

# พาราโบลาปลอดภัย (Parabola of Safety)

อิธิพัฒน์ ธนบดีกาญจน์

May 20, 2020

## 1 บทนำ

ในวิชาฟิสิกส์ พาราโบลาปลอดภัย คือ พาราโบลาที่บ่งบอกถึงขอบเขตของโพรเจกไทล์\*ที่จะสามารถเคลื่อนที่ไปได้ ซึ่งจะมีประโยชน์มากต่อการคำนวณโจทย์โพรเจกไทล์ที่ซับซ้อนโดยจะนำไปใช้ใน ปริภูมิ 2 มิติ หรือ ปริภูมิ 3 มิติ และถ้าวาดกราฟในปริภูมิ 3 มิติ จะได้รูปดังนี้

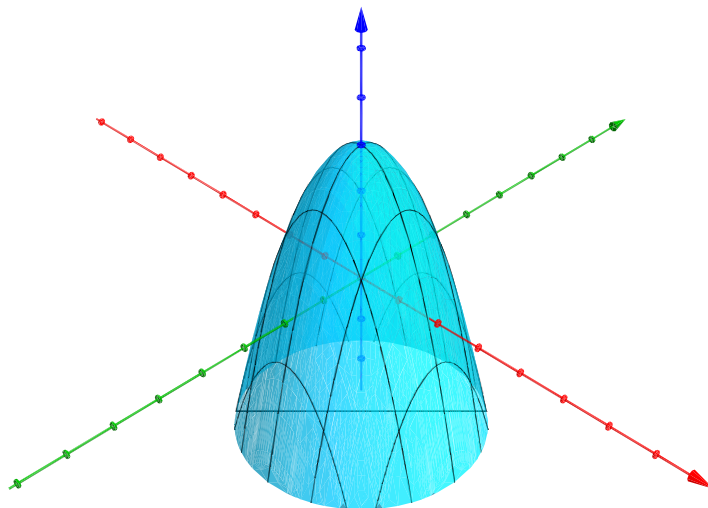


Figure 1: พาราโบลอยด์ (พาราโบลาในปริภูมิ 3 มิติ)

## 2 สมการพาราโบลาปลอดภัย

สมมติ เรียงวัตถุจากจุดกำเนิดพิกัด  $(0,0)$  ด้วยอัตราเร็วต้น  $u$  ไปในทิศทางและมุมใด ๆ ในสนามโน้มถ่วงที่มีค่า  $g$

---

\*วัตถุใด ๆ ที่ถูกขว้างหรือถูกยิงออกไป

## 2.1 พิจารณาแกน $x$

เนื่องจากการเคลื่อนที่ ที่ไม่มีความเร่งจะได้

$$\Delta x = u_x t$$

สมมติยิงวัตถุทำมุม  $\theta$  กับแนวระดับ

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta t \\ t &= \frac{x}{u \cos \theta} \end{aligned} \quad (1)$$

## 2.2 พิจารณาแกน $y$

เนื่องจากการเคลื่อนที่ ที่มีความเร่งจะได้

$$\Delta y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

สมมติยิงวัตถุทำมุม  $\theta$  กับแนวระดับ

$$y = u \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

## 2.3 พิจารณาแกน $x$ และแกน $y$

นำ (1) แทนใน (2) จะได้สมการบรรยายการเคลื่อนที่ ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$y = u \sin \theta \left( \frac{x}{u \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{u \cos \theta} \right)^2$$

ทำการจัดรูป

$$y = x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{u^2} \sec^2 \theta \quad (3)$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\begin{aligned} \sec^2 \theta - \tan^2 \theta &= 1 \\ \sec^2 \theta &= 1 + \tan^2 \theta \end{aligned} \quad (4)$$

นำ (4) ไปแทนใน (3)

$$\begin{aligned} y &= x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{u^2} (1 + \tan^2 \theta) \\ y &= x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 u^2} - \frac{g x^2}{2 u^2} \tan^2 \theta \\ 0 &= \frac{g x^2}{2 u^2} \tan^2 \theta - x \tan \theta + \left( \frac{g x^2}{2 u^2} + y \right) \end{aligned}$$

เราจะสังเกตได้ว่าสมการนี้เป็น Quadratic Equation ดังนั้นสามารถหาค่า  $\tan \theta$  ได้โดยใช้ Quadratic Formula

$$\tan \theta = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4 \left( \frac{gx^2}{2u^2} \right) \left( \frac{gx^2}{2u^2} + y \right)}}{2 \left( \frac{gx^2}{2u^2} \right)}$$

$\tan \theta$  มีค่าจริง (จุด  $(x, y)$  เป็นจุดที่สามารถยิงโพรเจกไทล์ไปได้) เมื่อภายในกรณีที่ 2 มีค่ามากกว่าเท่ากับ 0

$$\begin{aligned} x^2 - 4 \left( \frac{gx^2}{2u^2} \right) \left( \frac{gx^2}{2u^2} + y \right) &\geq 0 \\ 4 \left( \frac{gx^2}{2u^2} \right) \left( \frac{gx^2}{2u^2} + y \right) &\leq x^2 \\ \frac{gx^2}{2u^2} + y &\leq \frac{u^2}{2g} \\ y &\leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2} \end{aligned}$$

เนื่องจากเราต้องการสมการที่บอกขอบเขตของโพรเจกไทล์ที่สามารถเคลื่อนที่ไปได้ ดังนั้นสมการคือ

$$y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2} \quad \blacksquare \quad (5)$$

### 3 จุดที่น่าสนใจของพาราโบลาตลอดภัย

เนื่องจากสมการ (5) เป็นสมการพาราโบลา ดังนั้นสามารถจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้

$$\begin{aligned} y - \frac{u^2}{2g} &= -\frac{gx^2}{2u^2} \\ -\frac{2u^2}{g} \left( y - \frac{u^2}{2g} \right) &= x^2 \\ 4 \left( \frac{-u^2}{2g} \right) \left( y - \frac{u^2}{2g} \right) &= x^2 \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (6)$$

เทียบได้กับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา คือ

$$4c(y - k) = (x - h)^2$$

วาดกราฟ (เฉพาะเส้นสีแดง) จะได้

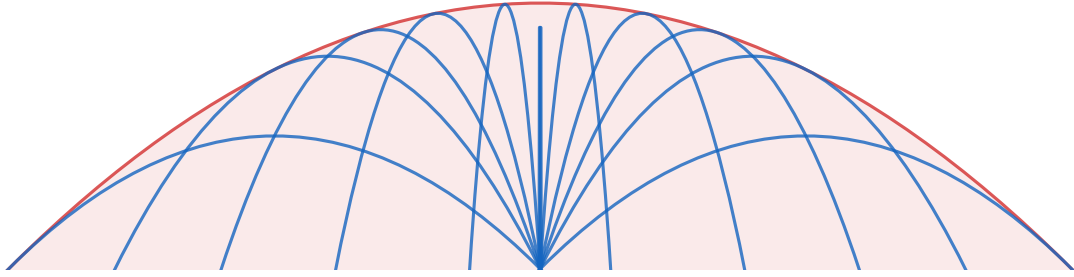


Figure 2: พาราโบลาปลอดภัย (พื้นที่สีแดงคือบริเวณที่ยิงได้และสีน้ำเงินคือแนววิถีของโปรเจกไทล์)

### 3.1 จุดยิง

เพราะพิจารณาการยิงวัตถุจากจุดกำเนิด  $(0,0)$  และพหุนามออกมาแล้วปรากฏว่าได้จุดโฟกัสของพาราโบลาปลอดภัยเป็นจุดกำเนิดเช่นกัน (พิจารณาจากสมการ (6)) ดังนั้นสรุปได้ว่า **จุดยิงเป็นจุดโฟกัส**

### 3.2 ระยะสูงสุดในแนวตั้ง

เนื่องจากจุดยิงเป็นจุดโฟกัส จะได้ว่าระยะจากจุดโฟกัสถึงจุดยอดเท่ากับ  $|c| = \frac{u^2}{2g}$  ก็คือการยิงวัตถุทำมุม  $90^\circ$  นั้นเอง

### 3.3 ระยะไกลสุดในแนวราบ

เนื่องจากจุดยิงเป็นจุดโฟกัส จะได้ Latus Rectum<sup>†</sup> =  $|4c| = \frac{2u^2}{g}$  แต่เราต้องการแค่ครึ่งเดียวของ Latus Rectum (ระยะไกลสุดในแนวราบ) จะได้  $\frac{u^2}{g}$  ก็คือการยิงวัตถุทำมุม  $45^\circ$  นั้นเอง ซึ่งค่านี้เราก็สามารถหาได้จากจุดตัดแกน  $x$  ของกราฟพาราโบลาเช่นเดียวกัน

### 3.4 2 คำตอบ 2 มุม

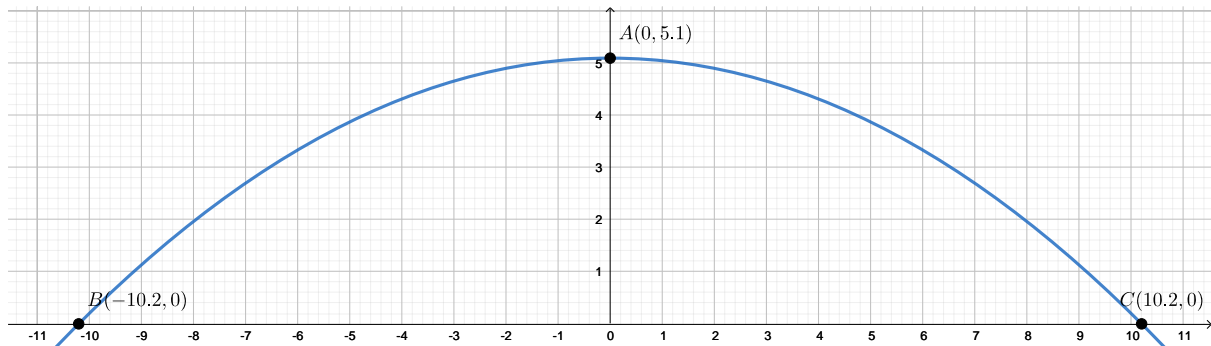
เพราะว่าการแก้หา  $\tan \theta$  เพื่อจะหาสมการพาราโบลาปลอดภัยเป็นการแก้ Quadratic Equation จะได้ 2 คำตอบเมื่อในค่าใต้กรณฑ์ที่ 2 มากกว่า 0 แสดงว่าจะมี 2 มุมที่สามารถยิงวัตถุไปที่จุด  $(x, y)$  นั้นได้ แต่ถ้าเท่ากับ 0 แสดงว่าจะมีเพียงมุมเดียวที่สามารถยิงไปได้ก็คือ จุดที่อยู่บนพาราโบลาปลอดภัยนั่นเอง

---

<sup>†</sup>ความกว้างของพาราโบลา

## 4 ตัวอย่างการใช้งาน พาราโบลาปิดก้น

สมมติ ยิงวัตถุด้วยอัตราเร็วต้น คือ  $10 \text{ m/s}$  และมีความเร่งเนื่องจากสนามโน้มถ่วง คือ  $9.8 \text{ m/s}^2$  จะวาดกราฟพาราโบลาปิดก้นได้ดังนี้



ถ้าเราอยากรู้ว่า ถ้ายิงวัตถุจากจุด  $(0,0)$  โดยทำมุมกับแนวราบเท่าไรก็ได้แล้วจะถึงความสูงและระยะในแนวราบมากที่สุดเท่าไร

ดูจากกราฟพาราโบลาปิดก้นก็ตอบได้ทันทีเลยว่า ความสูงที่มากที่สุด  $\approx 5.1 \text{ m}$

และระยะในแนวราบที่มากที่สุด  $\approx 10.2 \text{ m}$

ถ้าไม่เชื่อก็ลองเช็คดูด้วยสูตรการเคลื่อนที่แนวตรงโดยมีความเร่งคงที่!

## 5 เว็บไซต์สำหรับอ่านเพิ่มเติม

1. <https://bit.ly/3dlsqP9>
2. <https://bit.ly/2SDfoEL>
3. <http://mpec.sc.mahidol.ac.th/forums/index.php/topic,2343>
4. <http://mpec.sc.mahidol.ac.th/forums/index.php/topic,345>
5. <http://mpec.sc.mahidol.ac.th/forums/index.php/topic,2342>