Anki

q: Définition: application p-linéaire

a: Soient E, F 2 $\mathbb{K}$ev et $p \in \mathbb{N}^*$:

Une application f est p-linéaire si elle est linéaire en chaque composante, c'est à dire

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall \left(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_p\right) \in E^{p-1},$$
$$x \mapsto f\left(x_1, ..., x_{i-1}, \boldsymbol{x}, x_{i+1}, ..., x_p\right) \in L(E, F)$$

Reformulation:

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall \left(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_p\right) \in E^{p-1}, \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},$$
$$f\left(x_1, ..., x_{i-1}, \boldsymbol{x + \lambda y}, x_{i+1}, ..., x_p\right)$$
$$=$$
$$f\left(x_1, ..., x_{i-1}, \boldsymbol{x}, x_{i+1}, ..., x_p\right) + \boldsymbol{\lambda} f\left(x_1, ..., x_{i-1}, \boldsymbol{y}, x_{i+1}, ..., x_p\right)$$

Anki

q: Définition: application p-linéaire symétrique

a: Soient E, F 2 $\mathbb{K}$ev et $p \in \mathbb{N}^*$:

Une application f est p-linéaire symétrique si elle est p-linéaire et que

$$\forall \left(x_1, ..., x_p\right) \in E^p, \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, i \neq j$$
$$f\left(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_p\right)$$
$$= f\left(x_1, ..., x_{i-1}, \boldsymbol{x_j}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \boldsymbol{x_i}, x_{j+1}, ..., x_p\right)$$

Remarque:
On en déduit dans ce cas:

$$\forall \sigma \in S_p, f\left(x_1, ..., x_p\right) = f\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Anki

q: Définition: application p-linéaire antisymétrique

a: Soient E, F 2 $\mathbb{K}$ev et $p \in \mathbb{N}^*$:

Une application f est p-linéaire antisymétrique si elle est p-linéaire et que

$$\forall (x_1, ..., x_p) \in E^p, \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, i \neq j$$

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_p)$$

$$= -f(x_1, ..., x_{i-1}, \boldsymbol{x_j}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, \boldsymbol{x_i}, x_{j+1}, ..., x_p)$$

Remarque:
On en déduit que

$$\forall \sigma \in S_p, f(x_1, ..., x_p) = \varepsilon(\sigma) f\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right)$$

Anki

q: Définition: application p-linéaire alternée

a: Soient E, F 2 $\mathbb{K}$ev et $p \in \mathbb{N}^*$:

Une application f est p-linéaire alternée si elle est p-linéaire et que

$$\forall\left(x_1, ..., x_p\right) \in E^p, \forall(i, j) \in [\![1, p]\!]^2, i \neq j \text{ tq } x_i = x_j$$
$$\text{alors } f\left(x_1, ..., x_p\right) = 0$$

Reformulation:
Si p-linéaire et que deux fois le meme vecteur alors nulle

Anki

q: Soit f une application p-linéaire sur E^p à valeurs dans F, avec 2 inversible ($\mathbb{K}$ pas de caractéristique 2), alors

$$?$$

a: Alors

$$f \text{ antisymétrique} \Leftrightarrow f \text{ alternée}$$

Éléments de preuve:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sq f antisymétrique

Soient $(x_1, ..., x_p) \in E^p, \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, i \neq j$, et $x_i = x_j$

$$\begin{aligned} f(x_1 ... x_i ... x_j ... x_p) &= -f(x_1 ... \boldsymbol{x_j} ... \boldsymbol{x_i} ... x_p) \\ &= -f(x_1 ... \boldsymbol{x_i} ... \boldsymbol{x_i} ... x_p) \end{aligned}$$

d'où $2f(x_1, ..., x_p) = 0$

On divise par 2, possible si 2 inversible, et on trouve que f est alternée

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sq f p-linéaire alternée

Soient $(x_1, ..., x_p) \in E^p, \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, i \neq j$

$f(x_1, ..., x_i + x_j, ..., x_j + x_i, ..., x_p) = 0 \leftarrow$ f alternée

par linéairité de la i-ème variable

$= f(x_1, ..., x_i, ..., x_j + x_i, ..., x_p) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_j + x_i, ..., x_p) = 0$

$= f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_p)$

$+\underbrace{f(x_1, ..., x_i, ..., x_i, ..., x_p)}_{\text{alternée}, = 0} + \underbrace{f(x_1, ..., x_j, ..., x_j, ..., x_p)}_{\text{alternée}, = 0} = 0$

$\Rightarrow f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) = -f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_p)$

$\Leftrightarrow f$ antisymétrique

Anki

q: Soit f application p-linéaire alternée de E^p dans F, on a:

1. Si $(x_1, ..., x_p) \in E^p$ contient deux fois le meme vecteur, alors $f(x_1, ..., x_p) = ?$
2. Si $(x_1, ..., x_p) \in E^p$ est liée, alors $f(x_1, ..., x_p) = ?$

a: Soit f application p-linéaire de E^p dans F, on a:

1. Si $(x_1, ..., x_p) \in E^p$ contient deux fois le meme vecteur, alors $f(x_1, ..., x_p) = 0_F$
2. Si $(x_1, ..., x_p) \in E^p$ est liée, alors $f(x_1, ..., x_p) = 0_F$

Éléments de preuve:

$\boxed{1}$

Définition

$\boxed{2}$

Soient $(x_1, ..., x_p) \in E^p$ p vecteurs liés, il existe $i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_1, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$ tq

$$x_i = \sum_{\substack{1 \le k \le p \\ k \ne i}} \lambda_k x_k$$

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_p) = f\left(x_1, ..., \sum_{\substack{1 \le k \le p \\ k \ne i}} \lambda_k x_k, ..., x_p\right)$$

$$= \sum_{\substack{1 \le k \le p \\ k \ne i}} \underbrace{f(x_1, ..., x_k, ..., x_p)}_{=0_F} = 0$$

(le contenu de la somme est égal à 0 pour tout k car comme on ne passe pas par i, on passe toujours par 2 fois le meme vecteur)

Anki

q: Définition: déterminant

a: Soit E $\mathbb{K}$ev de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{\mathrm{n}})$ une base de E, alors il existe une unique forme n-linéaire antisymétrique définie sur E^n, notée $\det_{\mathcal{B}}$ telle que

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_{\mathrm{n}}) = 1$$

On a de plus que si $(u_1, ..., u_{\mathrm{n}}) \in E^n$, avec $\forall j \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u_j = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, ..., u_{\mathrm{n}}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \times ... \times x_{\sigma(n)n}$$

Éléments de preuve:
TODO

Anki

q: Soit E $\mathbb{K}$ev de dimension n:
Que dire de l'ensemble des formes linéaires sur E?
a: L'ensemble des formes linéaires sur E est sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(E^n, \mathbb{K})$ de dimension 1 - une droite vectorielle

Éléments de preuve:

$\boxed{\textbf{Si } f(e_1, ..., e_n) = \alpha \neq 0}$

On prendre $\tilde{f} = \frac{1}{\alpha} f$, et on aura $\tilde{f}(e_1, ..., e_n) = 1$, et f n-linéaire antisymétrique, donc par unicité du déterminant, $\tilde{f} = \det_{\mathcal{B}}, \Longrightarrow f = \alpha \det_{\mathcal{B}}$, d'où

$$f \in \operatorname{Vect}\left(\det_{\mathcal{B}}\right)$$

$\boxed{\textbf{Si } f(e_1, ..., e_n) = 0}$

Pour $(u_1, ..., u_n) \in E^n$ avec $\forall j, \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$,

$$f(u_1, ..., u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} ... x_{\sigma(n)n}$$

Or, $f(e_1, ..., e_n) = 0$, donc on a $f = 0 \times \det_{\mathcal{B}}$

Anki

q: Définition: déterminant d'une matrice carrée
a: On définit le déterminant d'une matrice carrée comme le déterminant de ses colonnes dans la base canonique.

Remarque:
On vera plus tard que $\forall m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(M) = \det(M^T)$, donc c'est aussi le déterminant des lignes dans la base canonique

Exemple:

$$\begin{aligned} \det(861 I_n) &= \det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{K}^n)}\left(\begin{pmatrix} 861 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 861 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 861 \end{pmatrix}\right) \\ &= (861)^n \det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{K}^n)}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 861^n \end{aligned}$$

Anki

q: Déterminant d'une matrice de dimension 2
a:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Éléments de preuve:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$= a\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) + c\det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{ab\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{=0 \text{ par antisymétrie}} + \underbrace{ad\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{=1} + \underbrace{cb\det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{=-\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=-1}$$

$$+\underbrace{cd\det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{=0}$$

$$= ad - bc$$

Anki

q:

Déterminants calculables directement

Quel est le déterminant:

1. D'une matrice diagonale
2. D'une matrice carrée dont 2 des vecteurs colonne sont égaux
3. D'une matrice dont les colonnes sont liées
4. D'une matrice de permutation
5. D'une matrice de dilatation
6. D'une matrice de transvection

a:

1. D'une **matrice diagonale**: c'est le produit des éléments de sa diagonale
2. D'une matrice carrée dont 2 des vecteurs colonne sont égaux
$$\det M = 0$$
3. D'une matrice dont les colonnes sont liées
$$\det M = 0$$
4. D'une matrice de permutation
$$\det P_{ij} = -1$$
5. D'une matrice de dilatation
$$\det D_i(\alpha) = \alpha$$
6. D'une matrice de transvection
$$\det T_{ij}(\lambda) = 1$$

Anki

q: Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\det(\alpha M) = ?$$

a: Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\det(\alpha M) = \alpha^n \det(M)$$

Anki

q: Géométriquement, qu'est le déterminant?

a:

- En dimension 2: $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire du parallélogramme porté par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- En dimension 3, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume de parallépipède porté par $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$

Remarque:
Ce sont des aires algébriques, donc elles peuvent etre négatives si la famille de vecteurs n'est pas dans le sens direct.

Anki

q: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & (*) & \dots & (*) \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \text{ ou } \left(\begin{array}{ccc|c} & & & (*) \\ & M' & & \vdots \\ & & & (*) \\ \hline 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

où $M' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ alors

$$\det(M) = ?$$

a: alors

$$\det(M) = \lambda \det(M')$$

Éléments de preuve:
Cas

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & (*) \\ & M' & & \vdots \\ & & & (*) \\ \hline 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\det M = \underbrace{\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & (*) \\ & M' & & \vdots \\ & & & (*) \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)}_{=0} + \lambda \det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & (*) \\ & M' & & \vdots \\ & & & (*) \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Considérons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ M' &\longmapsto \det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & (*) \\ & M' & & \vdots \\ & & & (*) \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

φ est $(n-1)$-linéaire et antisymétrique, $\varphi \in \mathrm{Vect}\left(\det_{\mathcal{B}_C(\mathbb{K}^{n-1})}\right)$, donc $\varphi = \alpha \det_{\mathcal{B}_C(\mathbb{K}^{n-1})}$

En évaluant en $M' = I_{n-1}$,

$$\varphi(I_{n-1}) = \det I_n = 1 = \alpha \det I_{n-1} = \alpha$$

donc $\alpha = 1$

d'où

$$\det M = \lambda \det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & (*) \\ & M' & & \vdots \\ & & & (*) \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) = \lambda \det M'$$

Anki

q: Que dire du déterminant d'une matrice triangulaire?

a: Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux

Éléments de preuve:
Corollaire de la proposition précédente

Anki

q: Soit M' une matrice obtenue d'une matrice M par une opération élémentaire sur ses colonnes, alors

$$\det M' = \begin{cases} ? \text{ si permutation} \\ ? \text{ si dilatation de rapport } \alpha \neq 0 \\ ? \text{ si transvection de rapport } \lambda \end{cases}$$

a: Soit M' une matrice obtenue d'une matrice M par une opération élémentaire sur ses colonnes, alors

$$\det M' = \begin{cases} -\det M \text{ si permutation} \\ \alpha \det M \text{ si dilatation de rapport } \alpha \neq 0 \\ \det M \text{ si transvection de rapport } \lambda \end{cases}$$

Éléments de preuve:

$\boxed{\textbf{Permutation}}$ M' obtenue par $C_i \longleftrightarrow C_j, i \neq j$

$$\begin{aligned} \det M' &= \det(C_1(M'), ..., C_n(M')) \\ &= \det\big(C_1(M), ..., C_j(M), ..., C_i(M), ..., C_n(M)\big) \\ &= -\det\big(C_1(M), ..., C_i(M), ..., C_j(M), ..., C_n(M)\big) \\ &= -\det M \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Dilation}}$ M' obtenue par $C_i \leftarrow \alpha C_i$, $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \det M' &= \det(C_1(M'), ..., C_n(M')) \\ &= \det(C_1(M), ..., \alpha C_i(M), ..., C_n(M)) \\ &= \alpha \det(C_1(M), ..., C_i(M), ..., C_n(M)) \\ &= \alpha \det M \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Transvection}}$ M' obtenue par $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

$$\begin{aligned} \det M' &= \det(C_1(M'), ..., C_n(M')) \\ &= \det\big(C_1(M), ..., C_i(M), ..., C_j(M) + \lambda C_i(M), ..., C_n(M)\big) \\ &= \det\big(C_1(M), ..., C_i(M), ..., C_j(M), ..., C_n(M)\big) \\ &+\lambda \det(C_1(M), ..., C_i(M), ..., C_i(M), ..., C_n(M)) \\ &= \det M \end{aligned}$$

Anki

q: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il a équivalence entre:

1. M inversible
2. <Que dire du déterminant de M>

a: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il a équivalence entre:

1. M inversible
2. $\det M \neq 0$

Éléments de preuve:

$\boxed{\neg 1 \Longrightarrow \neg 2}$

Si M n'est pas inversible, alors ses colonnes sont liées, donc $\det M = 0$ ok!

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Supposons M inversible

Donc les colonnes de M forment une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{\mathrm{n}})$, et il existe une application linéaire n-linéaire antisymétrique sur $(\mathbb{K}^n)^n$ telle que $f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{\mathrm{n}}) = 1$

$f \in \mathrm{Vect}\left(\det_{\mathcal{B}_C(\mathbb{K}^n)}\right)$ car c'est une droite vectorielle, donc $f = \alpha \det_{\mathcal{B}_C(\mathbb{K}^n)}, \alpha \in \mathbb{K}$

Or $f(C_1(M), ..., C_n(M)) = 1 = \alpha \det M$ donc $\det M \neq 0$

Anki

q: Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det(MN) = ?$$

a:

$$\det(MN) = \det(M)\det(N)$$

Éléments de preuve:
Si M non-inversible, alors MN non inversible et $\det(MN) = 0 = \det(M)\det(N)$ ok!

Si M inversible, on prend

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ N &\longmapsto \frac{\det(MN)}{\det(M)} \end{aligned}$$

φ est n-linéaire antisymétrique par rapport aux colonnes de N

$\varphi \in \mathrm{Vect}(\det)$, donc $\varphi = \alpha \det$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$\varphi(I_n) = \alpha \det(I_n) = \alpha = \frac{\det(MI_n)}{\det(M)} = 1$

d'où $\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(N) = \det(N) = \frac{\det(MN)}{\det(M)}$ CQFD

Anki

q: Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, alors

$$\det(M^{-1}) = ?$$

a:

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$$

Éléments de preuve:
Si M inversible,

$$1 = \det(I_n) = \det(M \times M^{-1}) = \det(M)\det(M^{-1})$$

ok!

Anki

q: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det(M^T) = ?$$

a: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det(M^T) = \det(M)$$

Ainsi, le déterminant d'une matrice est n-linéaire antisymétrique par rapport aux colonnes et par rapport aux lignes.

On notera ainsi le déterminant de la matrice M

$$\det M = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

Éléments de preuve:
Si M est non-inversible, M^T non plus, et donc $\det M = 0 \det M^T$ ok

Supposons M inversible; alors on peut décomposer M en produit de matrices d'opérations élémentaires: $M = P_1, \dots, P_k$

- Si P est une transvection $T_{ij}(\lambda)$, $T_{ij}(\lambda)^T = T_{ji}(\lambda)$ et $\det\left(T_{ij}(\lambda)\right) = 1 = \det\left(T_{ji}(\lambda)\right)$
- Si P est une dialation ou une permutation, $P = P^T$ car les matrices sont symétriques, donc égalité des déterminants

$$M^T = (P_1, \dots, P_k)^T = P_k^T \dots P_1^T$$

donc ok

Anki

q: Définition: déterminant d'un endomorphisme
a: Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ev E de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E, alors

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)$$

est une quantité indépendante du choix de la base, et on l'appelera déterminant de l'endomorphise f, noté $\det(f)$

Éléments de preuve:
Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 2 bases de E

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1} f = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} \mathrm{Id}\right)\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2} f\right)\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \mathrm{Id}\right)$$

$M_1 = P M_2 P^{-1}$ donc

$$\begin{aligned}\det(M_1) &= \det(P M_2 P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(M_2)\det(P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(P^{-1})\det(M_2) \\ &= \det(PP^{-1})\det(M_2) \\ &= \det(M_2) \text{ CQFD}\end{aligned}$$

Anki

q: Déterminant d'une symétrie

a: Soit s une symétrie d'un $\mathbb{K}$ev E de dimension n

On a $E = F \oplus G$, et s symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors

$$\det(s) = (-1)^{\dim G}$$

Éléments de preuve:

On prend une base adaptée à $F \oplus G$

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{e_1, ..., e_p}_{\text{base de } F}, \underbrace{e_{p+1}, ..., e_n}_{\text{base de } G} \right)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} s = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array} \right)$$

donc

$$\det(s) = (-1)^{n - p}$$

Anki

q: Définition: cofacteur d'indice (i, j) (et comatrice)
a: On note $M(i, j)$ la sous matrice obtenue de M en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne

On appelle cofacteur d'indices (i, j) la quantité

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M(i, j))$$

La comatrice est la matrice des cofacteurs:

$$\mathrm{com}(M) = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \cdots & \Delta_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n,1} & \cdots & \Delta_{n,n} \end{pmatrix}$$

Anki

q: Déterminant de Vandermonde
a: Soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ et

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & ... & a_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & ... & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\det M = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

$\longrightarrow \forall i \neq j, a_i = a_j \Longrightarrow \det M = 0$ (deux fois la meme ligne), ce qui correspond à la formule

Éléments de méthode:
Si une matrice est proche d'une matrice de Vandermonde, on pourra rajouter des lignes et des colonnes pour obtenir une matrice de Vandermonde, puis récupérer le det initial par rapport en factorisant par le paramètre ajouté sur la ligne et la colonne ajoutées

Exemple:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{vmatrix} \\ &= (e-d)(e-c)(e-b)(e-a) \\ &\quad (d-c)(d-b)(d-a) \\ &\quad (c-b)(c-a) \\ &\quad (b-a) \end{aligned}$$

Éléments de preuve:
Par récurrence

$\boxed{\textbf{Initialisation}}$

Pour $n = 1$, on a $M_1 = (1)$, $\det M_1 = 1$ (le produit est vide)

Pour $n = 2$, on a $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$ et $\det M_2 = a_2 - a_1$ ok

$\boxed{\textbf{Hérédité}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$

Supposons $\det M_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

On a

$$\det M_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & ... & a_1^{n-1} & \boldsymbol{a_1^n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & ... & a_n^{n-1} & \boldsymbol{a_n^n} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a_{n+1}} & ... & \boldsymbol{a_{n+1}^{n-1}} & \boldsymbol{a_{n+1}^n} \end{vmatrix}$$

Posons

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$$

polynome unitaire auxiliaire

On applique

$$C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + \lambda_0 C_1 + ... + \lambda_{n-1} C_n$$

Ainsi, le coefficient de la i-ème ligne, $(n+1)$ colonne,

$$a_i^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k a_i^k = P(a_i)$$

d'où

$$\det M_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & ... & a_1^{n-1} & \boldsymbol{P(a_1)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & ... & a_n^{n-1} & \boldsymbol{P(a_n)} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a_{n+1}} & ... & \boldsymbol{a_{n+1}^{n-1}} & \boldsymbol{P(a_{n+1})} \end{vmatrix}$$

On cherche à avoir que des 0 dans la dernière colonne:
$P = (X - a_1)...(X - a_n)$ convient (car P est un polynome unitaire), d'où

$$\det M_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & ... & a_1^{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & ... & a_n^{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a_{n+1}} & ... & \boldsymbol{a_{n+1}^{n-1}} & \boldsymbol{P(a_{n+1})} \end{vmatrix}$$

On développe par rapport a la dernière colonne:

$$\begin{aligned} \det M_{n+1} = P(a_{n+1}) \det(M_n) &= \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

Anki

q: Soit M in $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$M\operatorname{com}(M)^T = \operatorname{com}(M)M^T = ?$$

a: Soit M in $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$M\operatorname{com}(M)^T = \operatorname{com}(M)M^T = \det(M)I_n$$

Remarque:
Pas vraiment utilité dans la pratique, résultat théorique (il faut calculer n déterminants de taille $n-1$)

Éléments de preuve:
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Considérons

$$\begin{aligned}\varphi_i :\ & \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \\ & X \longmapsto \det\left(C_1(M), ..., C_{j-1}(M), X, C_{j+1}(M), C_n(M)\right)\end{aligned}$$

pour $i \in [\![1, n]\!]$

$$\varphi_j(C_i(M)) = \begin{cases} \det(C_1, ..., C_n) = \det M \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \text{ car deux fois le meme vecteur} \end{cases}$$

par un développelement par rapport à la j-ème colonne:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \det\left(C_1, ..., C_{j-1}, X, C_{j+1}, C_n\right) \\ = \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta_{k,j}(M) \end{aligned}$$

Pour $(i, j) \in [\![1, n^2]\!]$

$$\begin{aligned} \left(M\operatorname{com}(M)^T\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \left(\operatorname{com}(M)^T\right)_{kj} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_{ik} \operatorname{com}(M)_{jk}}_{\text{on a mis la ligne } i \text{ sur la ligne } j} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{j-1,1} & \dots & m_{j-1,n} \\ \hline m_{i,1} & \dots & m_{i,n} \\ \hline m_{j+1,1} & \dots & m_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m(nn) \end{vmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} L_1(M) \\ \vdots \\ L_{j-1}(M) \\ L_i(M) \\ L_{j+1}(M) \\ \vdots \\ L_n(M) \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{cases} \det(M) \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

donc

$$\boxed{\left(M\operatorname{com}(M)^T\right) = \begin{pmatrix} \det(M) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \det(M) \end{pmatrix}}$$

Anki

q: Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors

$$M^{-1} = \text{<par rapport à comatrice>}$$

a: Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \mathrm{com}(M)^T$$

Éléments de preuve:

$M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det M \neq 0$

Or $M \mathrm{com}(M)^T = \det(M) I_n$ donc, en divisant par $\det M$ et en multipliant par M^{-1}

$$\frac{1}{\det M} \mathrm{com}(M)^T = M^{-1}$$

Anki

q: L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto M^{-1} \end{aligned}$$

est continue par rapport à ?
a: L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto M^{-1} \end{aligned}$$

est continue par rapport à **chaque coefficient de M**

Reformulation:
C'est à dire que si on fixe toutes les variables sauf une, c'est continu aux endroits où c'est défini ($\Leftrightarrow$ aux endroits où c'est inversible)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & \dots & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & x & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & \dots & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est continue aux endroits où elle est définie

Éléments de preuve:
car pour $(i, j) \in [\![1, n^2]\!]$,

$$m_{ij} \mapsto \frac{1}{\det M} \mathrm{com}(M)^T$$

est continue car les coefficients sont des fractions rationelles

Anki

q: Soit A un anneau commutatif, on considère $\mathcal{M}_n(A)$ l'anneau des matrices à coefficients dans A.

Les inversibles de $(\mathcal{M}_n(A), +, \times)$ vérifient: ?
a: Soit A un anneau commutatif, on considère $\mathcal{M}_n(A)$ l'anneau des matrices à coefficients dans A.

Les inversibles de $(\mathcal{M}_n(A), +, \times)$ vérifient:

$$(\mathcal{M}_n(A))^\times = \{M; M \in \mathcal{M}_n(A) \land \det(M) \in A^\times\}$$

Reformulation:
Les inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(A)$ sont les matrices dont le déterminant est inversible dans A

Éléments de preuve:
Par double inclusion

$\boxed{\subset}$ Soit $M \in (\mathcal{M}_n(A))^\times$

$$\implies \exists M' \in \mathcal{M}_n(A) \text{ tq } MM' = I_n$$

$$\implies \det(MM') = 1 = \det(M)\det(M')$$

donc $\det(M)$ est inversible, ok!

$\boxed{\supset}$ Sq *det* $M \in A^\times$

comme $M\mathrm{com}(M)^T = \det(M)I_n$, on a, car $\det M$ est inversible,

$$\mathrm{com}(M)^T\det(M)^{-1} = I_n$$

donc $\det(M)^{-1}\mathrm{com}(M)^T$ est l'inversible de M, ok!

Anki

q: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$,

$$M \text{ inversible} \Leftrightarrow ?$$

a: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$,

$$M \text{ inversible} \Leftrightarrow \det M = 1 \text{ ou } -1$$

Reformulation:
Une matrice d'entiers est inversible si et seulement si son déterminant est 1 ou -1

Éléments de preuve:
Corollaire de la proposition

$$(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))^\times = \{M; M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \land \det(M) \in A^\times\}$$