

ML-90**B.Sc. (Vth Sem.) Examination-2014-15****MATHEMATICS****(Real Analysis, Linear Algebra & Discrete Maths)****Paper -****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 125****नोट :** सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।**Note :** Attempt all questions.**खण्ड-अ****Section-A****वस्तुनिष्ठ प्रश्न****Objective Type Questions****Q.1** सही विकल्प चुनिये—

प्रत्येक 2

Choose the correct answer—

(i) निम्नलिखित फलन के सीमान-समाकलन का मान क्या है—

 $f(x)=1, x \in [0, 1], f(x)=2, x \in [1, 2]$ तथा $f(x)=3, x \in [2, 3]$

(अ) 3

(ब) 4

(स) 5

(द) 6

ML-90

P.T.O.

(2)

What is the value of Riemann-integral of the following function—

$$f(x)=1, x \in [0, 1], f(x)=2, x \in [1, 2] \text{ and}$$

$$f(x)=3, x \in [2, 3]$$

(a) 3

(b) 4

(c) 5

(d) 6

(ii) फलन $f(x, y) = |x| + |y|$ है—

(अ) $(0, 0)$ पर अवकलनीय नहीं है(ब) $(0, 0)$ पर अवकलनीय है(स) $(0, 0)$ पर असंतत है

(द) इनमें से कोई नहीं

Function $f(x, y) = |x| + |y|$ is—

(a) Not differentiable at $(0, 0)$ (b) Differentiable at $(0, 0)$ (c) Discontinuous at $(0, 0)$

(d) None of these

ML-90

Contd.

(3)

rgpvonline.com

(iii) यदि $f(x) = x^2, 0 \leq x < \pi$ है, तो इस फलन के लिए

फोरियर श्रेणी होगी—

(अ) कोज्या श्रेणी

(ब) ज्या श्रेणी

(स) दोनों (अ) तथा (ब)

(द) इनमें से कोई नहीं

If $f(x) = x^2, 0 \leq x < \pi$ then the Fourier series for this function is—

(a) Cosine series

(b) Sine series

(c) Both (a) and (b)

(d) None of the above

(iv) समाकल $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ का मान है—

(अ) π (ब) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (स) $\sqrt{\pi}$ (द) $\frac{\pi \sqrt{\pi}}{2}$

ML-90

P.T.O.

(4)

The value of integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ is—

- (a) π (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
 (c) $\sqrt{\pi}$ (d) $\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}$

(v) सदिश समष्टि $V_3(R)$ में सदिश $\alpha_1=(1,2,3)$,

$\alpha_2=(1,0,1)$ तथा $\alpha_3=(0,1,0)$ है—

- (अ) रैखिकतः स्वतंत्र
 (ब) रैखिकतः परतंत्र
 (स) (अ) एवं (ब) दोनों सत्य है
 (द) (अ) एवं (ब) दोनों असत्य है

Vector $\alpha_1=(1,2,3)$, $\alpha_2=(1,0,1)$, $\alpha_3=(0,1,0)$ in vector space $V_3(R)$ are —

- (a) Linearly independent
 (b) Linearly dependent
 (c) Both (a) and (b) are true
 (d) Both (a) and (b) are False

(vi) समुच्चय $S=\{a+ib, c+id\}$ सदिश समष्टि $C(R)$ का आधार होगा यदि—

- (अ) $ab-cd=0$ (ब) $ab-cd \neq 0$
 (स) $ad-bc=0$ (द) $ad-bc \neq 0$

ML-90

Contd.

(5)

Set $S=\{a+ib, c+id\}$ is a base of the vector space

$C(R)$ if—

- (a) $ab-cd=0$
 (b) $ab-cd \neq 0$
 (c) $ad-bc=0$
 (d) $ad-bc \neq 0$

(vii) यदि T परिमित विमीय सदिश समष्टि $U(F)$ से सदिश समष्टि $V(F)$ में एक रैखिक रूपान्तरण है, तब T के परास को कहते हैं—

- (अ) U की विभा
 (ब) T की शून्यता
 (स) T की कोटि
 (द) उक्त में से कोई नहीं

If T is a linear transformation from finite dimensional vector spaces $U(F)$ to $V(F)$ then the range of T is called —

- (a) Dimension of U
 (b) Nullity of T
 (c) Rank of T
 (d) None of the above

ML-90

P.T.O.

(6)

(viii) किसी क्षेत्र F पर, वर्ग आव्यूह A विकर्णीय कहलाता है यदि एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P का अस्तित्व इस प्रकार हो कि क्षेत्र F पर किसी विकर्ण आव्यूह के लिए—

- (अ) $D = A P$
 (ब) $A = D \cdot P D$
 (स) $D = P^{-1} A P$
 (द) $P = A D A^{-1}$

Square matrix A on a field F is called diagonalizable if there exists an invertible matrix P such that for a diagonal matrix D on field F —

- (a) $D = A P$
 (b) $A = D^{-1} P D$
 (c) $D = P^{-1} A P$
 (d) $P = A D A^{-1}$

(ix) n शीर्षों वाले एक सरल ग्राफ में कोरों की महत्तम संख्या होगी—

- (अ) n
 (ब) $n(n+1)$
 (स) $n(n-1)$
 (द) $\frac{n(n-1)}{2}$

Maximum number of edges in a simple graph of n vertices is—

- (a) n
 (b) $n(n+1)$
 (c) $n(n-1)$
 (d) $\frac{n(n-1)}{2}$

(x) किसी भी वृक्ष में न्यूनतम आलम्ब शीर्ष होते हैं—

- (अ) 1 (ब) 2
 (स) 3 (द) 4

Minimum number of pendant vertex in any tree is—

- (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 4

खण्ड-ब

Section-B

लघु उत्तरीय प्रश्न

Short Answer Type Questions

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

Note : Attempt all questions. Each question carries 5 marks.

Q. II उदाहरण सहित रिमान समाकलनीय फलन को परिभाषित कीजिये।

Define Riemann integrable function with example.

(8)

अथवा

or

सिद्ध करो कि प्रत्येक संतत फलन, रीमान समाकलनीय होता है।
Prove that every continuous function is Riemann integrable.

Q.III अन्तराल $-\pi < x < \pi$ में फलन $f(x) = e^{-x}$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिये।

Find the Fourier series for the function $f(x) = e^{-x}$ in the interval $-\pi < x < \pi$

अथवा

or

समाकल $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिये।

Test the integral $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ for the convergence.

Q.IV सदिश समष्टि को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिये।

Define vector space with example.

अथवा

or

ML-90

Contd.

(9)

एक सदिश समष्टि की दो उपसमष्टियों का रैखिक एवं सरल योग परिभाषित कीजिये।

Define linear and direct sums of two subspaces of a vector space.

Q.V यदि F समिश्र संख्याओं का क्षेत्र है तब सिद्ध करो कि फलन $T:V_3(F) \rightarrow V_3(F)$ जो कि निम्नानुसार परिभाषित है—

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - 2x_2)$$

एक रैखिक रूपान्तरण है।

If F is a field of complex numbers. Then prove that the function $T:V_3(F) \rightarrow V_3(F)$ defined by—

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - 2x_2)$$

is a linear transformation.

अथवा

or

यदि λ किसी व्युत्क्रमणीय संकारक T का आइगेन मान हो तो सिद्ध करो कि λ^{-1} संकारक T^{-1} का आइगेन मान होगा।

If λ is a eigen value of a non-singular operator T then prove that λ^{-1} is the eigen value of the operator T^{-1} .

ML-90

P.T.O.

(10)

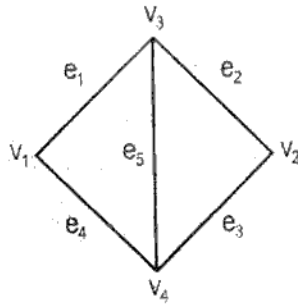
Q.VI सिद्ध करो कि सम्बन्धों का संयोजन साहचर्य नियम का पालन करता है।

Prove that the composition defined on relations satisfies associative law.

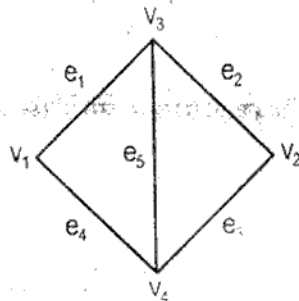
अथवा

or

निम्न आलेख के लिए आपतन तथा संलग्नता आव्यूह प्राप्त कीजिये—



Find the incidence and adjacency matrices of the following graph—



ML-90

Contd.

(11)

खण्ड-स

Section-C

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

Long Answer Type Questions

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 14 अंक का है।

Note : Attempt all questions. Each question carries 14 marks.

Q.VII यदि $f \in R[a, b]$ तब सिद्ध करो कि $|f| \in R[a, b]$ तथा

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

If $f \in R[a, b]$ then prove that $|f| \in R[a, b]$ and

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

अथवा

or

समाकलन का प्रथम मध्यमान प्रमेय लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

State and prove first mean value theorem of integral calculus.

Q.VIII संग प्रमेय लिखिये तथा सिद्ध कीजिये।

ML-90

P.T.O.

(13)

(12)

State and prove Young's theorem.

अथवा

or

निम्नलिखित समाकल का मान प्राचल के सापेक्ष अवकलन कर ज्ञात कीजिये—

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{\log x} dx \quad (\alpha > -1)$$

Find the value of the following integral by differentiating with respect to the parameter—

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{\log x} dx \quad (\alpha > -1)$$

Q.IX सिद्ध करो कि प्रत्येक परिमित विमीय सदिश समष्टि के किन्हीं दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है।

Prove that the number of elements in any two bases of a finite dimensional vector space is same.

अथवा

or

यदि w_1 तथा w_2 परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसदिश समष्टियाँ हैं तो सिद्ध करो कि —

ML-90

Contd.

विमा $(w_1 + w_2) = \text{विमा } w_1 + \text{विमा } w_2 - \text{विमा } (w_1 \cap w_2)$

If w_1 and w_2 are two vector subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$ then prove that—

$$\dim(w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim(w_1 \cap w_2)$$

यदि R^3 पर रेखिक संकारक T निम्नानुसार परिभाषित है—

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3 - 2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

तो सिद्ध करो कि T व्युत्क्रमणीय और प्रतिलोमीय है। T^{-1} के लिए सूत्र भी ज्ञात कीजिये।

If linear operator T defined on R^3 as following—

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3 - 2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

Then prove that T is non-singular and invertible. Also find the formula for T^{-1} .

अथवा

or

सिद्ध करो कि आव्यूह A विकर्णनीय है—

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ML-90

P.T.O.

(14)

Prove that matrix A is diagonalizable—

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Q.XI सिद्ध करो कि n शीर्ष तथा K घटकों वाले ग्राफ में कोरो की

अधिकतम संख्या $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ होगी।

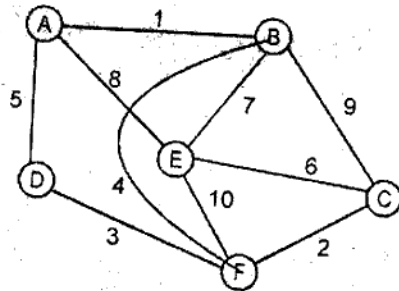
Prove that the maximum number of edges in a graph of n vertices and k components is—

$$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

अथवा

or

निम्नलिखित आलेख का प्रिम्स फलन विधि से न्यूनतम जनक वृक्ष ज्ञात कीजिये—

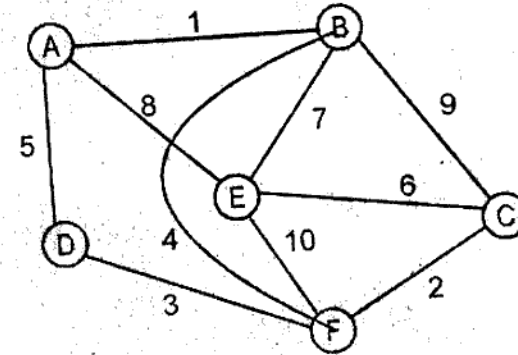


ML-90

Contd.

(15)

Find the minimal spanning tree for the following graph using prim's algorithm—



Copies 7000

ML-90