Anki

q: Définition: série
a: On appelle série une suite (S_n) de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

où (u_n) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ le plus souvent, ou $\mathbb{C}$)

Le terme (u_n) est appelé **terme général de la suite**.

On appelle **somme partielle** de la série le terme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Reformulation:
Une série est une suite de sommes partielles

On dit que la série converge si la suite (S_n) converge, et on notera

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

cette suite.

En cas de convergence, on notera le reste de cette série (R_n)

$$R_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Éléments de méthode:
- On notera parfois $\sum u_n$ “la série de terme général u_n”
- On notera parfois TG le “terme général”
- On notera parfois CV (resp. DV) “converge” (resp. “diverge”) (ou un terme de la meme famille)

Exemple:
1. Soit (u_n) suite arithmétique
   $u_n = \alpha + \beta n$
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\alpha + n(n+1)\beta$$
   converge ssi $\alpha = \beta = 0$
2. Soit (u_n) suite géométrique de raison $q \neq 1$
   $u_n = u_0 \cdot q^n$
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} u_0$$
   converge ssi $u_0 = 0$ ou $\boldsymbol{|q| < 1}$, et
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{u_0}{1-q}$$
   et alors
   $$R_n = \frac{u_0}{1-q} - u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{q^{n+1}}{1-q}$$
3. $$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$
   On fait déomposition en éléments simples:
   $$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right)$$
   Puis on fait un téléscopage

Anki

q: Soit (u_n) le terme général d'une série convergente
Que dire de la convergence de (u_n) ?
a: Alors

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Si u_n ne tend pas vers 0, on dit que la **série diverge grossièrement**

Éléments de preuve:
Sq $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ CV vers $l \in \mathbb{R}$
donc on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ donc par opérations sur les limites

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l - l = 0}$$

Remarque:
C'est une condition nécessaire, mais loin d'etre suffisante

Anki

q: Soit (u_n) une suite, alors il y a équivalence entre:

1. La suite (u_n) converge
2. La série de terme général ? converge

a: Il y a équivalence entre:

1. La suite (u_n) converge
2. La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge

Éléments de preuve:

$\boxed{\mathbf{1 \implies 2}}$ Sq la suite (u_n) converge

Soit $(v_n) = (u_{n+1} - u_n)$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$$

donc la série de TG (u_n) converge

$\boxed{\mathbf{2 \impliedby 1}}$ Sq (S_n) de terme général (v_n) converge vers $l_1 \in \mathbb{R}$

On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$$

donc

$$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) + u_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_1 + u_0$$

donc converge

Anki

q: Soit une série à terme général **positif réels**, alors il y a équivalence entre:

1. La série converge
2. <que dire des sommes partielles>

a: Il y a équivalence entre:

1. La série converge
2. Les sommes partielles de la série sont majorées

Éléments de preuve:

$\boxed{\mathbf{1 \implies 2}}$ $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ tq la série de TG u_n converge

On a donc

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge donc bornée donc majorée

$\boxed{\mathbf{2 \implies 1}}$ Sq $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée

On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ vérifie } S_{n+1} = S_n - u_{n+1} \geq 0$$

pour tout n, donc la suite des sommes partielles est croissante majorée, donc converge

Anki

q: Inégalité entre termes généraux de séries ($u_n \leq v_n$)
a: Soient deux séries à TG **réels positifs** respectifs de u_n et v_n tel que

$$\forall n, u_n \leq v_n$$

Alors:
1. La série $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow$ La série $\sum u_n$ converge
2. La série $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow$ La série $\sum v_n$ diverge

Remarque:
On peut se contenter de ces hypothèses:
- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang
- les termes généraux sont positifs à partir d'un premier rang

Éléments de preuve:
<u>Preuve de 1</u>

Sq la série de TG v_n converge, donc

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$$

d'où

$$\forall n, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_n \leq M$$

Les sommes partielles de la série de TG u_n sont majorées et $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ donc $\sum u_n$ converge

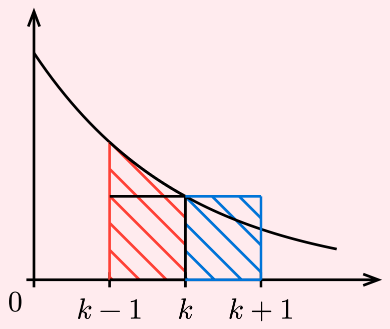
Anki

q: Comparaison série-intégrale
a:

Comparaison série-intégrale
Soit f une fonction continue monotone sur $\mathbb{R}^+$:
On a $\forall n \in \mathbb{N}$
1. si f décroissante
$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$
2. si f croissante
$$\int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Éléments de méthode:
Les bornes inférieures/supérieures peuvent etre différentes, en fonction de si on part de 1 ou pas; par exemple, ceci est un encadrement valide par une comparaison série intégrale
$$\int_1^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq \int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque:
C'est bien représenté graphiquement:



Le rectangle sous la courbe une plus grande aire que le rectangle bleu sous la courbe.

L'idée cruciale (pour une déroissante): **ce qui vient après est plus petit que ce qui vient avant**

Éléments de preuve:
Cas f décroissante
par décroissance de f on a
$$\forall t \in [k-1, k], f(k) \leq f(t)$$
$$\Rightarrow \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\text{càd } f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\forall t \in [k, k+1], f(t) \leq f(k)$$
$$\Rightarrow \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{k}^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$$
d'où $\forall k \geq 1$:
$$\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t}_{=\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t} \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t}_{=\int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t}$$
ok!

Exemple:
On veut encadrer
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$
On a
$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Puis on somme jusqu'à m
$$\int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n}^{m} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Puis passage à limite, et on trouve
$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Anki

q: Soit f une fonction continue **positive** et **monotone** sur $\mathbb{R}^+$:
Alors il y a équivalence entre:
1. La série de terme général $u_n = f(n)$ converge
2. <que dire de la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$>

a:

Un corollaire de la comparaison série-intégrale
Il y a équivalence entre:
1. La série de terme général $u_n = f(n)$ converge
2. La suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge**

Remarque:
On n'est pas obligé de prendre 0 comme borne de début de l'intégrale, on prend la valeur où commence la suite u_n

Éléments de preuve:
$\boxed{\mathbf{1 \Longrightarrow 2}}$

Sq $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et que la série de TG $f(n)$ converge

Comme $I_n = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, on a

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0 \\ &\Rightarrow (I_n) \text{ est une suite croissante} \end{aligned}$$

Comme $\sum f(k)$ CV, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall n, \sum_{k=0}^n u_k \leq M$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \underbrace{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{indépendant de } n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)}_{\leq M} \text{ majoré par } M' \end{aligned}$$

donc (I_n) converge

$\boxed{\mathbf{\neg 1 \Longrightarrow \neg 2}}$

Sq f continue positive et monotone sur $\mathbb{R}^+$ et $\sum f(k)$ diverge

donc

$$\sum_{k=0}^n f(k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

On a

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n f(k)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty} - f(0) \leq I_n$$

donc par le théorème des gendarmes à l'infini, $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et donc $\neg 2$

Anki

q: Séries de Riemann
a:

Séries de Riemann
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{La série de terme général } \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \\ \Updownarrow \\ \alpha > 1$$

Remarque:
On appellera parfois cette série la “série de Riemann de paramètre α”

Éléments de preuve:
- Si $\alpha \leq 0$, DV grossière
- Si $\alpha > 0, t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, donc on va regarder

$$I_n = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t$$

  - Si $\alpha = 1, I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
  - Si $\alpha \neq 1$,

  $$I_n = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$$

  - si $0 \leq \alpha < 1, I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
  - si $\alpha > 1, I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{1}{1-\alpha}$

  donc par le corollaire de la comparaison série-intégrale, il n’y a convergence que si et seulement si $\alpha > 1$

Anki

q: Soient (u_n), (v_n) 2 suites **réelles positives**, alors que dire des séries de TG u_n et v_n:

1. Si $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$: ?
2. Si $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$: ?
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$: ?

a: Soient (u_n), (v_n) 2 suites **réelles positives**, alors:

1. Si $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$:
$$\text{La série de TG } v_n \text{ converge} \Longrightarrow \text{La série de TG } u_n \text{ converge}$$
2. Si $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$:
$$\text{La série de TG } v_n \text{ converge} \Longrightarrow \text{La série de TG } u_n \text{ converge}$$
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$:
$$\text{La série de TG } v_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \text{La série de TG } u_n \text{ converge}$$

Remarque:

- Le signe constant des suites est suffisant en hypothèse, car on peut juste prendre l'opposé de la suite

En général:

- Si on veut info de divergence, faut qu'elle soit à l'extérieur du grand O, petit O, équivalent etc
- Si on veut info de convergence, faut qu'elle soit à l'intérieur

$\longrightarrow$ "**Convergence dedans, divergence dehors**"

Éléments de preuve:

$\boxed{\mathbf{1} \Longrightarrow \mathbf{2}}$

Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ donc on utilise 1.
On peut ainsi se contenter de démontrer uniquement 2. et 3.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sq $u_n = O(v_n)$ et la série de terme général v_n converge

$$u_n = \mathrm{O}(v_n) \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall n, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$$
$$\text{par positivité } 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$$
$$\text{par positivité } 0 \leq u_n \leq M v_n$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M \sum_{k=0}^{n} v_k$$
$$\text{or } \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \text{ converge, donc majoré par } M'$$
$$\text{d'où} \sum_{k=0}^{n} u_k \leq MM'$$

donc les sommes partielles sont majorées et à termes positifs, donc la série de TG u_n converge

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sq $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, $u_n \sim v_n$ et la série de TG v_n converge
On a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'où $\left|\frac{u_n}{v_n}\right|$ majorée car tout est positif donc $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et on se ramène au cas de la 1

Anki

q: Série harmonique
a:

Série harmonique

$$\forall n, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

a le développement asymptotique suivant:

$$\boxed{H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)}$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni ($\gamma \approx 0.5772$)

Éléments de preuve:
La série (H_n) diverge car c'est une série de Riemann de paramètre 1.

Détermination d'un équivalent:
pour $k \geq 2$:

$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{d'où} \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_{2}^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}_{=\ln(n+1)-\ln(2)} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \underbrace{\int_{1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}_{=\ln(n)}$$

Dès lors:

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \frac{1-\ln(2)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\Rightarrow H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Un terme de plus:
On pose $u_n = H_n - \ln(n)$. Pour justifier la convergence de (u_n), on va étudier la série de terme général

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{n}{n+1} - 1\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \sim -\frac{1}{2(n+1)^2}$$

qui est de signe constant par comparaison aux séries de Riemann, donc

$$u_n = \gamma + \mathrm{o}(1)$$

avec γ la limite de u_n
d'où

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$$

Anki

q: Développement décimal propre d'un réel
a:

Développement décimal propre d'un réel
Soit $x \in [0,1[$, il existe une unique suite d'entiers de $[\![0,9]\!]$ tel que:
1. la suite (x_n) n'est pas stationnaire a 9
2. $$x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k 10^{-k}$$

Remarque:
Pas de stationaire à 9 pour bien avoir l'unicité

Éléments de preuve:
$\boxed{\textbf{Existence}}$ On fixe $x \in [0,1[$

Analyse:
On a $10x \in [0,10[$, on prend $x_1 = \lfloor 10x \rfloor$
On a alors $10x - x_1 \in [0,1[$
On obtient

$$x = \frac{x_1}{10} + \underbrace{\frac{10x - \lfloor 10x \rfloor}{10}}_{\in [0, \frac{1}{10}[}$$

On itère:

$$x = \frac{x_1}{10} + \frac{\frac{x_2}{10} + \varepsilon_2}{10} = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \frac{\varepsilon_2}{100}$$

...

$$x = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100} + \ldots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{\varepsilon_n}{10^n}$$

avec $0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{10^n}$

Anki

q: Caractérisation des nombres rationels par le développement décimal propre
a:

Caractérisation des nombres rationels par le développement décimal propre
Soit $x \in [0, 1[$, on a équivalence entre:
1. x est un rationnel
2. le développement décimal propre de x est ultimement périodique:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists T \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall n \geq n_0, x_{n+T} = x_n$$

Éléments de preuve:
TODO

Anki

q: Définition: série absolument convergente

a: Soit (u_n) une suite de nombres réels (ou complexes)

On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge

Remarque:
On l'abrègera des fois au brouillon "CVA": absolument convergente

Anki

q: Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\text{La série de terme général } u_n \text{ CVA}$$
$$\Downarrow$$
$$<\text{que dire de la série de terme général } u_n \text{ ?}>$$

a:

$$\text{La série de terme général } u_n \text{ CVA}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{La série de terme général } u_n \text{ converge}$$

Remarque:
La réciproque est fausse! (contre exemple par la série harmonique alternée)

Éléments de preuve:

$\boxed{\textbf{cas } (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ tq $|u_n|$ est le TG d'une série convergente

On introduit $\forall n$:

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0)$$
$$\text{on remarque } u_n = u_n^+ - u_n^-$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k^+}_{S_{1,n}} - \sum_{k=0}^{n} u_k^-$$

$S_{1,n}$ série de terme général u_n^+ et u_n^+ est majoré par $|u_n|$, or $\sum u_n$ converge, donc $\sum u_n^+$ converge

Idem pour u_n^-: $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$

$\longrightarrow$ donc $\sum u_n$ converge

$\boxed{\textbf{cas } (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$ tq $|v_n|$ est le TG d'une série convergente

$v_n = a_n + ib_n, (a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$|a_n| \leq |v_n| \wedge \sum |v_n| \text{ CV} \Rightarrow \sum |a_n| \text{ CV}$

$|b_n| \leq |v_n| \wedge \sum |v_n| \text{ CV} \Rightarrow \sum |b_n| \text{ CV}$

donc:

$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + i \sum_{k=0}^{n} b_k$ converge

Anki

q: Que dire de l'ensemble des termes généraux des séries convergentes (resp. absolument convergentes)?

a: L'ensemble des termes généraux des séries convergentes (resp. absolument convergentes) forme un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$

Éléments de méthode:

En découle: Si u_n, v_n des TG de suites qui CVA, $\lambda \in \mathbb{K}$ alors la série de TG $u_n + \lambda v_n$ est absolument convergente et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda v_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| + \lambda\left|\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right|$$

Éléments de preuve:

- $\subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ok
- $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ est le terme général d'une série convergente
- Si u_n, v_n deux termes généraux de séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k + \lambda v_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} v_k}_{\text{CV}} + \underbrace{\lambda \sum_{k=0}^{n} v_k}_{\text{CV}}$$

donc $u_n + \lambda v_n$ est le terme général d'une série convergente

Pour le cas absolument convergente, on pourra utiliser des valeurs absolues et l'inégalité triangulaire

Anki

q:

Théorème des séries alternées/Critère spécial des séries alternées

a:

Théorème des séries alternées/Critère spécial des séries alternées
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **décroissante de limite nulle**, alors la série de TG $(-1)^n u_n$ converge et

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \text{ est du signe de } (-1)^{n+1}$$

et

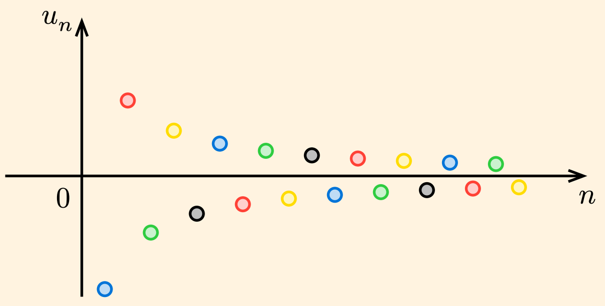
$$|R_n| \leq u_{n+1}$$

Remarque:
- Décroissante et tend vers $0 \Longrightarrow (u_n)$ positive
- Attention: la décroissance ne peut pas se montrer avec des équivalents!

Exemple:
Cela nous sonne directement la convergence de la série harmonique alternée:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

et $\frac{1}{n+1} \to 0$ et déçroissante, donc $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge



Éléments de preuve:
Considérons les sommes partielles:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

$$v_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \text{ et } w_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k$$

On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (v_n) \text{ décroissante} \\ \text{De meme, } (w_n) \text{ croissante} \end{array}}$$

Puis $v_n - w_n = u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{0}_{\text{car } (u_n) \text{ a limite nulle}}$ Donc par les suites adjacentes, (v_n) et (w_n) convergent vers la meme limite $l \in \mathbb{R}$

Donc comme les entiers pairs et impairs forment une parititon de $\mathbb{N}$,

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}}$$

On a donc

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

bien définie car (S_n) CV

On regarde

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+n+1} u_k = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l u_{l+n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{u_{2k+n+1} - u_{2k+1+n+1}}_{\geq 0} \\ &\Longrightarrow (-1)^{n+1} R_n \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \operatorname{sg}(R_n) = \operatorname{sg}((-1)^{n+1})}$$

et

$$|R_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k+n+1} - u_{2k+1+n+1}$$

Montrons que $|R_n| \leq u_{n+1}$

On pose

$$|R_{n,m}| = \sum_{k=0}^{m} u_{2k+n+1} - u_{2k+1+n+1}$$

$$\bullet\ R_{n,0} = u_{n+1} - u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$$\bullet\ R_{n,1} = u_{n+1} \underbrace{- u_{n+2} + u_{n+3}}_{\leq 0} \underbrace{- u_{n+4}}_{\leq 0} \leq u_{n+1}$$

Par récurrence on montre

$$|R_{n,m} \leq u_{n+1}|$$

et par passage à la limite, on conclut

$$\boxed{|R_n| \leq u_{n+1}}$$

Anki

q:

Produit de Cauchy

Définition: Produit de Cauchy de dex suites

a:

Produit de Cauchy

On définit le produit de Cauchy de deux suites $(a_n), (b_n)$ comme la suite (c_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Reformulation:

On a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{\substack{k, l \leq n \\ k + l = n}} a_k b_l$$

Remarque:

On remarquera une similarité au produit de deux polynomes.

Anki

q:

Produit de Cauchy

Soient a_n, b_n 2 termes généraux de séries qui convergent **absolument** et (c_n) le produit de Cauchy de (a_n) et (b_n):

Alors que dire de la série de terme général c_n?

a: $\longrightarrow$ La série de terme général c_n converge absolument. (donc la série de TG c_n aussi)

$\longrightarrow$ et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right)$$

Remarque:
D'après Vicente, il suffit d'une seule des deux CVA

Éléments de preuve:
Pour montrer que a série de TG c_n CVA, il suffit de majorer les sommes partielles, $\sum_{k=0}^{n}|c_k|$ par M indépendant de n On a

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

par ineg triangulaire:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k\right| \le \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}|a_l||b_{n-l}|$$

$$= \sum_{\substack{k,l\in[\![0,n]\!]\\ k+l\le n}} |a_l||b_k|$$

$$\le \sum_{k,l\in[\![0,n]\!]} |a_l||b_k|$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{n}|b_k|\right)}_{\text{sommes partielles de séries CV}} \le \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|b_k|\right)}_{\text{indépendant de } n}$$

Donc les sommes partielles de la série de TG $|c_n|$ sont majorées donc la série de terme positif $|c_n|$ converge

---

donc

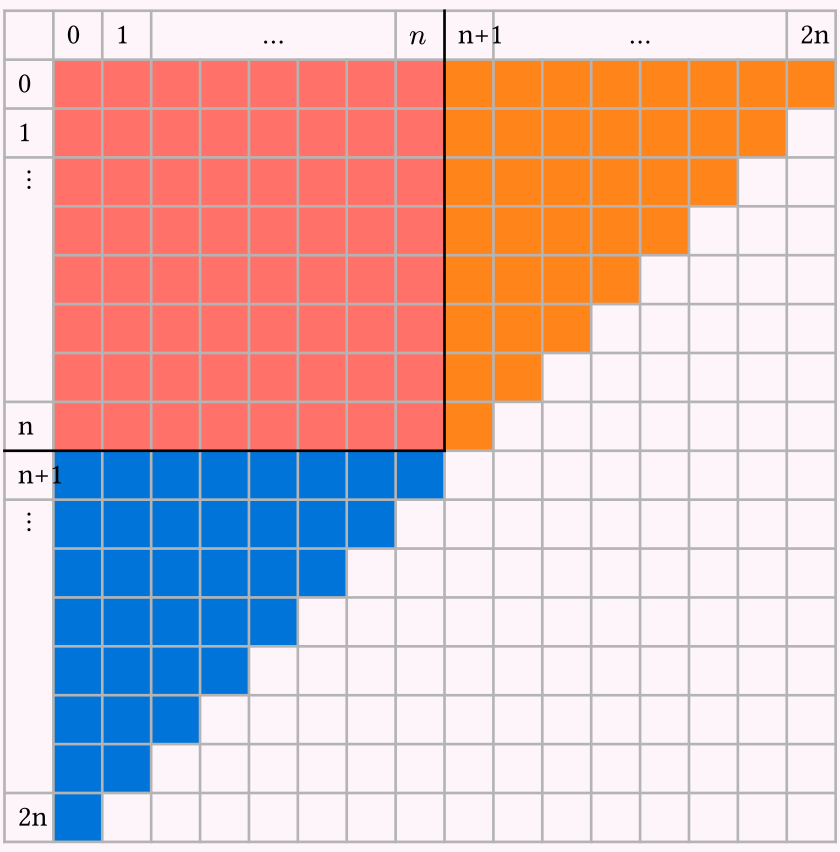
$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = l \in \mathbb{C}$$

Montrons que $l = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right)$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

Si on montre q'une suite extraite de (S_n) tend vers $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right)$, alors on pourra conclure par unicité de la limite

On regarde $(u_n) = (S_{2n})$



$$u_n - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \quad (1)$$

$$= \sum_{\substack{k,l\le 2n\\ k+l\le 2n}} a_k b_l - \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k b_l}_{\text{rouge}}$$

$$= \sum_{\substack{k,l\le 2n\\ k>n\\ k+l\le 2n}} a_k b_l + \sum_{\substack{k,l\le 2n\\ l>n\\ k+l\le 2n}} a_k b_l$$

Or

$$\left|\sum_{\substack{k,l\le 2n\\ k>n\\ k+l\le 2n}} a_k b_l\right| \le \sum_{\substack{k,l\le 2n\\ k>n\\ k+l\le 2n}} |a_k||b_l| \le \underbrace{\sum_{\substack{k,l\le 2n\\ k>n}} |a_k||b_l|}_{\text{on somme des termes positifs}}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{l=0}^{2n}|a_k||b_l|$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{2n}|b_l|\right)\left(\sum_{k=n+1}^{2n}|a_k|\right)$$

$$\le \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{+\infty}|b_l|\right)}_{\text{CVA}}\underbrace{\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}|a_k|\right)}_{\text{Reste}} = \left|\sum_{l=0}^{+\infty}|b_l|\right| \underbrace{R_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$$

d'où par (1), les deux termes ont la meme limite, et ceci conclut

Anki

q:

Exponentielle complexe
Définition de l'exponentielle complexe
a:

Exponentielle complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$:
On définit l'exponentielle complexe de z par la série absolument convergente

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Éléments de preuve:
Preuve de la CVA::

Fixons $z \in \mathbb{C}^*$, $u_n = \dfrac{z^n}{n!} \Rightarrow |u_n| = \dfrac{|z|^n}{n!}$

On a alors

$$n^2|u_n| = \frac{n^2|z|^n}{n!} = \frac{n|z|^n}{(n-1)!} = \underbrace{\frac{n|z|^2}{n-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}|z|^2} \underbrace{\frac{|z|^{n-2}}{(n-2)!}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$$

$$\Rightarrow n^2|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow |u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série converge absolument (donc converge) par comparaison aux séries de Riemann

Anki

q:

Exponentielle complexe
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$e^{z_1+z_2} = ?$$

a:

Exponentielle complexe
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Éléments de preuve:
On a $u_n = \frac{z_1}{n!}$ et $v_n = \frac{z_2}{n!}$ deux TG de séries CVA, d'où on peut faire un produit de Cauchy et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

$$\text{où } w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Penchons nous sur (w_n):

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(z_1)^k}{k!} \frac{(z_2)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n \text{ par binome de Newton} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1} + z_2}$$

Anki

q:

Exponentielle complexe

Que dire si:

- On restreint l'exponentielle complexe à $\mathbb{R}$
- On restreint l'exponentielle complexe aux imaginaires purs

a:

Exponentielle complexe

Restriction à $\mathbb{R}$

On peut justifier (programme de 2ème année) que c'est la solution à $y' = y$ et $y(0) = 1$

Restriction aux imaginair purs

Pour $z = iy \in i\mathbb{R}$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \overline{e^{iy}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} = e^{-iy}$$

donc

$$\left|e^{iy}\right|^2 = e^{iy}e^{-iy} = e^0 = 1$$

$$\boxed{\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}}$$

Anki

q:

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$$

a:

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$$

On a

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

Éléments de preuve:
Par comparaison série intégrale, comme la fonction ln est croissante:

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow n\ln n - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq (n+1)\ln(n+1) - 2\ln 2 - n + 1$$

$\Rightarrow$ théorème des gendarmes:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln k \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n}$$

Anki

q: Règle de d'Alembert sur les séries
a: Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ qui ne s'annulle pas à partir d'un certain rang

On suppose $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ alors:

- si $l < 1$, $\sum u_n$ converge absolument
- si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement
- si $l = 1$, on ne peut pas conclure

Éléments de méthode:
La règle de d'Alembert est une règle qui permet de déterminer la nature de certaines séries, en particulier des séries dont le terme général fait apparaître **des puissances, des factorielles**

Si on a des nombres complexes/des suites négatives, on peut prendre la valeur absolue

Éléments de preuve:

$\boxed{1}$ Sq $l < 1$

Soit β tq $l < \beta < 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \beta$$

donc pour $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{n_0+k} \leq \beta^k u_{n_0}$$

d'où pour $n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \underbrace{u_{n_0} \beta^{n-n_0}}_{(*)}$

$(*)$ est une suite géométrique de paramètre $0 < \beta < 1$, donc la série converge

$\boxed{2}$ Sq $l > 1$

Soit β tq $1 < \beta < l$.

donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \beta \geq 1$$

, donc (u_n) est croissante à partir de n_0 donc (u_n) ne tend pas vers 0

$\boxed{3}$ Sq $l = 1$

Contre exemple,

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1; \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

, $\sum u_n$ diverge