

# 电路理论

## Principles of Electric Circuits

---

### 第十章 含耦合电感电路的分析

电工教研室

2025年



# 电路理论

## Principles of Electric Circuits

---

### 第十章 含耦合电感电路的分析

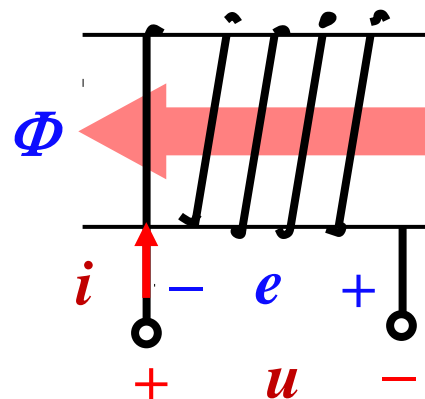
#### § 10.1 耦合电感



# § 10.1 耦合电感

## 知识回顾

### 电感元件 (Inductor)



流经电感的电流  $i$

安培环路定律

$$\int_L B \cdot dl = \sum i_{\text{int}}$$

磁感应强度  $B$

$$\Phi = \iint_S B \cdot dS$$

由电磁感应定律

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi}{i}$$

磁通  $\Phi$

磁链  $\psi$  的定义

$$\psi = N\Phi$$

$$u = -e = L \frac{di}{dt}$$

磁链  $\psi$

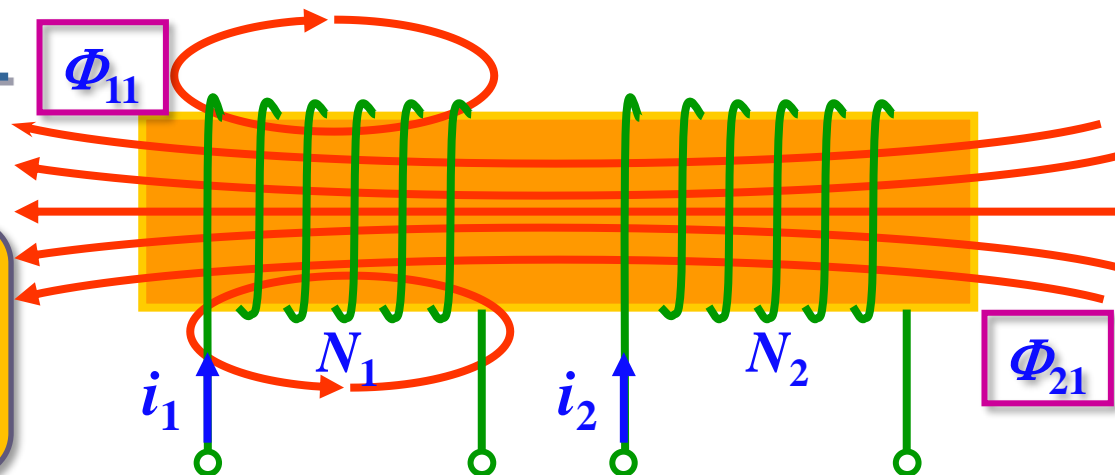


# § 10.1 耦合电感

## 一、耦合电感(互感)

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2$$

$$\Psi_2 = \pm \Psi_{21} + \Psi_{22} = \pm M_{21} i_1 + L_2 i_2$$



线圈1的自感

$$L_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_{11}}{i_1}$$

电流  $i_1$

磁感应强度  $B$

磁通

自感磁链  $\psi_{11}$

$$\psi_{11} = N_1 \Phi_{11}$$

自感磁通  $\Phi_{11}$

互感磁通  $\Phi_{21}$

$$\psi_{21} = N_2 \Phi_{21}$$

互感磁链  $\psi_{21}$

互感系数

线圈1对2的互感

$$M_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_{21}}{i_1}$$

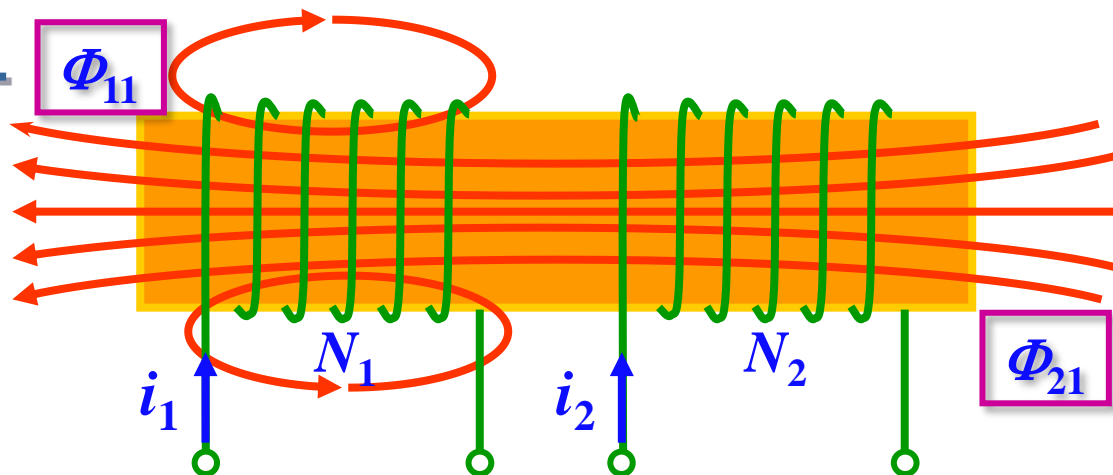
对于线圈  $N_2$  也有类似的分析

# § 10.1 耦合电感

## 1. 耦合电感的性质

$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1} \quad M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$$

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} \quad L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2} \quad \text{单位: 亨 (H)}$$



a) 对于线性电感  $M_{12}=M_{21}=M$

$$M \propto N_1 N_2$$

b) 互感系数  $M$  只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关。  $L$  总为正,  $M$  值有正有负

## 2. 耦合系数 $k$ (Coupling coefficient)

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$M^2 \leq L_1 L_2 \longrightarrow$$

$$0 \leq k \leq 1$$

注意: 互感不大于两个自感的几何平均值

# § 10.1 耦合电感

## 2. 耦合系数 $k$ (Coupling coefficient)

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

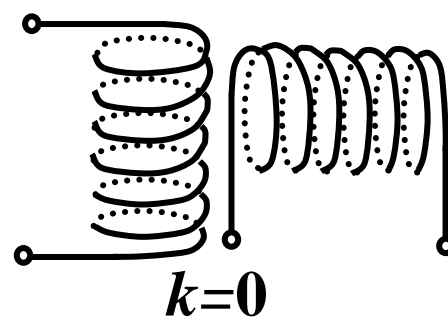
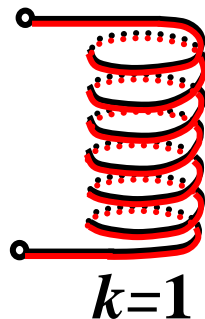
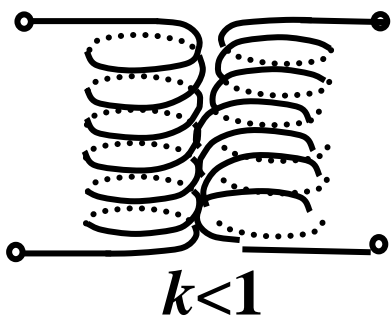
$$k \leq 1$$

注意：互感不大于两个自感的几何平均值

全耦合  $k = 1$   $\longrightarrow$   $\Phi_{S1} = \Phi_{S2} = 0$  漏磁通为零

互感现象  $\left\{ \begin{array}{l} \text{利用——变压器, 信号和功率的传递} \\ \text{避免——干扰} \end{array} \right.$

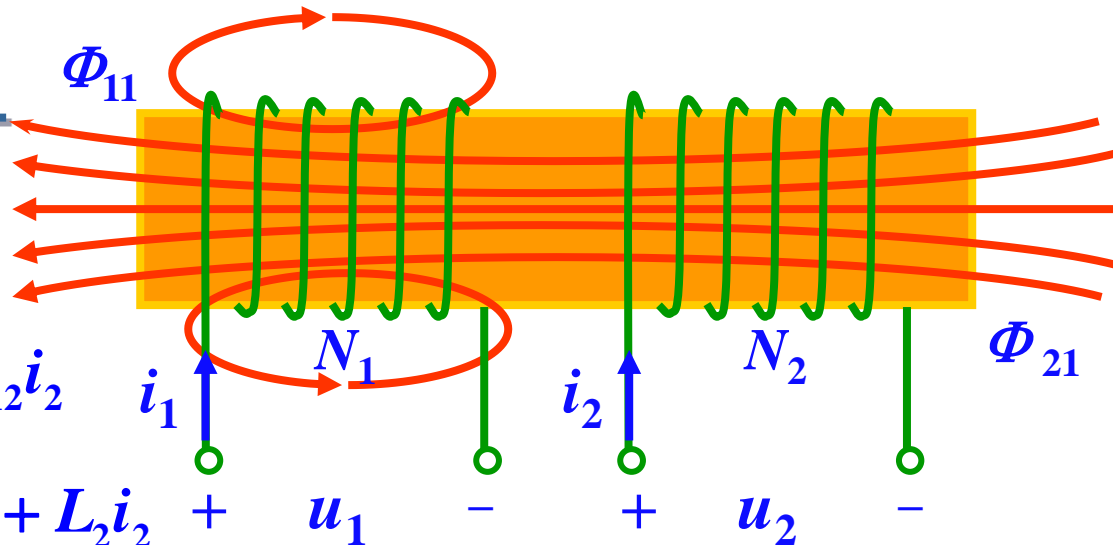
克服：合理布置线圈相互位置或增加屏蔽减少互感作用



# § 10.1 耦合电感

## 二、耦合电感的特性方程

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2 \\ \psi_2 = \pm \psi_{21} + \psi_{22} = \pm M_{21} i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$



根据电磁感应定律和楞次定律有

$$u = \frac{d\psi}{dt}$$

自感电压 互感电压

$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

相量形式:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

互感电压的正负:

- (1) 与电流的参考方向有关;
- (2) 与线圈的相对位置和绕向有关。

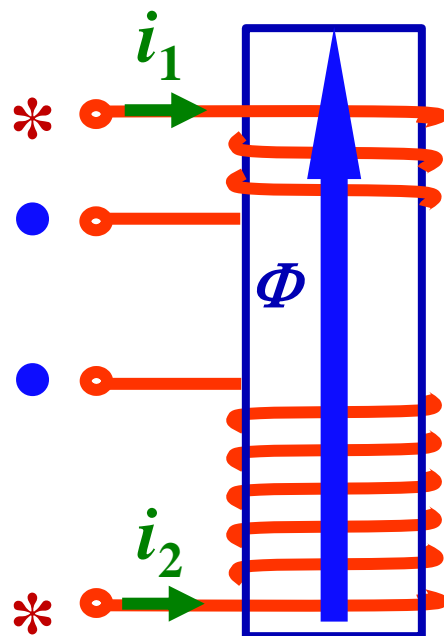
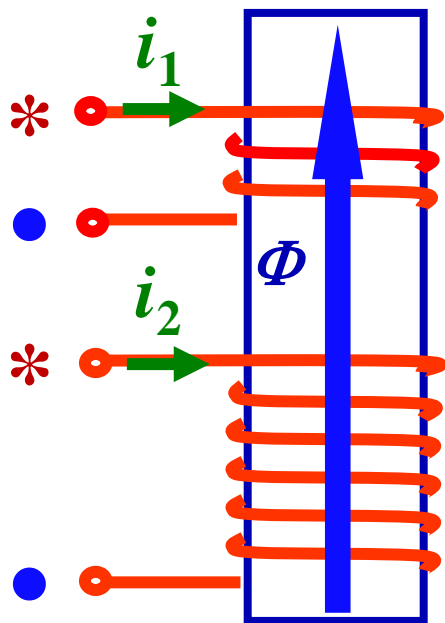


## § 10.1 耦合电感

### 同名端

当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入，其所产生的磁场**相互加强**时，这两个对应端子称为**同名端**。

问题1： 如何根据绕法确定同名端？

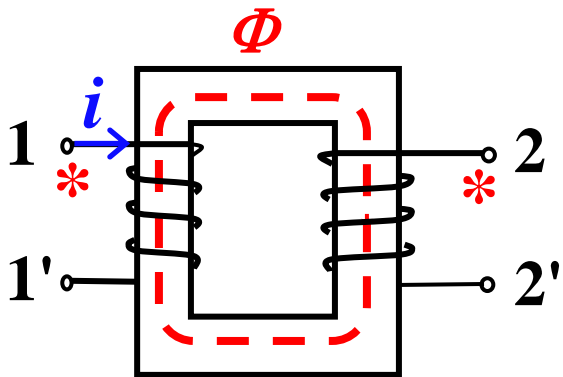


**方法1：**同时令两个电流分别从两个线圈的某两个端子流入（或流出），若电流所产生的磁场相互增强，则这两个端子为**同名端**。

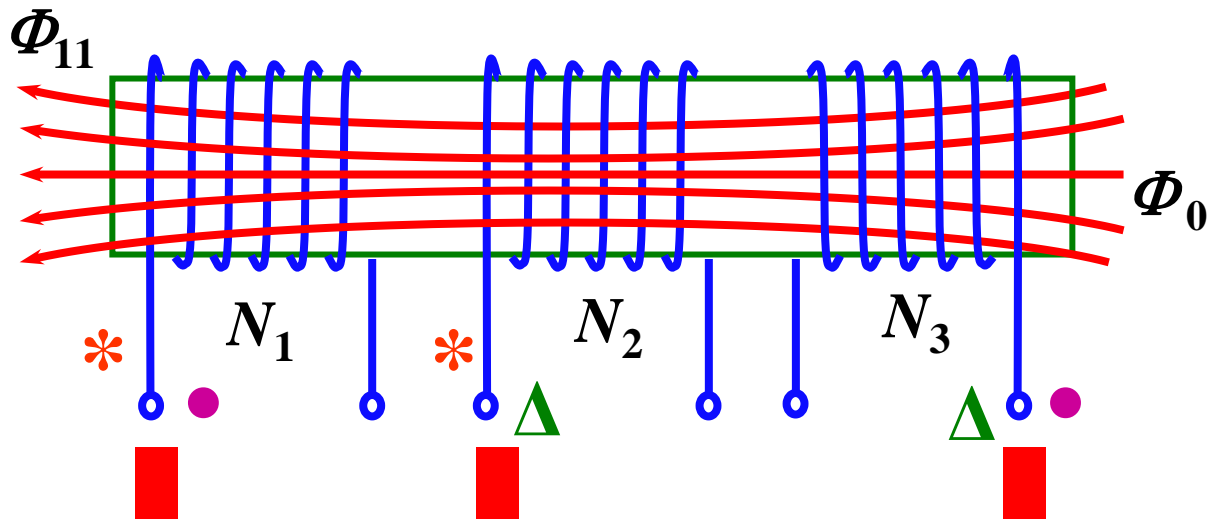


## § 10.1 耦合电感

### 【例1】



### 【例2】



如果3个绕组根据线圈之间的两组关系可以确定另一组关系, 则可以用3个点代替6个点的方式表示三个绕组的同名端关系。

## § 10.1 耦合电感

同名端的实验测定:



如图所示电路，当闭合开关 $S$ 时， $i$  增加，

$\frac{di}{dt} > 0$  ,  $u_{22'} = M \frac{di}{dt} > 0$  电压表正偏，然后又回到零点。

**方法2:** 当随时间增大的时变电流从某线圈的一端流入时，将会引起另一线圈相应同名端的电位升高。

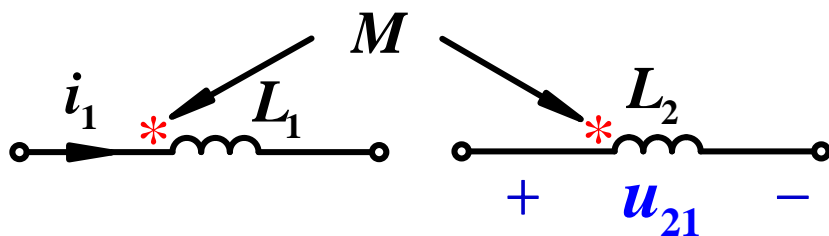
## § 10.1 耦合电感

### 同名端

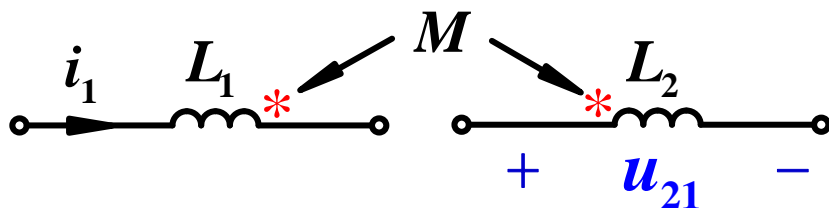
当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入，其所产生的磁场**相互加强**时，则这两个对应端子称为**同名端**。

问题2：如何根据同名端确定互感电压？

规律：互感电压高电位位于产生该互感电压的电流参考正方向所在端**对应的同名端**。



$$u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$$



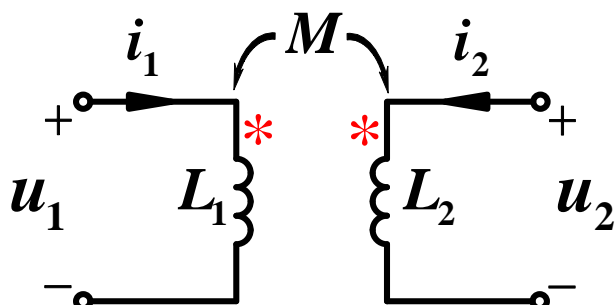
$$u_{21} = -M \frac{di_1}{dt}$$

## § 10.1 耦合电感

### 自感电压和互感电压的参考方向

- (1) 自感电压的正极性位于产生该电压电流的流入端钮；
- (2) 互感电压的正极性位于产生该电压电流的流入端钮的**同名端**。

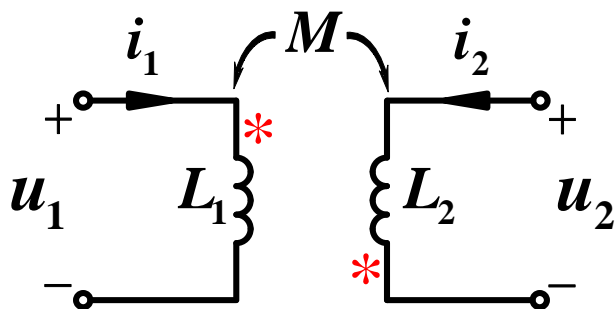
【例】



耦合电感的电路符号

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

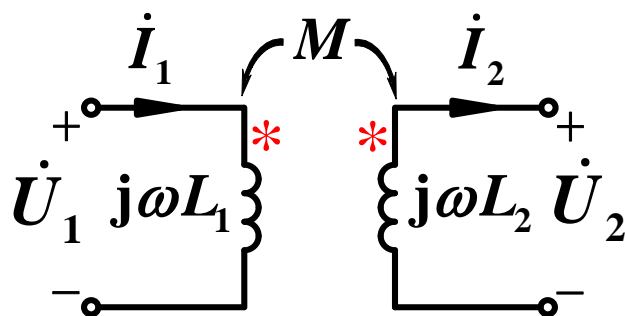
$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

## § 10.1 耦合电感

### 自感电压和互感电压的参考方向

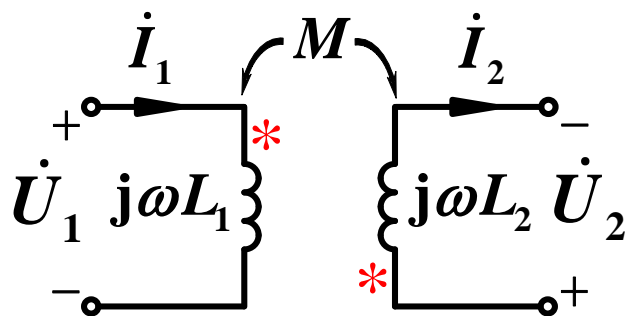
- (1) 自感电压的正极性位于产生该电压电流的流入端钮；
- (2) 互感电压的正极性位于产生该电压电流的流入端钮的**同名端**。

【例】



$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2$$



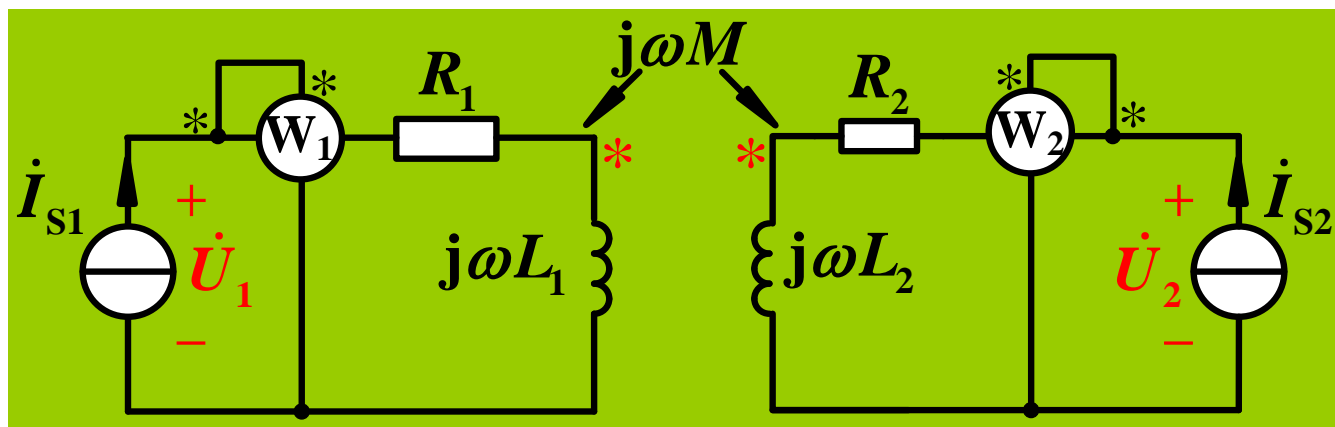
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

## § 10.1 耦合电感

### 三、耦合电感的功率

【例】求图示电路中各功率表的读数。



解:  $\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_{S1} + j\omega L_1 \dot{I}_{S1} + j\omega M \dot{I}_{S2}$

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_{S2} + j\omega L_2 \dot{I}_{S2} + j\omega M \dot{I}_{S1}$$

电流源发出的复功率:

$$\tilde{S}_1 = \dot{U}_1 \dot{I}_{S1}^* = (R_1 + j\omega L_1) I_{S1}^2 + j\omega M \dot{I}_{S2} \dot{I}_{S1}^*$$

$$\tilde{S}_2 = \dot{U}_2 \dot{I}_{S2}^* = (R_2 + j\omega L_2) I_{S2}^2 + j\omega M \dot{I}_{S1} \dot{I}_{S2}^*$$

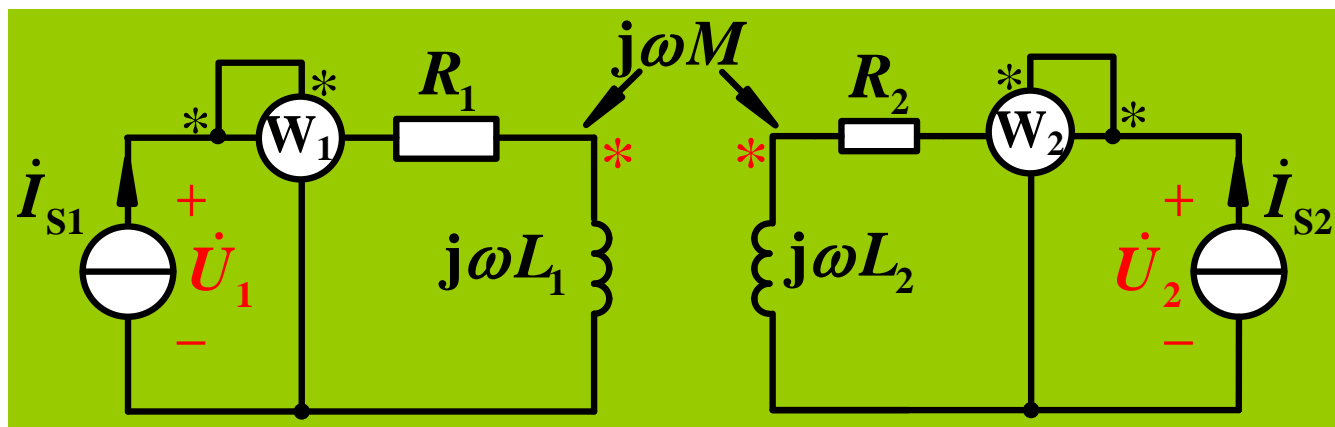
线圈1中互感耦合的复功率

线圈2中互感耦合的复功率

## § 10.1 耦合电感

### 三、耦合电感的功率

【例】求图示电路中各功率表的读数。



解： 假设  $\dot{I}_{S1} = I_{S1} \angle \theta_1$   $\dot{I}_{S2} = I_{S2} \angle \theta_2$

线圈1中互感  
耦合的复功率

$$j\omega M \dot{I}_{S2} \dot{I}_{S1}^* = j\omega M I_{S1} I_{S2} \angle (\theta_2 - \theta_1)$$

$$= j\omega M I_{S1} I_{S2} [\cos(\theta_2 - \theta_1) + j\sin(\theta_2 - \theta_1)]$$

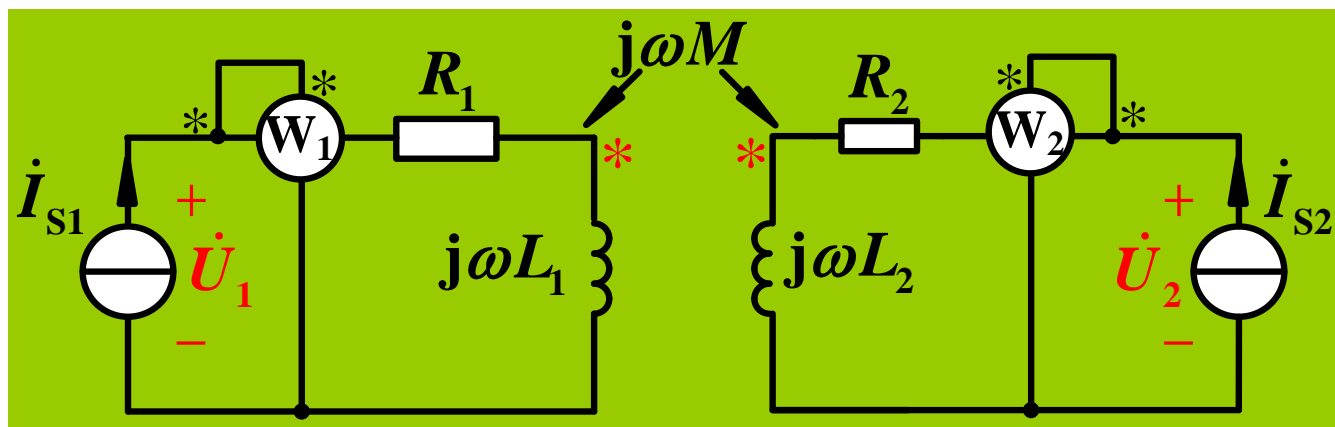
$$= \omega M I_{S1} I_{S2} [\sin(\theta_1 - \theta_2) + j\cos(\theta_1 - \theta_2)]$$



## § 10.1 耦合电感

### 三、耦合电感的功率

【例】求图示电路中各功率表的读数。



解： 假设  $\dot{I}_{S1} = I_{S1} \angle \theta_1$     $\dot{I}_{S2} = I_{S2} \angle \theta_2$

线圈2中互感  
耦合的复功率

$$j\omega M \dot{I}_{S1} \dot{I}_{S2}^* = j\omega M I_{S1} I_{S2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

$$= j\omega M I_{S1} I_{S2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$= \omega M I_{S1} I_{S2} [-\sin(\theta_1 - \theta_2) + j\cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

## § 10.1 耦合电感

### 三、耦合电感的功率

线圈1中互感耦合的复功率

$$j\omega M \dot{I}_{S2} \dot{I}_{S1}^* = \omega M I_{S1} I_{S2} \left[ \sin(\theta_1 - \theta_2) + j\cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

线圈2中互感耦合的复功率

$$j\omega M \dot{I}_{S1} \dot{I}_{S2}^* = \omega M I_{S1} I_{S2} \left[ -\sin(\theta_1 - \theta_2) + j\cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

有功功率

无功功率

- (1) 耦合电感耦合的复功率为虚部同号、实部异号，该特点是耦合电感本身的**电磁特性所决定**的。
- (2) 耦合电感耦合的复功率中有功功率异号，表明有功功率从一个端口进入，必从另一端口输出，说明耦合电感具有**非耗能特性**。
- (3) 耦合电感耦合的复功率中无功功率同号，表明互感耦合的复功率中无功功率对两个耦合线圈影响的性质相同，即：当**互感M**起同向耦合作用时，其储能特性与电感元件相同，使耦合电感中的磁能增加；当**互感M**起反向耦合作用时，其储能特性与电容元件相同，使耦合电感的储能减少。

