§ 14.2 运算电路

二、运算电路

2. 运算电路 （电路的复频域模型）

1. 动态电路中的电压、电流用象函数表示：

2. 电压源的电压和电流源的电流用象函数表示（包括受控源）：

3. 电路元件分别用 *s* 域模型替换。

线性动态电路 → 运算电路

基尔霍夫定律的s域形式

满足

元件伏安关系的s域形式

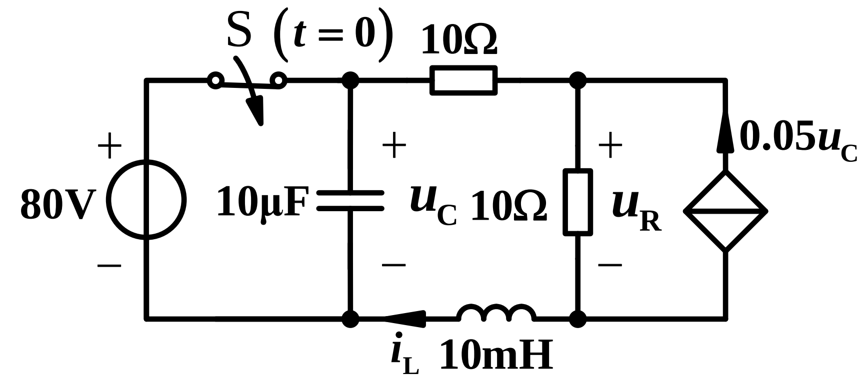
直接得到~~

线性微分方程 $\xrightarrow{\text{拉氏变换}}$ 代数方程

§ 14.2 运算电路

二、运算电路

【例】电路原已达稳态，试画出该电路的运算电路。



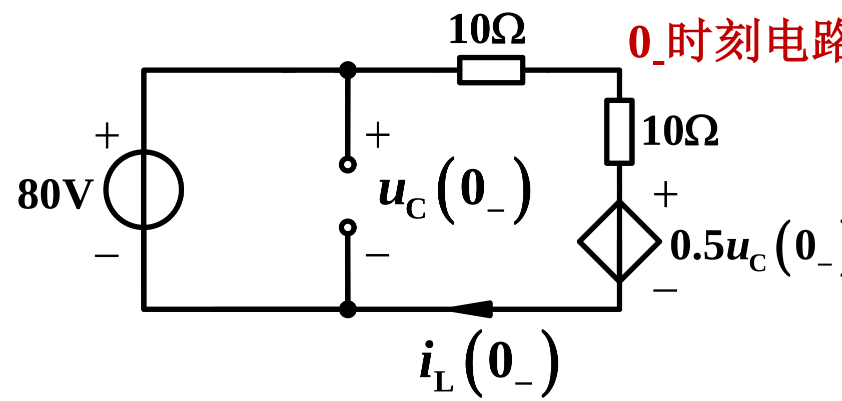
解：

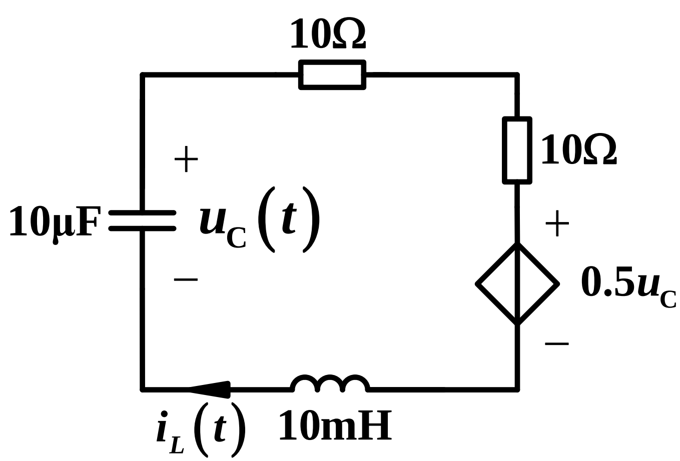
确定电容电压和电感电流**起始值**

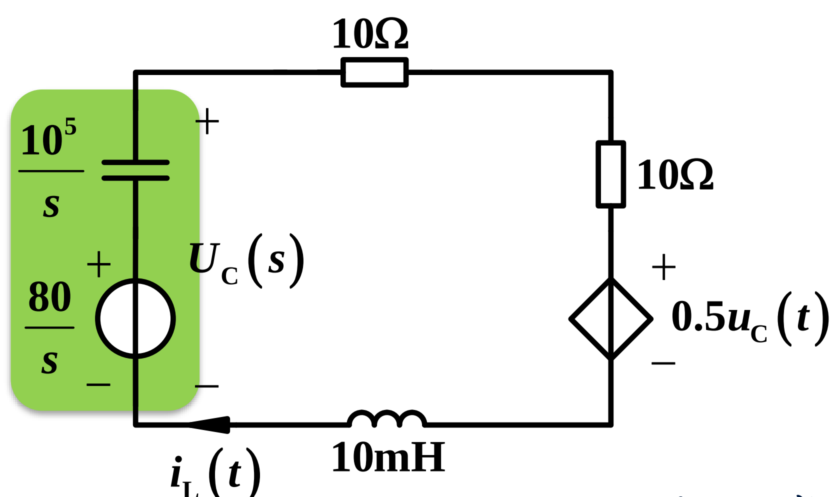
$$u_C(0_-) = 80\ \text{V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{80 - 0.5u_C(0_-)}{10 + 10} = 2\ \text{A}$$

0_时刻电路



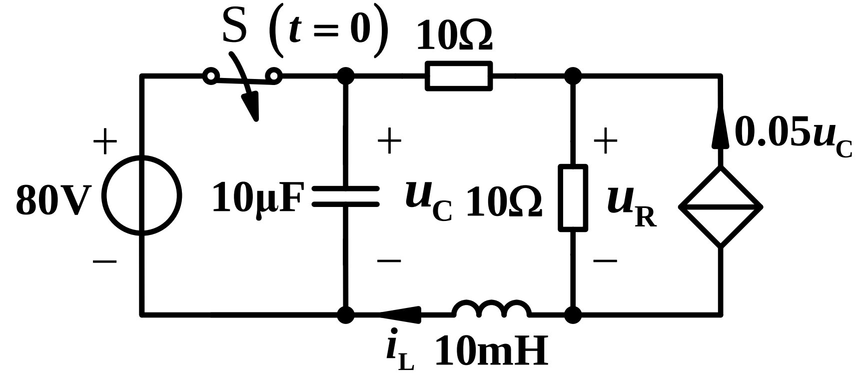




§ 14.2 运算电路

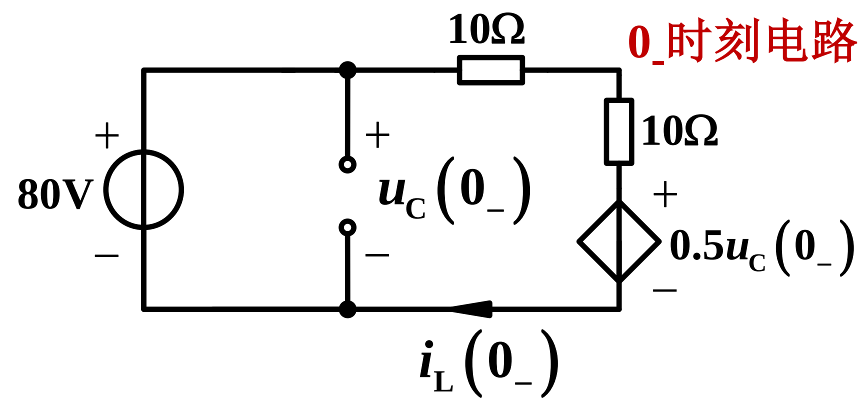
二、运算电路

【例】电路原已达稳态，试画出该电路的运算电路。



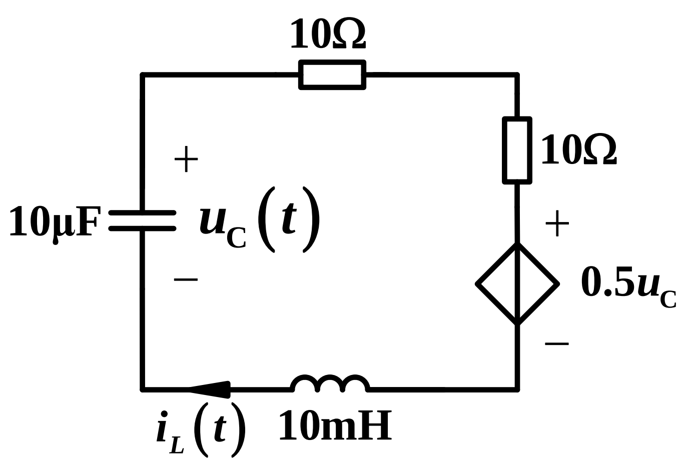
解：

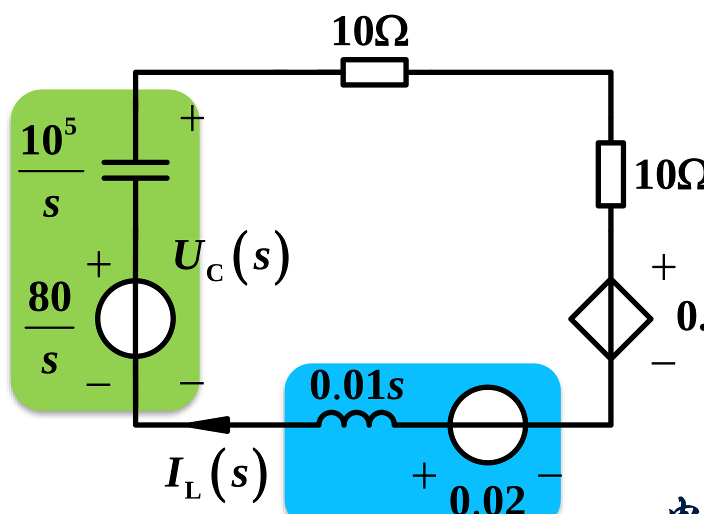
确定电容电压和电感电流**起始值**



$$u_C(0_-)=80\ \text{V}$$

$$i_L(0_-)=\frac{80-0.5u_C(0_-)}{10+10}=2\ \text{A}$$

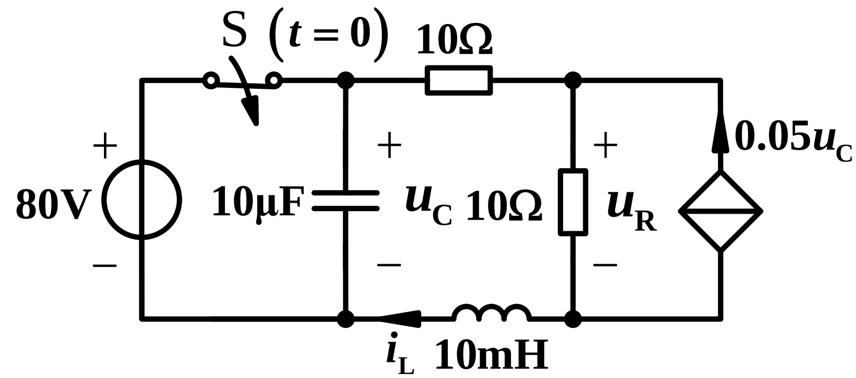




§ 14.2 运算电路

二、运算电路

【例】电路原已达稳态，试画出该电路的运算电路。



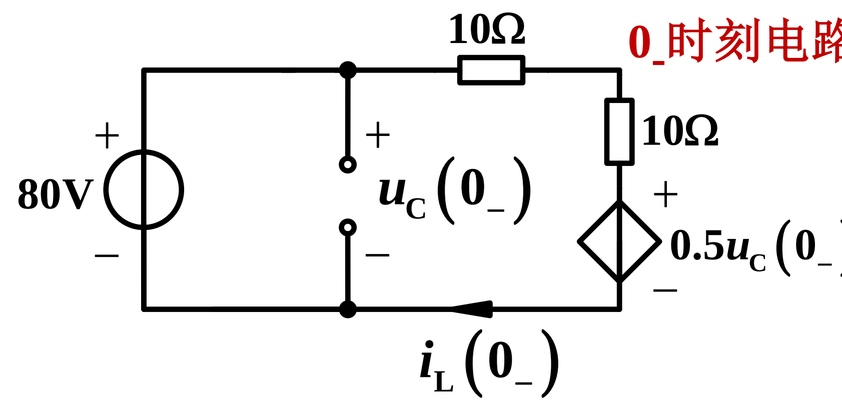
解：

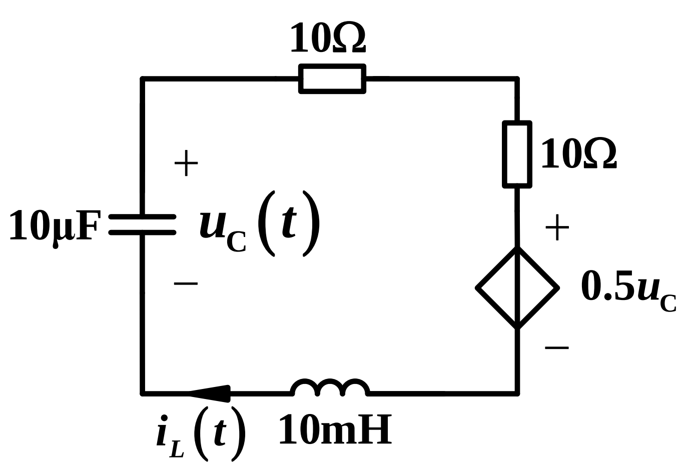
确定电容电压和电感电流**起始值**

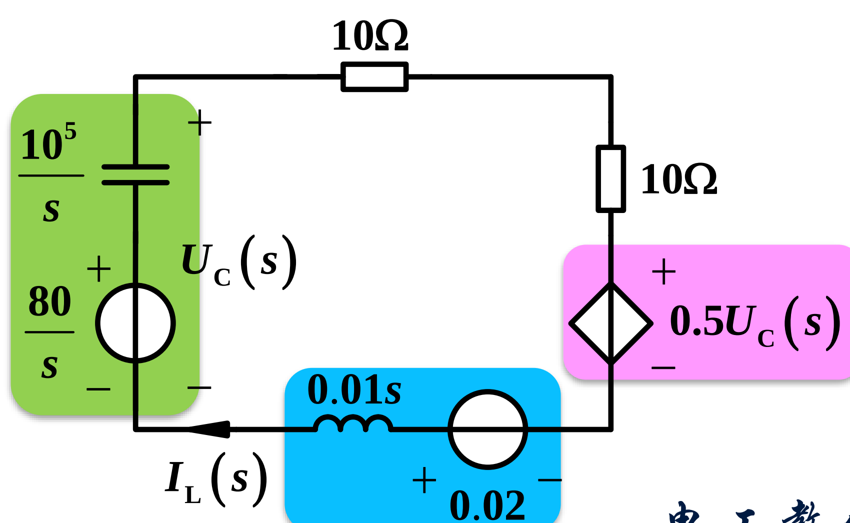
$$u_C(0_-) = 80\ \text{V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{80 - 0.5u_C(0_-)}{10+10} = 2\ \text{A}$$

0_时刻电路



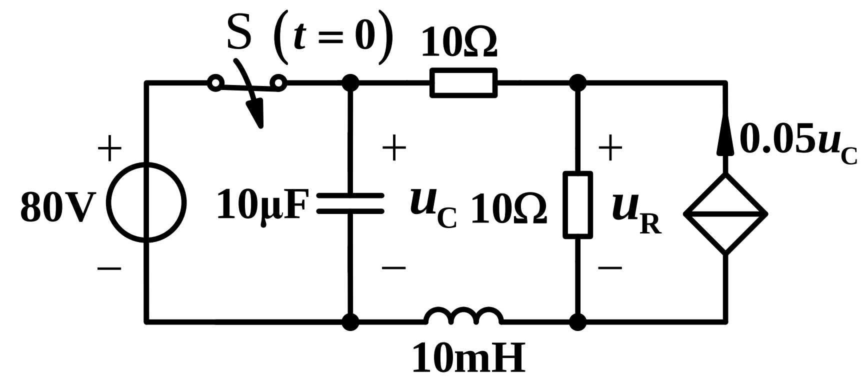




§ 14.2 运算电路

二、运算电路

【例】电路原已达稳态，试画出该电路的运算电路。

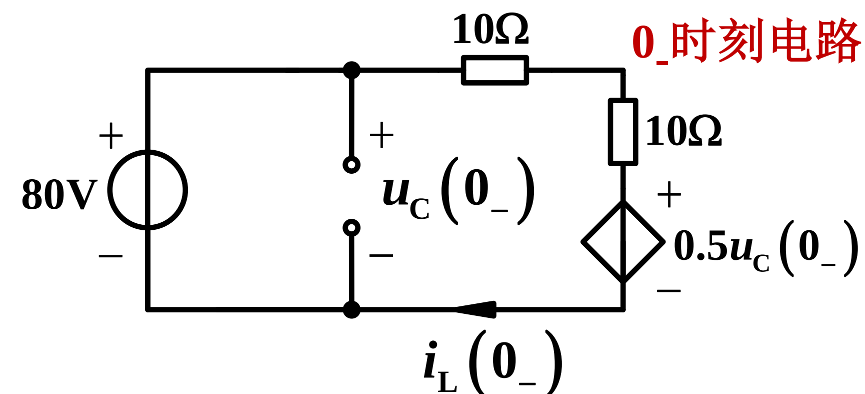


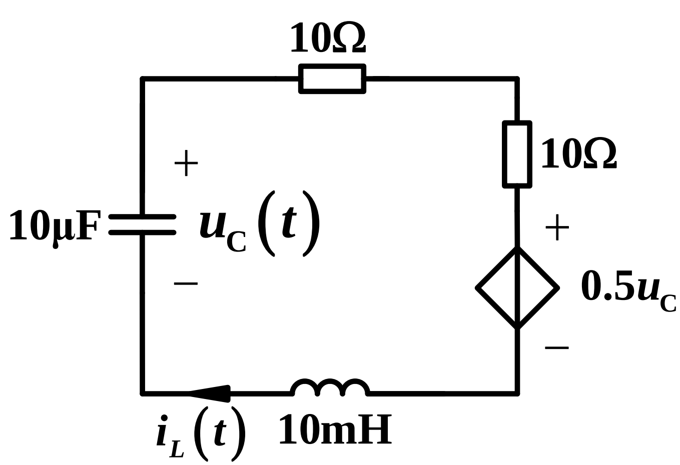
解：

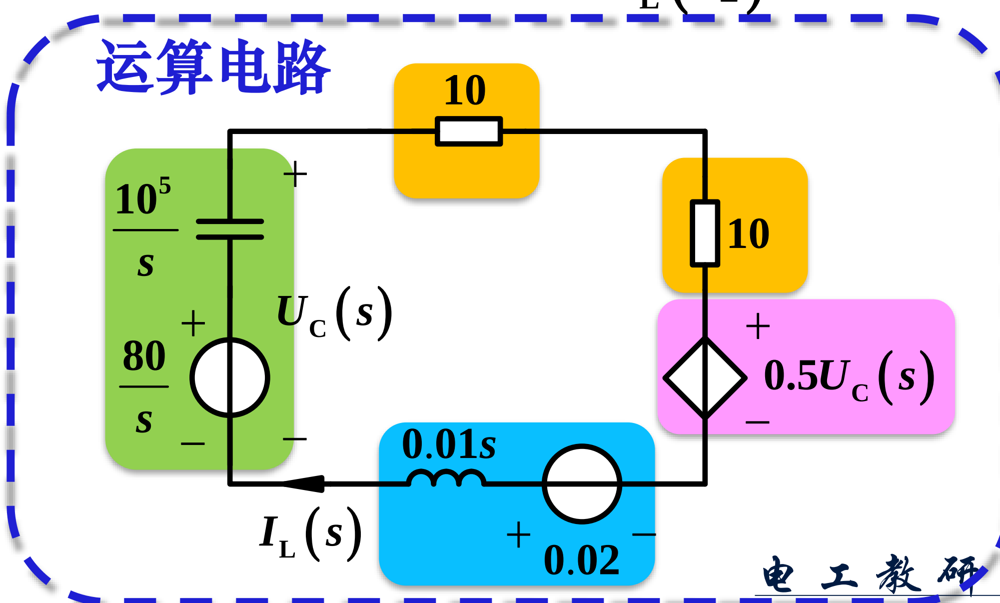
确定电容电压和电感电流**起始值**

$$u_C(0_-) = 80\ \text{V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{80 - 0.5u_C(0_-)}{10+10} = 2\ \text{A}$$





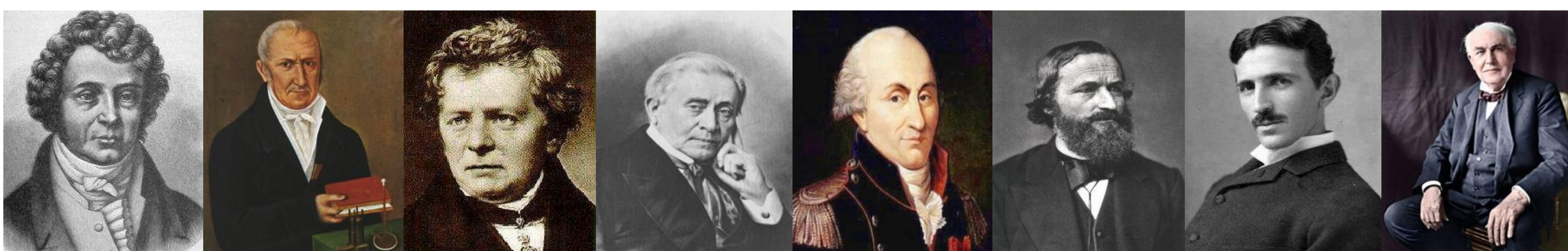


电 路 理 论

Principles of Electric Circuits

第十四章　线性动态电路的复频域分析

§ 14.3　线性动态电路的复频域分析法



§ 14.3 线性动态电路的复频域分析法

复频域分析法的一般步骤

（1）由换路前的电路计算$u_C(0_-)$, $i_L(0_-)$;

（2）画运算电路;

注意运算阻抗的表示和附加电源的作用

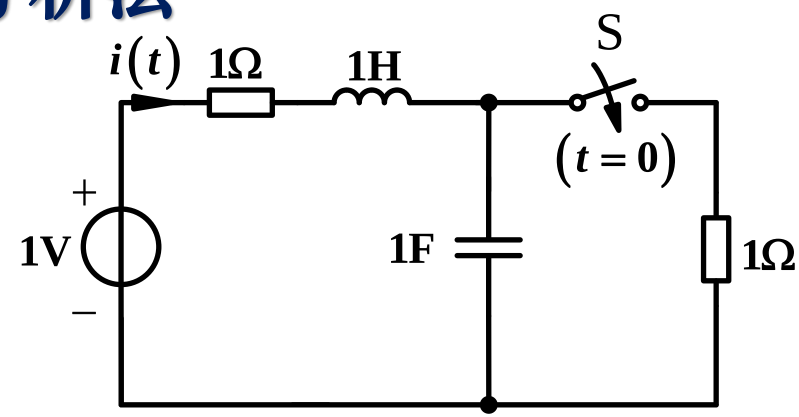
（3）应用前面学习的各种计算方法求响应的象函数 ；

（4）将响应的象函数部分分式展开。

（5）通过拉氏反变换求得响应的原函数（时域形式）。

§ 14.3 线性动态电路的复频域分析法

【例】 电路原已达稳态，试用复频域分析法求解电流$i(t)$。



解：（1）计算起始值

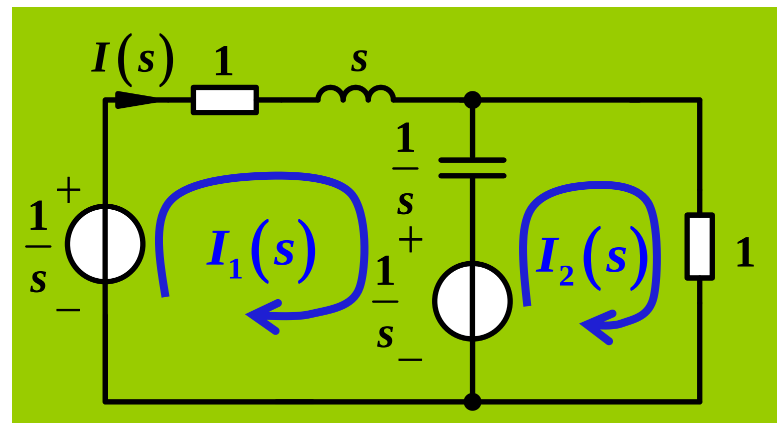
$$u_C(0_-)=1\text{V}$$

$$i_L(0_-)=0\text{A}$$

（2）画运算电路

$$sL=1s$$

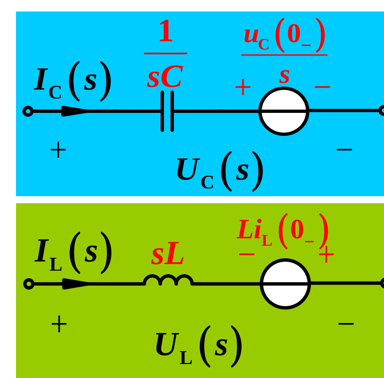
$$\frac{1}{sC}=\frac{1}{s\times 1}=\frac{1}{s}$$



运算电路

（3）应用网孔电流法

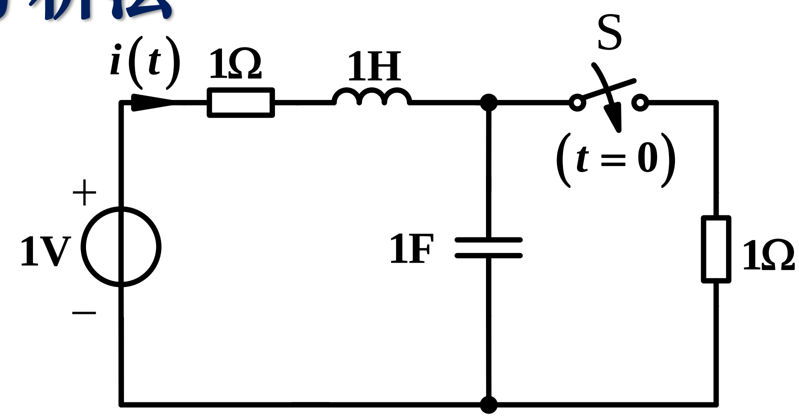
$$\begin{cases}(1+s+\frac{1}{s})I_1(s)-\frac{1}{s}I_2(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}=0\\ -\frac{1}{s}I_1(s)+(1+\frac{1}{s})I_2(s)=\frac{1}{s}\end{cases}$$



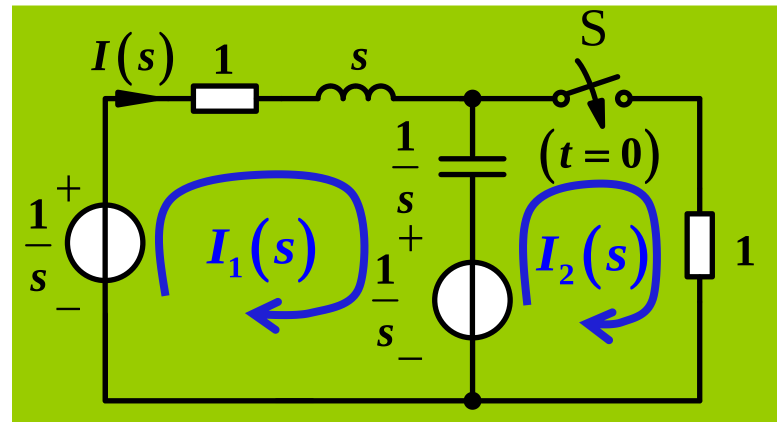
分析法

二、常用函数的拉普拉斯变换

原函数	象函数	原函数	象函数
$\delta(t)$	1	$f(t)e^{-\alpha t}$	$F(s+\alpha)$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{n!}t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$



解得 $I_1(s) = I(s) = \dfrac{1}{s(s^2+2s+2)}$



运算电路

（4）拉氏反变换求原函数

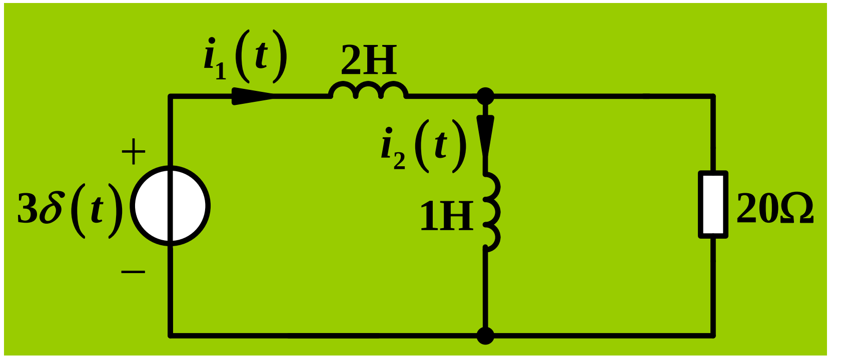
$$I(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s\left[(s+1)^2+1^2\right]} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - \frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right)$$

拉氏反变换

$$i(t) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t)\quad (t>0)$$

§ 14.3 线性动态电路的复频域分析法

【例】 电路原已达稳态，试求零状态响应$i_1(t)$和$i_2(t)$。



解：

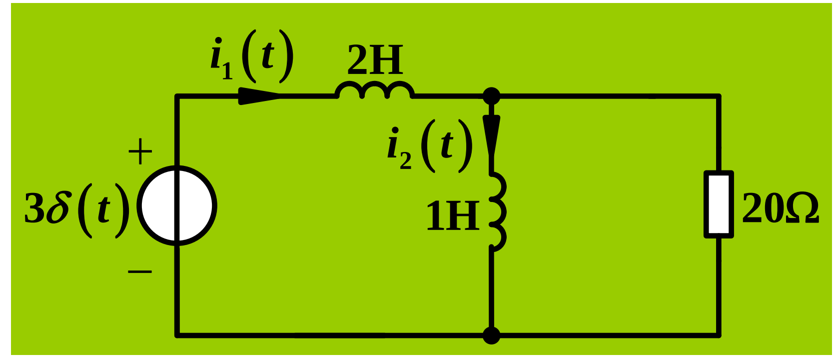
分析

（1）电感电流会发生跃变，求解初始值复杂；

（2）$t=\infty$时，电感L_1和L_2均短路，出现稳态环流，稳态值求解需借助磁链守恒或者其他方法。

§ 14.3 线性动态电路的复频域分析法

【例】 电路原已达稳态，试求零状态响应$i_1(t)$和$i_2(t)$。

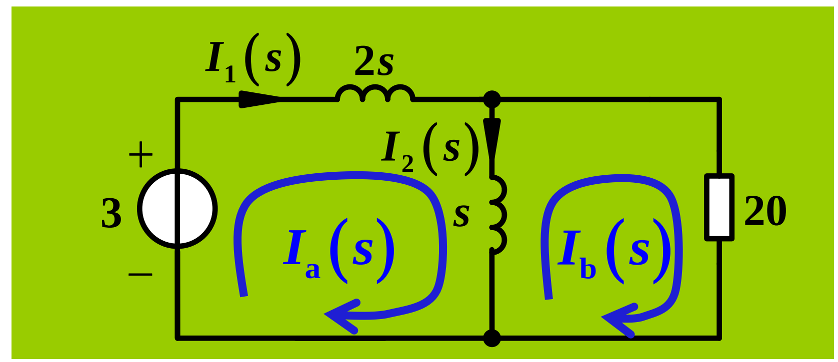


解：

（1）求起始值

零状态 → $i_1(0_-)=i_2(0_-)=0$

（2）画运算电路



（3）应用网孔电流法

$$\begin{cases}(2s+s)I_a(s)-sI_b(s)=3\\ -sI_a(s)+(s+20)I_b(s)=0\end{cases}$$

解得

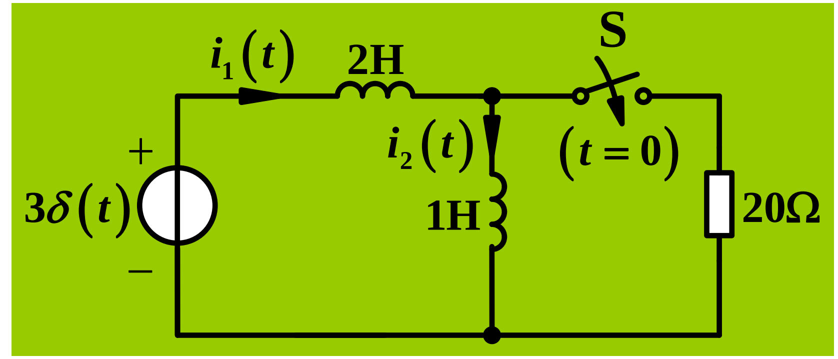
$$\begin{cases}I_a(s)=\dfrac{1.5s+30}{s(s+30)}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{0.5}{s+30}\\ I_b(s)=\dfrac{1.5}{s+30}\end{cases}$$

拉氏反变换 →

$i_a(t)=1+0.5e^{-30t}\ \mathrm{A}\quad (t>0)$

$i_b(t)=1.5e^{-30t}\ \mathrm{A}\quad (t>0)$

§ 14.3 线性动态电路的复频域分析法



【例】 电路原已达稳态，试求零状态响应$i_1(t)$和$i_2(t)$ 。

解：

$$i_1(t)=i_a(t)=1+0.5e^{-30t}\ \text{A}\quad (t>0)$$

$$i_2(t)=i_a(t)-i_b(t)=1-e^{-30t}\ \text{A}\quad (t>0)$$

不论电路是否发生**跃变**，

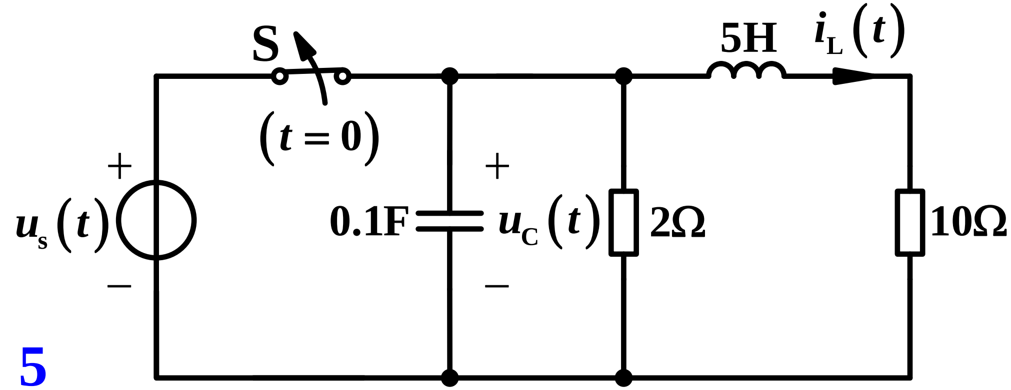
不论电路是否存在**稳态环流**，

复频域分析法过程完全相同，**无需特殊处理**。

复频域分析法完胜啊~~~

Perfect!!

【例】 已知电压源电压 $u_s(t)=20\cos 2t$ V， 开关打开前电路已达稳态，$i_L(0_-)=1$A、 $u_C(0_-)=20$V，试求 $t\geq 0$ 时的 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$。



解：

正弦激励问题

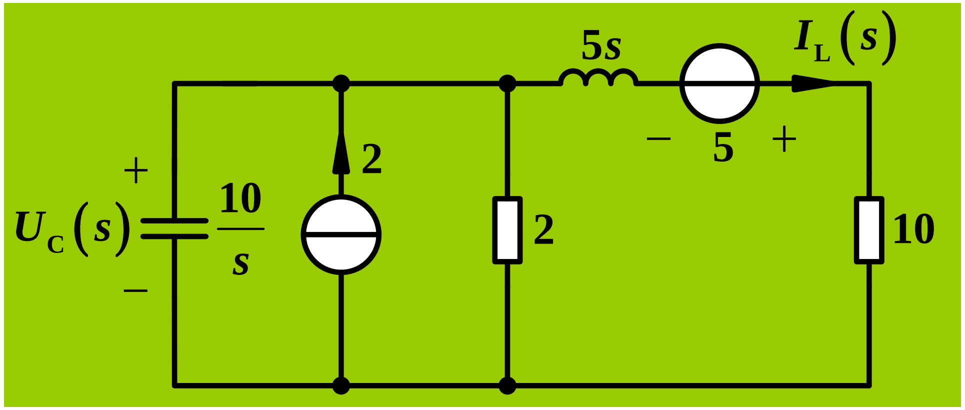
（1）画运算电路

（2）求象函数

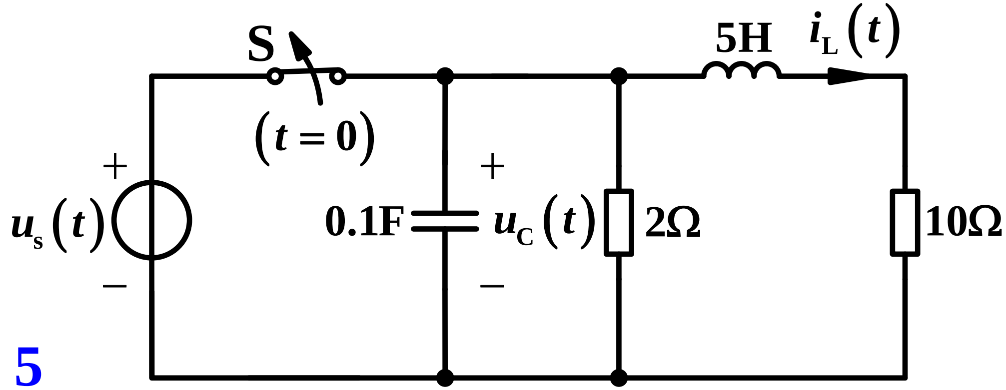
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{10}+\frac{1}{10+5s}\right)U_C(s)=2-\frac{5}{10+5s}$$

$$U_C(s)=\frac{20s+30}{s^2+7s+12}$$

$$I_L(s)=\frac{U_C(s)+5}{10+5s}$$



【例】 已知电压源电压$u_s(t)=20\cos 2t$ V，开关打开前电路已达稳态，$i_L(0_-)=1$A、 $u_C(0_-)=20$V，试求$t\geq 0$时的$i_L(t)$和 $u_C(t)$。



解：

正弦激励问题

（1）画运算电路

（2）求象函数

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{10}+\frac{1}{10+5s}\right)U_C(s)=2-\frac{5}{10+5s}$$

（3）求时域响应

$$U_C(s)=\frac{20s+30}{s^2+7s+12}=-\frac{30}{s+3}+\frac{50}{s+4}$$

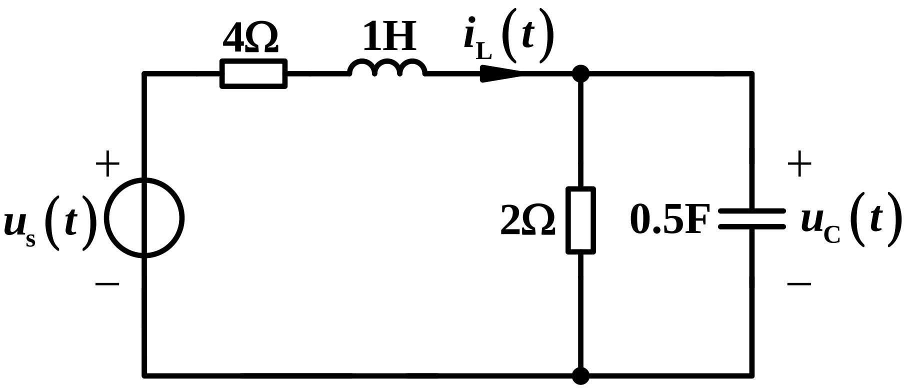
$$u_C(t)=-30e^{-3t}+50e^{-4t}\,(\mathrm{V})\quad(t\geq 0)$$

$$I_L(s)=\frac{U_C(s)+5}{10+5s}=\frac{6}{s+3}+\frac{5}{s+4}$$

$$i_L(t)=6e^{-3t}-5e^{-4t}\,(\mathrm{A})\quad(t\geq 0)$$

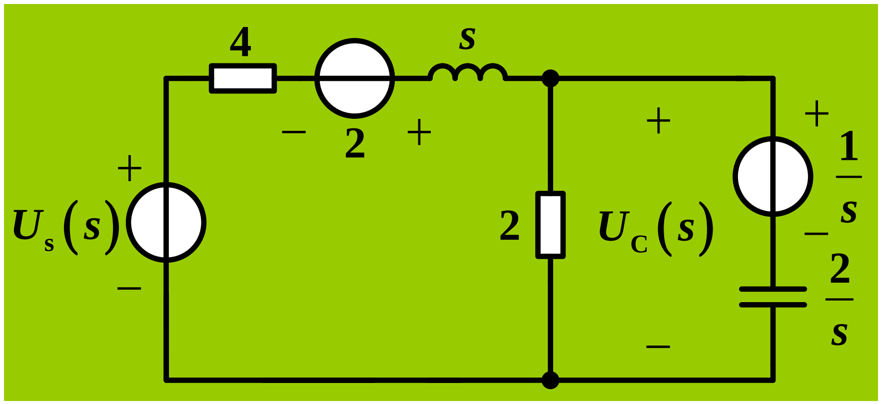
§ 14.3 线性动态电路的复频域分析法

【例】已知电压源电压$u_s(t)=2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$ V，$i_L(0_-)=2$A、$u_C(0_-)=1$V。试求$t\geq 0$时的电容电压$u_C(t)$。



解：

（1）画运算电路



（2）求象函数

$$U_S(s)=2\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}\right]$$

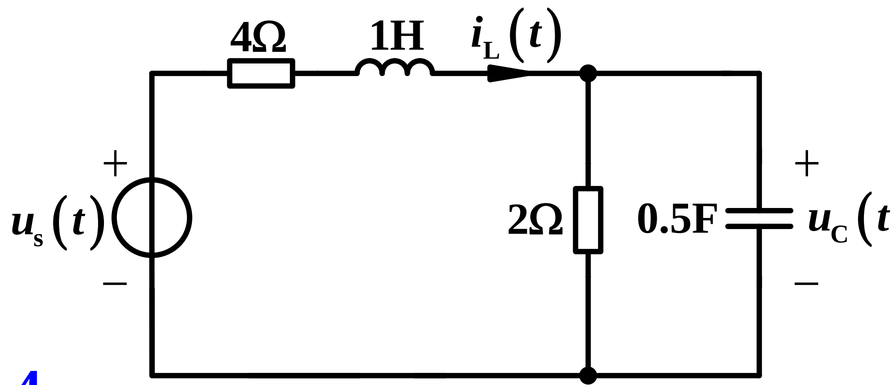
列写节点电压方程

$$\left(\frac{1}{s+4}+\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)U_C(s)=\frac{U_S(s)+2}{s+4}+\frac{1/s}{2/s}$$

$$U_C(s)=\frac{4/s+\mathrm{e}^{-s}\cdot 4/s+s+8}{(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{s^2+8s+4}{s(s+2)(s+3)}-\frac{4}{s(s+2)(s+3)}\mathrm{e}^{-s}$$

【例】 已知电压源电压$u_s(t)$ =2[$\varepsilon(t)$-$\varepsilon(t-1)$] V，$i_L(0_-)$=2A、$u_C(0_-)$ =1V。试求$t\geq0$时的电容电压$u_C(t)$ 。



解:

$$U_C(s)=\frac{4/s+e^{-s}\cdot 4/s+s+8}{(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{s^2+8s+4}{s(s+2)(s+3)}-\frac{4}{s(s+2)(s+3)}e^{-s}$$

$$=\frac{2/3}{s}+\frac{4}{s+2}-\frac{11/3}{s+3}-\left[\frac{2/3}{s}-\frac{2}{s+2}+\frac{4/3}{s+3}\right]e^{-s}$$

拉氏反变换

$$u_C(t)=\left(\frac{2}{3}+4e^{-2t}-\frac{11}{3}e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

$$-\left(\frac{2}{3}-2e^{-2(t-1)}+\frac{4}{3}e^{-3(t-1)}\right)\varepsilon(t-1)(\text{V})$$

电 路 理 论

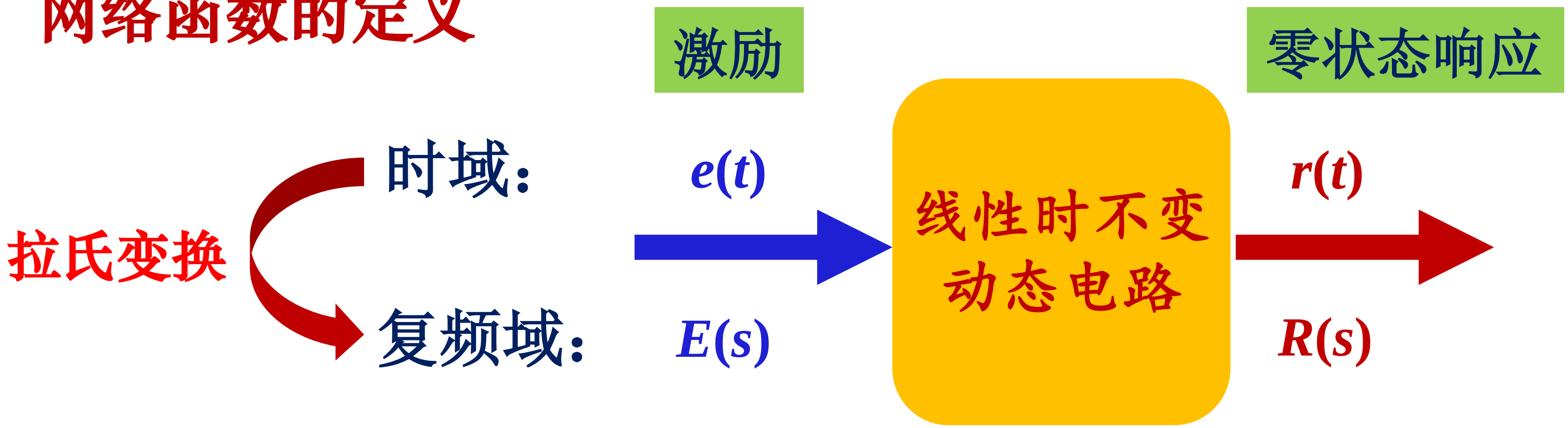
Principles of Electric Circuits

第十四章 线性动态电路的复频域分析

§ 14.4 网络函数

§ 14.4 网络函数

一、网络函数的定义



网络函数： $H(s) \overset{def}{=} \dfrac{\text{零状态响应的象函数}}{\text{激励的象函数}} = \dfrac{R(s)}{E(s)}$

说明

（1）由于激励$E(s)$可以是**电压源或电流源**，响应$R(s)$可以是**电压或电流**，故 s 域网络函数可以是**驱动点阻抗**(导纳)、**转移阻抗**(导纳)、**电压转移函数**或**电流转移函数**；

（2）网络函数$H(s)$仅与电路的结构和原件参数有关，反映了电路的固有动态性能；

§ 14.4 网络函数

一、网络函数的定义

激励　　零状态响应

拉氏变换

时域：　$e(t)$ → 线性时不变动态电路 → $r(t)$

复频域：　$E(s)$ 　　　　$R(s)$

网络函数：$H(s)\overset{def}{=}\dfrac{\text{零状态响应的象函数}}{\text{激励的象函数}}=\dfrac{R(s)}{E(s)}$

说明

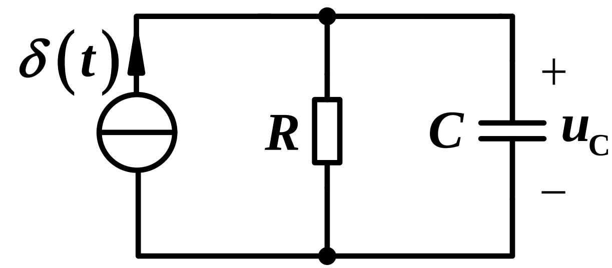
（3）若$E(s)=1$，则$R(s)=H(s)$，即网络函数是**电路的冲激响应** $h(t)$ 的象函数；

（4）由网络函数求取**任意激励的零状态响应**。

$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)} \longrightarrow R(s)=H(s)E(s) \xrightarrow[\text{反变换}]{\text{拉氏}} r(t)$$

§ 14.4 网络函数

【例】 求冲激响应$u_C(t)$。

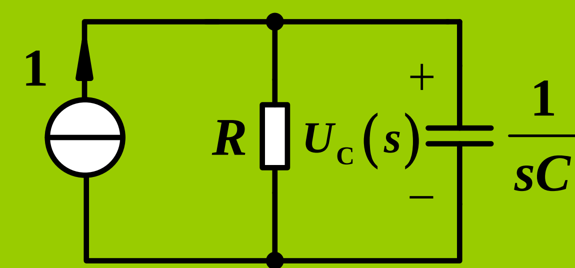


解：

（1）画运算电路

冲激响应为零状态响应

$u_C(0_-)=0$



（2）求网络函数

$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{U_C(s)}{1}=\boxed{\frac{\frac{1}{sC}\cdot R}{\frac{1}{sC}+R}}$$

驱动点阻抗$Z(s)$

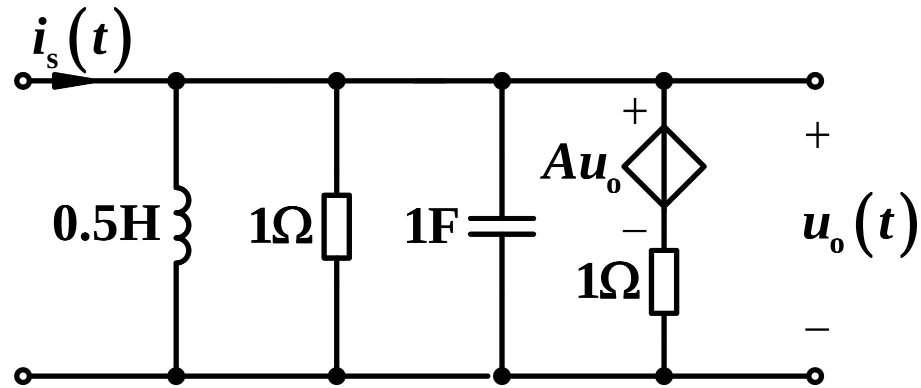
$$=\frac{R}{sRC+1}=\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

拉氏反变换

$$\boxed{h(t)=u_C(t)=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)}$$

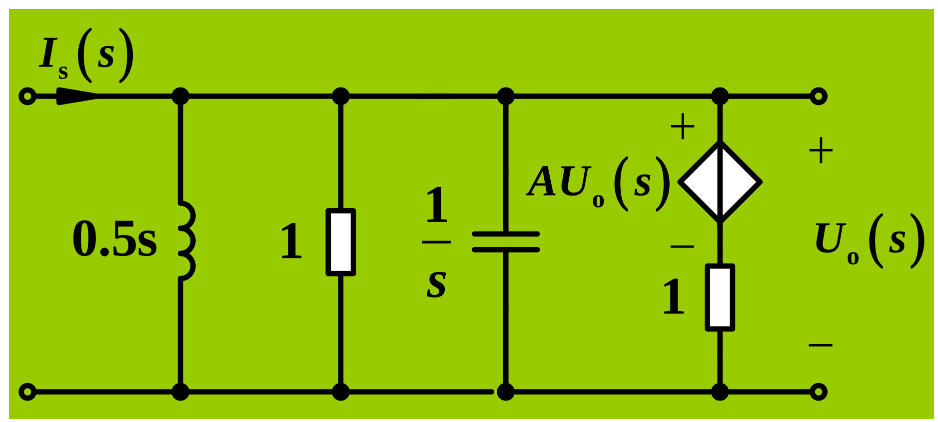
§ 14.4 网络函数

【例】 求图示电路的转移阻抗函数 $Z_T(s)=\dfrac{U_o(s)}{I_s(s)}$。



解：

画运算电路



由节点电压方程

$$\left(\frac{2}{s}+s+2\right)U_o(s)=I_s(s)+AU_o(s)$$

解之得：$Z_T(s)=\dfrac{U_o(s)}{I_s(s)}$

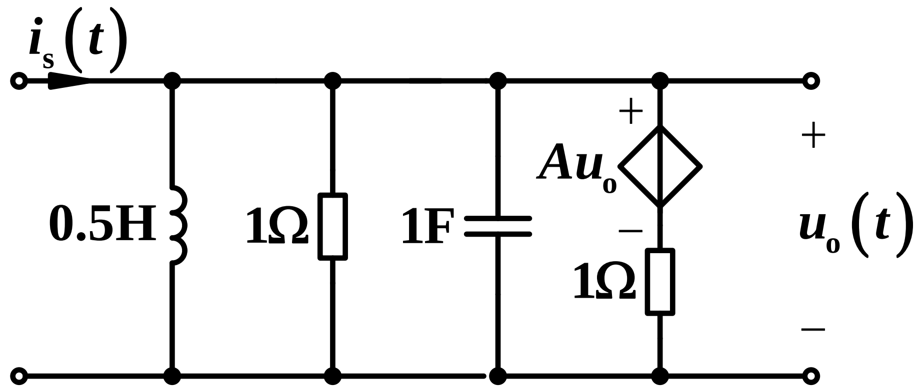
$$=\frac{s}{s^2+(s-\mathrm{A})s+2}$$

§ 14.4 网络函数

【例】 求图示电路的转移阻抗函数 $Z_{\mathrm{T}}(s)=\dfrac{U_{\mathrm{o}}(s)}{I_{\mathrm{s}}(s)}$。

解：

画运算电路



由节点电压方程

$$\left(\frac{2}{s}+s+2\right)U_{\mathrm{o}}(s)=I_{\mathrm{s}}(s)+AU_{\mathrm{o}}(s)$$

解之得：$Z_{\mathrm{T}}(s)=\dfrac{U_{\mathrm{o}}(s)}{I_{\mathrm{s}}(s)}=\dfrac{s}{s^2+(s-A)s+2}$

$|s-\mathrm{A}|>2\sqrt{2}$ $Z_{\mathrm{T}}(s)$分母$s^2+(s-A)+2=0$为两个不等实根

$|s-\mathrm{A}|=2\sqrt{2}$ $Z_{\mathrm{T}}(s)$分母$s^2+(s-A)+2=0$为两个相等实根

$|s-\mathrm{A}|<2\sqrt{2}$ $Z_{\mathrm{T}}(s)$分母$s^2+(s-A)+2=0$为一对共轭复根

§ 14.4 网络函数

二、网络函数的极零点图

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{H_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$=\boxed{H_0}\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-z_j)}$$

实数比例因子

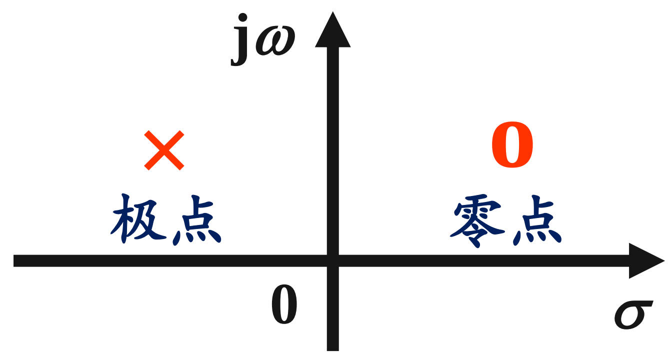
当 $s=z_i$ 时，$H(s)=0$，称 z_i 为零点；
若 z_i 为重根，称为重零点。

当 $s\to p_j$ 时，$H(s)\to\infty$，称 p_j 为极点；
若 p_j 为重根，称为重极点。

复平面（ s 平面）

$$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$$

标注 → z_i，p_j为复数。



零极点分布图

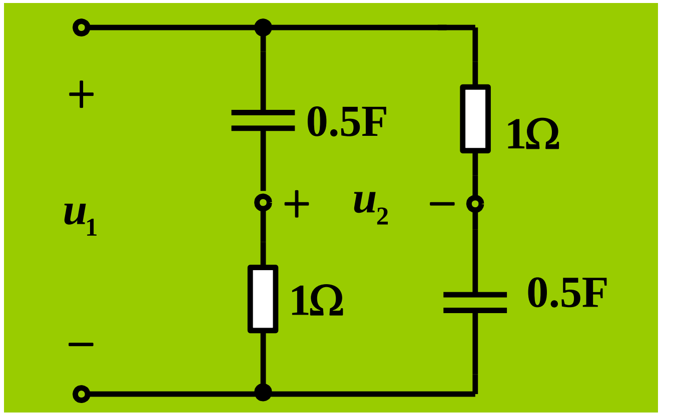
§ 14.4 网络函数

【例】试求：（1）电路的电压转移函数$U_2(s)/U_1(s)$及其零极点图；

（2）电路的单位阶跃响应和冲激响应 。

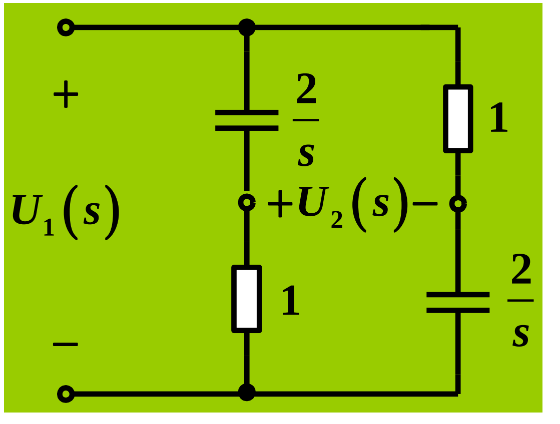
解：

画运算电路



$$U_2(s)=\frac{1}{1+\frac{2}{s}}U_1(s)-\frac{\frac{2}{s}}{1+\frac{2}{s}}U_1(s)$$

$$=\frac{s-2}{s+2}U_1(s)$$



电路的电压转移函数

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{s-2}{s+2}=1-\frac{4}{s+2}$$

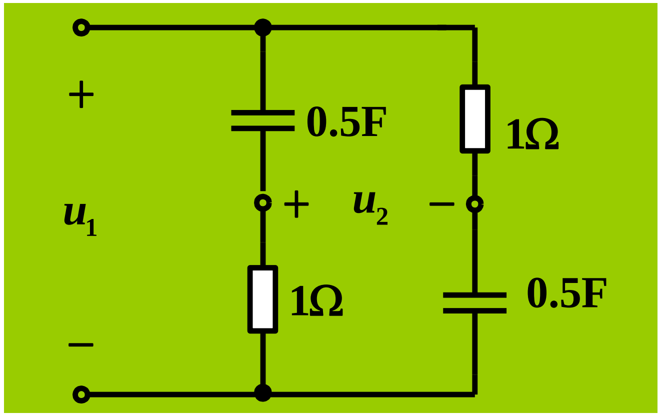
零点 → $z=2$

极点 → $p=-2$

§ 14.4 网络函数

【例】 试求： （1）电路的电压转移函数$U_2(s)/U_1(s)$及其零极点图；

（2）电路的单位阶跃响应和冲激响应 。



解：

画运算电路

$$U_2(s)=\frac{1}{1+\frac{2}{s}}U_1(s)-\frac{\frac{2}{s}}{1+\frac{2}{s}}U_1(s)$$

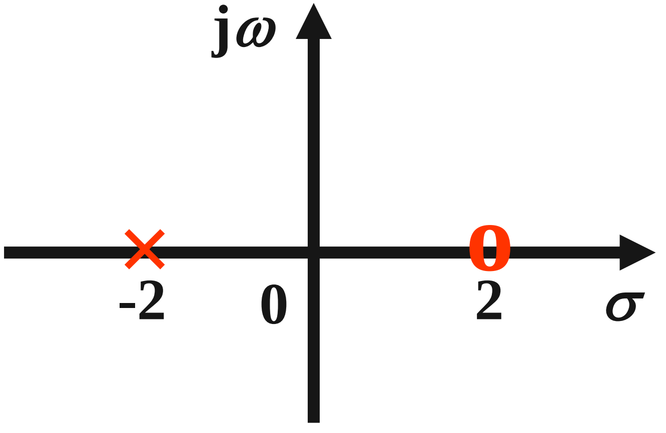
$$=\frac{s-2}{s+2}U_1(s)$$

电路的电压转移函数

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{s-2}{s+2}=1-\frac{4}{s+2}$$

零点 → $z=2$

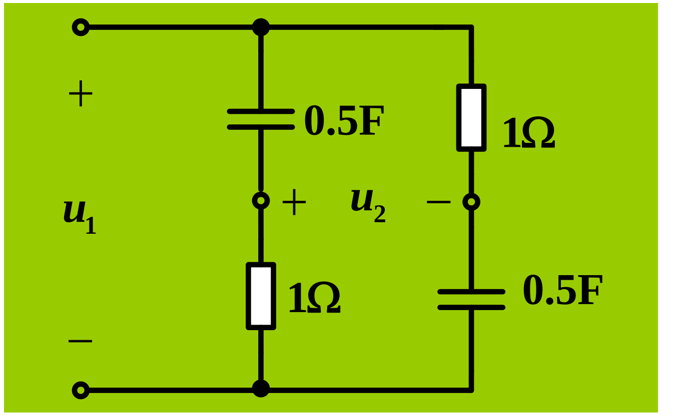
极点 → $p=-2$



§ 14.4 网络函数

【例】试求：（1）电路的电压转移函数$U_2(s)/U_1(s)$及其零极点图；

（2）电路的单位阶跃响应和冲激响应 。



解：

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{s-2}{s+2}=1-\frac{4}{s+2}$$

电路的冲激响应

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=\delta(t)-4e^{-2t}\varepsilon(t)\ (\mathrm{V})$$

电路单位阶跃响应的象函数

$$S(s)=H(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{s-2}{s(s+2)}=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s+2}$$

电路单位阶跃响应

$$s(t)=\mathscr{L}^{-1}[S(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}+\frac{2}{s+2}\right]=-\varepsilon(t)+2e^{-2t}\varepsilon(t)\quad(\mathrm{V})$$

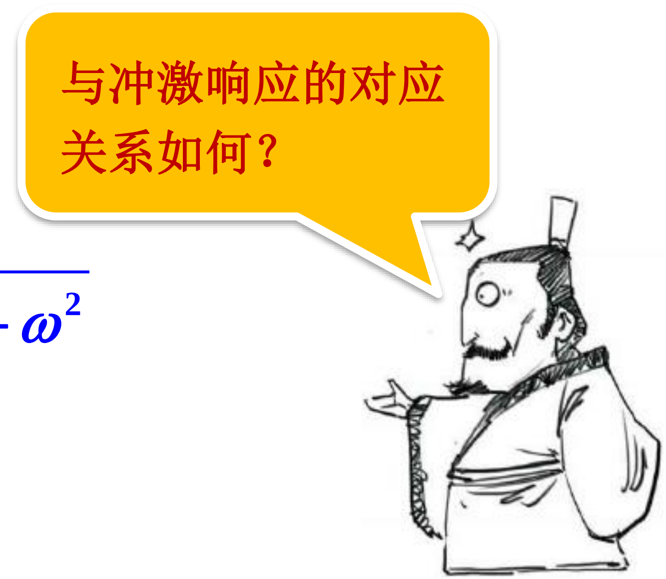
三、极点分布与冲激响应的关系

把网络函数$H(s)$按部分分式展开：$H(s)=\sum_{i=1}^{n}H_i(s)$

冲激响应：$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}H_i(s)\right]$

★讨论

$H_i(s)$
- 实数极点 $H_i(s)=\dfrac{A_i}{s+\alpha}$
- 共轭复数极点 $H_i(s)=\dfrac{A_i}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
- 纯虚数极点 $H_i(s)=\dfrac{A_i}{s^2+\omega^2}$

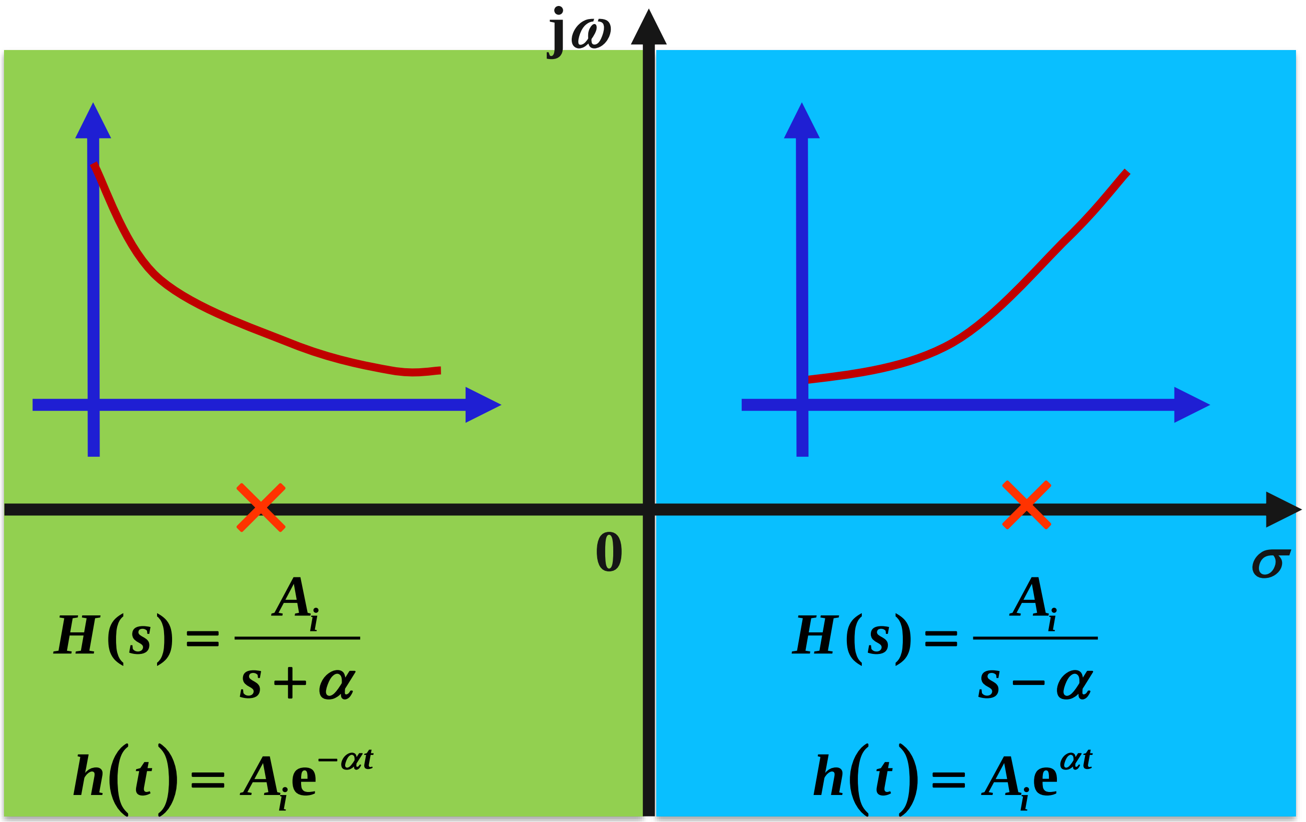


三、极点分布与冲激响应的关系

★讨论

情况1：$H_i(s)=\dfrac{A_i}{s+\alpha}$ $\alpha>0$

实轴上为一阶以上极点时，$h_i(t)$随着$t\to\infty$的变化趋势与一阶极点情况相同。



稳定区域　　　　不稳定区域

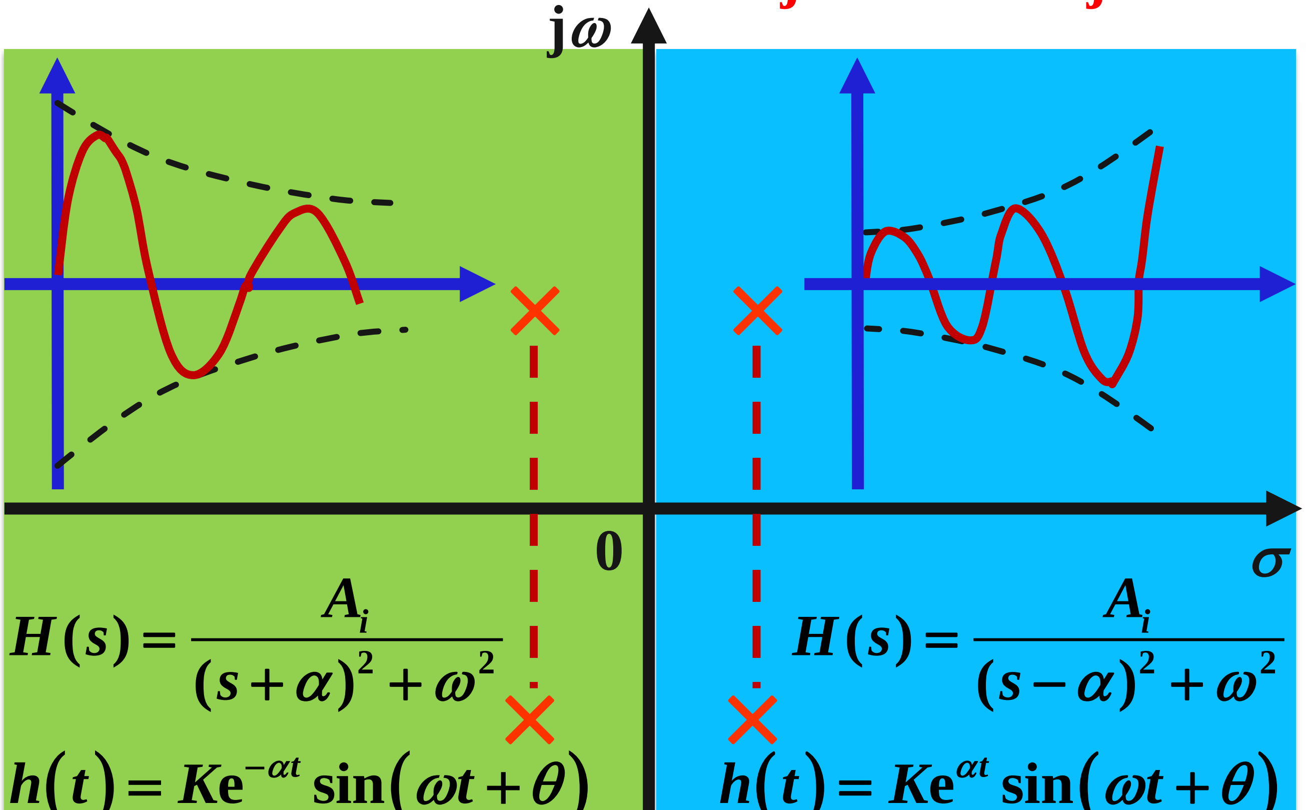
§ 14.4 网络函数

三、极点分布与冲激响应的关系

★讨论

存在二阶及以上共轭复数极点时，$h_i(t)$ 随着 $t\to\infty$ 的变化趋势与一阶极点情况相同。

情况2：$H_i(s)=\dfrac{A_i}{s^2+\omega^2}=\dfrac{A_i}{s+\alpha-\mathrm{j}\omega}+\dfrac{A_i^*}{s+\alpha+\mathrm{j}\omega}\quad \alpha>0$



稳定区域　　　　不稳定区域

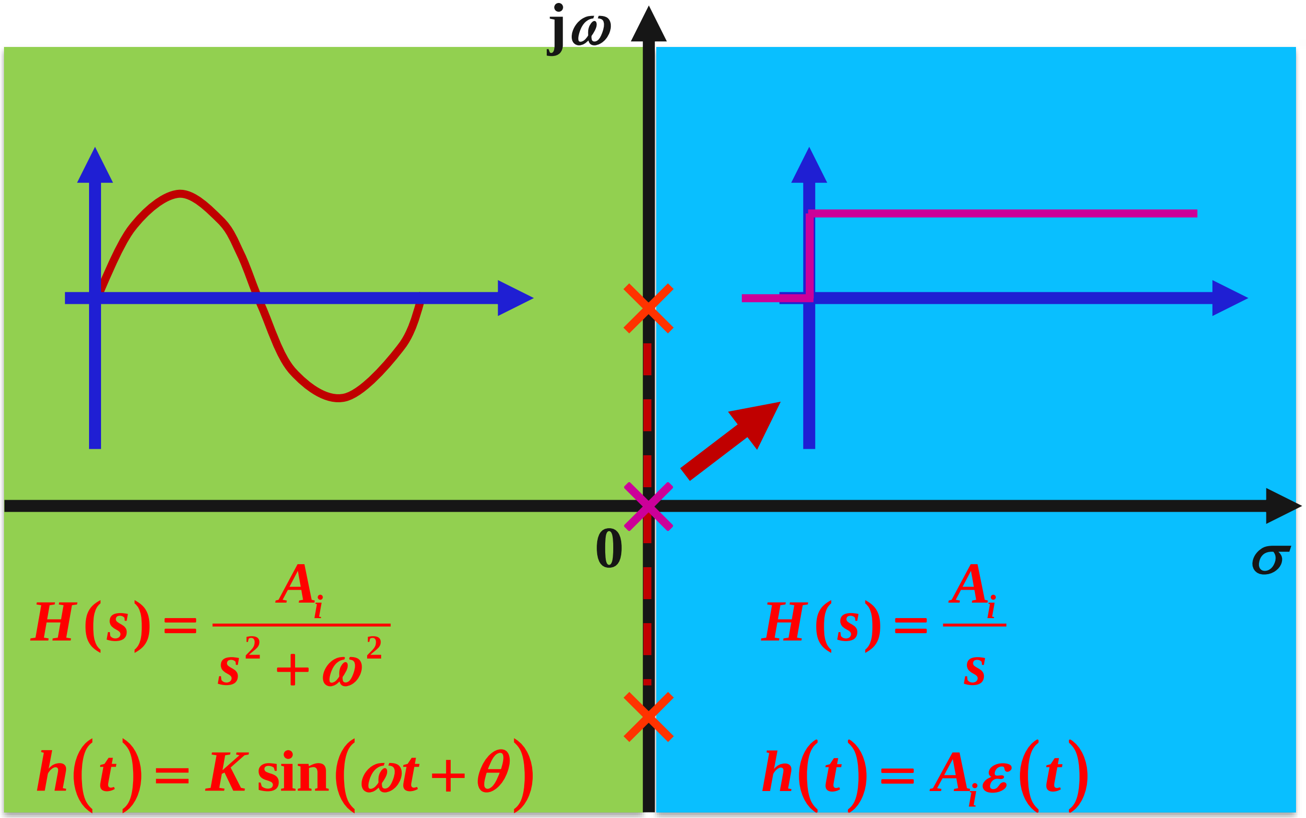
§ 14.4 网络函数

虚轴上存在二阶及以上极点时，$h_i(t)$随着$t\to\infty$，将趋近于无穷大。

三、极点分布与冲激响应的关系

★讨论

情况3：$H_i(s)=\dfrac{A_i}{s^2+\omega^2}=\dfrac{A_i}{s-\mathrm{j}\omega}+\dfrac{A_i^*}{s-\mathrm{j}\omega}$



临界稳定

§ 14.4 网络函数

三、极点分布与冲激响应的关系

★结论

稳定电路： 极点全部位于左半平面的电路。

临界稳定电路： 具有虚轴上一阶极点且其他极点全部位于左半平面的电路。

不稳定电路： 具有虚轴上二阶及以上极点或右半平面极点的电路。

一般情况下

假设$D(s)$和$Q(s)$具有单根

$H(s)$的极点分布　网络激励

$$R(s)=H(s)\cdot E(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\cdot\frac{P(s)}{Q(s)}=\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}}+\boxed{\sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{s-q_j}}$$

有关　有关

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{p_i t}+\sum_{j=1}^{m}B_j e^{q_j t}$$

自由分量　强迫分量