Anki

q: Définition: fonction convexe

a: Soient I intervale non vide et f définie sur I:

On dit que f est convexe sur I si

$$\forall x, y \in I, \lambda \in [0, 1],$$
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On dit que f est concave si $-f$ est convexe

Remarque:
Les fonctions et concaves et convexes sur I sont les fonctions affines

Anki

q: Inégalité des pentes

a: Soient I intervale non vide et f fonction convexe sur I:

Alors

$$\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I,$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Reformulation:
Comme la fonction est convexe, on a la croissance des pentes

Remarque:
On a la réciproque: si f vérifie l'inégalité de gauche (ou de droite) pour tous les $x_1 < x_2 < x_3$, alors f est convexe

Anki

q: Soient I intervale non vide, f fonction convexe sur I et a in I:
On a équivalence entre:

1. f convexe sur I
2. <que dire de la fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a: On a équivalence entre:

1. f convexe sur I
2. $$\varphi_a : \begin{array}{rcl} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

   est croissante

Éléments de preuve:
Conséquence de l'inégalité des pentes

Anki

q: Soient $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$:
alors que dire de

$$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

a:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \in I$$

Éléments de preuve:
Récurrence

Anki

q: Inégalité de Jensen

a: Soient:

- I intervale non vide
- f fonction convexe sur I
- $x_1, \dots, x_n \in I$
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Reformulation:
La moyenne des images est inférieure à la valeur au point si les points sont pondérés positivement

Anki

q: Soient I intervale non vide, f fonction convexe sur I et $a \in I$, **pas une borne de I**:
Alors que dire de la lipschitziennité de f au voisinage de a?
a: f est lipschitzienne au voisinage de a

Anki

q: Soient I intervale non vide et f fonction convexe sur I:
Que dire de la continuité de f?
a: Une fonction convexe sur I est continue en tout point $a \in I$ qui n'est pas une borne

Éléments de preuve:
Il existe un voisinnage de a sur lequel f est lip, donc f est continue.

Anki

q: Soient I intervale non vide et f fonction convexe sur I:
Que dire de la dérivabilité de f?
a: f est dérivable à gauche et à droite en tout point de I - pas nécessairement dérivable au point (exemple: $x \mapsto |x|$)

Anki

q: Soient I intervale non vide et f fonction dérivable sur I:
Alors il y a équivalence entre:
1. f est convexe sur I
2. <que dire de f'?>

a: Il y a équivalence entre:
1. f est convexe sur I
2. f' est croissante sur I

Remarque:
On en déduit que si f est deux fois dérivable, c'est aussi équivalent à $f'' \geq 0$

Anki

q: Soient I intervale non vide et f fonction convexe dérivable sur I:
Alors que dire de la courbe de f par rapport à ses tangentes?
a: La courbe de f est au dessus de ses tangentes, càd

$$\forall a, x \in I,$$
$$f'(a)(x-a)+f(a) \leq f(x)$$

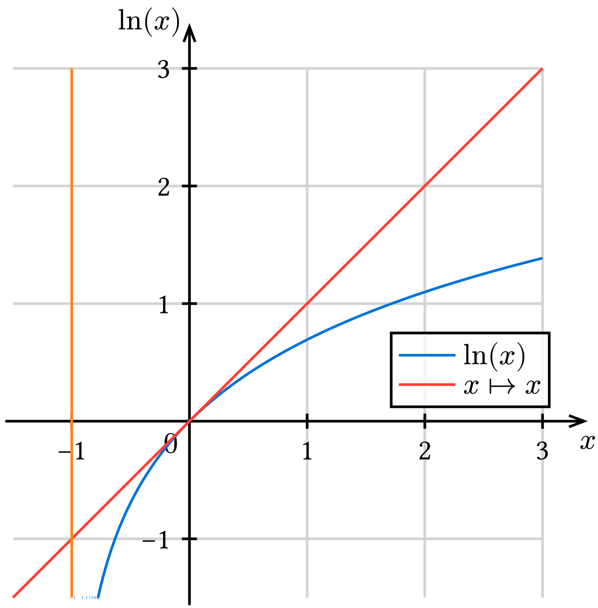
Anki

q: Inégalités usuelles de convexité:

$$\ln(1+x) \quad ?$$

a:

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \ln(1+x) \leq x$$



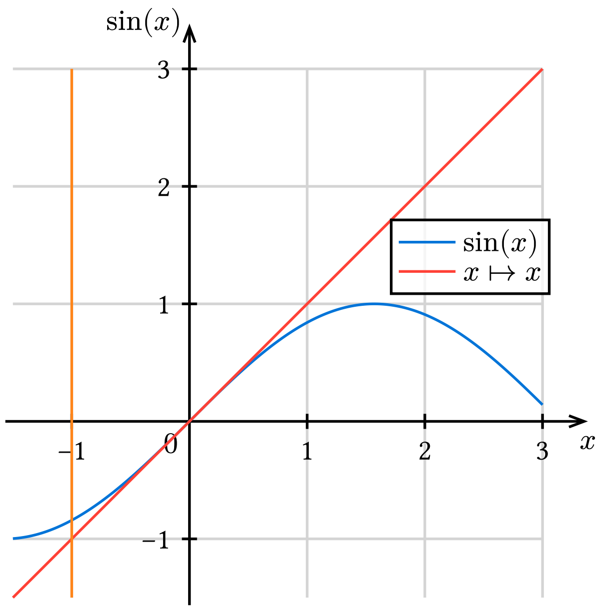
Anki

q: Inégalités usuelles de convexité:

$$\sin(x) \quad ?$$

a:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+}, \sin(x) \leq x$$



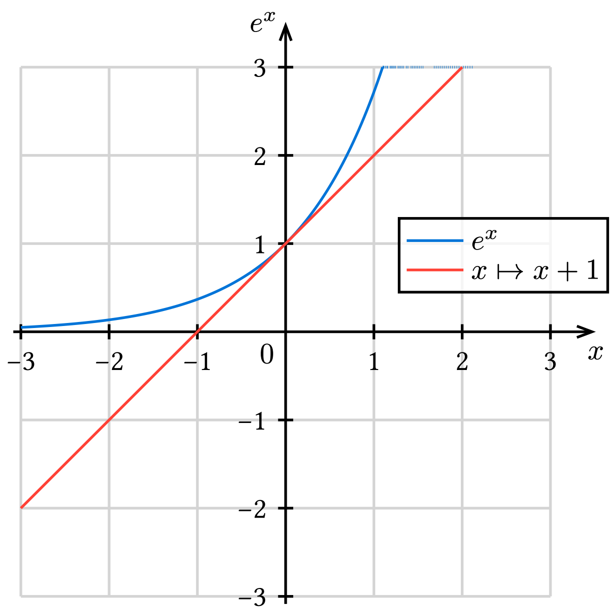
Anki

q: Inégalités usuelles de convexité:

$$e^x \quad ?$$

a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \leq e^x$$



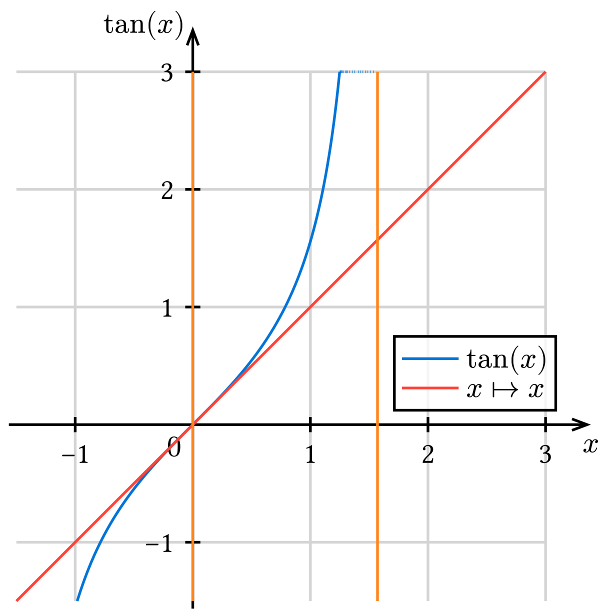
Anki

q: Inégalités usuelles de convexité:

$$\tan(x) \quad ?$$

a:

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, x \leq \tan(x)$$



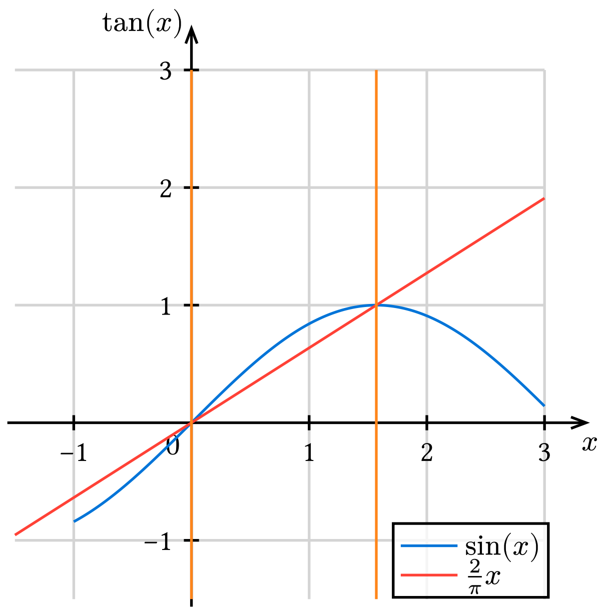
Anki

q: Inégalités usuelles de convexité:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], ? \leq \sin(x)$$

a:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$$



Anki

q: Inégalité arithmético géométrique

a: Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Ou:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Remarque:
C'est hors programme, ça se prouve avec l'inégalité de Jensen, en utilisant le ln et l'exponentielle

Reformulation:
"Moyenne géométrique $\leq$ Moyenne arithmétique"

Anki

q: Inégalité de Holder

a: Pour:

- $n \in \mathbb{N}^*$
- $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$
- $p, q \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

On a:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Remarque:
Le cas général est hors programme. Le cas pour $p = q = 2$ est à connaitre.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

Éléments de preuve:
La fonction ln est convexe, donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x) + \frac{1}{q}\ln(y)$$

Valable pour tout x et y, donc on peut l'appliquer à x^p et y^q

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) &= \ln(x) + \ln(y) \\ &= \ln(xy)\end{aligned}$$

Par passage à l'exponentielle, on obtient:

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

Appliquons le à

$$\alpha_i = \frac{x_i}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ et } \beta_i = \frac{y_i}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Par sommation:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p}\alpha_i^p + \frac{1}{q}\beta_i^q \\ &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\sum_{k=1}^n x_k^p} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^p}{\sum_{k=1}^n y_k^q} \\ &= \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{\sum_{k=1}^n x_k^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^n y_i^q}{\sum_{k=1}^n y_k^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{y_i}{\left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Anki

q: Définition: point d'inflexion
a: Soient I intervale non vide, f fonction d et $a < b < c$ 3 points de I tels que f est convexe sur $[a, b]$, concave sur $[b, c]$ (ou l'inverse):
alors la courbe de f traverse sa tangente en b, et on dit que la courbe de f a un point d'inflexion au point $(b, f(b))$