

การแก้ปัญหาวงจรไฟฟ้ากระแสสลับด้วยจำนวนเชิงซ้อน

อิธิพัฒน์ ธนบดีกาญจน์

5 กันยายน พ.ศ. 2563

1 บทนำ

การใช้จำนวนเชิงซ้อนดีกว่าการใช้ Phasor ในระบบมัลติเพล็กซ์อย่างไร ?

- ไม่ต้องวาด Phasor Diagram
- เป็นการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ไม่ต้องใช้เรขาคณิตซึ่งโดยส่วนใหญ่แล้วพีชคณิตจะง่ายกว่า

วิธีการคิด จะใช้ Euler's formula¹ ช่วยในการแปลงตรีโกณมิติเป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (1)$$

เราจะใช้ j เพื่อสแกน i ไว้ใช้เป็นตัวแปรของกระแสไฟฟ้า

$$j^2 = -1 \quad (2)$$

แต่เนื่องด้วย วิธีการคิดที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนแต่คำตอบที่ต้องการเป็นจำนวนจริง เราจึงต้องพิจารณาแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับว่า เป็นฟังก์ชันของ \sin หรือ \cos และนำเฉพาะส่วนจริง (Real Part) หรือส่วนจินตภาพ (Imaginary Part) เป็นคำตอบ

2 การใช้ปริมาณเชิงซ้อนในไฟฟ้ากระแสสลับ

1. แหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับ

(a) $V_{\max} \sin \omega t \rightarrow V_{\max} e^{j\omega t}$ โดย $V_{\max} \sin \omega t = \text{Im} [V_{\max} e^{j\omega t}]$

(b) $V_{\max} \cos \omega t \rightarrow V_{\max} e^{j\omega t}$ โดย $V_{\max} \cos \omega t = \text{Re} [V_{\max} e^{j\omega t}]$

2. ตัวต้านทาน

(a) $R \rightarrow R$

¹ในระดับมัลติเพล็กซ์จะนิยมเขียน $\text{cis } \theta$

3. ตัวเก็บประจุ

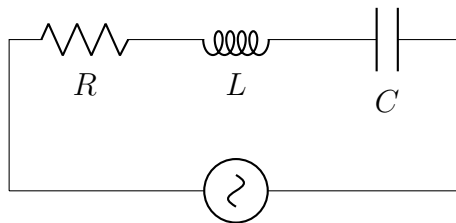
$$(a) \ C \rightarrow \tilde{X}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

4. ตัวเหนี่ยวนำ

$$(a) \ L \rightarrow \tilde{X}_L = j\omega L$$

3 ตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหา

3.1 วงจร R L C ต่ออนุกรม



ให้ $v(t) = V_{\max} \sin \omega t$ คร่อมแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับ จงหา $i(t)$
วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned}\tilde{v}(t) &= V_{\max} e^{j\omega t} \\ v(t) &= \text{Im} [V_{\max} e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

กำหนดให้ Z คือ ความขัด (Impedance) ของ R , X_L และ X_C

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= R + \tilde{X}_L + \tilde{X}_C \\ \tilde{Z} &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ \tilde{Z} &= R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \\ \tilde{Z} &= R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) j\end{aligned}$$

แปลงให้อยู่ใน รูปเชิงขั้ว

$$\tilde{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right)}$$

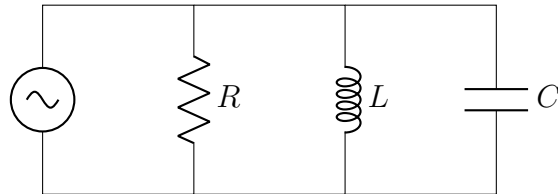
จาก $\tilde{v} = i\tilde{Z}$ (Ohm's law)

$$\begin{aligned}\tilde{i}(t) &= \frac{\tilde{v}(t)}{\tilde{Z}} \\ \tilde{i}(t) &= \frac{V_{\max} e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)}} \\ \tilde{i}(t) &= \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)\right)}\end{aligned}$$

take imaginary part

$$\therefore i(t) = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)\right) \blacksquare$$

3.2 วงจร R L C ต่อขนาน



ให้ $v(t) = V_{\max} \cos \omega t$ คร่อมแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับ จงหา $i(t)$

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned}\tilde{v}(t) &= V_{\max} e^{j\omega t} \\ v(t) &= \text{Re} [V_{\max} e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

กำหนดให้ Z คือ ความขัด (Impedance) ของ R , X_L และ X_C

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{Z}} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\tilde{X}_C} + \frac{1}{\tilde{X}_L} \\ \frac{1}{\tilde{Z}} &= \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \\ \frac{1}{\tilde{Z}} &= \frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) j\end{aligned}$$

แปลงให้อยู่ใน รูปเชิงขั้ว

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} e^{j \arctan\left(\frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}\right)}$$

จาก $\tilde{v} = \tilde{i} \tilde{Z}$ (Ohm's law)

$$\tilde{i}(t) = \frac{\tilde{v}(t)}{\tilde{Z}}$$

$$\tilde{i}(t) = V_{\max} e^{j\omega t} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} e^{j \arctan\left(\frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}\right)}$$

$$\tilde{i}(t) = V_{\max} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} e^{j \arctan\left(\omega t + \frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}\right)}$$

take real part

$$\therefore i(t) = V_{\max} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}\right)\right) \blacksquare$$

หนังสืออ้างอิง

- [1] จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. คณะวิทยาศาสตร์. ภาควิชาฟิสิกส์. (2559). ฟิสิกส์ 2. พิมพ์ครั้งที่ 14. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [2] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2554). หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม ฟิสิกส์ เล่ม 4. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสศ. ลาดพร้าว.
- [3] Nossu G. N. (2562). GEN Phys 2 Midterm.