

Lagrangian Mechanics ฉบับพื้นฐาน

อิธิพัฒน์ ธนบดีกาญจน์

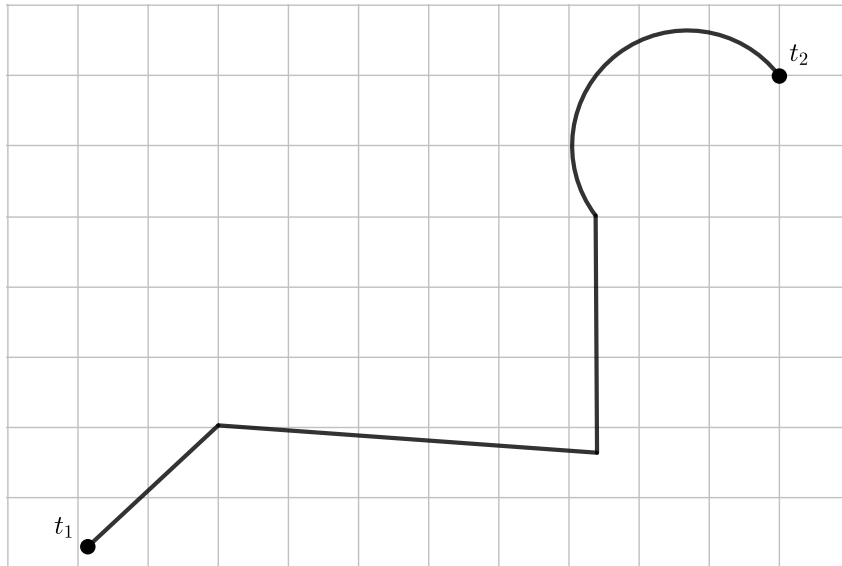
14 ธันวาคม พ.ศ. 2563

1 บทนำ

Lagrange Mechanics เป็นการบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุต่าง ๆ โดยอาศัยพลังงานและ Principle of Stationary Action ซึ่งแตกต่างจาก Newtonian Mechanics ที่อาศัย “แรง” บรรยาย ทำให้มีจุดเด่นในการแก้ปัญหาที่มีวัตถุหรือองศาเสรี (Degree of Freedom) จำนวนมากเพราะปริมาณต่าง ๆ ที่พิจารณาเป็นปริมาณสเกลาร์

2 สมการ Euler–Lagrange

พิจารณาสถานการณ์ที่เราต้องการหาสมการบรรยายการเคลื่อนที่แล้วตีตารางลงบนสถานการณ์นั้น

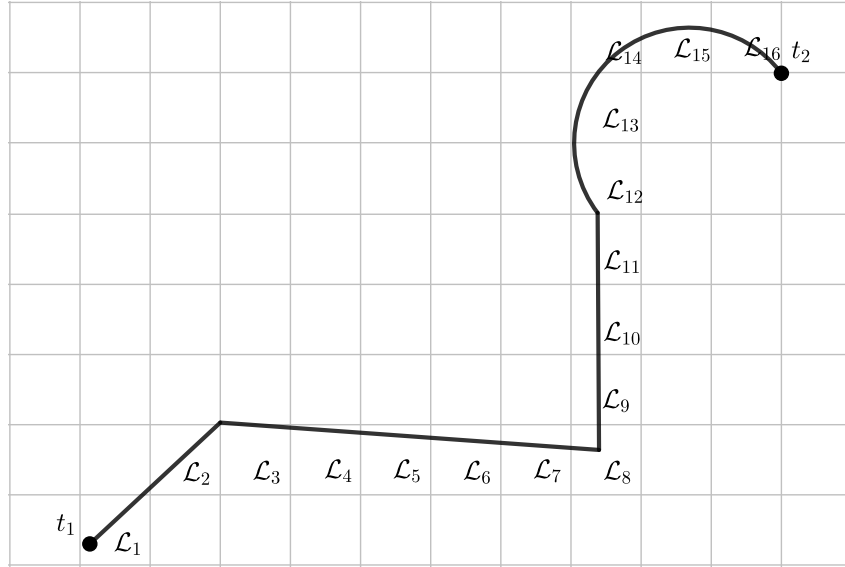


จากนั้นหาค่าพลังงานจลน์ลบพลังงานศักย์ของทุกช่อง โดยเราจะนิยามค่าในตารางนั้นว่า Lagrangian (\mathcal{L})

$$\mathcal{L} \equiv K - U \quad (1)$$

เนื่องจากการพิจารณานี้เราทราบว่าวัตถุเริ่มที่เวลาใดและจบที่เวลาใด เราจึงหาผลรวมของ Lagrangian ตามเส้นทางที่วัตถุเคลื่อนที่จากเริ่มต้น (t_1) จนถึงเวลาที่เราสงสัย (t_2) โดยรวมระยะเวลาย่อย ๆ ทีละ Δt

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \mathcal{L} \Delta t$$



จากนั้นกำหนด $\Delta t \rightarrow 0$ ทำให้ตารางมีความละเอียดเป็นอนันต์และได้ค่าที่เที่ยงตรงไม่ว่าจะเป็นเส้นทางใด ๆ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{t=t_1}^{t_2} \mathcal{L} \Delta t$$

เรานิยามค่านี้คือ Action(S) และเปลี่ยนสัญลักษณ์เป็นปริพันธ์

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (2)$$

เราทราบว่า \mathcal{L} ขึ้นอยู่กับ K และ U ดังนั้น \mathcal{L} จะขึ้นอยู่กับ $x(t)$, $\dot{x}(t)$ และ t ด้วย* เราจึงทำการนิยามฟังก์ชันบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุให้เท่ากับฟังก์ชันคงที่ ($x_0(t)$) บวกกับฟังก์ชันที่แปรผันได้ ($\alpha\beta(t)$) เพื่อช่วยในการแก้ปัญหา

$$x(t) \equiv x_0(t) + \alpha\beta(t) \quad (3)$$

และหาอนุพันธ์เทียบเวลาเพื่อหา $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \alpha\dot{\beta}(t) \quad (4)$$

ทั้งนี้การที่มี α คูณกับ β นั้นจะช่วยให้เราสามารถใช้แคลคูลัสหนึ่งตัวแปรแก้ปัญหาได้และ $\beta(t_1) = 0, \beta(t_2) = 0$ เพราะเรากำหนดให้ต้นทางเริ่มที่ $x(t_1)$ และ $x(t_2)$ แต่เส้นทางการเคลื่อนที่ยังคงเปลี่ยนแปลงได้ จาก Principle of Stationary Action จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= 0 \\ \frac{d}{d\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt &= 0 \end{aligned}$$

อาศัย Leibniz Integral Rule จะได้

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} dt = 0$$

* เช่น $K = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2$ และ $U = mgx(t)$

ระลึกว่า \mathcal{L} เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับ $x(t)$, $\dot{x}(t)$ และ t อาศัย Chain rule จะได้

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \alpha} dt \quad (5)$$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ α ของสมการ (3) และ (4)

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \beta \quad (6)$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} = \dot{\beta} \quad (7)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0 \quad (8)$$

นำ (6), (7) และ (8) แทนใน (5)

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{\beta} dt \quad (9)$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \beta dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{\beta} dt$$

จากนั้นเราจะทำ Integration by Parts พจน์หลังเพื่อกำจัด $\dot{\beta}$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \beta dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \beta \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \beta dt$$

เนื่องจากเรากำหนดให้ $\beta(t_1) = 0$ และ $\beta(t_2) = 0$ ดังนั้น

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \beta dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \beta dt$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \right) \beta dt$$

สมการดังกล่าวจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อพจน์ในวงเล็บเท่ากับศูนย์เท่ากันเพราะ β ไม่จำเป็นต้องมีค่าเป็นศูนย์ เราจึงสรุปได้ว่า

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

เราทำให้สมการนี้อยู่ในรูปทั่วไปของระบบที่มี N องศาเสรีโดยเปลี่ยนตัวแปร x เป็น q ตามความนิยมและใช้ตัวดำเนินการ \sum (เสมือนว่าได้ละตัวดำเนินการ \sum มาตลอดการพิสูจน์)

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0 \quad (10)$$

จาก Fundamental Lemmas of the Calculus of Variations จะได้ว่าทุกพจน์ที่บวกกันต้องเท่ากับ 0 (ระลึกว่าแต่ละพจน์มี β คูณอยู่)

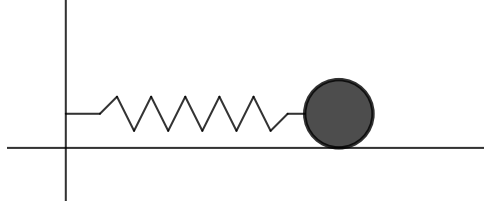
$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N} \quad (11)$$

เรียกสมการนี้ว่า Euler–Lagrange เนื่องจาก Euler และ Lagrange ได้ร่วมกันแก้ปัญหาดังกล่าว

3 ตัวอย่างการใช้งานสมการ Euler-Lagrange

ทรงกระบอกมวล m รัศมี r ติดสปริงที่มีค่าคงตัว k จงหาคาบของการสั่นเมื่อขยับทรงกระบอกแล้วปล่อย ทรงกระบอกกลิ้งแบบไม่ไถล[1]

สังเกตระบบจะพบว่ามีพลังงานศักย์ยืดหยุ่นและพลังงานจลน์เกี่ยวข้อง



จาก

$$\mathcal{L} = K - U \quad (12)$$

ได้

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 - \frac{1}{2}kx^2 \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2 \\ \mathcal{L} &= \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned} \quad (13)$$

นำสมการ (13) แทนไปในสมการ (11)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right)\right) \\ 0 &= (-kx) - \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}m\dot{x}\right) \\ 0 &= -kx - \frac{3}{2}m\ddot{x} \\ \ddot{x} &= -\left(\frac{2k}{3m}\right)x \end{aligned} \quad (14)$$

นำสมการ (14) เทียบกับสมการในรูปทั่วไปของ SHM[†] ดังนั้นจะได้

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad (15)$$

จาก

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (16)$$

นำสมการ (15) แทนใน (16)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}} \blacksquare$$

[†] $\ddot{x} = -\omega^2 x$

หนังสืออ้างอิง

- [1] Morin, D. (2008). *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. Cambridge University Press.