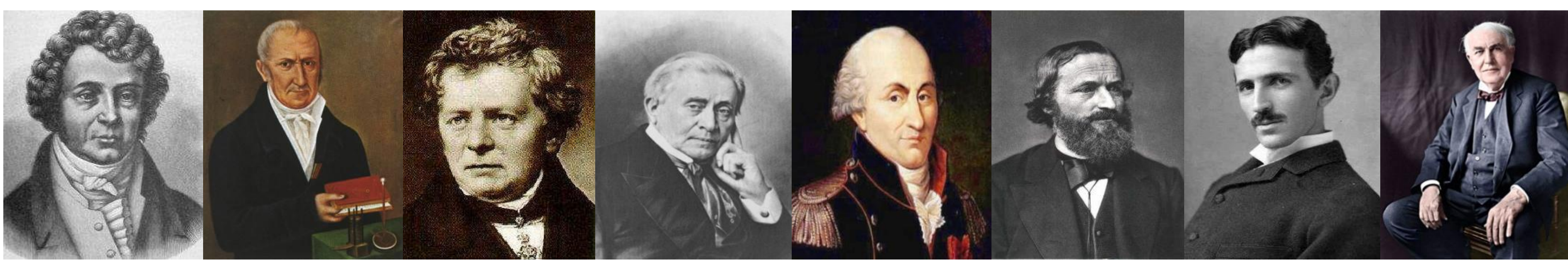
电路理论
Principles of Electric Circuits

第十章 含耦合电感电路的分析

§ 10.2 含耦合电感电路的分析



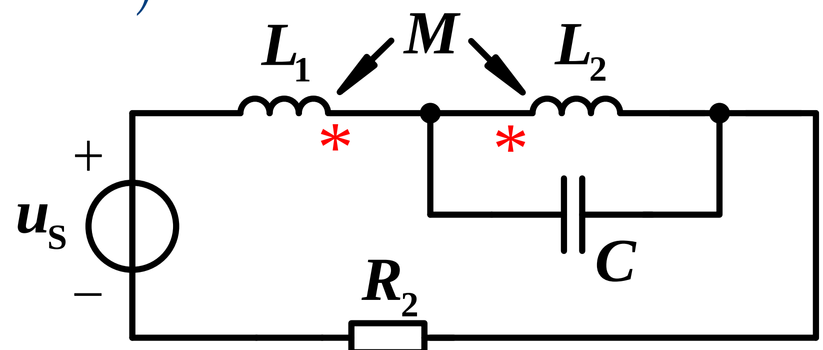
§ 10.2 含耦合电感电路的分析

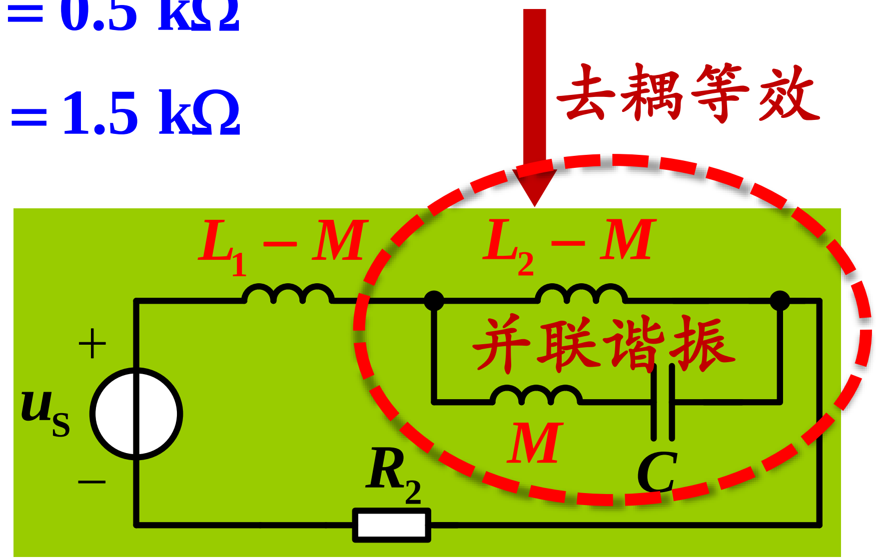
一、互感消去法

【例】图示正弦稳态电路中，$L_1=1\text{H}, L_2=2\text{H}, M=0.5\text{H}, C=0.5\mu\text{F}$

$R=1\text{k}\Omega, u_S(t)=150\sin\left(1000t+30^\circ\right)\text{V}$，求电容支路电流。

解：





$$X_C=-\frac{1}{\omega C}=-\frac{1}{1000\times0.5\times10^{-6}}=-2\ \text{k}\Omega$$

$$X_1=\omega\left(L_1-M\right)=1000\times\left(1-0.5\right)=0.5\ \text{k}\Omega$$

$$X_2=\omega\left(L_2-M\right)=1000\times\left(2-0.5\right)=1.5\ \text{k}\Omega$$

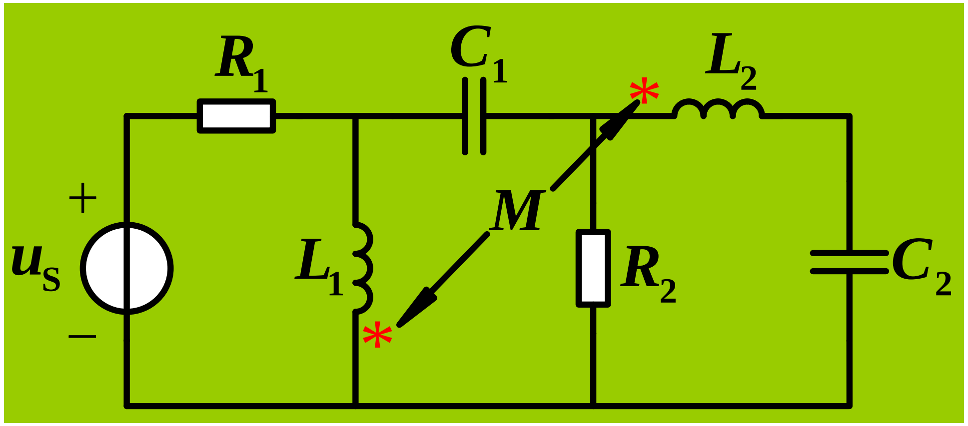
$$X_M=\omega M=1000\times0.5=0.5\ \text{k}\Omega$$

$$\dot{I}_m=\frac{\dot{U}_{sm}}{jX_M+jX_C}=-\frac{150\angle30^\circ}{j0.5-j2}=100\angle120^\circ\text{mA}$$

$$i(t)=100\sin\left(1000t+120^\circ\right)\text{mA}$$

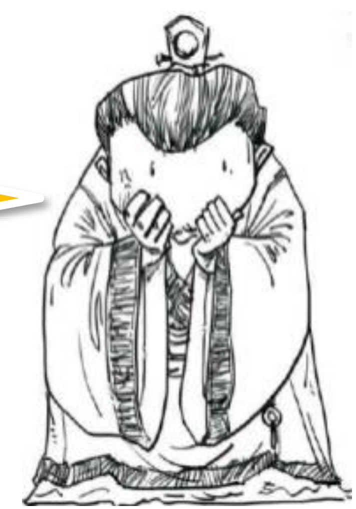
§ 10.2 含耦合电感电路的分析

二、回路分析法



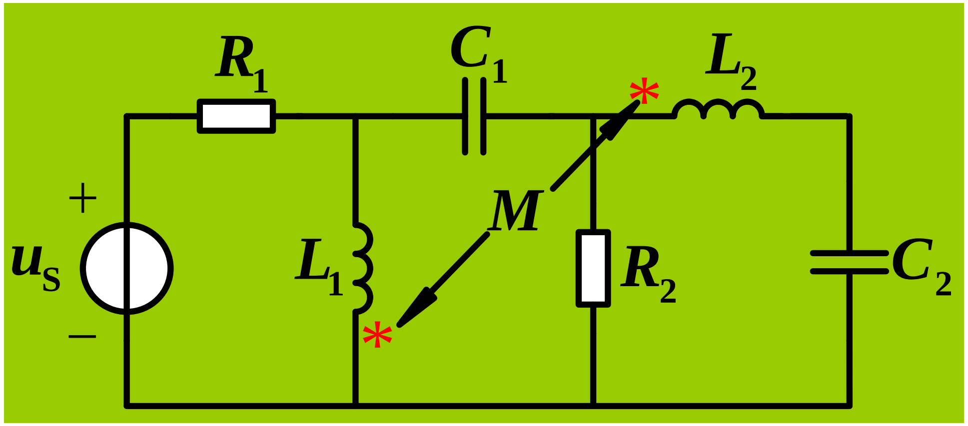
没有公共节点，如何消互感？

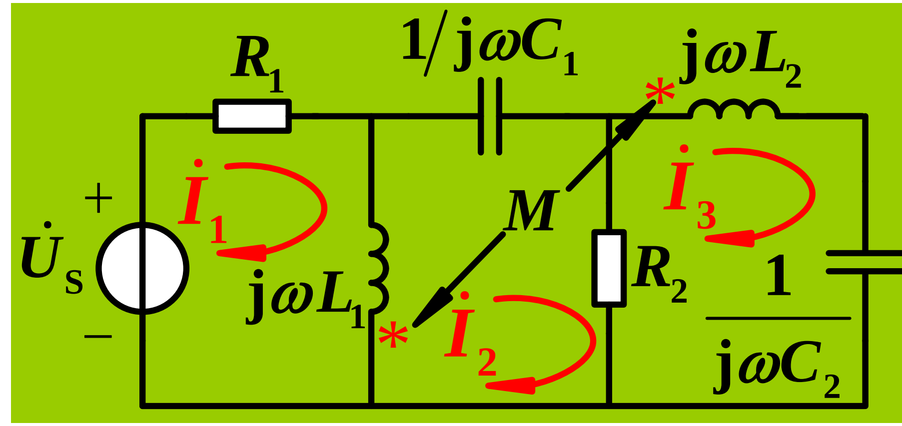
去耦等效也不是万能的啊~ ~ ~



§ 10.2 含耦合电感电路的分析

二、回路分析法





$$(R_1 + j\omega L_1)\dot I_1 - j\omega L_1 \dot I_2 - j\omega M \dot I_3 = \dot U_S$$

$$-j\omega L_1 \dot I_1 + (j\omega L_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_1})\dot I_2 - R_2 \dot I_3 + j\omega M \dot I_3 = 0$$

$$-R_2 \dot I_2 + (j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2})\dot I_3 + j\omega M(\dot I_2 - \dot I_1) = 0$$

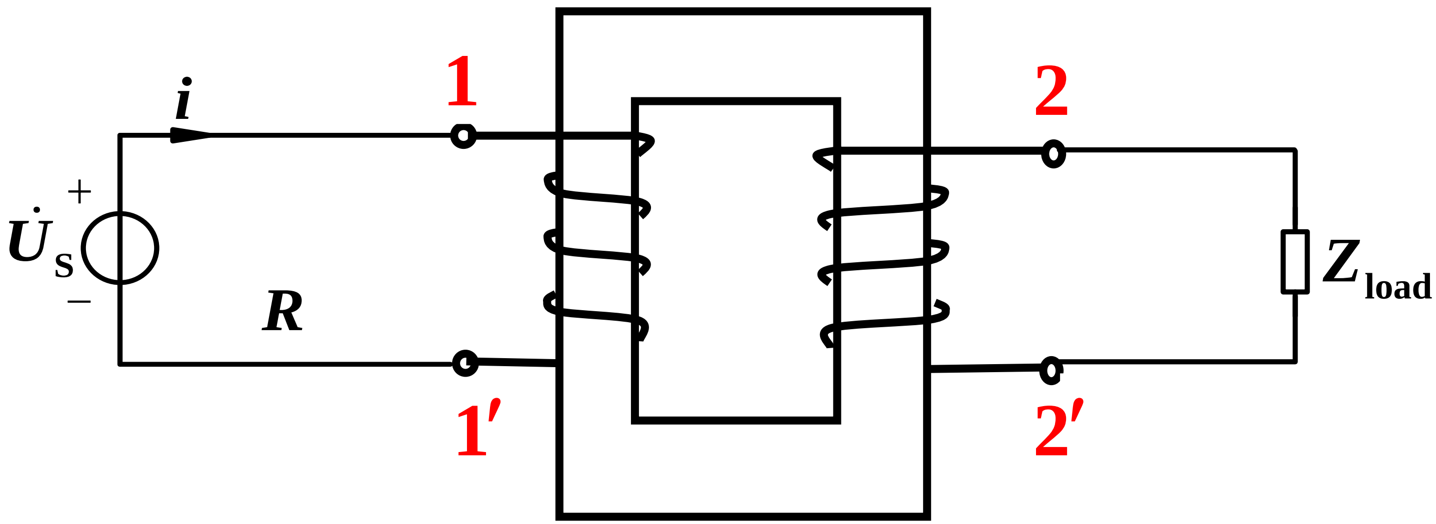
★ **注意：** （1）不要丢掉互感电压项；

（2）正确判断互感电压的正、负。

§ 10.2 含耦合电感电路的分析

三、反映阻抗法

变压器（Transformer）



利用耦合电感来传递能量

- 交流变压、变流、变相位
- 电气隔离
- 传送功率
- 阻抗匹配

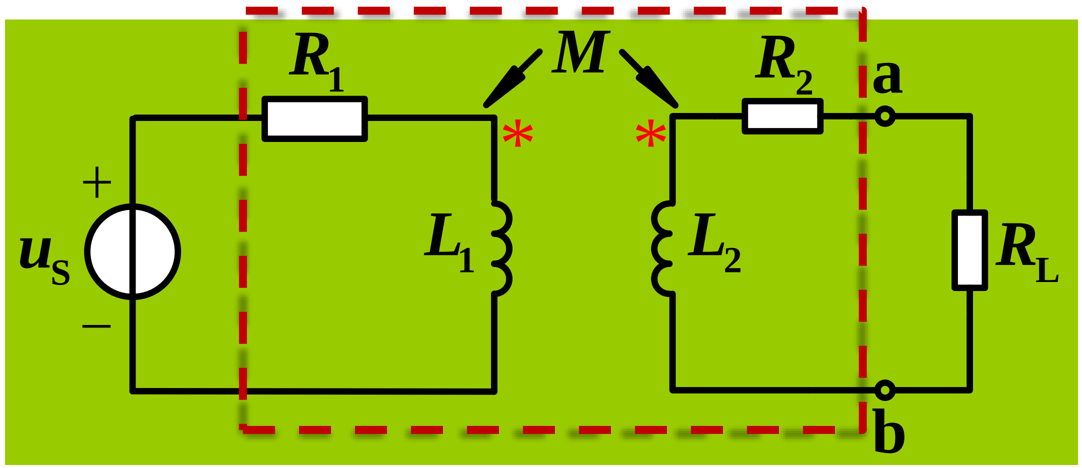
三、反映阻抗法

空心变压器

（Air-core Transformer）

一次侧

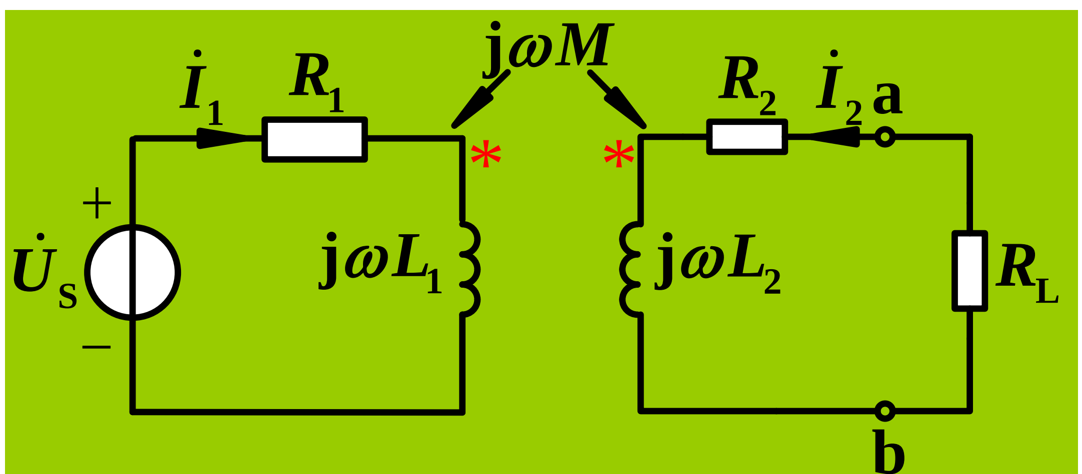
（原边）



二次侧

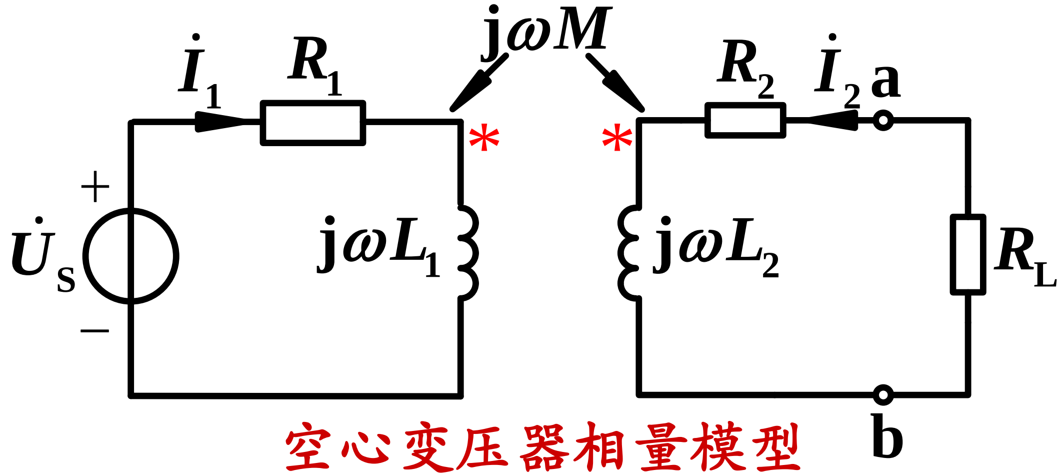
（副边）

空心变压器电路



空心变压器相量模型

三、反映阻抗法



空心变压器相量模型

$$Z_{11}=R_1+j\omega L_1$$

$$Z_{22}=R_2+j\omega L_2+R_L$$

$$Z_M=j\omega M$$

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1+Z_M\dot{I}_2=\dot{U}_S \\ Z_M\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2=0 \end{cases}$$

$$\dot{I}_2=-\frac{Z_M}{Z_{22}}\dot{I}_1 \quad\Rightarrow\quad \dot{I}_1=\frac{\dot{U}_S}{Z_{11}+\dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

一次绕组的输入阻抗：$Z_i=\dfrac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1}=Z_{11}+\dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$

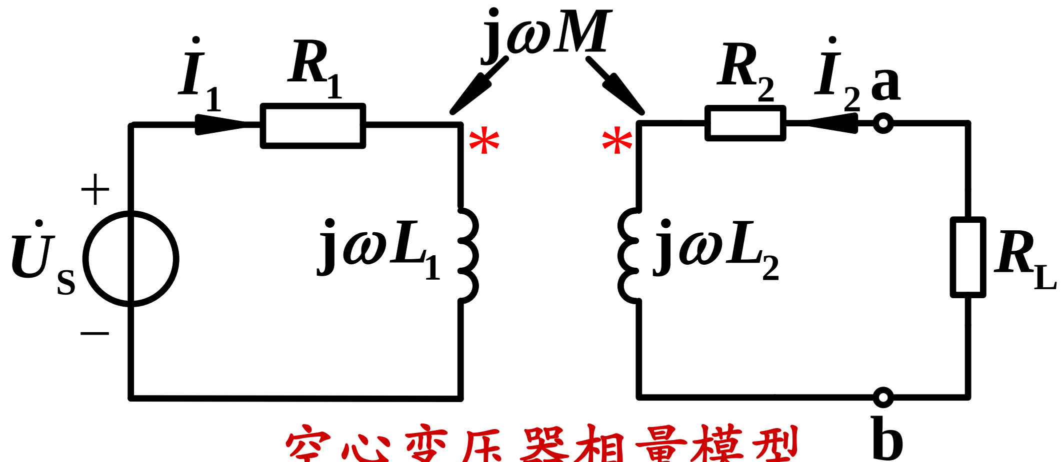
$$Z_{ref}=\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

一次回路的自阻抗

反映阻抗

§ 10.2 含耦合电感电路的分析

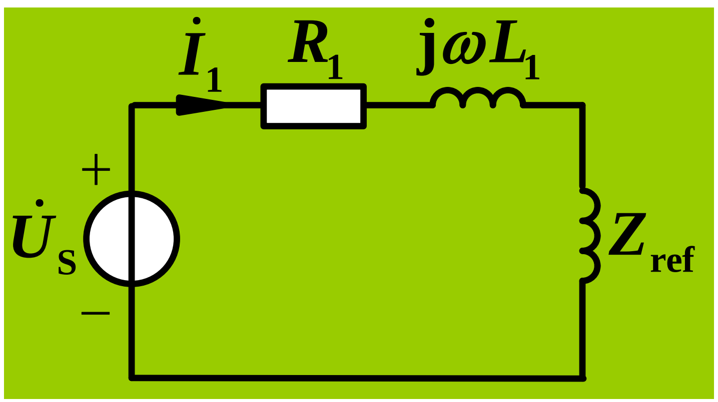
三、反映阻抗法



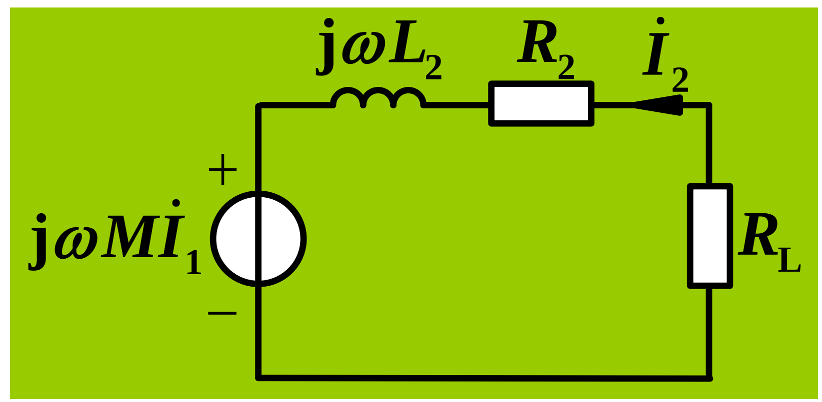
空心变压器相量模型

$$Z_{ref}=\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

反映阻抗



空心变压器一次侧等效电路



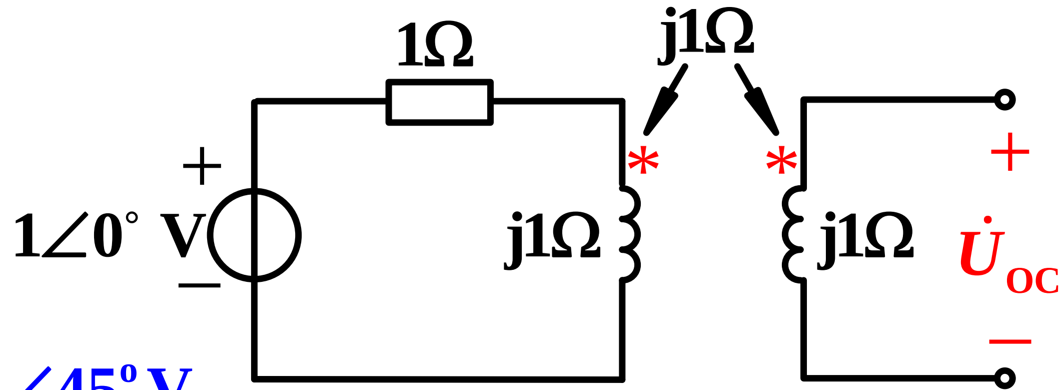
空心变压器二次侧等效电路

$$\begin{cases}\text{当}\dot{I}_2\neq 0,\ Z_{in}=Z_{11}+Z_{ref}\\ \text{当}\dot{I}_2=0,\ \text{即二次侧开路},\ Z_{in}=Z_{11}\end{cases}$$

反映阻抗法

三、反映阻抗法

【例】电路如图所示，求二端网络可提供的最大功率。



解:

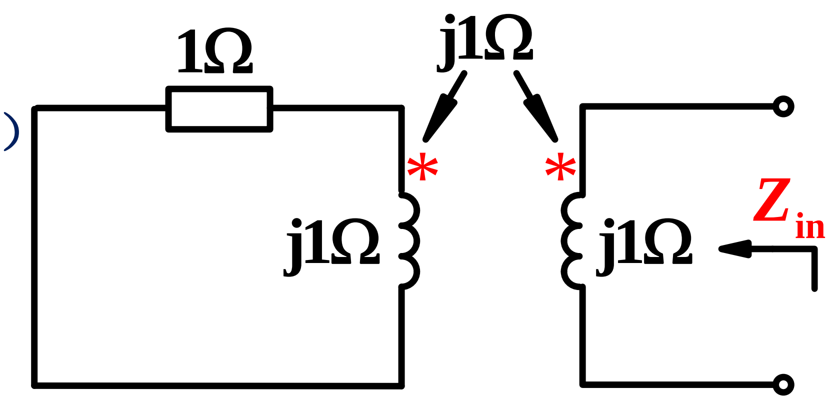
（1）开路电压

$$\dot{U}_{OC}=j\omega M\dot{I}_1$$

$$=j1\times\frac{1\angle0^{o}}{1+j1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\angle45^{o}\,\mathrm{V}$$

（2）等效阻抗

（包含一次侧反映到二次侧的反映阻抗）

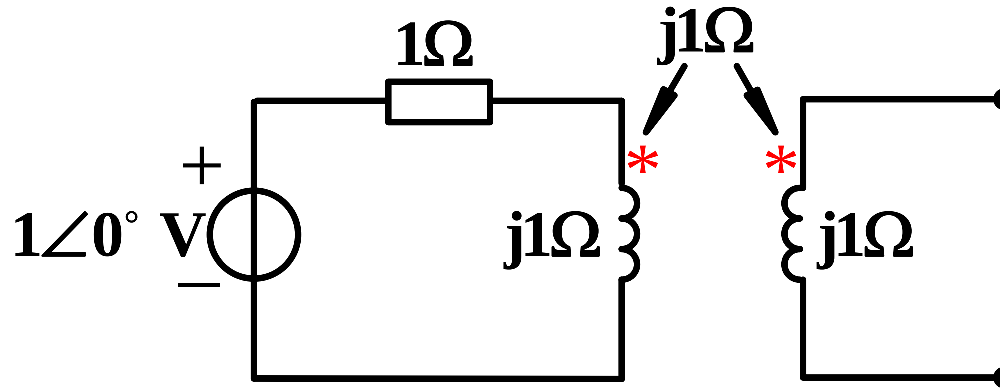


$$Z_{in}=Z_{22}+\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}$$

$$=j1+\frac{1^2}{1+j1}=0.5+j0.5\,\Omega$$

三、反映阻抗法

【例】电路如图所示，求二端网络可提供的最大功率。



解:

（1）开路电压

$$\dot{U}_{OC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^{o}\,V$$

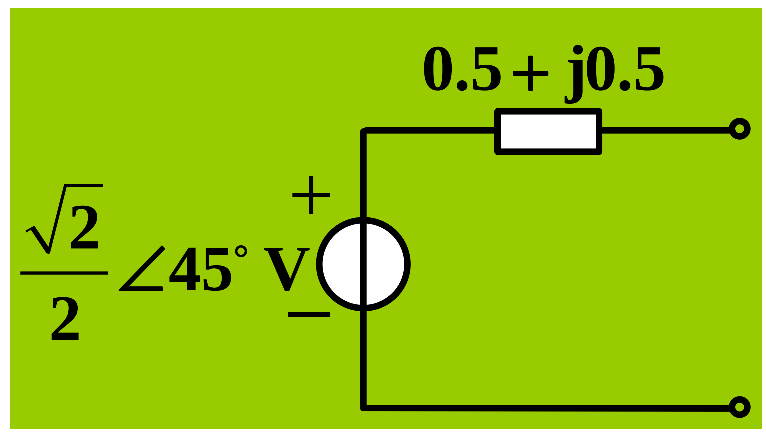
（2）等效阻抗

$$Z_i=0.5+j0.5\,\Omega$$

（3）最大功率

阻抗匹配：$Z_L=0.5-j0.5\,\Omega$

最大功率：$P_{max}=\dfrac{\left(0.5\sqrt{2}\right)^2}{4\times 0.5}=0.25\text{ W}$



戴维南等效电路

电 路 理 论

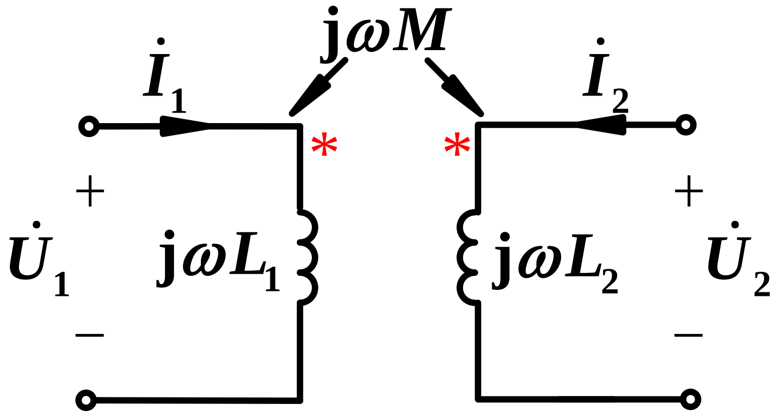
Principles of Electric Circuits

第十章 含耦合电感电路的分析

§ 10.3 理想变压器

§ 10.3 理想变压器

一、理想变压器（ Ideal Transformer ）



$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{\mathrm{j}\omega M} - \frac{\mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2}{\mathrm{j}\omega M}$$

代入

$$\dot{U}_1 = \frac{L_1}{M}(\dot{U}_2 - \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2) + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2$$

$$= \frac{L_1}{M}\dot{U}_2 \underbrace{- \mathrm{j}\omega \frac{L_1 L_2}{M}\dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2}_{=0}$$

全耦合: $M = \sqrt{L_1 L_2}$

$$= \frac{L_1}{M}\dot{U}_2 = \frac{N_1}{N_2}\dot{U}_2 = n\dot{U}_2$$

$$\boxed{\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2}}$$

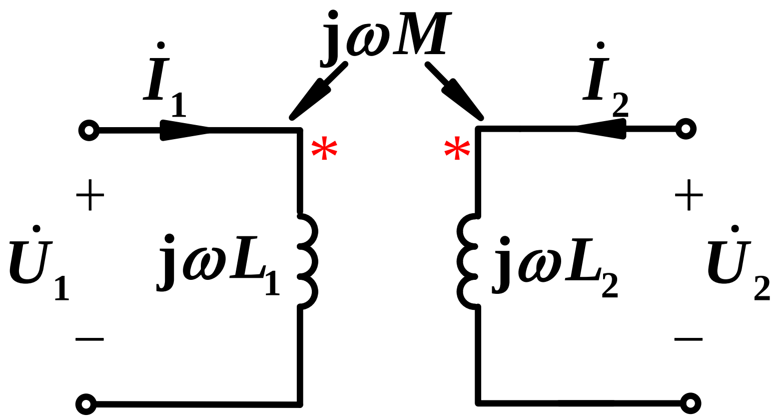
n 变比

变压器实现变压

§ 10.3 理想变压器

一、理想变压器

$$\boxed{\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}=\frac{N_1}{N_2}=n}\boxed{=\frac{L_1}{M}=\frac{M}{L_2}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}$$



$$\dot{U}_1=\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2=\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2+\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_2}{\mathrm{j}\omega M}-\frac{\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2}{\mathrm{j}\omega M}$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_2}{\mathrm{j}\omega M}-\frac{\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2}{\mathrm{j}\omega M}$$

$$\boxed{\frac{\dot{U}_2}{M}=\frac{\dot{U}_1}{L_1}}\qquad\boxed{\frac{L_2}{M}=\frac{1}{n}}$$

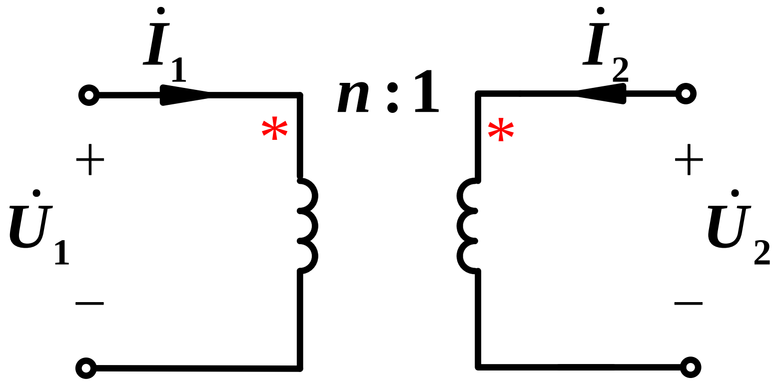
$$=\frac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1}-\frac{1}{n}\dot{I}_2$$

理想化条件:

1. 全耦合($M\to\infty$)
2. 若$L_1\to\infty$(原因可能是磁导率 $\mu\to\infty$)，同时确保L_1/L_2比值不变 ($L_2\to\infty$)

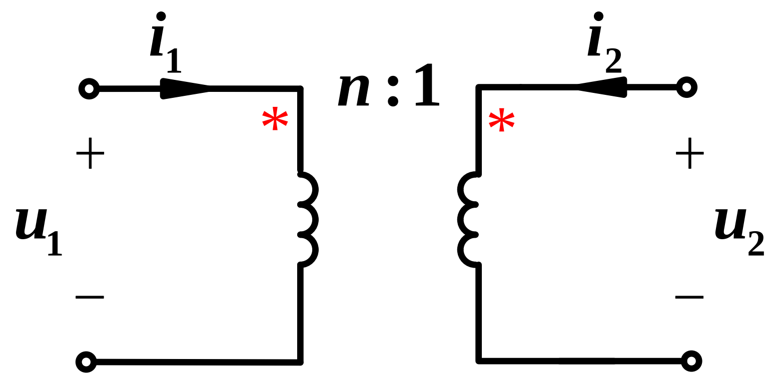
理想变压器:
$$\begin{cases}\dot{U}_1=n\dot{U}_2\\ \dot{I}_1=-\dfrac{1}{n}\dot{I}_2\end{cases}$$

二、理想变压器VAR关系



理想变压器电路符号

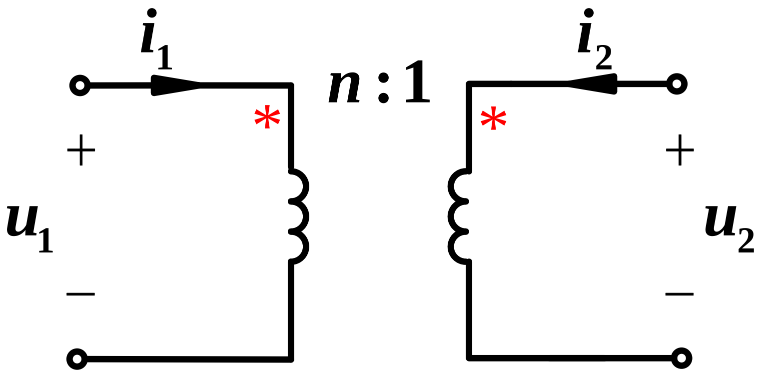
VAR关系：
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$



同名端情况

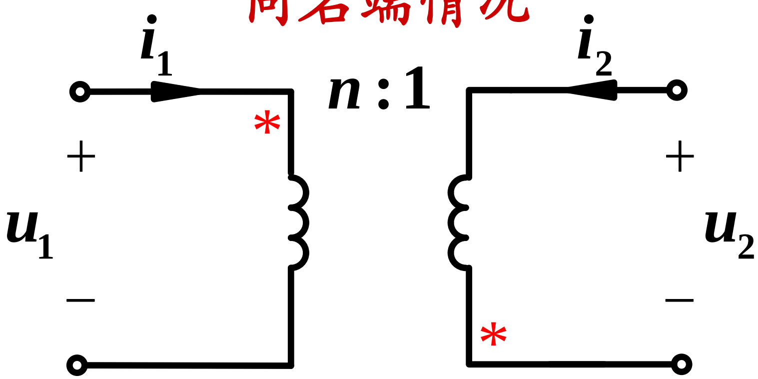
VAR关系：
$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n}i_2 \end{cases}$$

二、理想变压器VAR关系



同名端情况

VAR关系：
$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$



异名端情况

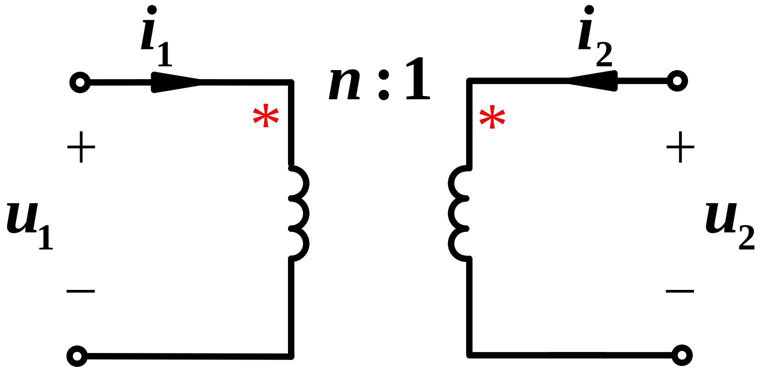
VAR关系：
$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = \dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

★原则：

(1) 两个端口电压“+”在同名端时，VAR电压方程取“+”，反之取“-”；

(2) 两个端口电流从同名端流入时，VAR电流方程取“-”，反之取“+”。

三、理想变压器基本特性



VAR关系：
$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

(a) 非能特性

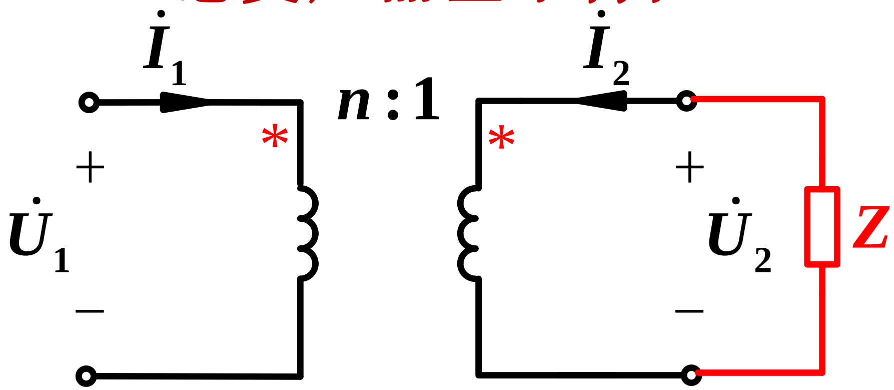
$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = nu_2 \times \left(-\frac{1}{n}\right) i_2 + u_2 \times i_2 \ = 0$$

说明：

（1）理想变压器既不储能，也不耗能；

（2）理想变压器在电路中只起传递信号和能量的作用。

三、理想变压器基本特性



VAR关系：
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

(b) 阻抗变换特性

$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-\frac{1}{n}\dot{I}_2} = n^2\left(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right) = n^2 Z$$

理想变压器二次侧接入阻抗 Z 时，从一次侧看进去的输入阻抗等于该阻抗的 n^2倍，且该阻抗变换关系与同名端位置无关。

三、理想变压器基本特性

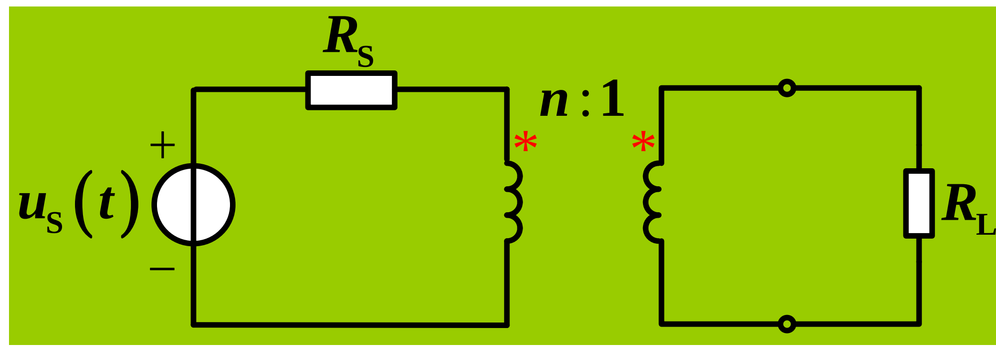
【例】电路如图所示，已知电阻 $R_S=1\text{k}\Omega$，$R_L=10\Omega$，为使R_L获得最大功率，求理想变压器变比n。

解：

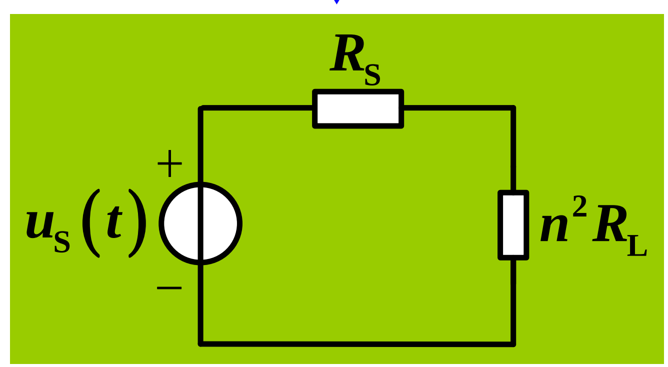
当 $n^2R_L=R_S$ 时匹配，

即：$10n^2=1000$

$n=10$



一次侧等效电路

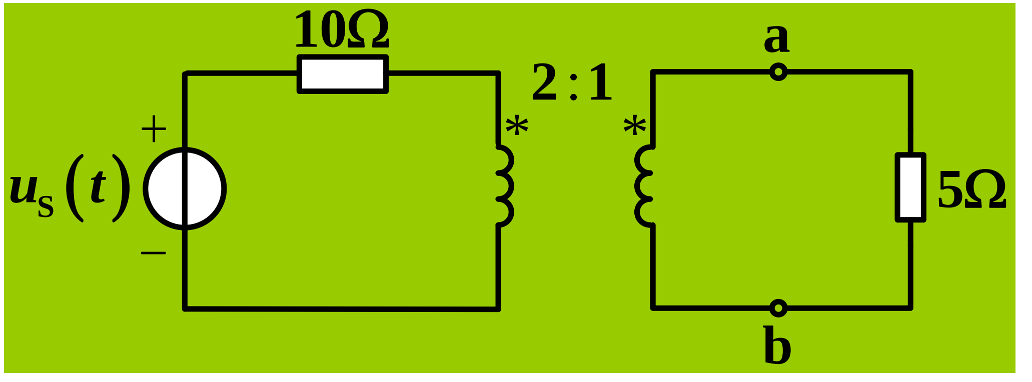


三、理想变压器基本特性

【例】 电路如图所示，求 5Ω 电阻消耗的功率。

其中 $u_S(t)=15\sqrt{2}\sin 4t$ V

解:



思路分析

方法一：利用 5Ω 电阻消耗功率等于一次侧吸收的功率。

方法二：求端口ab左侧电路的戴维南等效电路，进而求解 5Ω 电阻消耗的功率。

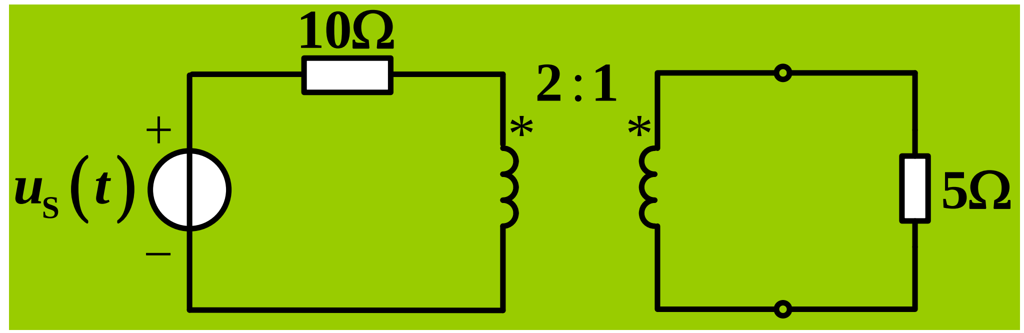
三、理想变压器基本特性

【例】电路如图所示，求 5Ω 电阻消耗的功率。

其中 $u_S(t) = 15\sqrt{2}\sin 4t$ V

解：

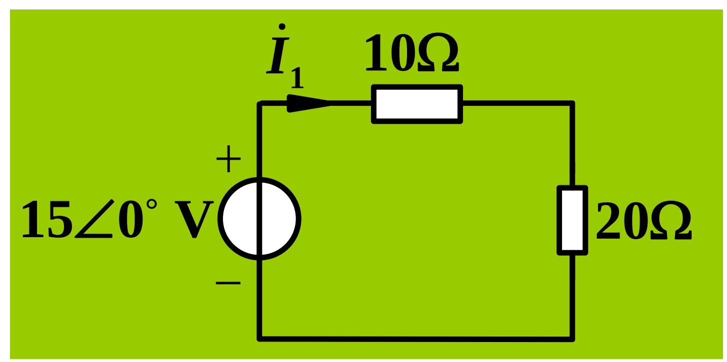
方法一：



$$\dot{I}_1 = \frac{15\angle 0^\circ}{10+20} = 0.5\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$P_{20\Omega} = 20I_1^2 = 20\times 0.5^2 = 5 \text{ W}$$

$$P_{5\Omega} = P_{20\Omega} = 5 \text{ W}$$

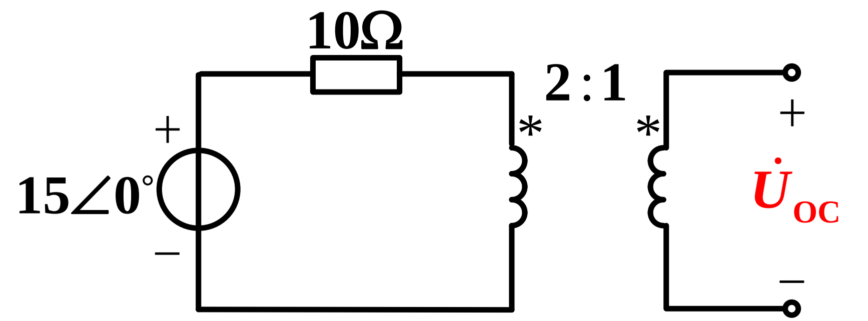


一次侧等效电路

三、理想变压器基本特性

【例】电路如图所示，求 5Ω 电阻消耗的功率。

其中 $u_S(t)=15\sqrt{2}\sin 4t\ \text{V}$

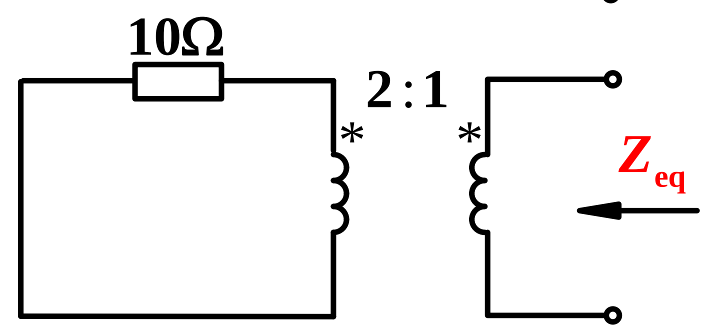


解:

方法二:

二次侧开路，则一次侧电流为零

$$\dot{U}_{OC}=\frac{1}{2}\times 15\angle 0^\circ=7.5\angle 0^\circ\ \text{V}$$



等效阻抗

$$Z_{eq}=\frac{10}{2^2}=2.5\Omega$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}_{OC}}{Z_{eq}+5}=\frac{7.5\angle 0^\circ}{2.5+5}=1\angle 0^\circ\ \text{A}$$

$$P_{5\Omega}=5I_2^2=5\times 1^2=5\,\text{W}$$