Anki

q: Quels sont les deux types de moments cinétiques?
a: Il existe deux moments cinétiques différents:

1. Le moment cinétique par-rapport à un point (le moment cinétique sera **vectoriel**)
2. Le moment cinétique par-rapport à un axe (le moment cinétique sera **scalaire**)

Anki

q: Définition: Moment cinétique par-rapport à un point
a:

On note $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)$ ou $\overrightarrow{\sigma_{O/\mathcal{R}}}(M)$ le moment cinétique d'un point M par-rapport au point O, avec $\mathcal{R}$ le référentiel.

On le définit par:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) &= \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P_{/\mathcal{R}}}(M) \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\end{aligned}$$

Remarque:

- Normal au plan défini par les deux vecteurs OM et $\overrightarrow{P_{/\mathcal{R}}}$
- Pour O et O' deux points distincts, à moins d'avoir une vitesse nulle ou colinéaire au déplacement $\overrightarrow{O'O}$, on aura $\overrightarrow{L_{O'/\mathcal{R}}} \neq \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}$

Anki

q: Définition: Moment cinétique par-rapport à un axe
a:

On considère Δ un axe passant par O et dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$.
On pose le moment cinétique par-rapport à O:

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)$$

On définit le moment cinétique par-rapport à l'axe Δ par:

$$L_{\Delta/\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Remarque:
Le point O peut-être choisi arbitrairement

Démonstration en reprenant l'expression précedente avec O' un autre point de Δ:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_{O'/\mathcal{R}}}(M) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} &= \left(\underbrace{\overrightarrow{O'O} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}}_{\text{perpendiculaire à } \overrightarrow{u_\Delta}} + \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) \right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \\ &= \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}\end{aligned}$$

Anki

q: Moment cinétique d'un point en mouvement circulaire autour d'un axe
a: On considère un point en mouvement circulaire. On se place en coordonées cylindriques avec l'axe (O_z) perpendiculaire au plan du mouvement et le point O centre de la trajectoire.

Le moment cinétique par-rapport à l'axe $\Delta = (O_z)$

$$\overrightarrow{L_{\Delta/\mathcal{R}}}(M) = mR^2\dot{\theta}$$

Éléments de preuve:
On a donc:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z} = r\vec{u_r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Comme on est en mouvement circulaire, on a $r = R$ constant, donc $\dot{r} = 0$, et $\dot{z} = 0$, donc

On calcule le moment cinétique:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \\ &= (R\vec{u_r} + z\vec{u_z}) \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta} \\ &= R\vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta} \\ &= mR^2\dot{\theta}\vec{u_z} \end{aligned}$$

On en déduit le moment cinétique par-rapport à l'axe $\Delta = (O_z)$

$$\overrightarrow{L_{\Delta/\mathcal{R}}}(M) = mR^2\dot{\theta}$$

Anki

q: Définition: Moment d'une force par rapport à un point
a: De la même manière qu'on a définit le travail d'une force, on définit le moment d'une force par:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

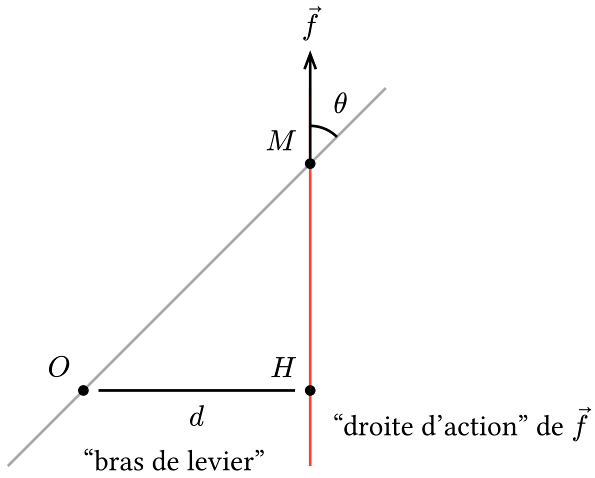
Remarque:
Si on prend O' un autre point:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}\left(\vec{f}\right) &= \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{f} \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{f} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{f} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) \end{aligned}$$

De la même manière, à moins que la force soit nulle ou collinéaire à $\overrightarrow{O'O}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}\left(\vec{f}\right) \neq \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)$

Anki

q: Définition: bras de levier, et droite d'action d'une force
a: On définit le **bras de levier**, la distance entre le point O et **la droite d'action** de la force $\vec{f}$, qui permet de calculer la norme du moment de la force:



On a:

$$\left\| \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) \right\| = OM \times f \times \sin\theta$$

Le triangle OMH est triangle en H, donc:

$$\sin\theta = \frac{OH}{OM}$$

Donc:

$$OM \sin\theta = OH = d \text{ la distance de } O \text{ à la droite d'action de } \vec{f}$$

Anki

q: Définition: Moment d'une force par-rapport à un axe
a: On prend un axe Δ passant par un point O et de vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$, et on définit le moment par-rapport à un axe:

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Anki

q: Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe
a: La dérivée du moment cinétique par-rapport à un point est égale à la somme des moments par-rapport à ce point:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)$$

Éléments de preuve:
On repart de la définition du moment cinétique:

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right) \\ &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}_{\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \text{ car } O \text{ fixe}} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) + \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right)}_{\sum \vec{f}} \\ &= \vec{0} + \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \\ &= \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)\end{aligned}$$

Remarque:
Si O est mobile, on prend O' un point fixe, on peut décomposer (comme vu précedemment) $\overrightarrow{L_O}$ en $\overrightarrow{O'O}$ et en $\overrightarrow{L_{O'}}$ et on tombe sur:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} = \left(m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) \wedge \overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(O)\right) + \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)$$

Anki

q: Théorème du moment cinétique par rapport à un axe
a:

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}\right)$$

Éléments de preuve:
Soit O un point d'un axe Δ fixe. Par le théorème du moment cinétique:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Anki

q: Conditions de conservation du moment cinétique
a: Le moment cinétique est constant si:
- Le point étudié est confondu avec l'origine
- La somme des forces est nulle
- Que $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ soient colinéaires.

Dans ce dernier cas, on parle de **force centrale**, quand la force totale $\vec{F}$ est toujours dirigée vers un point fixe O.

Éléments de preuve:
Le moment cinétique se conserve (= est constante) si sa dérivé s'annule, donc:

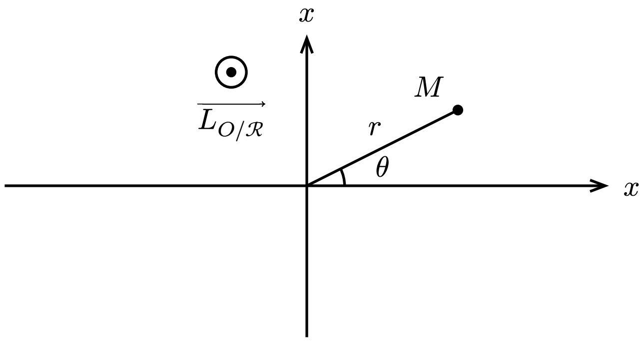
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = 0$$

En substituant la définition du moment:

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right) = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{f} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Anki

q: Définition: constante des aires
a:



On a:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$$

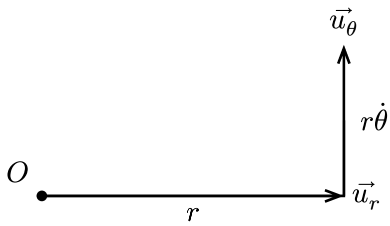
$$\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Donc:

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = (r\vec{u_r}) \wedge m\left(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

Comme $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}$, m et $\vec{u_z}$ sont constants, on en déduit que $\boldsymbol{r^2\dot{\theta}}$ est constant.

On appelle cette quantité la **constante des aires**:

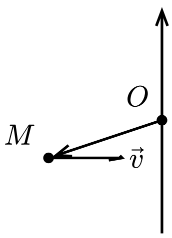


Anki

q: Quel est le lien entre M, O et $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}$ quand le moment cinétique est conservé ?
a:

Si le moment cinétique est conservé, on a par définition que $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{\text{constante}}$

En se plaçant dans la situation où le mouvement n'est pas rectiligne, on a alors que le vecteur $\vec{v}$, et $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}$ forment un plan qui passe par O, formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$



M évolue dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)$ et passant par O

Éléments de méthode:
Il faut d'abords montrer le mouvement plan, puis introduire les coordonnées polaires.

Généralement, pour les solides, soit on aura une liaison pivot parfaite, soit il sera évident que le mouvement est dans un plan