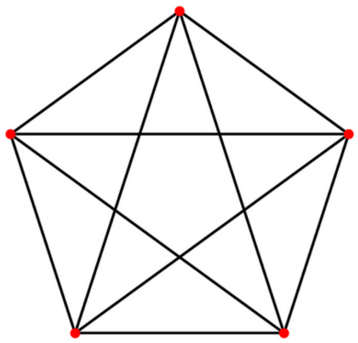

Figura 13: Graf amb cinc nodes

El graf que el programa representa ha de mostrar la següent informació:

- Distinció entre nodes, aconseguida anomenant-los (A,B,...,N).
- Arestes amb nombres, que representen els vots entre els dos nodes.
- Sentit de cada aresta, que representa quina de les dues opcions és preferida.

Si s'ha d'incorporar tanta informació en el graf, és difícil utilitzar l'estructura de la figura 13, ja que queda confusa i solapada. És per això que es dissenya un nou tipus de graf, que en facilita l'extracció d'informació.

En aquest nou graf, tots els nodes estan alineats a la part inferior de la figura, de manera que les arestes han de ser semicirculars i no rectes. Col·locant el text a la part superior de cada aresta, s'impedeix que els texts quedin solapats. Per solucionar el problema del sentit de les arestes, s'incorpora una fletxa al costat del text que indica el sentit clarament. Tots aquests canvis es veuen a la figura 14.

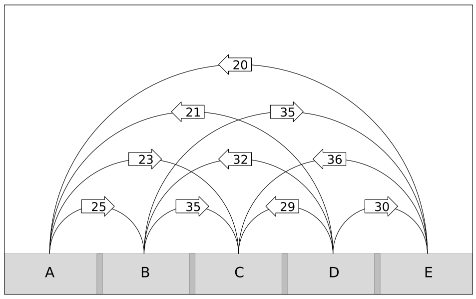

Figura 14: Disseny renovat del graf

E. *Publicació*

El programa acabat es pot trobar a:

https://nbviewer.jupyter.org/github/itsmgo/tca/blob/master/MetodeSchulze.ipynb

En aquesta pàgina es pot veure un exemple d'execució del programa. Tot i així, no és possible executar-lo ja que la pàgina no és un compilador. Per fer-ho, es necessita disposar de IPython Notebook.

GitHub és un repositori digital de codi font que permet penjar una gran quantitat de llenguatges al web i serveix com a directori web de moltes grans empreses. IPython NoteBook Viewer és una pàgina web que permet representar i compartir versions en HTML static d'arxius Notebook.

VI. Conclusions

L'estudi d'eleccions és un camp matemàtic amb aplicacions infinites. Encara es pot desenvolupar molt més, ja sigui dissenyant nous mètodes o estudiant altres criteris que aportin característiques amagades als sistemes actuals.

Després d'estudiar el mètode de Schulze del dret i del revés ens hem adonat que proporciona, al votant, una llibertat de vot molt més gran que la majoria dels altres mètodes. Això es deu al tipus de butlleta que empra. Cal tenir en compte que com més llibertat es dóna al votant, més fàcil és aconseguir que la seva opinió quedi reflectida més acuradament a l'hora de transmetre el vot. Per aquest motiu, la implementació del mètode en la vida pública podria modificar l'opinió popular que les eleccions no els representen.

En quant a l'estudi d'un mètode d'elecció, ens hem adonat que, per tal d'entendre'l, cal comprendre primer els criteris fonamentals que satisfarà o no.Això es deu al fet que, d'entrada, es tendeix a valorar un criteri per si el procediment realitzat és o no coherent amb el que entenem nosaltres com a sistema just. Un cop entesos els criteris, s'observa que són molt més que simples formalismes matemàtics, que realment tenen un sentit i que, perquè un sistema sigui aplicable amb fiabilitat, necessita, sense cap mena de dubte, el compliment del màxim dels mateixos.

Un altre aspecte que es troba en relació directa a la justícia del mètode expressada prèviament, és el fet que, gràcies a la demostració de diferents teoremes, no és possible crear un mètode que acompleixi tots els criteris. Particularment hem vist que tot mètode raonable serà susceptible a la votació tàctica. Per aquesta raó sabem que per molt bo que sigui el mètode utilitzat, la democràcia sempre haurà de confiar en la sinceritat dels votants.

Un cop vàrem començar la implementació, vam trobar dificultats amb els requisits de la matriu de Schulze. L'algoritme de Floyd-Warshall no ens acabava de servir i vam decidir modificar-lo. Gràcies a l'ecosistema Scipy, va ser força senzill tractar amb les dades. L'algoritme de reconeixement del camí és uns dels resultats més innovadors del treball. La implementació ens va permetre estudiar el mètode més ràpidament i creiem que pot ésser molt útil per a qualsevol grup que vulgui estudiar aquest mètode, ja sigui seguint les nostres passes o enfocant-lo des d'un altre punt de vista.

References

[1] Cox, Gary (1997). Making Votes Count : Strategic Coordination in the World's Electoral Systems. Cambridge University Press. p. 340.

[2] Floyd, Robert W. "Algorithm 97: Shortest Path". Communications of the ACM 5: 345, 1962.

[3] Mora, X. "Votar: no tan fàcil com sembla, però podríem fer-ho millor", 2010. `http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2010/v2010n01.pdf`

[4] Schulze, M. "A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and condorcet-consistent single-winner election method", Voting Matters, 17:9-19, 2003.

[5] Tideman, T. Nicolaus, "Independence of clones as a criterion for voting rules," Social Choice and Welfare vol 4; 3, 1987.

[6] Tideman, N. "Colective decisions and voting: The potential for public choice", Roudledge, 2006.