力学

目次

1　1 次元運動

1.1　位置と座標

物体の位置を表すために図 1.1 のような**座標**を用いる。

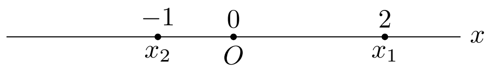

図 1.1　座標

基準となる位置を**原点**といい、記号 O で表す。次に、基準となる方向を決める。この方向に沿って原点から物体の位置まで移動した距離 x によって位置を表す。この x を物体の x 座標という。例えば、図 1.1 では、右向きを正としている。

原点を変えると座標の値は変わる。例えば、図 1.2 では、原点 O' を 0.5 にとった。この結果、座標の値は 0.5 だけ増加する。これを、座標は座標系に相対的であるという。しかし、物体の位置は変わらない。すなわち、ある位置に物体が存在するという事実がまずあり、それを人間が表す手段として座標がある。原点と基準になる方向を約束したものを**座標系**という。

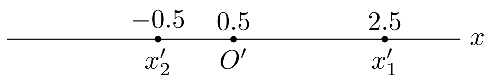

図 1.2　原点を移動させた座標

一般に運動は、物体の空間の位置、すなわち 3 つの座標によって考えるが、ここでは、1 方向の運動に限って考える。これを、**1 次元運動**という。

物体が表 1.1 のように運動したとする。これをグラフに表すと図 1.3 のようになる。このように、グラフに表すことで、直接物体を見なくても運動の様子がわかる。

表 1.1　1 次元運動の例

t	0	1	2	3	4	5
x	3.00	4.54	7.67	11.80	16.15	19.75

各時刻ごとに物体はどこかの位置にある。すなわち、時刻を指定すれば座標の値が求まる。これは数学的には、座標 x が時刻 t の関数であると表される。よって、数学的には $x = f(t)$ と表されるが、物理では関数量がたくさん登場するので、関数記号と変数に同じ文字を使って

$$x = x(t) \tag{1.1}$$

と書くことにする。

1.2　速度

物体の移動距離を経過時間で割った量を**速度**という。速度の単位は m/s である。

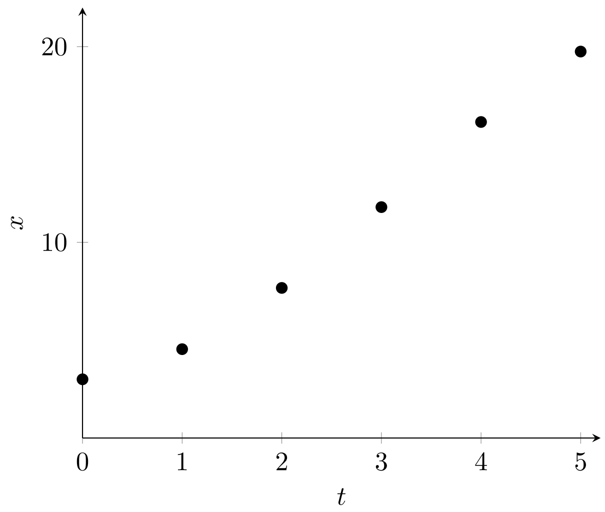

図 1.3　1 次元運動の例

移動距離は座標の差で表される。時刻 t_1 に $x_1 = x(t_1)$ にいた物体が、時刻 t_2 に $x_2 = x(t_2)$ に移ったとする。このとき移動距離は $d_{12} = x_2 - x_1$ で表される。d_{12} を**変位**という。このときの速度は、経過時間が $t_2 - t_1$ であるから、

$$v_{12} = \frac{d_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{1.2}$$

となる。例えば、図 1.3 の例では、$v_{12} = (7.67 - 4.54)/(2 - 1) = 3.13\mathrm{m/s}$ となる。ところで、もし $x_2 < x_1$ ならば、$d_{12} < 0$、したがって $v_{12} < 0$ となる。すなわち、座標を約束した方向と逆向きに移動するときには、変位、速度は負と定義する。移動距離は変位の絶対値に当たり、速度の絶対値に当たる量を速さという。

図 1.3 の例の速度のグラフを図 1.4 に示す。

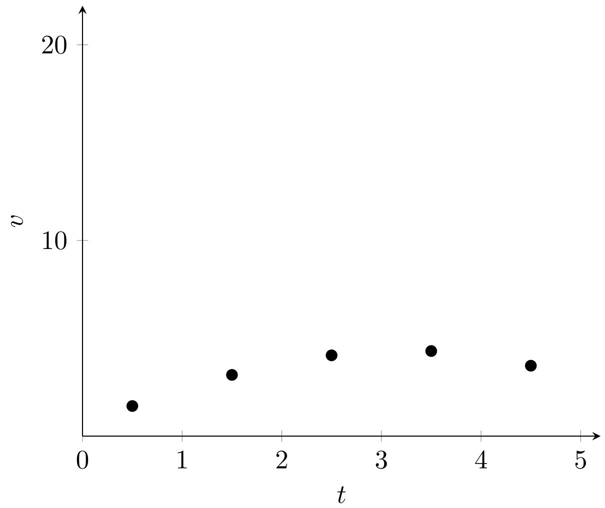

図 1.4　速度の例 (図 1.3 の x)

このように、物体の速度は一定とは限らないため、瞬間の速度を考える必要がある。それには経過時間を短くすればよい、式 1.2 より、v_{12} は点 1 と点 2 を結ぶ直線の勾配であることがわかる。点 2 を点 1 に近づけて

いけば、時刻 t_1 での速度は関数 $x(t)$ の点 1 での接線の勾配となることがわかる。数学では、これは微分で表される。すなわち、

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{1.3}$$

が成り立つ。

時刻 t_1 を変えていけば、一般の時刻 t における速度が求められる。すなわち、速度もまた時間の関数であり、$v = v(t)$ と表される。

以上より、$x(t)$ と $v(t)$ の関係は、

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v(t) \tag{1.4}$$

と表される。

原点の位置を変えても、それが固定されていれば、変位は同じであるから速度は変わらない。しかし、原点自身が移動しているような座標系に移れば、速度の値も当然変化する。この意味で、速度の値もまた一般には座標系に相対的である。

1.3 加速度

速度が一定ではなく、変化するとき、速度の時間変化率を考え、これを**加速度**という。加速度の単位は $\mathrm{m/s^2}$ である。

加速度の値は、$v(t)$ 図の勾配に当たる. 時刻 t_0 から t_1 の間の加速度 a_{01} は、

$$a_{01} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} \tag{1.5}$$

である. たとえば、図 1.4 の、時刻 t_{01} から t_{12} までの間の加速度は、$a_{012} = (3.13 - 1.54)/1 = 1.59\mathrm{m/s^2}$ となる。

速度の勾配が一定でない場合には、各瞬間ごとの加速度を考える。それには、$x(t)$ の導関数として瞬間の速度 $v(t)$ を定義するのと同じように、$v(t)$ の導関数として加速度 $a(t)$ を定義すれば良い。すなわち、

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{1.6}$$

である。$v = \dot{x} = dx/dt$ であるから、$a(t)$ と $x(t)$ の関係は、

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \tag{1.7}$$

となる。すなわち、$a(t)$ は $x(t)$ の t に関する 2 次導関数であって、これを点を二つつけた記号 $\ddot{x}$ で表す。

原点の移動速度が一定の座標系に移っても、すべての速度がその分変化するため加速度の値は変わらない。しかし、原点の移動速度が変化しているような座標系に移れば、加速度の値も当然変化する。このように、加速度の値もまた一般には座標系に相対的である。

1.4 位置の予測

物体の位置の関数 $x(t)$ を $t = 0$ 付近でテイラー展開すると、

$$x(t) = x(0) + x(0)'t + \frac{1}{2}x(t)''t^2 + \frac{1}{3!}x(t)^{(3)}t^3 + \cdots \tag{1.8}$$

となる。また、速度と加速度の関係式 (1.4) と (1.7) より、

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}a(0)t^2 + \frac{1}{3!}x(t)^{(3)}t^3 + \cdots \tag{1.9}$$

と書ける。このように、ある時刻における速度、加速度、さらに高次の微分の情報が得られるにつれて、より正確な位置の予測ができる。

1.5 慣性運動

物体に対して、以下の 2 つの法則が成り立つ。

1. 静止または等速度運動している物体は、外からの作用がなければ、その運動を続ける。
2. 物体に外から力を作用させると、その速度が変化する。

1 は、力がはたらかないときの運動、いわば自然な運動が、静止または速度一定の運動であるといってよい。この自然な運動を**慣性運動**といい、この法則を**慣性の法則**という。静止は、速度が 0 の等速度運動であるため、その場合を含めて、「物体の慣性運動は等速度運動である」といい表せる。

1.6 慣性座標系

速度は座標系に相対的であるため、どのような座標系で運動を考えるのかという約束をしなければならない。

そこで、慣性の法則が成り立っているような座標系で運動の法則を議論することにする。このような座標系を**慣性座標系**という。したがって、1 は、

> 慣性座標系が存在し、そこで観測すれば、外からの作用を受けない物体は静止または等速度運動を続ける。

ということになる。これを**ニュートンの第 1 法則**という。

1.7 力と相互作用

力の作用は一方的ではなく、相互的である。すなわち、物体 1 が物体 2 に力を及ぼすとき、物体 2 もまた物体 1 に力を及ぼす。砲丸投げをする人には反動の力がはたらく、床から摩擦力を受けている物体は、床を引きずろうとする。

このように、力は 2 つの物体間の**相互作用**によって生じる。物体 1 から物体 2 への力 $F(1 \to 2)$ と、物体 2 から物体 1 への力 $F(2 \to 1)$ とが、常に対となって存在する。2 つの力は、同じ方向に逆向きにはたらき、その大きさは等しい。そこで、次の式が成り立つ。

$$F(1 \to 2) = -F(2 \to 1) \tag{1.10}$$

これを、**作用・反作用の法則**という。あるいは、**ニュートンの第 3 法則**という。作用・反作用は対になっているため、どちらの力が作用力かは立場による。物体 1 から見れば、$F(1 \to 2)$ が作用力で、$F(2 \to 1)$ が反作用力である。しかし、物体 2 から見れば、$F(2 \to 1)$ が作用力で、$F(1 \to 2)$ が反作用力である。

自然界にはさまざまな力があるが、その基本的なものはすべて 2 つの物体 (あるいは粒子) の間の相互作用による。相互作用は、2 つの物体の位置や速度の依存関係に応じて決まる。これを 2 体相互作用 (力) という。

3 つの物体があって初めてはたらく 3 体力は、基本的な力には存在しない。したがって、一般にある物体 1 にはたらく力は、他の物体からはたらく 2 体力の和である。すなわち、

$$F(1) = F(2 \to 1) + F(3 \to 1) + \cdots = \sum_{i=2}^{i=N} F(i \to 1) \tag{1.11}$$

と書ける。このように、力の和ははたらく対象物体を指定したときに意味がある。

ある物体 1 にはたらく力の総和が 0 のとき、その物体にはたらく力はつりあっているという。これは、運動に関する限りは、力がはたらいていないのと同じである。ただし、

> 作用力と反作用力がつり合うというのは全くの誤解である

作用力と反作用力とでははたらく対象物体が違うから両者の和をとることはつり合いとは関係ない。

1.8 慣性質量と運動方程式

慣性座標系では力の作用によって物体は加速度をもつ。そこで、経験的な事実として、以下のものがある

> 同じ力を同じ種類の物体に作用させると物体の量が大きいと小さな加速度が、量が小さいと大きな加速度が、それぞれ生じる。

そこで、同じ力を同じ種類の物体に作用させたときの加速度は、物体の量に反比例するとする。物体の量は、同じ種類の物体であれば**質量**で表される。このとき、同じ種類の物体についての運動の法則 2 は、

> 加速度は力に比例し、質量に反比例する。

となる。

ニュートンはさらに、種類の異なる物体であっても、質量を定義すれば同じ形の運動法則が成り立つと提案した。すなわち、物体の質量は、種類によらずに、同じ力を作用させたときに得られる加速度に反比例する、と定義するのである。質量が大きければ加速度が小さい。すなわち運動が変化しにくい。したがって、この質量は物体の慣性の大きさを表す質量であり、**慣性質量**という。これに対して、天秤などの普通の秤で量る質量は、重力を量っているので、重力質量という。この 2 つの質量の値は一致するため、特に必要で無い限り単に質量と呼ぶ。質量は記号 m で表し、単位は kg である。

以上のことをまとめると、運動の法則は次の式で表される。

$$ma = m\dot{v} = m\ddot{x} = F \tag{1.12}$$

質量の単位を kg、加速度の単位を $\mathrm{m/s^2}$ とすると、力の単位は $\mathrm{kgm/s^2}$ である。これを **N(ニュートン)** という。1kg の物体に作用して $\mathrm{1kg/s^2}$ の加速度を生じさせる力が 1N である。式 (1.12) を**ニュートンの第 2 法則**、または**運動方程式**という。

力学の理論の基本は運動方程式である。エネルギーなどの物理量とそれが従う法則はすべて運動方程式から導かれる。また、具体的な運動の様子は運動方程式を解いて求められる。