Anki

q: Définition: un solide
a: Un solide est un ensemble de points S tel que:

$$\forall A, B \in S, \left\| \overrightarrow{AB}(t) \right\| \text{ est constante}$$

Éléments de méthode:
"Un solide est un système continu de points"

Pour décrire le mouvement du solide dans son ensemble, on s'interesse au mouvement d'un point particulier d'un solide.
On prendra en général G le centre de gravité/le centre d'inertie/le centre de masse du solide.

Anki

q: De quelle manière va-t-on s'intéresser à la rotation d'un solide sur lui meme?
a: On s'intéresse de plus à la rotation du solide sur lui même: on fixe des axes sur le solide et on note les angles entre les axes relatifs du solide et les axes fixes du repère.

On obtient donc 6 inconnues (3 pour la position et 3 pour la rotation)

On devra donc utiliser 2 méthodes de résolutions: le PFD *et* le théorème du moment cinétique.

Anki

q: Définition: Mouvement de translation
a: On parle de **translation** quand tout les point se deplacent de la même façon (cela inclu un mouvement circulaire de l'ensemble des points du solide).

Anki

q: Définition: Mouvement de rotation
a: On parle de **rotation** quand les points du solide se déplacent autour d'un axe du solide (les points ont des mouvement différents).

Anki

q: Définition: moment d'inertie
a:

En se plaçant calculant le moment cinétique:

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = m\left(-zr\dot{\theta}\vec{u_r} + (\dot{r}z - \dot{z}r)\vec{u_\theta} + r^2\dot{\theta}\vec{u_z}\right)$$

En prenant $i = (O_z)$ (donc $\overrightarrow{u_\Delta} = \vec{u_z}$), on fait le produit scalaire:

$$\overrightarrow{L_\Delta}(M) = mr^2\dot{\theta}$$

On définit J_Δ le moment d'inertie (constant dans un solide donné), ici $J_\Delta = mr^2$

Éléments de méthode:
Pour le moment cinétique, J_Σ joue le même rôle que la masse dans la quantité de mouvement

Anki

q: Définition: moment cinétique d'un ensemble de points
a: Pour obtenir le moment cinétique combiné de plusieurs points, on les somme:

$$\overrightarrow{L_O} = \sum_i \overrightarrow{L_{O,i}} \text{ et } L_\Sigma = \sum_i L_{\Sigma,i}$$

Anki

q: Définition: moment cinétique d'un solide
a: On prend le produit scalaire avec $\overrightarrow{u_\Sigma} = \vec{u_z}$, et on obtient:

$$L_\Sigma = \iiint_{M \in S} r^2 \dot{\theta} \rho(M) \,\mathrm{d}\tau$$

Éléments de preuve:
Pour obtenir son moment cinétique, on remplace la sommation discrète par une sommation continue:

Dans un solide quelconque, la masse peut varier. On a, en chaque point M du solide:

$$\underbrace{\mathrm{d}m}_{\text{"masse élémentaire"}} = \underbrace{\rho(M)}_{\text{masse volumique}} \underbrace{\mathrm{d}\tau}_{\text{volume élementaire}}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(S) &= \iiint_{M \in S} \left(\overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}m \overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right) \\
&= \iiint_{M \in S} \left(\overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \,\mathrm{d}\tau \overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right) \\
\overrightarrow{L_\Sigma}(S) &= \iiint_{M \in S} \left(\overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \,\mathrm{d}\tau \overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)\right) \cdot \overrightarrow{u_\Sigma}
\end{aligned}$$

On se place en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= r\vec{u_r} + z\vec{u_r} \\
\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) &= \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}
\end{aligned}$$

Donc:

$$\overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \,\mathrm{d}\tau \overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}} = \rho(M) \,\mathrm{d}\tau \left(r^2\dot{\theta}\vec{u_z} + (-r\dot{z} + z\dot{r})\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}z\vec{u_r}\right)$$

Anki

q: Définition: Moment d'inertie d'un solide
a: On pose $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire. Tout les points du solide possèdent la même vitesse angulaire, on peut donc le factoriser et on a:

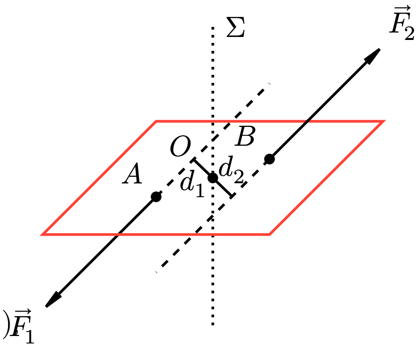
$$L_\Sigma = \omega J_\Sigma \text{ avec } J_\Sigma = \iiint_{M \in S} r^2 \rho(M) \,\mathrm{d}\tau$$

Anki

q: Définition: couple de deux forces
a:

On dit que deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ forment un couple $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right)$ par-rapport à Σ si:
- Les deux forces sont **opposées**: $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$
- Le moment de la résultante des forces n'est pas nul et est proportionnel à la distance:

$$\mathcal{M}_\Sigma\left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right) = Fd \neq 0$$



Avec d_1 la distance entre O et le projeté orthogonal de O sur (F_1) (la distance entre O et (F_1)), d_2 la distance entre O et (F_2) et $d = d_1 + d_2$ la distance entre $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ A et B

Anki

q: Définitions:
- couple moteur
- couple de freinage

a: On parle de **couple moteur** si le couple augmente la vitesse de rotation, et de **couple de freinage** si il diminue la vitesse de rotation.

> *Remarque*:
> Un couple de forces ne fait que appliquer une rotation et n'applique aucune translation.

Anki

q: Définition rapide: torseur
a: Toute action mécanique sur un solide peut être décrîte par:
- Une force sur le centre de gravité (qui n'applique qu'une translation)
- Un couple (qui n'applique qu'une rotation)

On parle alors de **torseur**.
Voir Torseur cinétique et Torseur cinématique

> *Remarque*:
> HP

Anki

q: Cas des couples de tension
a: De la même manière qu'un ressort applique une force de rappel sur un point, un couple de torsion applique un **moment de rappel** d'amplitude $\Gamma = -C\alpha$ avec α l'angle de torsion et C la cosntante de torsion du fil (équivalent à k la raideur du ressort).

Anki

q: Définition: liaison pivot
a: On appelle **liaison pivot** une liaison entre des solides qui permet de limiter le mouvement d'un solide à la rotation autour d'une axe fixe.

On supposera toujours que les liasons pivots sont parfaites et sans frottement.

Anki

q: Puissance d'un solide en rotation autour d'un axe
a:

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta \dot{\theta} \text{ (expression à réétablir avec le mouvement élémentaire)}$$

Éléments de méthode:
On rappelle

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$$

On a:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta \dot{\theta} \text{ (expression à réétablir avec le mouvement élémentaire)} \\ = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_\Delta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \delta W = \mathcal{M}_\Delta \,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Anki

q: Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe
a:

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 J_\Delta$$

Éléments de preuve:
On reprend l'expression de l'énergie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{/\mathcal{R}}(M)^2$$

On avait vu que pour obtenir l'énergie cinétique d'un système de point, on fait la somme:

$$E_c = \sum_i E_{c,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{/\mathcal{R}}(M_i)^2$$

Pour obtenir l'énergie cinétique d'un solide, on transforme la somme discrète en somme continue:

$$E_c = \iiint_{M\in S} \frac{1}{2}(\rho \,\mathrm{d}\tau) v_{/\mathcal{R}}(M)^2$$

Exemple: solide en rotation autour de l'axe (O_z): si on prend un point M appartenant au solide:

$$\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) = \underbrace{\dot{r}\vec{u_r}}_{\text{nul car } r \text{ constant dans un solide}} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

Donc:

$$\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M) = r\dot{\theta}\vec{u_\theta} \Rightarrow v_{/\mathcal{R}}(M)^2 = r^2\dot{\theta}^2$$

En reprenant l'expression de l'énergie cinétique:

$$\begin{aligned} E_c &= \iiint_{M\in S} \frac{1}{2}\rho \,\mathrm{d}\tau r^2 \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \underbrace{\iiint_{M\in S} \rho \,\mathrm{d}\tau r^2}_{J_\Delta} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 J_\Delta \end{aligned}$$

Duplicate id: 250512

Anki

q:

a:

Duplicate id: 250512

Anki

q:

a:

Duplicate id: 250512

Anki

q:

a:

Duplicate id: 250512

Anki

q:

a:

Duplicate id: 250512

Anki

q:

a: