电 路 理 论

Principles of Electric Circuits

第十五章 电路代数方程的矩阵形式

2025年3月

电 路 理 论

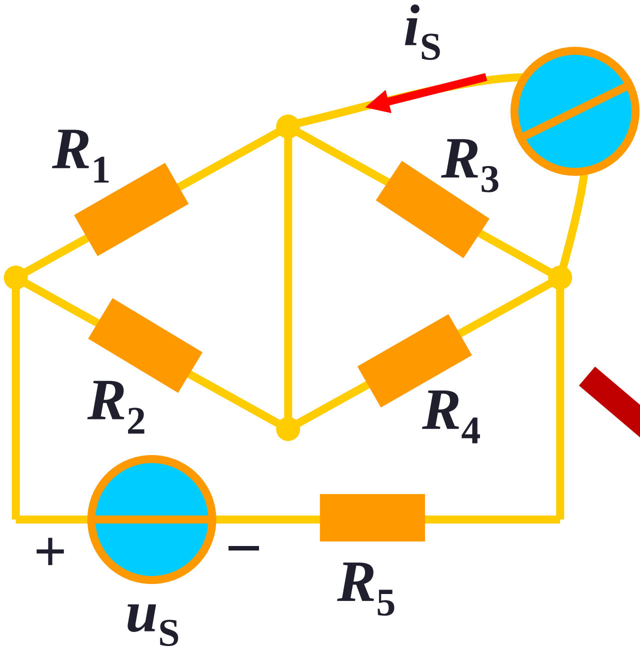
Principles of Electric Circuits

第十五章 电路代数方程的矩阵形式

§15.0 图论的基本知识

§ 15.0 图论的基本知识

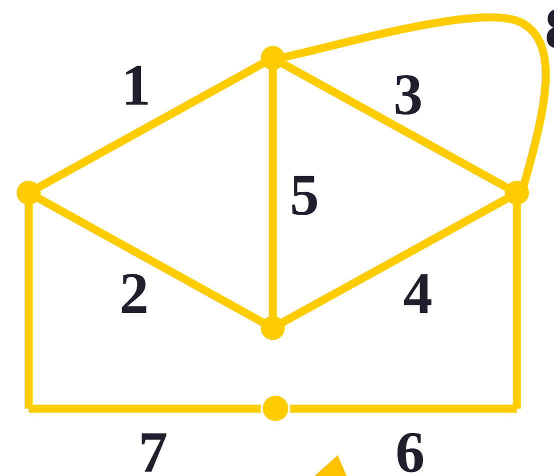
电路的图（ Graph ）



抛开

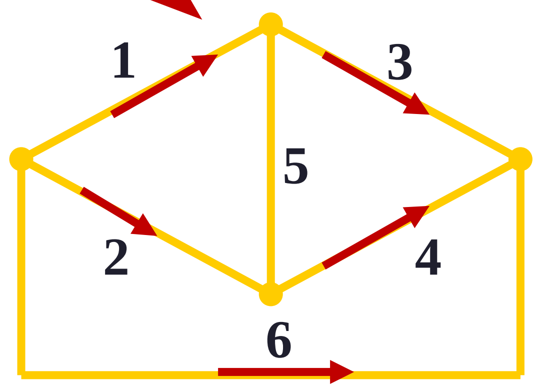
元件性质

$n=5$　　$b=8$



每一个元件作为一条支路

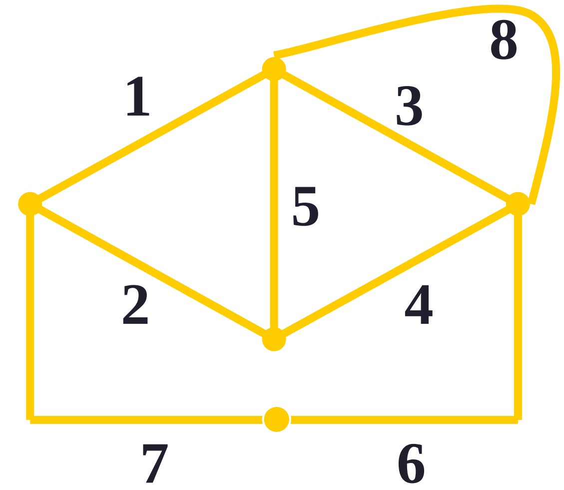
元件的串/并联组合作为一条支路



$n=4$　　$b=6$

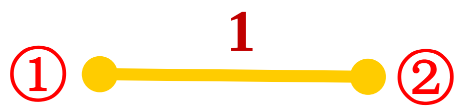
有向图

§ 15.0 图论的基本知识



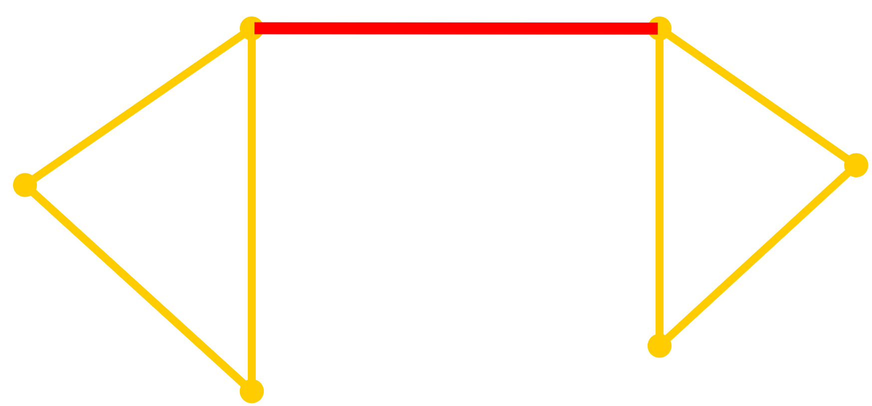
电路的图（Graph）

（1）图 → **G={支路，节点}**



（2）路径 → 从图G中一个节点出发，沿着某些支路连续移动到另一节点所经过的所有支路。

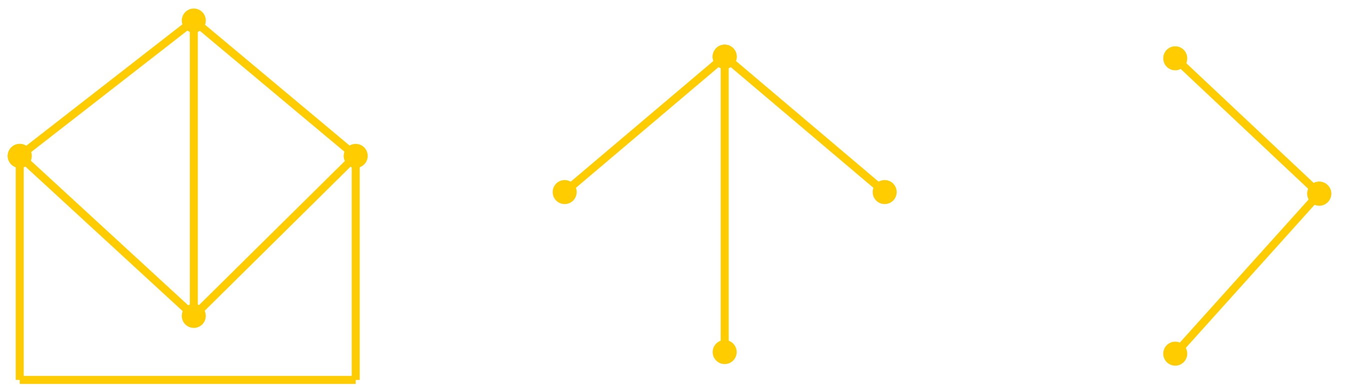
（3）连通图 → 图G中任意两节点间至少有一条路经时称为连通图，非连通图至少存在两个分离部分。



§ 15.0 图论的基本知识

电路的图（ Graph ）

（4）子图 → 若图G_1中所有支路和节点都是图G的一部分，则称G_1是G的子图。



§ 15.0 图论的基本知识

电路的图（ Graph ）

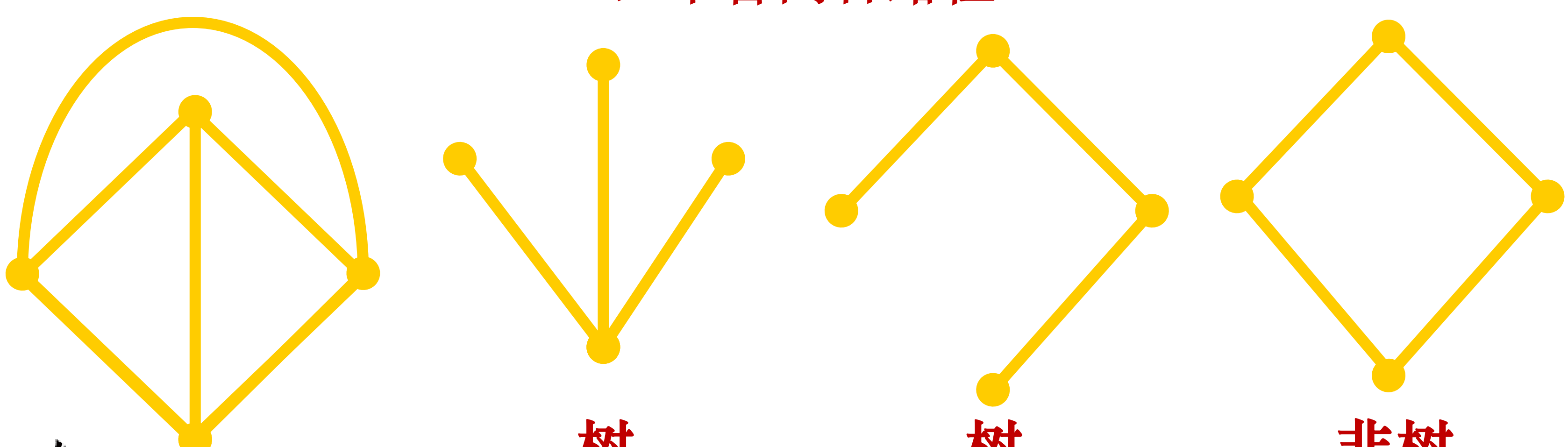
（4）子图 → 若图G_1中所有支路和节点都是图G的一部分，则称G_1是G的子图。

★ **树 (Tree)** → 连通图的一个子图，且满足下列条件：

1）连通；

2）包含所有节点；

3）不含闭合路径。



树　　树　　非树

§ 15.0 图论的基本知识

电路的图（ Graph ）

★ **树 (Tree)** → 连通图的一个子图，且满足下列条件：

1）连通；

2）包含所有节点；

3）不含闭合路径。

树支：构成树的支路

连支：属于G而不属于T的支路

总结：

1）对应一个图，会有多个树。

2）树支的数目是一定的。 $b_t = n-1$

连支数： $b_l = b - b_t = b-(n-1)$

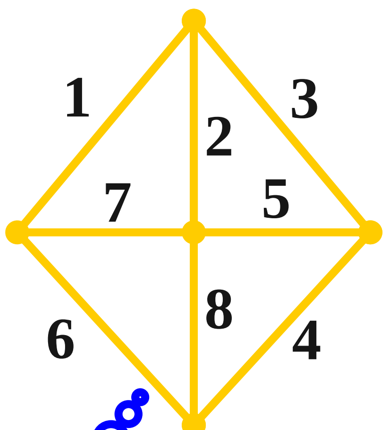
§ 15.0 图论的基本知识

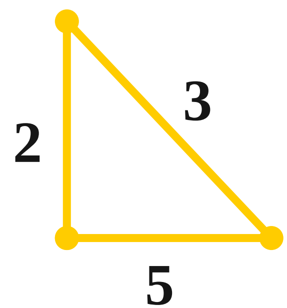
电路的图（ Graph ）

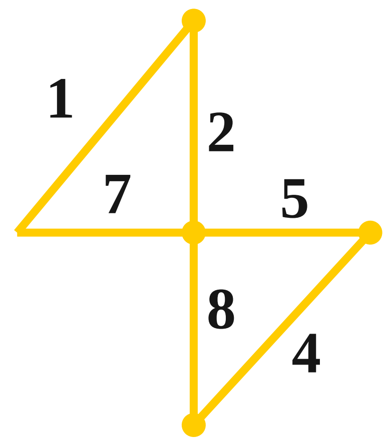
★ 回路 (Loop) → L是连通图的一个子图，构成一条闭合路径，并满足：

1）连通；

2）每个节点关联2条支路。







Yes

No

共有
几个回路?

答：共13个回路。

§ 15.0 图论的基本知识

电路的图（ Graph ）

★ **回路 (Loop)** → L是连通图的一个子图，构成一条闭合路径，并满足：

1）连通；

2）每个节点关联2条支路。

总结：

1）对应一个图，有多个回路；

2）基本回路的数目是一定的，为连支数；

3）对于平面电路，网孔数为基本回路数。

基本回路数： $l = b_l = b - (n-1)$

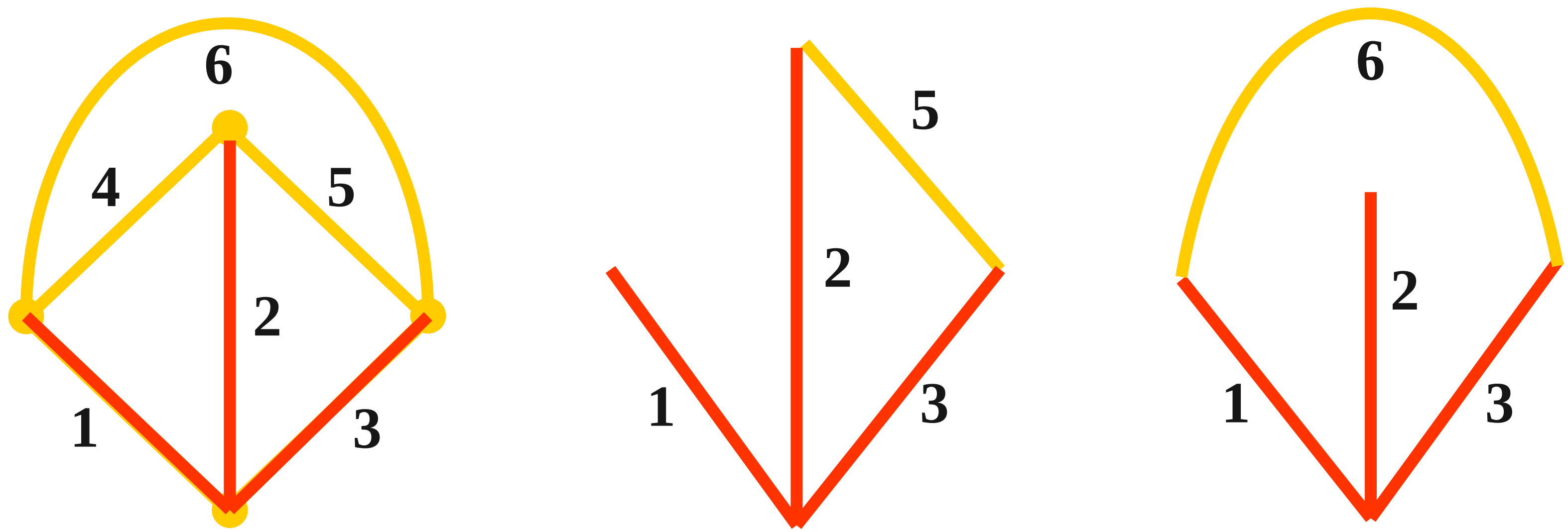
§ 15.0 图论的基本知识

电路的图（ Graph ）

★ 回路 (Loop) → L是连通图的一个子图，构成一条闭合路径。

基本回路数：(单连支回路)

$$l = b_l = b - (n - 1)$$



§ 15.0 图论的基本知识

电路的图（ Graph ）

★ 回路 (Loop) → L是连通图的一个子图，构成一条闭合路径。

基本回路数：
(单连支回路)

$$l = b_l = b - (n - 1)$$

★ 注意：

1) 基本回路具有独占的一条连枝，利用基本回路列出的KVL方程彼此之间一定是独立的。因此基本回路一定是独立回路。

2) 独立回路数目=基本回路的数目=连支数=$b-(n-1)$。

3）对于平面电路，独立回路数目=网孔数。

§ 15.0 图论的基本知识

请大家回忆一下**基尔霍夫定律**对应的**独立方程个数**。

对于一个n个节点b条支路的电路而言：

独立的KCL方程数： $n-1$

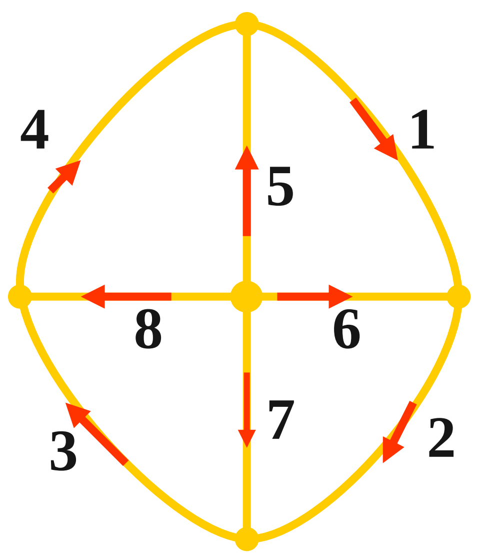
独立的KVL方程数： **基本回路数**$=b-(n-1)$

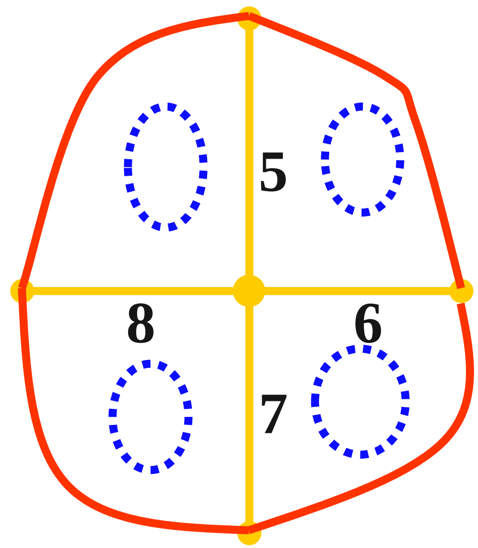
基尔霍夫定律的独立方程数： $(n-1)+b-(n-1)=b$

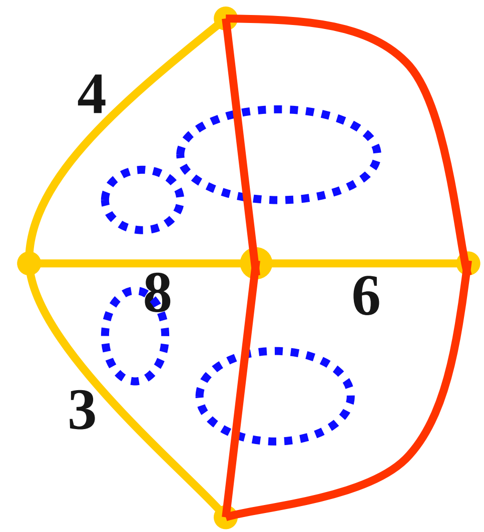
——等于**支路数**

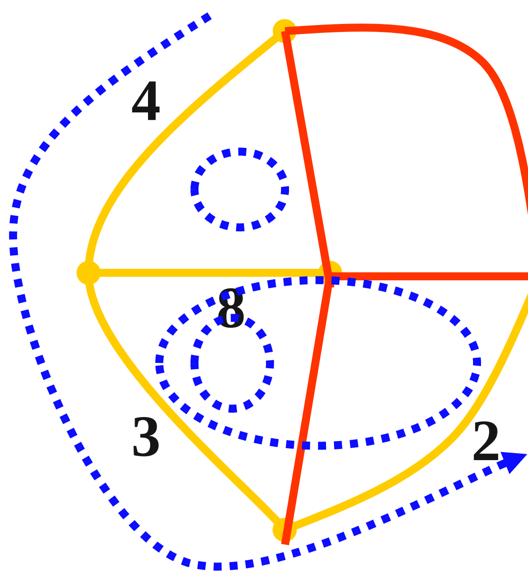
§ 15.0 图论的基本知识

【例】画出三种可能的树及其对应的基本回路。









电 路 理 论

Principles of Electric Circuits

第十五章 电路代数方程的矩阵形式

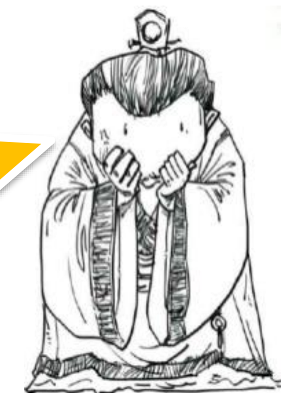
§15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

在分析电路时常遇到列写代数方程组或微分方程组的问题：

如回路电流方程、网孔电方程、节点电压方程……

如果分析电力系统这样庞大的电路网络，或是复杂的集成电路，那回路数、节点数可是成百上千呀，伤不起~ ~ ~



如果采用**矩阵**表示这些方程组，会十分简洁，同时也方便研究和计算，特别适合计算机辅助分析电路。

节点 —— 支路　　关联矩阵

回路 —— 支路　　基本回路矩阵

割集 —— 支路　　基本割集矩阵　　本课程不做要求

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

电路方程的矩阵形式

- 割集与基本割集
- 图的矩阵表示
  - 矩阵的列写规则
    - 关联矩阵
    - 基本回路矩阵
    - 基本割集矩阵
- 支路VCR的矩阵表示
- 基尔霍夫定律的矩阵表示
- 电路分析的矩阵方法
  - 节点法
  - 回路法
  - 割集法
  - 列表法

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

一、关联矩阵 *A*

用矩阵形式描述节点和支路的关联性质，*n*个节点*b*条支路的电路可用一个*n*×*b*的矩阵描述。

增广关联矩阵：

$$A_a = \begin{array}{c|c} & \text{支路}b \rightarrow \\ \hline \text{节点}\,n \downarrow & \left[\, n \times b \,\right] \end{array}$$

注意： 每一行对应一个节点，每一列对应一条支路。

矩阵A_a中每一个元素定义：

$$a_{ij} \begin{cases} a_{ij}=1 & \text{支路 } j \text{ 与节点 } i \text{ 关联，方向背离节点。} \\ a_{ij}=-1 & \text{支路 } j \text{ 与节点 } i \text{ 关联，方向指向节点。} \\ a_{ij}=0 & \text{支路 } j \text{ 与节点 } i \text{ 无关联。} \end{cases}$$

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

一、关联矩阵 A

增广关联矩阵：

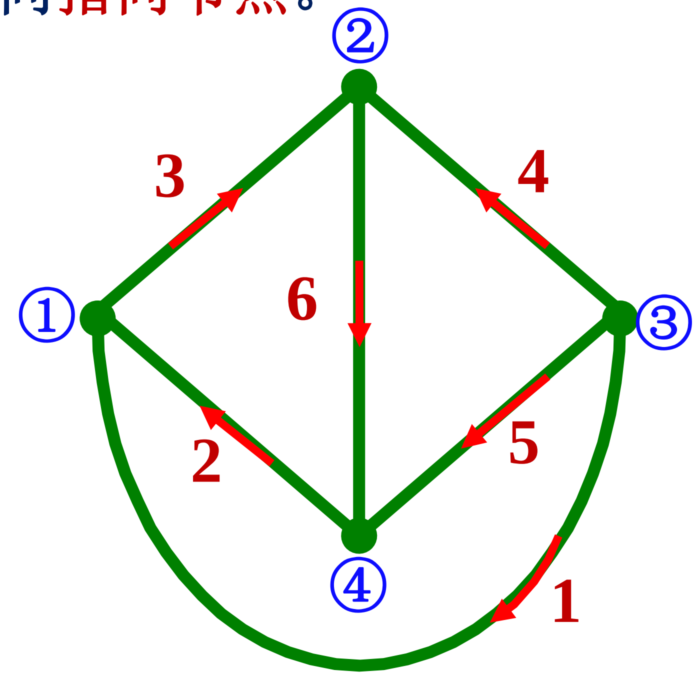
$$A_a = \text{节点}\, n \downarrow \overset{\text{支路}\, b \;\longrightarrow}{\left[\, n \times b \,\right]}$$

矩阵A_a中每一个元素定义：

$$a_{ij} \begin{cases} a_{ij}=1 & \text{支路 } j \text{ 与节点 } i \text{ 关联，方向背离节点。} \\ a_{ij}=-1 & \text{支路 } j \text{ 与节点 } i \text{ 关联，方向指向节点。} \\ a_{ij}=0 & \text{支路 } j \text{ 与节点 } i \text{ 无关联。} \end{cases}$$

【例】写出图示电路的增广关联矩阵A_a。

$$A_a = \begin{array}{c} \text{节}\backslash\text{支} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$



§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

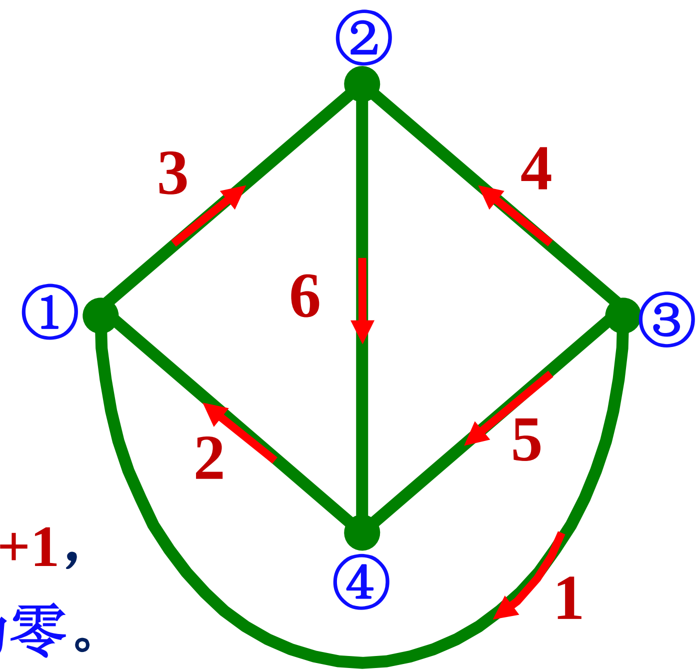
一、关联矩阵 *A*

支路b →

$$A_a = \text{节点 } n \downarrow \left[\, n \times b \,\right]$$

【例】写出图示电路的增广关联矩阵A_a。

$$A_a = \begin{array}{c|c} \text{节}\backslash\text{支} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$



★ **注意:**

（1）每一列只有两个非零元素，一个是+1，一个是−1，A_a的每一列元素之和为零。

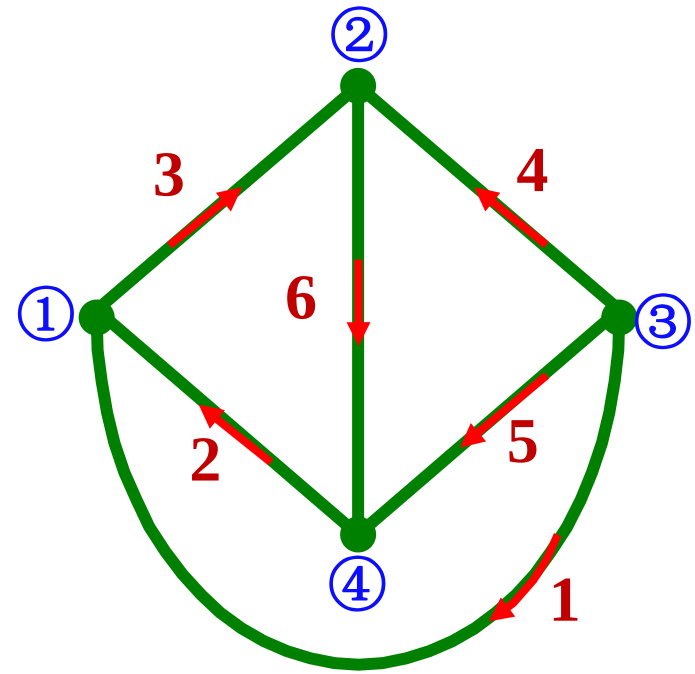
（2）矩阵中任一行均可由其余$n-1$行表示，即只有$n-1$行是独立的。

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

一、关联矩阵 *A*

【例】写出图示电路的增广关联矩阵A_a。

$$
A_a=\begin{array}{c|cccccc}
节 \backslash 支 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1}
\end{array}
$$



★ 将A_a的第四行划掉。（相当于将节点4选作参考节点）

关联矩阵：（降阶关联矩阵）

$$A=\underset{节点\ n-1}{\left[\overset{支路b\ \longrightarrow}{(n-1)\times b}\right]}$$

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

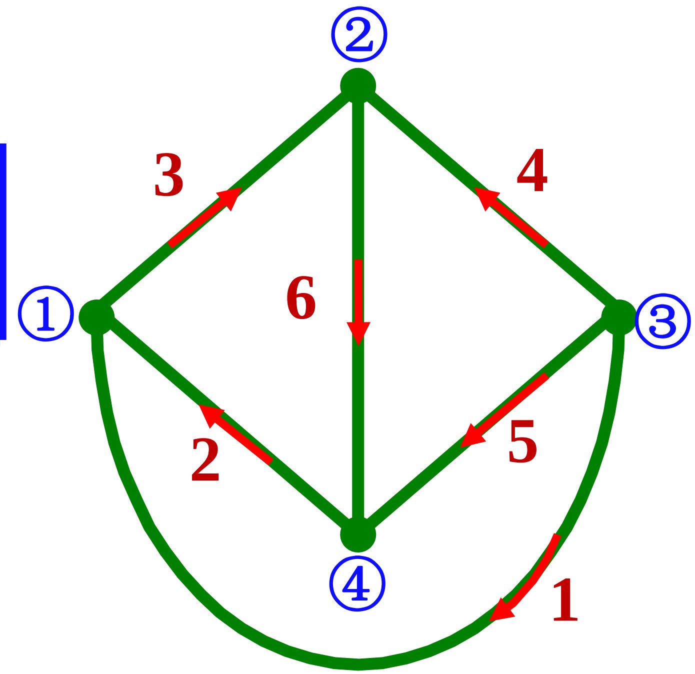
一、关联矩阵 *A*

关联矩阵：

（降阶关联矩阵）

支路b

$$A = \text{节点 } n\text{-}1 \downarrow \Big[(n\text{-}1) \times b \Big]$$



1. 用*A*表示KCL方程的矩阵形式。

设：$i_b = [\, i_1 \;\; i_2 \;\; i_3 \;\; i_4 \;\; i_5 \;\; i_6 \,]^T$

以节点④为参考节点

$$A \cdot i_b = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 - i_2 + i_3 \\ -i_3 - i_4 + i_6 \\ i_1 + i_4 + i_5 \end{bmatrix} = 0$$

n-1个
独立方程

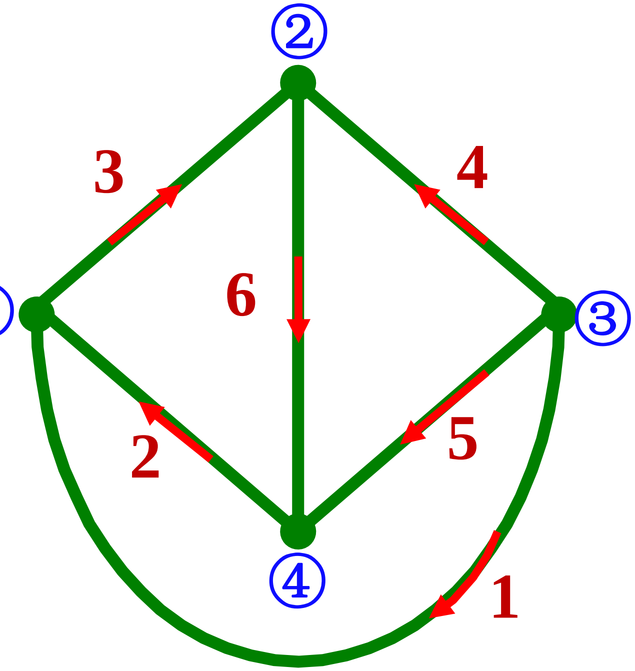
KCL的矩阵形式：$Ai_b = 0$

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

一、关联矩阵 A

关联矩阵：（降阶关联矩阵）

$$A = \begin{array}{c} \text{节} \\ \text{点} \\ n\text{-}1 \end{array}\downarrow \overset{\text{支路}b\ \longrightarrow}{\left[(n-1)\times b\right]}$$



2. 用A^{T}表示KVL方程的矩阵形式。

设：$u_b = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ $\quad u_n = \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix}$

$$A^{\mathrm{T}} \cdot u_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{n1} + u_{n3} \\ -u_{n1} \\ u_{n1} - u_{n2} \\ u_{n3} - u_{n2} \\ u_{n3} \\ u_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

★ KVL的矩阵形式:

$$u_b = A^{\mathrm{T}} u_n$$

二、基本回路矩阵 B_f

用基本回路矩阵描述基本回路与支路的关联性质，l个基本回路b条支路的有向图可用一个$l\times b$的矩阵来描述。

基本回路矩阵：

$$B_f = \begin{array}{c} \\ \text{回路 } l \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{支路 } b \rightarrow \\ \left[\; l\times b \;\right] \end{array}$$

注意：每一行对应一个基本回路，每一列对应一条支路。

基本回路矩阵B_f中每一个元素定义：

$$b_{ij}\begin{cases} b_{ij}=1 & \text{支路 } j \text{ 在基本回路 } i \text{ 中，且方向一致。} \\ b_{ij}=-1 & \text{支路 } j \text{ 在基本回路 } i \text{ 中，且方向相反。} \\ b_{ij}=0 & \text{支路 } j \text{ 不属于基本回路 } i \text{ 。} \end{cases}$$

一般，基本回路方向与其关联的连支方向取一致。

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

二、基本回路矩阵 B_f

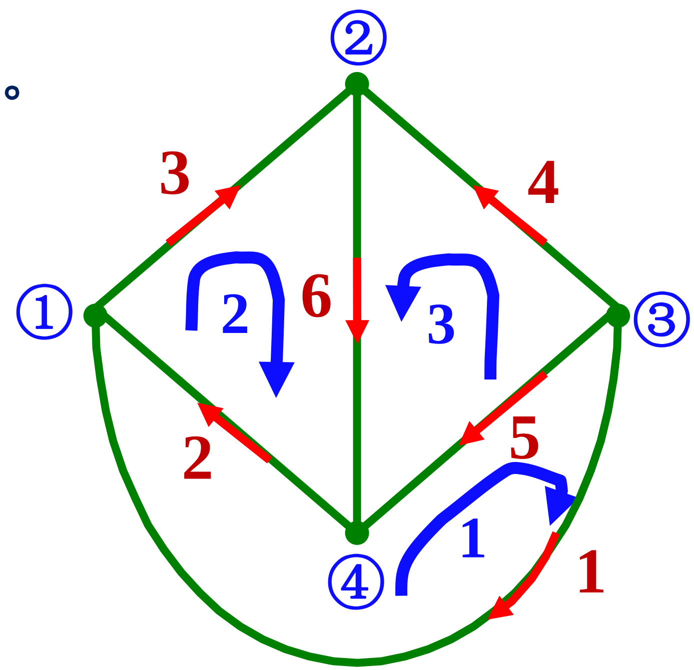
$$B_f = \begin{array}{c|c} & \text{支路} b \rightarrow \\ \text{回路} l \downarrow & \begin{bmatrix} l \times b \end{bmatrix} \end{array}$$

基本回路矩阵B_f中每一个元素定义：

$$b_{ij}\begin{cases} b_{ij}=1 & \text{支路 } j \text{ 在基本回路 } i \text{ 中，且方向一致。} \\ b_{ij}=-1 & \text{支路 } j \text{ 在基本回路 } i \text{ 中，且方向相反。} \\ b_{ij}=0 & \text{支路 } j \text{ 不属于基本回路 } i \text{。} \end{cases}$$

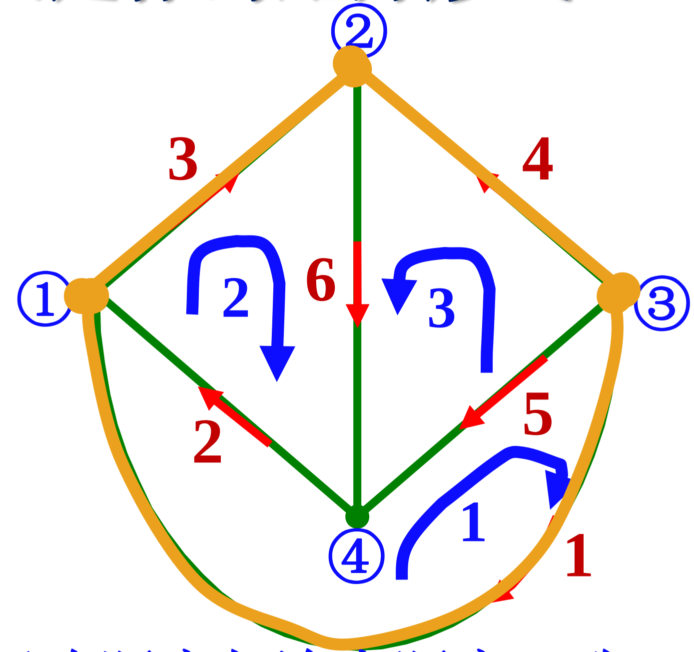
【例】写出图示电路的基本回路矩阵B_f。

$$B_f = \begin{array}{c} \text{回}\backslash\text{支} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

【例】写出图示电路的基本回路矩阵B_f。



$$B_f = \begin{array}{cc} \text{回}\diagdown\text{支} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

★（1）支路电流方向为回路电流方向；

（2）支路排列顺序为先连支后树支，回路顺序与连支顺序一致。

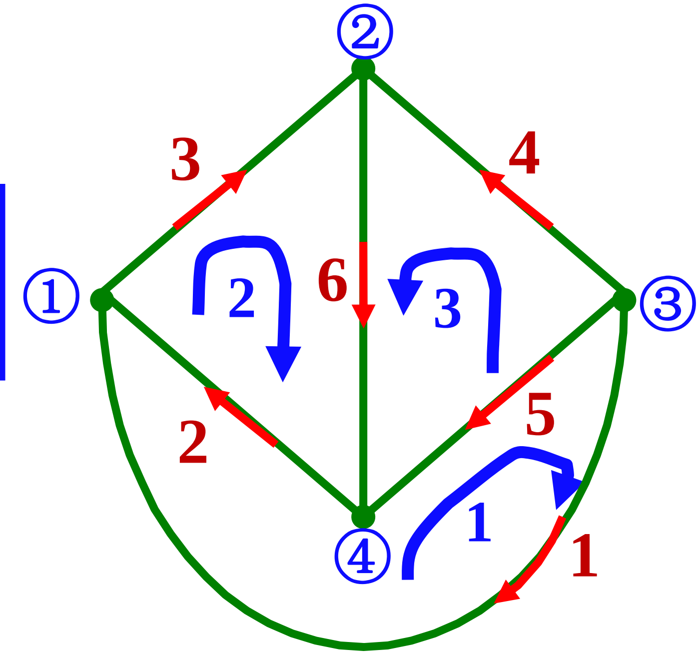
选 2、5、6为树，连支顺序为1、 3 、 4

$$B_f = \begin{array}{cc} \text{回}\diagdown\text{支} & \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{1_l} \quad \underbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}}_{B_t} \right] \end{array} = [1_l \;\; B_t]$$

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

二、基本回路矩阵 B_f

基本回路矩阵： $B_f = \text{回路}\,l \downarrow \overset{\text{支路}\,b\;\rightarrow}{\left[\, l \times b \,\right]}$



1. 用B_f表示KVL方程的矩阵形式。

设：$u_b = [\underbrace{u_1\ u_3\ u_4}_{u_l}\ \underbrace{u_2\ u_5\ u_6}_{u_t}]^T$

$$B_f \cdot u_b = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_2 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 - u_5 \\ u_2 + u_3 + u_6 \\ u_4 - u_5 + u_6 \end{bmatrix} = 0$$

l 个
KVL方程

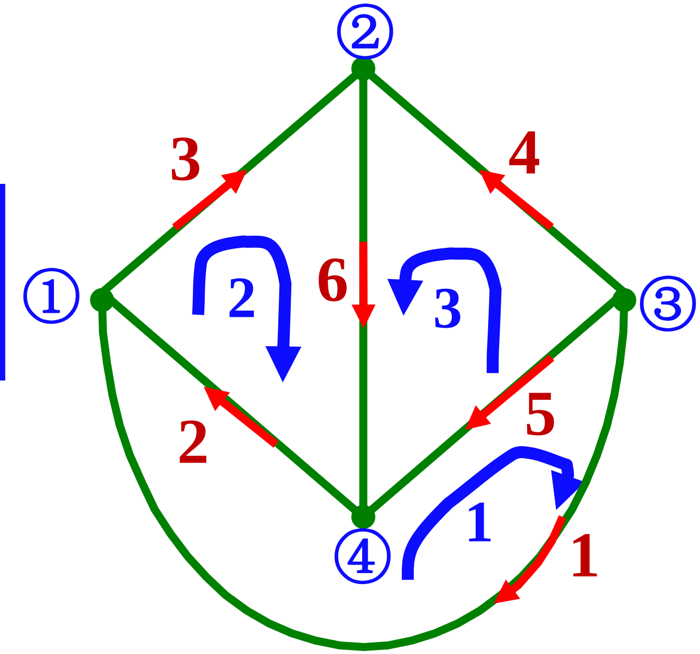
★ KVL的矩阵形式: $B_f\, u_b = 0$

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

二、基本回路矩阵 B_f

基本回路矩阵：

$$B_f = \begin{array}{c} \\ \text{回路 } l \downarrow \end{array} \overset{\text{支路}b \longrightarrow}{\left[\; l \times b \;\right]}$$



2. 用B_f^{T}表示KCL方程的矩阵形式。

设： $i_b = [i_1 \;\; i_3 \;\; i_4 \;\; i_2 \;\; i_5 \;\; i_6]^{\mathrm{T}}$ $\qquad i_l = \begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \end{bmatrix}$

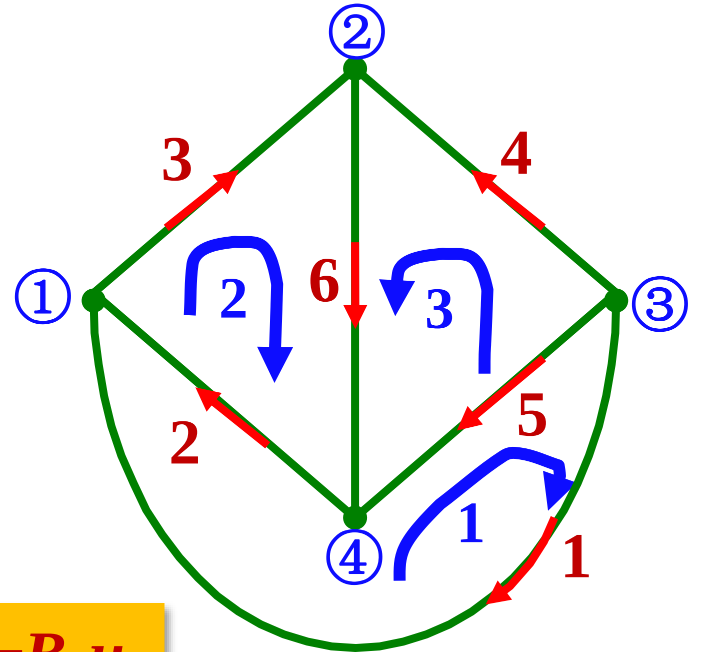
$$B_f^{\mathrm{T}} \bullet i_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \\ i_{l3} \\ -i_{l1} + i_{l2} \\ -i_{l1} - i_{l3} \\ i_{l2} + i_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_2 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$

★ **KCL的矩阵形式:**

$$i_b = B_f^{\mathrm{T}} i_l$$

§ 15.1 有向图的矩阵表示和基尔霍夫定律的矩阵形式

基本回路矩阵：$B_f = \begin{array}{c|c} & \text{支路}b \rightarrow \\ \hline \text{回路}l \downarrow & \begin{bmatrix} l \times b \end{bmatrix} \end{array}$



1. 用B_f表示KVL方程的矩阵形式。

★ KVL的矩阵形式: $B_f\, u_b = 0$

$$\rightarrow [1_l \;\; B_t]\begin{bmatrix} u_l \\ u_t \end{bmatrix} = 0 \quad u_l + B_t u_t = 0 \quad u_l = -B_t u_t$$

连支电压可以用树支电压表示

2. 用B_f^{T}表示KCL方程的矩阵形式。

★ KCL的矩阵形式: $i_b = B_f^{\mathrm{T}} i_l$

$$B_f^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1_l \\ B_t^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1_l \\ B_t^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} i_l = \begin{bmatrix} i_l \\ i_t \end{bmatrix} \rightarrow i_t = B_t^{\mathrm{T}} i_l$$

$$B_f = [1_l \;\; B_t]$$

树支电流可以用连支电流表示