การประมาณในฟิสิกส์

อิธิพัฒน์ ธนบดีกาญจน์

April 19, 2020

1 บทนำ

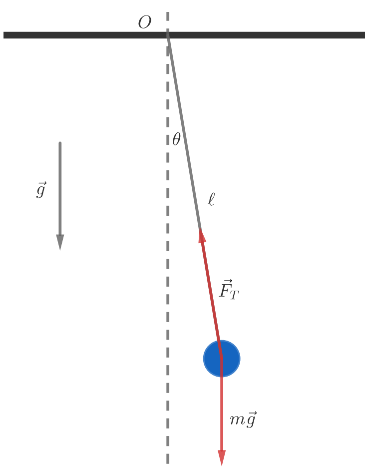
วิชาฟิสิกส์ เป็นวิชาที่กำเนิดขึ้นเพื่ออธิบายและทำนายปรากฏการณ์ต่าง ๆ โดยส่วนใหญ่จะนำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้แต่ในบางครั้งการพิจารณาปรากฏการณ์นั้น ซับซ้อนมากเกินไปจนไม่สามารถคำนวณได้ง่ายและจินตนาการสถานการณ์จากสมการได้ยาก จึงทำให้มีการประมาณเกิดขึ้นโดยการประมาณนี้อาจจะไม่ถูกใจนักคณิตศาสตร์มากนักเพราะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อน แต่ในวิชาฟิสิกส์นั้นเป็นการพิจารณาสถานการณ์จริง โดยใช้ข้อมูลจากการวัดจริง ๆ ซึ่งในทางปฏิบัติ การวัดนั้นมีความคลาดเคลื่อนในตัวอยู่แล้วและในหลาย ๆ ครั้ง การประมาณนั้นคลาดเคลื่อนน้อยกว่าความคลาดเคลื่อนของค่าที่เราวัดได้ด้วยซ้ำ

2 รูปแบบการประมาณ

ผู้เขียนจะเสนอตัวอย่างในฟิสิกส์ระดับมัธยมปลายเท่านั้น ในความเป็นจริงการประมาณนั้นมีหลากหลายรูปแบบมาก แต่มีจุดประสงค์เดียวกันคือ ทำให้การวิเคราะห์สถานการณ์มีประสิทธิภาพมากขึ้น

2.1 Simple Pendulum

การประมาณรูปแบบนี้ใช้ประโยชน์จาก Taylor series



2.1.1 **การหาคาบของ** Simple Pendulum

จากสมการทอร์ก

$$\sum \vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

คิดทอร์กรอบทุก O จะได้

$$\vec{\tau}_{F_T} + \vec{\tau}_{m\vec{g}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\vec{\omega}) \tag{1}$$

ให้ $\vec{\ell}$ เป็นเวกเตอร์ที่ชี้จากจุด O ไปยังมวล m

$$\vec{0} + \vec{\ell} \times m\vec{g} = I\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}$$

ให้ $\hat{k}$ มีทิศพุ่งเข้ากระดาษ

$$-(\ell mg\sin\theta\hat{k}) = I(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega)\hat{k}$$

ต้องมีเครื่องหมายลบเนื่องจากแรง $m\vec{g}$ เมื่อแตกเวกเตอร์เข้าแกนสัมผัสการเคลื่อนที่จะชี้ไปทางซ้าย โดยเราให้ทางขวาเป็นบวก

$$-\ell mg\sin\theta = I\alpha$$

หาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบ O จะได้ $I = m\ell^2$

$$-\ell mg\sin\theta = (m\ell^2)\alpha$$

$$-\frac{g}{\ell}\sin\theta = \alpha$$

เนื่องจากสมการลักษณะนี้ไม่ใช่ SHM[1] เราจึงใช้ Taylor series ประมาณ

$$\sin\theta \approx \theta \tag{2}$$

โดยเราเรียกการประมาณรูปแบบนี้ว่า Small-angle approximation หรือเป็นการประมาณเมื่อมุมมีค่าน้อย ๆ ในหน่วย radian

$$\boxed{-\frac{g}{\ell}\theta = \alpha} \tag{3}$$

จากสมการที่ (3) จะได้

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

จาก

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

[1]Simple harmonic motion

จะได้

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \tag{4}$$

จากสมการที่ (4) เราจะรู้สึกคุ้นมากเนื่องจากเป็นสูตรหาคาบของเพนดูลัมอย่างง่ายที่จำกันในระดับมัธยมปลาย แต่รู้หรือไหมว่ามันเป็นการประมาณไม่ใช่สูตรที่ให้ค่าแม่นตรง!

2.1.2 **ความใกล้เคียงของการใช้** Small-angle approximation

เนื่องจากการหาค่า $\sin\theta$ โดย Taylor series จะได้

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \tag{5}$$

แต่เราต้องการเพียงแค่พจน์ที่ 1 (อันดับ1)เพื่อให้ได้สมการเป็นการเคลื่อนที่แบบ SHM ซึ่งถ้าเราสังเกตพจน์ที่ 2 เป็นต้นไปจะพบว่ามีการหารด้วยแฟกทอเรียล ซึ่งมีค่ามากขึ้นอย่างรวดเร็วเมื่อเลขมีค่ามากขึ้น ดังนั้นจะทำให้พจน์ต่อ ๆ ไปมีค่าน้อยมาก ๆ

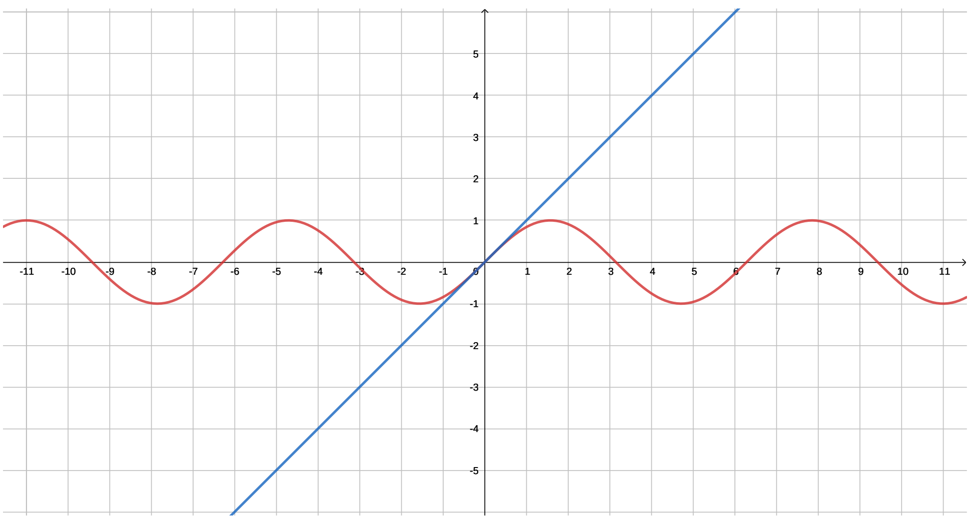


Figure 1: สีแดง:$y = \sin\theta$ สีฟ้า:$y = \theta$

จะสังเกตได้ว่า กราฟจะใกล้กันเมื่อค่า θ น้อย ๆ โดย $\sin x \approx x$ มีความคลาดเคลื่อน 1% ที่ θ ประมาณ 0.244 rad หรือ 14°

สมมติเราแกว่ง Simple Pendulum ด้วยมุม 10.0° หรือประมาณ 0.175 rad
คำนวณค่า sin ได้

$$\sin 10.0^\circ \approx 0.174 \text{ rad}$$

ถ้าพิจารณาเลขนัยสำคัญจะเห็นได้ว่าคลาดเคลื่อนเพียง 0.001 rad ซึ่งถือว่าเป็นการประมาณที่ดีมากในการทดลองจริง 0.001 rad มีค่าประมาณ 0.06° ซึ่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบความแม่นยำเครื่องมือที่ใช้ทดลองทั่วไป (การที่ค่า θ ห่างจากค่า $\sin\theta$ มากจะทำให้ค่า T ที่ได้จาก $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ คลาดเคลื่อนมาก)

2.2 เสียง

การประมาณรูปแบบนี้ใช้ประโยชน์จาก Binomial expansion[2]

2.2.1 การหาอัตราเร็วของเสียงในอากาศ

ถึงแม้การหาอัตราเร็วของเสียงนั้นมีการประมาณหลายอย่างและเป็นเหตุการณ์ที่ค่อนข้างอุดมคติ ก็ถือว่าเป็นการประมาณที่ดีพอที่จะนำไปใช้งานจริง

เนื่องจากการพิสูจน์ที่มาของ 2 สูตรที่จะกล่าวถึงนี้ต้องใช้ความรู้คณิตศาสตร์ค่อนข้างมากและจะนอกเหนือจุดประสงค์ของเอกสารนี้มากเกินไป ผู้เขียนจึงขอยกสูตรมาใช้เลย

$$v = \sqrt{\frac{B_{adia}}{\rho}} \tag{6}$$

$$B_{adia} = \gamma P \tag{7}$$

นำ (7) แทนใน (6) จะได้

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{8}$$

จากกฎของแก๊สอุดมคติ

$$PV = nRT \tag{9}$$

$$PV = (\frac{m_t}{\mathcal{M}})RT$$

$$P\mathcal{M} = (\frac{m_t}{V})RT$$

$$P\mathcal{M} = \rho RT$$

$$\rho = \frac{P\mathcal{M}}{RT} \tag{10}$$

นำ (10) แทนใน (8) จะได้

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\frac{P\mathcal{M}}{RT}}}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mathcal{M}}}} \tag{11}$$

ในระดับมัธยมสูตรที่เราคุ้นตา คือ $v = 331 + 0.6T$ เมื่อ T มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส ซึ่งเราสามาถสร้างได้จากสมการ (11) แต่ T ในสมการ (11) มีหน่วยเป็นเคลวินจึงต้องใช้ความสัมพันธ์

$$T_{\mathrm{K}} \approx T_{^\circ\mathrm{C}} + 273$$

[2]ความจริงแล้วเป็นส่วนหนึ่งของ Taylor series แต่ผู้เขียนเห็นว่ามีความเด่นในวิชาฟิสิกส์เป็นพิเศษจึงแยกออกมาจาก Taylor series

จะได้

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R(T_{^\circ\mathrm{C}} + 273)}{\mathcal{M}}}$$

หลังจากนี้ผู้เขียนจะเขียน $T_{^\circ\mathrm{C}}$ เป็น T เพื่อความสะดวก

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R}{\mathcal{M}}}\sqrt{T + 273}$$

$$v = \sqrt{\frac{273\gamma R}{\mathcal{M}}}\sqrt{\frac{T}{273} + 1}$$

จัดรูปเล็กน้อยเพื่อให้เห็นรูปแบบที่จะถูกประมาณอย่างชัดเจน

$$v = \sqrt{\frac{273\gamma R}{\mathcal{M}}}\left(1 + \frac{T}{273}\right)^{1/2} \tag{12}$$

เพราะสูตรในการหาอัตราเร็วนี้มีการหากรณฑ์ที่สองของตัวแปร T ที่ไม่ใช่ค่าคงที่ของสถานการณ์ที่เราสนใจ จึงใช้ Binomial expansion แก้ปัญหานี้ โดยประมาณ

$$\left(1 + \frac{T}{273}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{T}{273}\right)$$

โดยเราเรียกการประมาณรูปแบบนี้ว่า Binomial approximation และจะได้

$$v \approx \sqrt{\frac{273\gamma R}{\mathcal{M}}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{T}{273}\right)\right) \tag{13}$$

เนื่องจากองค์ประกอบหลักของอากาศคือ ไนโตรเจน $\approx 78\%$ ออกซิเจน $\approx 21\%$ และอาร์กอน $\approx 1\%$ ดังนั้น

$$\mathcal{M}_{air} \approx 29.0 \text{ g/mol} \approx 29.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

และเนื่องจากอากาศส่วนใหญ่บนโลกของเราประกอบด้วยแก๊สอะตอมคู่ $(\mathrm{N_2}, \mathrm{O_2})$ เราจะประมาณให้ $\gamma = \frac{7}{5}$ จากนั้นนำค่าที่ได้แทนใน (13)

$$v \approx \sqrt{\frac{273(7/5)(8.314)}{29.0 \times 10^{-3}}}\left(1 + \frac{T}{546}\right)$$

$$v \approx 331\left(1 + \frac{T}{546}\right)$$

$$v \approx 331 + 0.606T$$

ถ้าประมาณให้หยาบกว่านี้ก็จะได้ค่าเหมือนที่ท่องกันในระดับมัธยม คือ

$$\boxed{v = 331 + 0.6T} \tag{14}$$

2.2.2 **ความใกล้เคียงของการใช้** Binomial approximation

การกระจายพจน์ $(1+x)^n$ ด้วย Binomial approximation จะได้

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!1!}x^2 + \dots \tag{15}$$

แต่เพราะเราต้องการประสิทธิภาพในการคำนวณ โดยทั่วไปแล้วจะประมาณเป็น $1+nx$ ก็ให้ความแม่นยำที่เพียงพอ เมื่อ $|x| \ll 1$

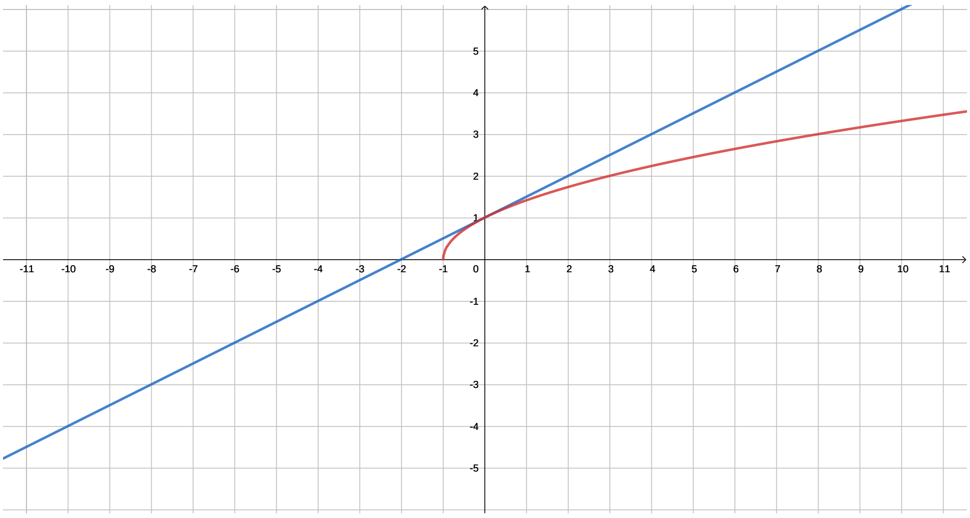


Figure 2: สีแดง:$y = (1+x)^{1/2}$ สีฟ้า:$y = 1 + \frac{1}{2}x$

เราสมมติให้ $n = \frac{1}{2}$ ก็จะเห็นว่ากราฟจะใกล้กันเมื่อ $|x| \ll 1$

สมมติเราหาอัตราเร็วของเสียงในอากาศอุณหภูมิ 30°C แทนในสูตร (14) จะได้ $v = 349$ m/s และแทนในสูตร (12) จะได้ $v \approx 348.73$ m/s คำนวณเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนได้

$$\text{Error} = \frac{|348.73 - 349|}{349} \times 100\% \approx 0.08\%$$

แสดงว่าที่อุณหภูมิ 30°C มีความคลาดเคลื่อนของอัตราเร็วของเสียงในอากาศเพียง 0.08% เมื่อใช้ Binomial approximation และจะเห็นได้ว่าการประมาณในรูปแบบนี้มีความแม่นยำที่สูงมากและเพียงพอที่จะนำผลไปใช้ในทางปฏิบัติทั่ว ๆ ไป