Anki

q: Soit $\mathcal{F} = (\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ famille de n vecteurs (=ordonnée, avec potentielles répétitions), on dit que $\mathcal{F}$ est génératrice de E si:
a: Soit $\mathcal{F} = (\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ famille de n vecteurs (=ordonnée, avec potentielles répétitions), on dit que $\mathcal{F}$ est génératrice de E si:
tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n}$

$\boldsymbol{\forall x \in E, \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n}$

Anki

q: $\mathcal{F}$ génératrice $\Leftrightarrow E = ?$
a: $\mathcal{F}$ génératrice $\Leftrightarrow E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(F)$

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev et $\mathcal{F}$ famille généatrice de E alors toute **???** de $\mathcal{F}$ est génératrice :

a: $\mathcal{F}$ famille généatrice de E alors toute **surfamille** de $\mathcal{F}$ est génératrice

Éléments de preuve:
On peut annuler les nouveaux termes

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev, $\mathcal{G}$ famille génératrice de E et χ famille qqconque de vecteurs de E:
Il y a équivalence entre:
a:
1. χ famille génératrice
2. $\forall x \in \mathcal{G}, x \in \mathrm{Vect}(\chi)$

Éléments de preuve:
1 $\Longrightarrow$ 2: vects de $\mathcal{G}$ sont vect de E
2 $\Longrightarrow$ 1: on sq $x \in \mathrm{Vect}(\chi)$ et on inverse les sommes

Anki

q: Famille libre, définition
a: Soient E $\mathbb{K}$ev et $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ famille de vecteurs de E:

Cette famille est libre si $\forall(\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{n}) \in \mathbb{K}^n$:

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

("la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire triviale")

L'inverse d'une famille libre est une **famille liée**

Éléments de méthode:
Pour montrer liberté on pourra poser des $(\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{n})$ tel que la combinaison linéaire est nulle, puis prouver que $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{G}$ une surfamille de $\mathcal{F}$ vecteurs de E:
alors:
1. $\mathcal{G}$ libre $\Rightarrow$?
2. $\mathcal{F}$ liée $\Rightarrow$?

a:
1. $\mathcal{G}$ libre $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ libre
2. $\mathcal{F}$ liée $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ liée

Éléments de preuve:
1. on a déjà que la combinaison linéaire de $\mathcal{G}$ est nulle que si tous les lambdas sont nuls, or $\mathcal{F}$ est sous famille de $\mathcal{G}$ donc ok!
2. la meme chose dans l'autre sens en fait

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev, $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ famille **libre** de vecteurs de E et $x \in E$:
Il y a équivalence entre:
1. $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, x)$ liée
2. $x \in$?
3. $\exists$?

a: Équivalence entre:
1. $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, x)$ liée
2. $x \in \mathrm{Vect}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$
3. $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n} \in \mathbb{K}, x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$

Éléments de méthode:
Si on ajoute un vecteur combinaison linéaire des vecteurs précédents, la nouvelle famille formée est alors liée

Éléments de preuve:
2 $\Longleftrightarrow$ 3: définition du sev engendré (on peut décomposer élément)
1 $\Longrightarrow$ 3: liée, donc il existe des $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n}$ tels que combinaison linéaire non nulle, sq $\lambda = 0$, puis montrer contradiction **3 $\Longrightarrow$ 1:** enlever $1 * x$, et pouf c'est lié!

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev, $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ famille libre et $x \in \mathrm{Vect}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$:
alors $\exists$ unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n})$ tq **?**
a: alors $\exists$ unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n})$ tq $x = \sum \lambda_k x_k$

Éléments de méthode:
Unique décomposition

Éléments de preuve:
Existence: définition de $\mathrm{Vect}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$
Unicité: sq deux différentes, montrer contradiction

Anki

q: Base, définition
a: Famille $\mathcal{F} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n})$ de vecteurs du $\mathbb{K}$ev E est une base de E si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice

Éléments de méthode:
exemple des base canoniques, bases de référence (exemple, pour un plan orthonormé c'est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$)

Anki

q: Caractérisation de la base
a: Soit $(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ famille de vecteurs de E:
Il y a équivalence entre:
1. $(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ base de E
2. $$\forall x \in E, \exists \text{ unique } (\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{n}) \in \mathbb{K}^n \text{ tq } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

Éléments de preuve:
Unicité: liberté
Existence: génératrice

Éléments de méthode:
Le vecteur $(\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{n})$ est appelé vecteur de coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, noté $\mathrm{Mat}_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev et $\mathcal{F} = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ famille de vecteurs de E, φ l'application de $\mathbb{K}^n \longrightarrow E$ définie par $\varphi(\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{n}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$:
alors:
1. φ est ?
2. φ injective $\Leftrightarrow$?
3. φ surjective $\Leftrightarrow$?
4. φ bijective $\Leftrightarrow$?

a:
1. φ est **linéaire de** $\boldsymbol{\mathbb{K}^n \longrightarrow E}$**,** $\boldsymbol{\varphi \in L(\mathbb{K}^n, E)}$
2. φ injective $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ libre
3. φ surjective $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ génératrice
4. φ bijective $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ base

Éléments de preuve:
1. mq linéaire, comme d'hab
2. double implication, avec Ker
3. double implication
4. automatique avec 2 et 3

Anki

q: Soient E, F $\mathbb{K}$ev, $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ et $\Psi \in L(E, F)$:
alors:

1. $(\Psi(e_1), ..., \Psi(e_n))$ est famille **?** de **?**
2. Ψ injective $\Leftrightarrow$ $(\Psi(e_1), ..., \Psi(e_n))$?
3. Ψ surjective $\Leftrightarrow$ $(\Psi(e_1), ..., \Psi(e_n))$?
4. Ψ bijective/isomorphisme $\Leftrightarrow$ $(\Psi(e_1), ..., \Psi(e_n))$?

a:

1. $(\Psi(e_1), ..., \Psi(e_n))$ est famille **génératrice** de $\mathbf{Im}(\boldsymbol{\Psi})$
2. Ψ injective $\Leftrightarrow$ $(\Psi(e_1), ..., \Psi(e_n))$ **libre**
3. Ψ surjective $\Leftrightarrow$ $(\Psi(e_1), ..., \Psi(e_n))$ **génératrice**
4. Ψ bijective/isomorphisme $\Leftrightarrow$ $(\Psi(e_1), ..., \Psi(e_n))$ **base**

Éléments de preuve:
On prend $\varphi \in L(\mathbb{K}^n, E)$ tq $\varphi(\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{n}) = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$
On a déjà φ bijective car $(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ base

1. $\mathrm{Im}\,\Psi = \Psi(E) = \Psi(\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n}))$ puis linéarité ok!
2. Ψ injective $\Leftrightarrow$ $\Psi \circ \varphi$ injective (composition à gauche à droite possible par linéarité) puis utiliser proposition précédente
3. Ψ injective $\Leftrightarrow$ $\Psi \circ \varphi$ surjective
4. ok

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev, $(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ base de E et $(\mathrm{f}_1, ..., \mathrm{f}_\mathrm{n})$ famille qqconque de vecteurs de F $\mathbb{K}$ev: alors ?
a: alors **il existe une unique application linéaire u de E dans F tel que**

$$\forall i \in [\![1; n]\!], u(e_i) = f_i$$

Éléments de méthode:
Ainsi, une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base

Donco on obtient l'équivalence suivante:

$$f \text{ est l'application lineaire nulle} \Leftrightarrow f \text{ est nulle sur une base}$$

Éléments de preuve:
Unicité: sq deux, mq les memes, en passant par les vects car base génératrice
Existence: se reservir de φ de $\mathbb{K}^n \longrightarrow E, \varphi(\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{n}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, isomorphisme car $(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ base, puis créer $\Psi(\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{n}) = \sum \lambda_k f_k$ linéaire, puis se servir de $\varphi^{-1}(e_k) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, d'où $\psi(\varphi^{-1}(e_k)) = f_k$, donc $\psi \circ \varphi^{-1}$ convient

Anki

q: Dimension finie: un $\mathbb{K}$ev est de dimension finie s'il existe une ?
a: Un $\mathbb{K}$ev est de dimension finie s'il existe une **partie génératrice finie**

Sinon, c'est dit de dimension infinie

Anki

q: Si E $\mathbb{K}$ev de dimension finie, il admet ?
a: Si E $\mathbb{K}$ev de dimension finie, il admet **une base**

Éléments de preuve:
Algorithmique, on parcourt la liste en rajoutant des vecteurs si besoin pour rester libre, et ça termine

Anki

q: Soient $\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n$ n vecteurs de E $\mathbb{K}$ev et $\mathrm{y}_1, ..., \mathrm{y}_{n+1}$ vecteurs combinaisons linéaires de $\mathrm{x}_1, ...,$ x_n $(\forall i \in [\![1; n+1]\!], y_i \in \mathrm{Vect}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n))$:
alors que dire de $(\mathrm{y}_1, ..., \mathrm{y}_{n+1})$?
a: $(\mathrm{y}_1, ..., \mathrm{y}_n)$ est liée

Éléments de preuve:
Une récurrence
On fait un gros système, on peut alors échanger des lignes, on trouve un lambda non nul et on annule une autre ligne - s'ils sont tous nuls alors c'est bon

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev, $\mathcal{F}$ une famille libre de vecteurs de E et $\mathcal{G}$ famille génératrice de vecteurs de E: alors que dire du cardinal de ces familles?
a:

$$\mathrm{card}\ \mathcal{F} \leq \mathrm{card}\ \mathcal{G}$$

Reformulation:

libre $\leq$ génératrice

Éléments de preuve:
Sq $\mathrm{card}\ \mathcal{F} > \mathrm{card}\ \mathcal{G}$, contradiction car $\mathcal{F}$ libre et $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$, et que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans ce Vect, donc liée

Anki

q: Soit E $\mathbb{K}$ev de dimension finie:
Que dire du cardinal de ses bases?
a: Toutes les bases ont le meme cardinal

On appelle ce dardinal **dimension**, noté $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$ si corps à préciser)

Éléments de preuve:
Prendre deux bases qqconques, puis utiliser le fait que le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à celui d'une base génératrice

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev et $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ famille de n vecteurs de E:

Si deux des trois propriétés suivantes sont vérifiées:
1. ?
2. ?
3. ?

alors ?
a: Si deux des trois propriétés suivantes sont vérifiées:
1. $\dim E = n$
2. $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ est une famille génératrice
3. $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ est une famille libre

alors **la troisième l'est aussi et $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ est une base de E**

Éléments de preuve:
$2 \land 3 \Longrightarrow 1$: définition de la dimension
$1 \land 3 \Longrightarrow 2$: $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ non génératrice, donc $\exists y \in E \setminus \mathrm{Vect}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ et on peut donc le rajouter à $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ libre par 2, or le card d'une libre est inférieur ou égal à celui d'une génératrice, donc contradiction
$1 \land 2 \Longrightarrow 3$: sq liée, donc il existe un x_i dans le vect sans x_i, donc on peut l'enlever -> contradictoire car le card d'une libre est inférieur à card d'une génératrice

Anki

q: Soit E $\mathbb{K}$ev:
Il y a équivalence entre:
1. E a une dimension infinie
2. ?

a: Il y a équivalence entre:
1. E a une dimension infinie
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe famille libre de n vecteurs de E

Éléments de preuve:
$1 \Longrightarrow 2$: on construit suite infinie de vecteurs $(x_n)_{n \in N}$ tq $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$ par récurrence; Init: on prend $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ hérédité: la suite construite est non génératrice car E de dim infinie, donc il existe $x \in E \setminus \mathrm{Vect}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$
$2 \Longrightarrow 1$: sq E a dim finie n; toutes familles libres on cardinal au plus n, donc il n'existe par de $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_{\mathrm{n}+1})$ libre

Anki

q: Théorème de la base incomplète
a: Soient E $\mathbb{K}$ev de dimension finie et $\mathcal{F}$ famille **libre** de vecteurs de E:
alors il existe une base $\mathcal{B}$ surfamille de $\mathcal{F}$

Éléments de preuve:
Récurrence, on construit une suite libre de cardinal strictement croissant, on s'arrete quand c'est une base, majoré par la dimension de E

Anki

q: Théorème de la base extraite
a: Soient E $\mathbb{K}$ev et $\mathcal{G}$ famille génératrice finie de E:
Alors il existe $\mathcal{B}$ une base qui est sous-famille de G

Éléments de preuve:
Récurrence, en gardant les vecteurs, s'ils agrandissent l'engendré

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev de dimension finie et F sous-espace vectoriel de E:
Que dire de la dimension de F? Que dire si $E = F$?
a: F est de dimension finie, et $\dim F \leq \dim E$

De plus, on a:

$$E = F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$$

Éléments de preuve:
TODO

Éléments de méthode:
On utilise cette propriété pour montrer égalité de deux $\mathbb{K}$ev; on montre $\dim E = \dim F$ et seulement une inclusion, par exemple $F \subset E$ et cela suffit à conclure

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev et F sev de E:
alors il existe G sev de E, **?**
a: alors il existe G sev de E, **supplémentaire de F dans E avec $\dim G = \dim E - \dim F$**

Éléments de preuve:
On complète F en une base de E, avec des vecteurs $g_1, \dots, g_{n-k}$ qui formeront $G = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k})$; on a directement $\dim G = n - k$

Puis on montre que F et G sont supplémentaires, par caractérisation

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev de dimension finie et F $\mathbb{K}$ev:
Il y a équivalence entre:
1. F de dim finie et $\dim E = \dim F$
2. E et F sont **?**

a: Il y a équivalence entre:
1. F de dim finie et $\dim E = \dim F$
2. E et F sont **isomorphes**

Éléments de preuve:
1 $\Longrightarrow$ 2: Poser deux bases, utiliser $\varphi \in L(E, F), \varphi(e_i) = f_i$, unique, et l'image de $\mathcal{B}_E$ est une base donc φ isomorphisme ok!
2 $\Longrightarrow$ 1: ensembles sont isomorphes, on peut donc prendre la fonction $\varphi \in L(E, F)$ bijective; puis, $\varphi(\mathcal{B}_E) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ libre car φ injective; $F = \varphi(E) = \varphi(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$, d'où $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ libre et génératrice de F, donc base, et $\dim F = n = \dim E$

Éléments de méthode:
On sort un corollaire intéréssant: Soit E de dimension finie n, alors $E \cong \mathbb{K}^n$

Anki

q: Soient E, F 2 $\mathbb{K}$ev de dimension finie, $\mathcal{B}_E = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ base de E et $\mathcal{B}_F = (\mathrm{f}_1, ..., \mathrm{f}_\mathrm{n})$ base de F:

1. $\dim E * F = ?$
2. ? est base de $E * F$

a:

1. $\dim E * F = \dim E + \dim F$
2. $((e_1, 0_F), ..., (e_n, 0_F), (0_E, f_1), ..., (0_E, f_n))$ est base de $E * F$

Éléments de preuve:
Il suffit de montrer la deuxième propriété, la première en descend;

Montrer liberté et génératrice

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev, F, G 2 sev en somme directe et $\mathcal{B}_F = (\mathrm{f}_1, ..., \mathrm{f}_\mathrm{n})$ base de F:
alors

1. $\dim(F \oplus G) = ?$
2. ? est une base adaptée à cette somme directe

a:

1. $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$
2. $(\mathrm{f}_1, ..., \mathrm{f}_\mathrm{n}, \mathrm{g}_1, ..., \mathrm{g}_\mathrm{m})$ est une base adaptée à cette somme directe

Éléments de preuve:
Montrer liberté: on peut introduire projecteur + linéarité
Génératrice: ça s'écrit

Anki

q: Formule de Grassman
a: Soient E $\mathbb{K}$ev de dimension finie et F, G deux sev de E:

Alors $F + G$ de dimension finie, et

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Éléments de preuve:
Considérons $F \cap G$ sev de F, donc il admet un supplémentaire dans F: $F = F \cap G \oplus H$ et $\dim H = \dim F - \dim F \cap G$

Montrons que $F + G = H \oplus G$ par double inclusion:

- $\subset$ Soit $x \in F + G \Rightarrow x = x_F + x_G$; or $x_F \in F = F \cap G \oplus H \Rightarrow \exists x_{F\cap G}$ et $x_H \in H$ tq $x_F = x_{F\cap G} + x_H$, d'où
$$x = x_{F\cap G} + x_H + x_G = \underbrace{x_H}_{\in H} + \underbrace{x_{F\cap G} + x_G}_{\in G}$$
donc $x \in H \oplus G$
- $\supset$ Soit $x \in H \oplus G$, on a alors $x = \underbrace{x_H}_{\subset H \subset G} + x_G \Rightarrow x \in F + G$ et $F + G = H + G$

  Montrons alors que cette somme est directe: Soit $x \in F + G$, alors $\begin{cases} x \in H \text{ sev de } F \\ x \in G \end{cases}$, d'où $x \in F \cap G$, or $F \cap H$ et H sont en somme directe, donc $x = 0_E$ d'où H et G en somme directe

d'où $\dim F + G = \dim(H \oplus G) = \dim H + \dim G = \dim F - \dim F \cap G + \dim G$ ok

Anki

q: Définition du rang
1. pour une famille $\mathcal{F}$
2. pour une application linéaire f

a: Soit E $\mathbb{K}$ev:
1. $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ ("la dimension du sev engendré par $\mathcal{F}$")
2. $f \in L(E, F)$, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im}(f) = \dim f(E)$

Éléments de méthode:
On peut relier les deux définitions dans le cas où E est de dimension finie; Si $\mathcal{B}_E = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ base de E, $\operatorname{rg} f = \dim f(E) = \dim f(\operatorname{Vect}(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})) = \dim(\operatorname{Vect}(f(e_1), ..., f(e_n))) = \operatorname{rg}(f(e_1), ..., f(e_n))$

-> Donc le **rang d'une application linéaire est le rang de l'image d'une base**

Anki

q: Soient $E = \mathbb{K}^n$ et $(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{k})$ k vecteurs de E:
Si les vecteurs $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{k}$ sont échelonnés, alors: **?**
a: Si les vecteurs $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{k}$ sont échelonnés, alors: $\mathbf{rg}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\mathbf{k}) = \boldsymbol{k}$

Éléments de preuve:
On fait une récurrence descendante, en créant une base - Cf cours

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev et $(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n})$ famille de vecteurs E:
Quelles sont les opérations possibles sur les vecteurs u_i tels que les rangs restent les memes?
a:

1. $\forall i, j \in [\![1; n]\!], u_i \longleftrightarrow u_j$
2. $\forall i \in [\![1; n]\!], \alpha \in \mathbb{K} * n, u_i \longleftarrow \alpha u_i$
3. $\forall i \neq j \in [\![1; n]\!], \lambda \in \mathbb{K}, u_i \longleftarrow u_i + \lambda u_j$

Éléments de méthode:
Cela permet de se ramener au cas où les vecteurs sont échelonnés

Éléments de preuve:

1. sommes des vecteurs sont commutatives, donc on remet dans l'ordre dans le Vect
2. double inclusion des vects + expression du nouveau coefficient en fonction de l'ancien
3. double inclusion, formule de Bel

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev, $f \in L(E, F)$ et E_0 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E:
alors
a: alors E_0 et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphes et $f_{|E_0}$ induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} f$

Éléments de méthode:
Cette méthode de preuve pour le théorème du rang est aussi appelée théorème du rang géométrique

Éléments de preuve:
On a $E = \operatorname{Ker} f \oplus E_0$ par hypothèse, et $\varphi = f_{|E_0}^{|\operatorname{Im} f} \in L(E_0, \operatorname{Im} f)$;

mq φ isomorphisme (deux doubles inclusions)

- injective car $x \in \operatorname{Ker} f \cap E_0 = \{0\}$ (par la restriction de phi à E_0) car $\operatorname{Ker} f \oplus E_0$
- puis surjective ($E_0 \subset E, \varphi(E_0) = f(E_0) \subset E = \operatorname{Im} f$, et pour l'autre sens décomposer un x par $x_{\operatorname{Ker} f} + x_{E_0}$)

Anki

q: Théorème du rang
a: Soient E $\mathbb{K}$ev de dimension finie, F $\mathbb{K}$ev et $f \in L(E, F)$:
alors $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

Éléments de preuve:
Méthode 1: utiliser une base
Méthode 2: $\operatorname{Ker} f$ admet un supplémentaire dans E, E_0; la dimension est finie, donc $\dim E_0 = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$; de plus, E_0 et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphes, donc $\dim E_0 = \dim \operatorname{Im} f$ et comme la dimension est finie $\dim E_0 = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, d'où $\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev, $f \in L(E, F)$ et $\dim E = \dim F$:
alors que dire de l'injectivité/surjectivité/bijectivité de f?
a: On a

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Éléments de preuve:
1 $\Longrightarrow$ **2**: on a f surjective, donc $f(E) = F = \operatorname{Im} f$, d'où par le théorème du rang, $\dim E = \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f \Rightarrow \dim E = \dim F + \dim \operatorname{Ker} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} F = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \Rightarrow f$ injective
2 $\Longrightarrow$ **1** :: on a donc $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, d'où par le th du rang $\dim \operatorname{Im} f = \dim E = \dim F$, inclusion et égalité des dimensions, donc $\operatorname{Im} f = F$, d'où f surjective

Anki

q: Soient E, F, G $\mathbb{K}$ev, $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$:
alors
1. $\operatorname{Im} g \circ f$ **?**
2. $\operatorname{Ker} g \circ f$ **?**

a:
1. $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$
2. $\operatorname{Ker} g \circ f \supset \operatorname{Ker} f$

Éléments de preuve:
1. trivial
2. linéarité de g nous done que $g(0_F) = 0_G$, et trivial

Anki

q: Soient E, F, G $\mathbb{K}$ev de dimension finie, $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$:
alors

1. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq ?$
2. si f surjective, $\operatorname{rg}(g \circ f) = ?$
3. si g injective, $\operatorname{rg}(g \circ f) = ?$

a:

1. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$
2. si f surjective, $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$
3. si g injective, $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$

Éléments de preuve:

1. $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g \Rightarrow \dim \operatorname{Im} g \circ f \leq \dim \operatorname{Im} g$, càd $\operatorname{rg} g \circ f \leq \operatorname{rg} g$
De plus, $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f \leq \dim \operatorname{Ker} g \circ f$
Par le théorème du rang, $\dim E - \dim \operatorname{Im} f \leq \dim E - \dim \operatorname{Im} g \circ f$ donc $\dim \operatorname{Im} g \circ f \leq \dim \operatorname{Im} f$, d'où $\operatorname{rg} g \circ f \leq \operatorname{rg} f$
2. $f(E) = F$, donc $g \circ f(E) = g(F) \Rightarrow \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \Rightarrow \operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$
3. considérer $g_{|\operatorname{Im} f}$, puis théorème du rang et $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$, or $\dim \operatorname{Ker} g = 0$ car g injective. d'où $\dim \operatorname{Im} f = \dim g \circ f(E)$, ok

Anki

q: Hyperplan définition
a: Soient E un $\mathbb{K}$ev et H sev de E:
H est un hyperplan de E s'il existe φ une forme linéaire non nulle telle que

$$H = \operatorname{Ker} \varphi$$

Éléments de méthode:
En dimension finie, si $\dim E = n$, comme φ non nulle, $\operatorname{Im} \varphi \neq \{0\}$, or $\operatorname{Im} \varphi \in \mathbb{K}$ d'où $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{K}$; par le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \operatorname{Ker} \varphi = 1 + \dim \operatorname{Ker} \varphi$ d'où $\boldsymbol{\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E - 1 = n - 1}$

Anki

q: Soit H hyperplan de E:
Que dire du supplémentaire de H?
a: Les supplémentaires de H sont de **dimension 1**

De plus, $\forall u \in E \setminus H, E = H \oplus \mathbb{K}u$

Éléments de preuve:
Si H hyperplan, $\exists \varphi \in L(E, K)^*, H = \operatorname{Ker} \varphi$; or grace au théorème du rang (pdv géométrique), $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{K}$, donc les supplémentaires du noyau sont isomorphes à $\mathbb{K}$, donc de dimension 1.

Soit $u \in E \setminus H$, on a donc $\varphi(u) = \lambda \neq 0$ car $u \notin \operatorname{Ker} \varphi$; on réalise ensuite une analyse synthèse en décomposant x, or $\varphi(x_H) = 0$ par définition de l'hyperplan; on montre existence et unicité

Anki

q: Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$:
alors que dire des supplémentaires de $\mathbb{K}u$
a: Les supplémentaires de $\mathbb{K}u$ sont des hyperplans

Éléments de preuve:
Comme $\mathbb{K}u$ sev de E, il admet supplémentaire S; on décompose en $x = \lambda_x u + x_s$ et on pose $\varphi \; E \longrightarrow \mathbb{K}, \varphi(x) = \lambda_x$; on vérifie que φ est linéaire, et donc on aura bien $\operatorname{Ker} \varphi = S$, d'où S hyperplan

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev de dimension finie et $\mathcal{B}_E = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ base de E:
alors $\forall x \in E$, ?
a: $\forall x \in E$, **il existe une unique décomposition $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ avec $(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n}) \in \mathbb{K}^n$**
et les applications

$$f_k \; E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \mapsto x_k$$

sont appelées formes linéaires coordonnées associées à la base E

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!], f_i(e_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon, si } \; i \neq j \end{cases}$$

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev de dimension finie, $\mathcal{B}_E = (\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n})$ base de E et H sev de E:
Alors il y a équivalence entre:
1. $\dim H = ?$
2. H est un hyperplan
3. <équation cartésienne de l'hyperplan>

a: Il y a équivalence entre:
1. $\dim H = \dim E - 1$
2. H est un hyperplan
3. Il existe $(\mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_\mathrm{n}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in H \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k = 0$$

Une telle équation est appelée équation cartésienne de l'hyperplan dans la base $\mathcal{B}_E$

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev de dimension finie n et $(H_i)_{i \in [\![1;m]\!]}$ m hyperplans de E:
alors

$$\dim \bigcap_{i=1}^{m} H_i \quad ?$$

a: alors

$$\dim \bigcap_{i=1}^{m} H_i \geq n - m$$

Éléments de preuve:
Prendre $(\varphi_1, ..., \varphi_\mathrm{n})$ formes linéaires non nulles tq $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\operatorname{Ker} \varphi_k = H_k$; on a alors $x \in \bigcap_{i=1}^{n} H_k \Leftrightarrow \forall k \in [\![1; n]\!], \varphi_{k(x)} = 0$; puis on introduit $\Psi(x) = \left(\varphi_1(x), ..., \varphi_{n(x)}\right)$ linéaire, puis th du rang ($\operatorname{Im} \psi \subset \mathbb{K}^m$, donc dimension majorée, on réinsère et trouve que $\dim \operatorname{Ker} \psi = \dim E - \dim \operatorname{Im} \psi \geq n - m$)

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev de dimension finie et $f, g \in L(E, \mathbb{K}) \setminus \left\{0_{L(E,\mathbb{K})}\right\}$:
On a

$$(f, g) \text{ liée} \Leftrightarrow \ ?$$

a: On a

$$(f, g) \text{ liée} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$$

Éléments de preuve:

$\boxed{\Longrightarrow}$ *Sq* (f, g) *liée*

On a alors $f = \lambda g$, donc $\forall x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} g$, ok

$\boxed{\Longleftarrow}$ *Sq* $\mathit{Ker}\, f = \mathit{Ker}\, g$

Alors $\dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Ker} g = \dim E - 1 = n - 1$; ainsi on peut prendre $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{\text{n-1}}$ base de $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, qu'on complète avec u en base de E, or $\forall i \in [\![1; n-1]\!], f(\varepsilon_i) = g(\varepsilon_i) = 0$, d'où $f(u) = \alpha, g(u) = \beta, a, \beta \neq 0 \Rightarrow g(u) = \frac{\beta}{\alpha} f(u)$; vraie sur une base, par linéarité vraie sur E

Anki

q: Polynômes de Lagrange
a: Soient $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $(n+1)$-uplet de scalaires deux à deux distincts et $(y_0, ..., y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $(n+1)$-uplet de scalaires:
alors il existe un unique polynôme P de **degré au plus n** tel que

$$\forall i \in [\![0; n]\!], P(x_i) = y_i$$

Éléments de preuve:
On a $\dim \mathbb{K}^{n+1} = \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$

Prendre $\varphi \in L(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{n+1})$ (admis que cest linéaire) tel que

$$\varphi(P) = (P(x_0), ..., P(x_n))$$

Puis justifier que c'est un isomorphisme: $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$ donc par théorème du rang il suffira de démontrer que $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, d'où n+1 racines pour polynome de degré n

Anki

q: Base d'interpolation de Lagrange
a: Soit $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $(n+1)$-uplet de scalaires deux à deux distincts:
alors la famille $(L_0, ..., L_n)$ définie par

$$\forall i \in [\![0; n]\!], L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base d'interpolation de Lagrange aux points $(x_0, ..., x_n)$ Si P est le polynome d'interpolation tel que

$$\forall i \in [\![0; n]\!], P(x_i) = y_i$$

alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$$

Anki

q: Soient E $\mathbb{K}$ev et $f, g \in L(E)$:
alors il y a équivalence entre:
1. $f \circ g = 0_{L(E)}$
2. ?

a: Il y a équivalence entre:
1. $f \circ g = 0_{L(E)}$
2. $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$

Éléments de preuve:

$\boxed{\Longrightarrow}$ *Sq* $f \circ g = 0_{L(E)}$

Alors $\forall y \in \operatorname{Im} g, \exists x \in E$ tq $g(x) = y$

Or, $f(y) = f(g(x)) = 0_{L(E)} = 0 \Rightarrow y \in \operatorname{Ker} f$

$\boxed{\Longleftarrow}$ *Sq* $Im\, G \subset Ker\, f$

Ainsi, $\forall x \in E, g(x) \in \operatorname{Ker} f$, donc $f(g(x)) = 0$, d'où $f \circ g = 0_{L(E)}$