④ Sustitución hacia adelante

Si tenemos un sistema como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} \iff A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Sabiendo que este es un algoritmo para resolver un Sistema de ecuaciones lineales siendo A una matriz triangular inferior y con unos en la diagonal

entonces:

$$a_{11} x_1 = b_1 \longrightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$a_{22} x_2 + a_{21} x_1 = b_2 \longrightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{21} x_1}{a_{22}}$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \longrightarrow x_3 = \frac{b_3 - a_{32} x_2 - a_{31} x_1}{a_{33}}$$

Esto se puede representar como: $x_i = \left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^{j<i} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \right)$

pero si se hace $a_{ii} = 1 \quad \forall_i \in [1, n]$
entonces $x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j$

⑤ Sustitución hacia atrás.

Teniendo en cuenta que este es un algoritmo para resolver un sistema de ecuaciones lineales siendo A una matriz triangular superior.

representamos la Fila i-ésima como: $\sum_{j=1}^{n} x_j A_{ij} = b_i$

$A_{21}, A_{22}, A_{\cdot\cdot}$ serán igual a 0.

Entonces: $\sum_{j=1}^{n} x_j A_{ij} = b_i$

Al despejar tenemos:

$$x_i A_{ii} + \sum_{j=i+1}^{n} x_j A_{ij} = b_i$$

$$x_i A_{ii} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} x_j A_{ij}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} x_j A_{ij}}{A_{ii}}$$