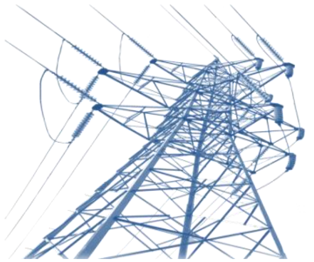


工程电磁场

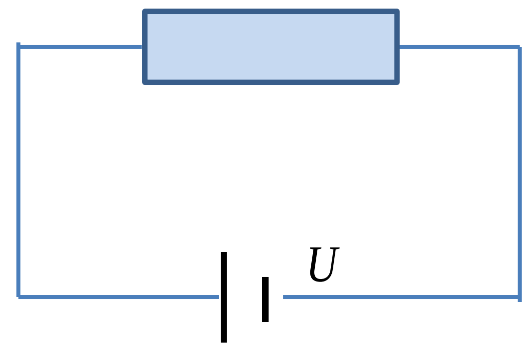
稻叶先生

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.1 恒定电场基本方程与场的特性

恒定电场：　与恒定电流相伴随的电场，该电场不随时间变化。

分析：　导体两端施加电压U，导体中形成电场，驱使其中的自由电子持续定向运动，呈现直流即恒定电流，此时导体中$\boldsymbol{E}\neq 0$。

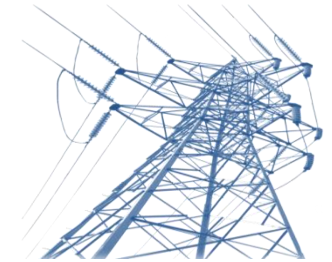


静电场与恒定电场的差异与联系：

（1）为何静电场中电荷静止而恒定电场中电荷持续移动形成电流？

（2）导体特征有何差异？

（3）场的特征的差异？



3.1.1 恒定电场基本方程：无散、无旋

电荷守恒： $\oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

分析： 导体当中ρ为常数，不随时间变化，故右端为零，即

$$\oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{J}_c = 0$$ 无散性

另一方面，恒定电场可看作是电源极板上驻定电荷引起的静态电场，

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$ 无旋性

媒质构成方程： $\boldsymbol{J}_c = \gamma \boldsymbol{E}$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.1.1 恒定电场基本方程：无散、无旋

由无旋性：　$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ ⇒ $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$　类似于静电场可引入标量电位

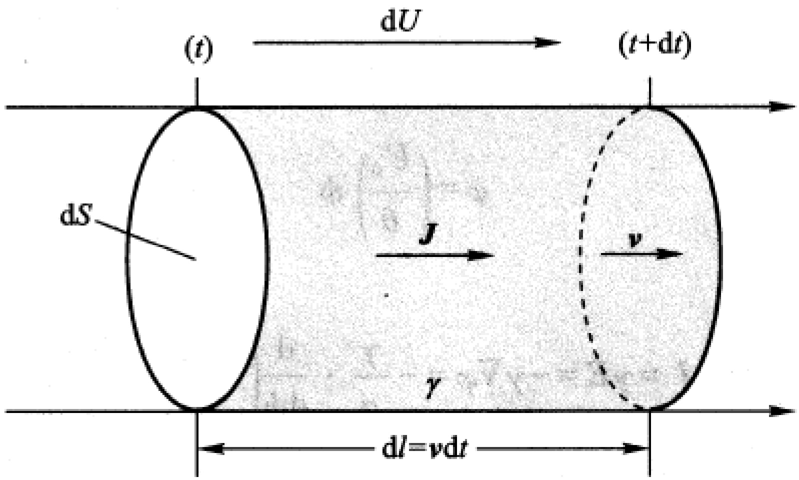
$$U_{PQ}=\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad \varphi_P=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\cdot\boldsymbol{J}_c=0 \\ \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \\ \boldsymbol{J}_c=\gamma\boldsymbol{E} \end{array}\right\} \quad \nabla^2\varphi=0$$

可基于边值问题求恒定电场

3.1.2 电功率 电动势

导体电流热效应： 电荷运动，与晶格相碰撞，产生热，此部分的能量由电源提供，具体是电源通过电场力作功输送电子，供热能消耗。



电功率： 取一元电流管，设电场作用下，dt时间内，电荷dq由导体左端面移动到右端面，电场力作功为

$$dW = dU \cdot dq$$ （由外电源提供）

$$dP = \frac{dW}{dt} = \frac{dUdq}{dt} = dUdI = (\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l})(\boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}) = EJ\,dV$$

$$p = dP/dV = EJ = \gamma E^2 = J^2/\gamma$$ （$\mathrm{W/m^3}$）

3.1.2 电功率 电动势

一般地， $p = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$ 电功率体密度

电动势： （与感应电动势完全不同的概念）

电池：通过化学作用，使得溶液中的正负电荷分开，并分别趋向于正负电极，维持板间电压，从而建立恒定电场，本质上将化学能转为电能。

定义： 电源中将正负电荷分开的力为局外力$\boldsymbol{F}_e$，进而引入局外场强

$$\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{F}_e / q$$ 等效场强

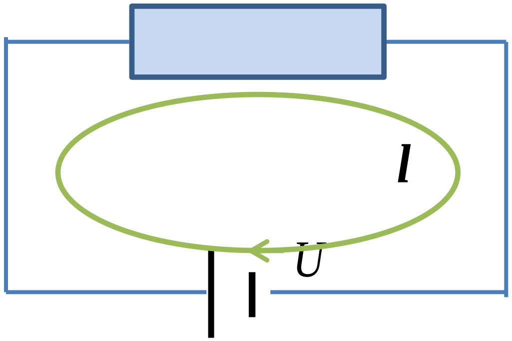
为了衡量电源将其他能量转化为电能的能力，

定义： $e=\int_{-}^{+} \boldsymbol{E}_e \cdot d\boldsymbol{l}$ 积分在电源内部由负极到正极

3.1.2 电功率　电动势

注意：　　电源内部也有库仑电场

思考题：沿闭合路径l作电场的积分，结果？



3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.1.3 不同媒质分界面的边界条件

（1）两种不同导电媒质

由

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \qquad \oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad J_{2n} = J_{1n}$$

$$\boldsymbol{e}_n \times \left(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1\right) = 0 \qquad \boldsymbol{e}_n \cdot \left(\boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{J}_1\right) = 0$$

$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$$

$$\gamma_1 E_1 \cos\alpha_1 = \gamma_2 E_2 \cos\alpha_2$$

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

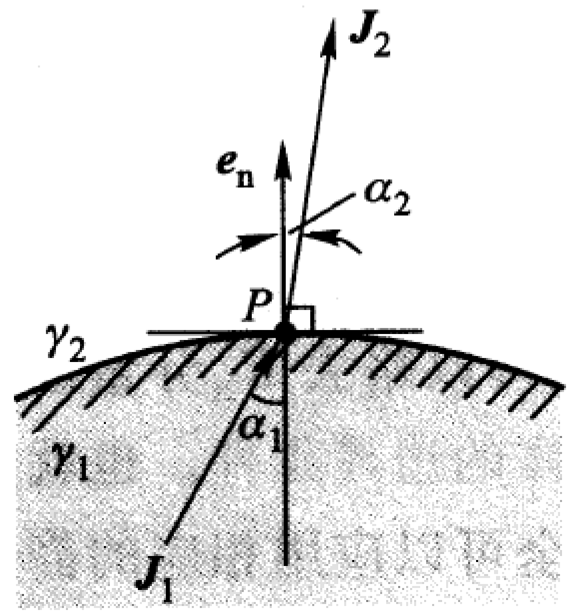
折射定理

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.1.3 不同媒质分界面的边界条件

（2）良导体和不良导体　　$\gamma_1 \gg \gamma_2$

由　$\dfrac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} \to \infty$



⇨ 当 $\alpha_1 \neq \pi/2$　　$\mathrm{tg}\alpha_1$　为一有限值

⇨ $\alpha_2 \approx 0$ ⇨ 电流垂直于交界面，流入不良导体

由于 $E_{1t} = E_{2t} \approx 0$

⇨ 良导体表面近似为等位面。

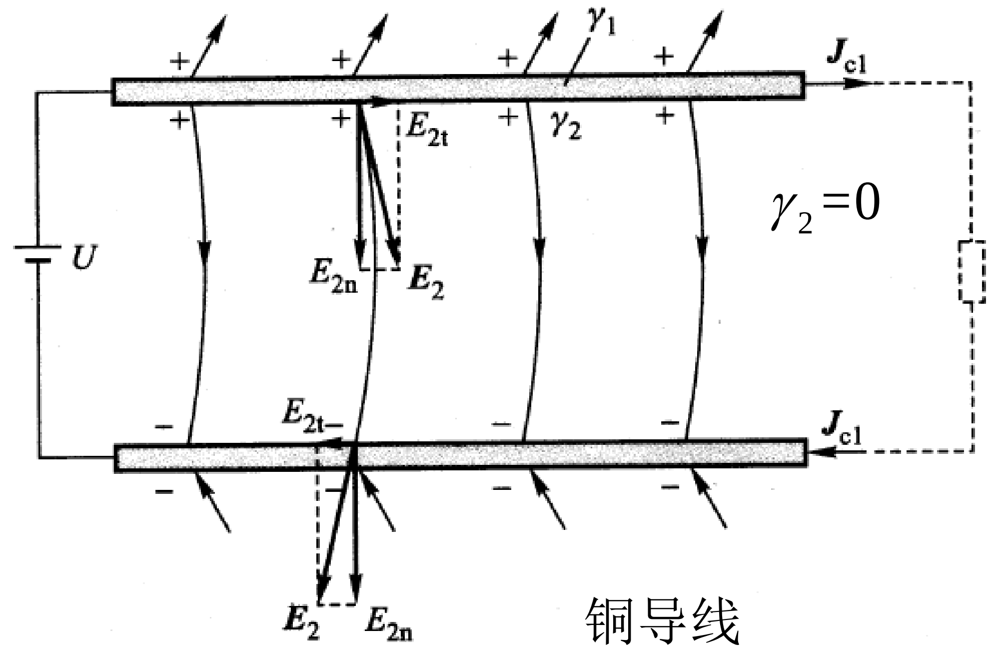
例：$\gamma_{steel} = 5\times10^6 \mathrm{S}/m$　　$\gamma_{soil} = 1\times10^{-2} \mathrm{S}/m$

$\alpha_1 = 89^\circ 59' 50''$　　$\alpha_2 = 8''$　⇨　$J_{2t} = \gamma_2 E_{2t} \approx 0$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.1.3 不同媒质分界面的边界条件

（3）导体和理想介质 $\gamma_1 \gg \gamma_2=0$



$\gamma_2=0$ ⇨ $J_2=0$

$E_{1t}=E_{2t}$, $J_{1n}=J_{2n}$ ⇨ $J_{2n}=0=J_{1n}$

媒质1： $J_{1n}=0$ ⇨ $E_{1n}=0$ ⇨ $J_1=J_{1t}$ $\quad E_{1t}=J_1/\gamma_1=0.086\ \mathrm{V/m}$

媒质2： $J_{2n}=0$ ⇨ $E_{2n}=J_{2n}/\gamma_2$ ？ $\quad E_{2t}=E_{1t}$ $\quad U=\int_{+}^{-}\boldsymbol{E}_{2n}\cdot d\boldsymbol{l}$ $\quad E_{2n}=3\times10^6\ \mathrm{V/m}$

⇨ $E_{2n}\gg E_{2t}$ ⇨ 导体近似为等位体

3.1.3 不同媒质分界面的边界条件

（4）两种有损电介质

有损：　介质不是理想的，有导体的性质，可以导电

$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \Rightarrow \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma$$

寻求σ与J的关系

可解得，$\sigma = \dfrac{\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2} J_{2n}$

可知，当 $\varepsilon_2\gamma_1 = \varepsilon_1\gamma_2 \sim \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} \Rightarrow \sigma = 0$

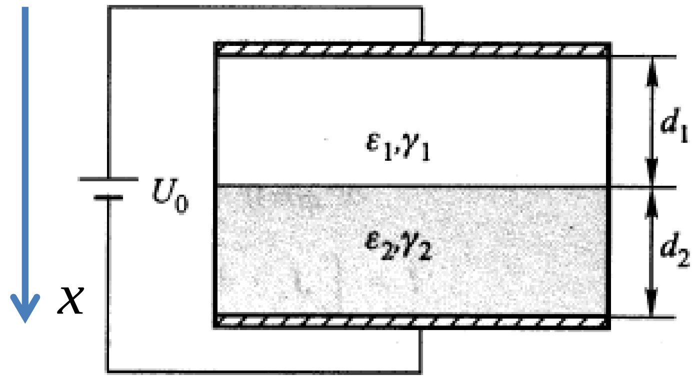
3.1.3 不同媒质分界面的边界条件

例3-2：两层非理想介质（有损电介质）构成的平板电容器，如图所示，介电常数和电导率已知，外施电压为U_0，求：

（1）两层非理想介质中的电场强度；

（2）单位体积中的电场能量及功率损耗；

（3）两层介质分界面上的自由电荷面密度。



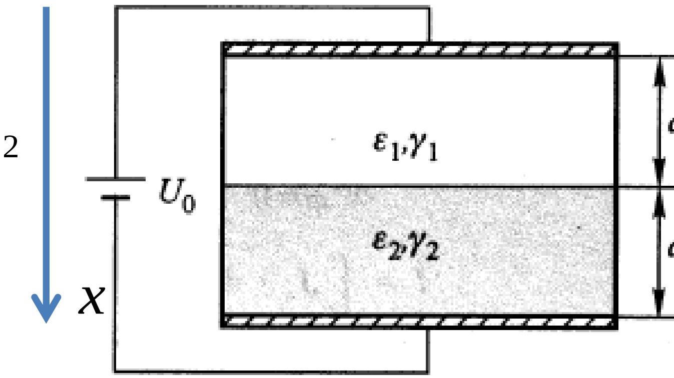
解：（1）$U_0 = \int_+^- \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \Rightarrow E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0$

$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow J_1 = J_{1n} = J_{2n} = J_2 \Rightarrow \gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.1.3 不同媒质分界面的边界条件

可解得 $\boldsymbol{E}_1=\dfrac{\gamma_2 U_0}{\gamma_1 d_2+\gamma_2 d_1}\boldsymbol{e}_x$ $\boldsymbol{E}_2=\dfrac{\gamma_1 U_0}{\gamma_1 d_2+\gamma_2 d_1}\boldsymbol{e}_x$



（2）

$$w_{e1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{E}_1=\frac{1}{2}\varepsilon_1 E_1^{\ 2}\qquad w_{e2}=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{2}\varepsilon_2 E_2^{\ 2}$$

$$p_1=\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{E}_1=\gamma_1 E_1^{\ 2}\qquad p_2=\boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{E}_2=\gamma_2 E_2^{\ 2}$$

（3） 分界面自由电荷面密度

$$\sigma=\frac{\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}J_{2n}=\frac{\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}J_2=\frac{\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}\gamma_2\frac{\gamma_1 U_0}{\gamma_1 d_2+\gamma_2 d_1}=\frac{\varepsilon_2\gamma_1-\varepsilon_1\gamma_2}{\gamma_1 d_2+\gamma_2 d_1}U_0$$

3.2 恒定电场与静电场的比拟 接地系统

3.2.1 静电比拟

均匀导电媒质中		均匀电介质中
$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_c = 0$		$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0\ (\rho = 0)$
$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$		$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$
$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$		$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$
$\boldsymbol{J}_c = \gamma \boldsymbol{E}$		$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$
$\nabla^2 \varphi = 0$		$\nabla^2 \varphi = 0$
$\boldsymbol{I} = \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S}$		$\psi(q) = \int_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S}$

（1）两种场均可基于边值问题（BVP）求解和分析

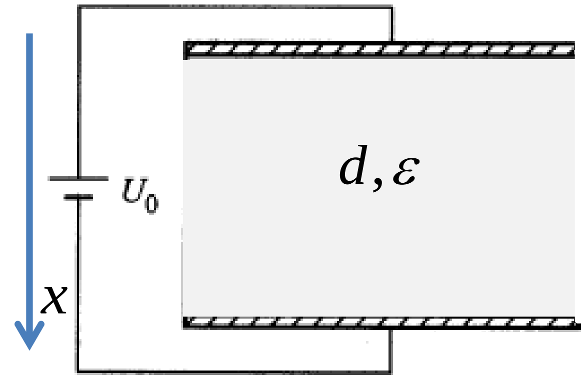
（2）由唯一性定理，当边界条件相同时，φ同，$\boldsymbol{E}$同，$\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{D}$分布规律一致

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.2.1 静电比拟

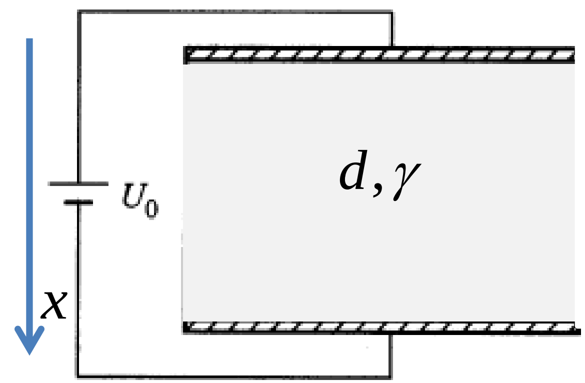
单一均匀电介质：　BVP：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \\ \varphi\big|_{x=0} = U_0 \\ \varphi\big|_{x=d} = 0 \end{cases}$$



单一均匀导电媒质：　BVP：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \\ \varphi\big|_{x=0} = U_0 \\ \varphi\big|_{x=d} = 0 \end{cases}$$

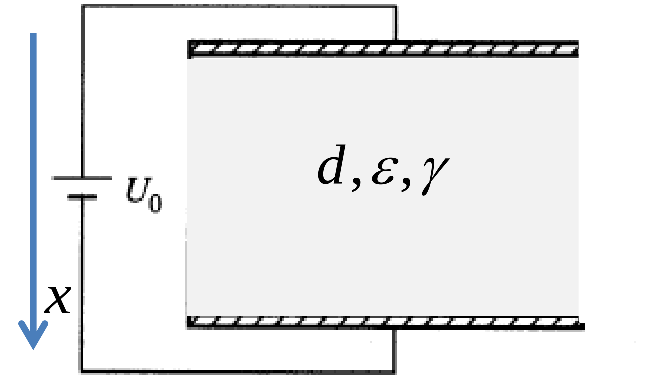


⇨ 由唯一性定理，φ同，$\boldsymbol{E}$同，$\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{D}$分布相似

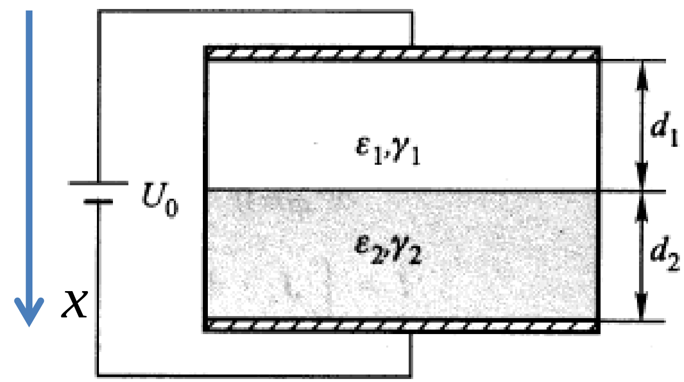
3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3. 2. 1 静电比拟

a.单一媒质（极化+导电）：
$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \\ \varphi\big|_{x=0} = U_0 \\ \varphi\big|_{x=d} = 0 \end{cases}$$



解出φ，得到$\boldsymbol{E}$，再得到$\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{D}$，二者分布相似。



b.非单一媒质（分块均匀）：

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$ 静电场

$$\frac{\tan\alpha_1'}{\tan\alpha_2'} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$ 恒定电场

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \Rightarrow$$ $\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{D}$分布相似

3.2.1 静电比拟

静电比拟：　基于场分布的相似性，可将一种场的计算和实验结果（**场量**，**参数**等），推广应用于另一种场，将这种方法称之为静电比拟。

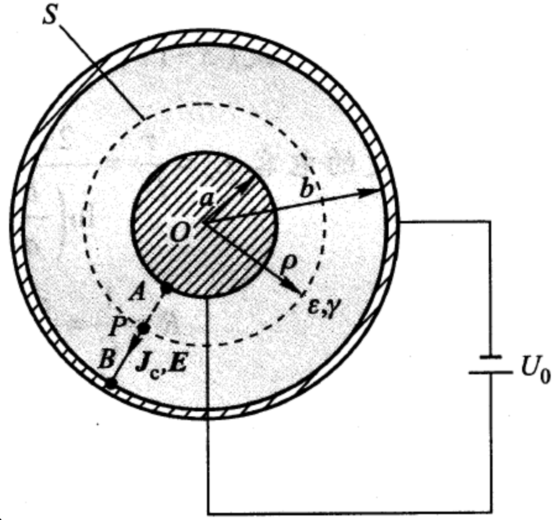
电容：
$$C=\frac{q}{U}=\frac{\int_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}=\frac{\varepsilon\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

电导：
$$G=\frac{I}{U}=\frac{\int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}=\frac{\gamma\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{G}{C}=\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

例3-3：内外导体半径分别为a，b的同轴电缆，外施电压U0，试求因绝缘介质老化（不完善）而引起的电缆内泄漏电流密度及其绝缘电阻。 $L \gg b$



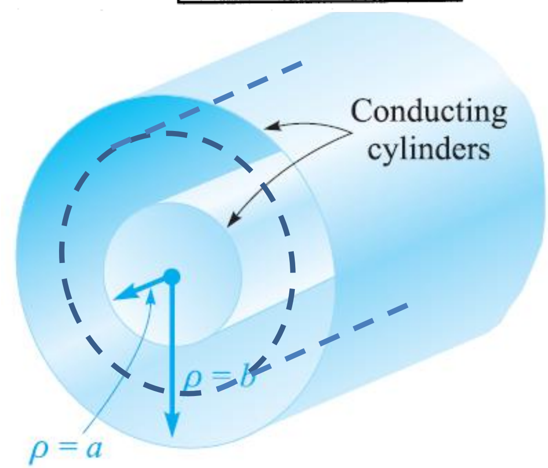
解1：取长度为l的一段进行分析，由对称性可知，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{J}$都沿$\boldsymbol{e}_\rho$方向，设总电流为I，建立圆柱坐标系分析，作半径为ρ，长度为l的圆柱面$\boldsymbol{S}$，则有

由 $$\int_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S J_c \boldsymbol{e}_\rho \cdot dS\boldsymbol{e}_\rho = J_c 2\pi\rho l = I$$

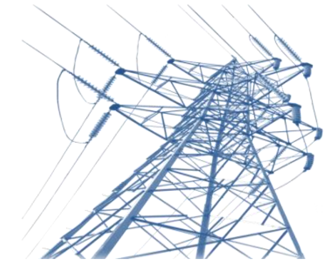
$$\Rightarrow \quad J_c = I / 2\pi\rho l \qquad \boldsymbol{J}_c = \frac{I}{2\pi\rho l}\boldsymbol{e}_\rho \qquad \boldsymbol{E} = \frac{I}{\gamma 2\pi\rho l}\boldsymbol{e}_\rho$$

由已知 $$U_0 = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\rho} = \int_a^b \frac{I}{\gamma 2\pi\rho l} d\rho = \gamma 2\pi l \ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{U_0 \gamma 2\pi l}{\ln(b/a)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}_c = \frac{U_0 \gamma}{\rho \ln(b/a)}\boldsymbol{e}_\rho \quad (a < \rho < b)$$

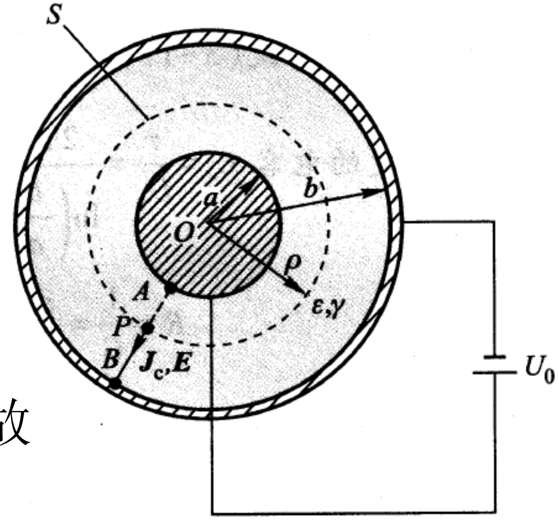


3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场



例3-3：内外导体半径分别为a，b的同轴电缆，外施电压U0，试求因绝缘介质老化（不完善）而引起的电缆内泄漏电流密度及其绝缘电阻。 $L \gg b$

$$R=\frac{U_0}{I}=\frac{\ln(b/a)}{\gamma 2\pi l}$$

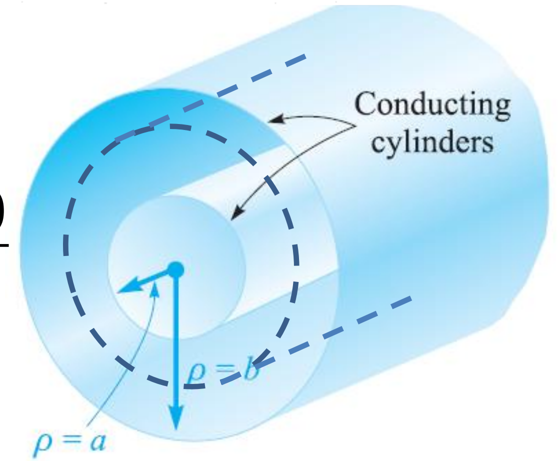


解2：由高斯定理可求得，静电场中 $\boldsymbol{E}=\dfrac{U_0}{\rho\ln(b/a)}\boldsymbol{e}_\rho$

由静电比拟可知，对于恒定电场中$\boldsymbol{E}$与此相同，故

$$\boldsymbol{J}_c=\gamma\boldsymbol{E}=\frac{U_0}{\rho\ln(b/a)}\boldsymbol{e}_\rho \quad (a<\rho<b)$$

由 $C_l=\dfrac{\tau}{U_0}=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$ $\Rightarrow R=\dfrac{1}{G}=\dfrac{\varepsilon}{\gamma}\dfrac{1}{C}=\dfrac{\varepsilon}{\gamma}\dfrac{1}{C_l l}=\dfrac{\ln(b/a)}{\gamma 2\pi l}$



3.2.2 接地电阻

接地： 将金属导体埋入地内，与系统中需要接地的部分相连，此接地导体称之为**接地器**。

接地作用： a 保障人身和设备安全；b 为系统提供零电位参考点。

接地电阻： 电流流经大地遇到的电阻；

a. 接地器本身的电阻；

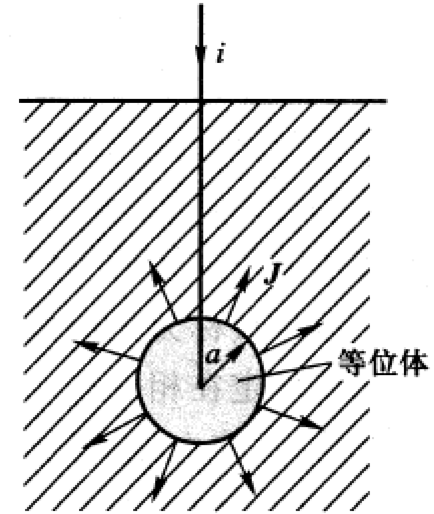
b. 接地导线电阻；

c. 接地器与大地间的接触电阻；

d. 接地器间的土壤电阻； **最主要部分**

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.2.2 接地电阻



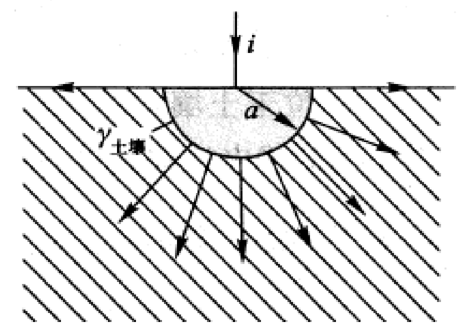
深埋地下的球形接地器接地电阻：

由静电场可知，带电导体球的电容为，

$$C=\frac{q}{U}=q/\left(\varphi_a-\varphi_\infty\right)=q/\left(q/4\pi\varepsilon a\right)=4\pi\varepsilon a$$

由静电比拟可得，　　$G=C\gamma/\varepsilon=4\pi\gamma a$

$$R=1/G=1/\left(4\pi\gamma a\right)$$



埋于地下的半球形接地器接地电阻：

空间中既有土壤，也有空气，介质不均匀，可采用镜像法

3.2.2 接地电阻

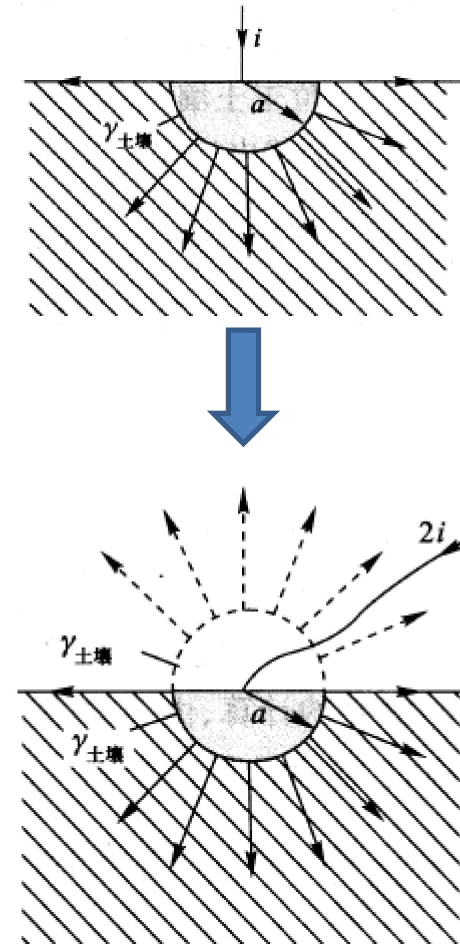
埋于地下的半球形接地器接地电阻：

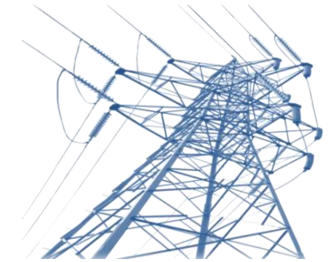
$$\boldsymbol{J}_c = \frac{2i}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{2i}{4\pi r^2 \gamma_S}\boldsymbol{e}_r$$

$$C = \frac{q}{U} = q/\left(\varphi_a - \varphi_\infty\right)$$

$$\varphi_a = \int_a^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} \quad = \frac{i}{2\pi\gamma_S a}$$

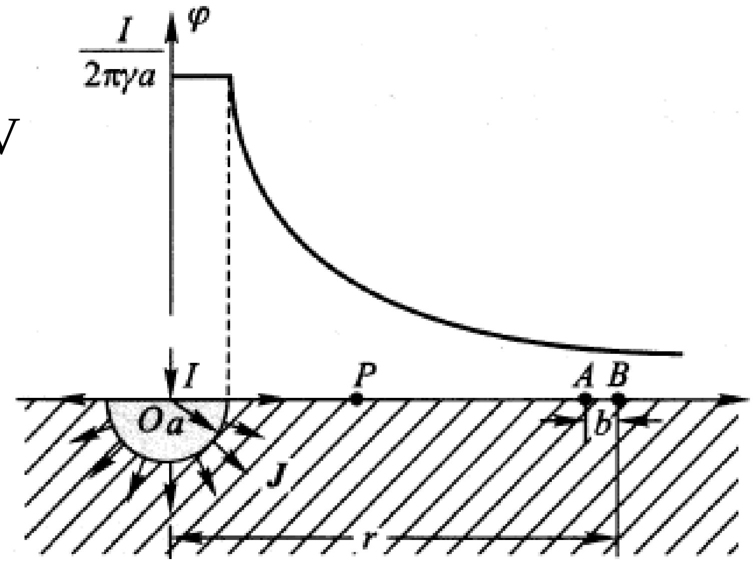
$$R = U/I = \varphi_a / i = \frac{1}{2\pi\gamma_S a}$$





3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.2.3 跨步电压



人体所能承受的安全临界电压：U_0=50~70V

求人体的跨步电压U_{AB}和安全距离r_0

$$\boldsymbol{J}_c = \frac{I}{2\pi r^2}\boldsymbol{e}_r \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{I}{2\pi r^2 \gamma_S}\boldsymbol{e}_r$$

$$U_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r-b}^{r} \frac{I}{2\pi r^2 \gamma_S} dr$$

$$= \frac{I}{2\pi\gamma_S}\left(\frac{1}{r-b} - \frac{1}{r}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma_S}\left[\frac{r-r+b}{r(r-b)}\right] \approx \frac{Ib}{2\pi r^2 \gamma_S} < U_0 \Rightarrow r > \sqrt{\frac{Ib}{2\pi U_0 \gamma_S}} = r_0$$

若已知　$R = \dfrac{1}{2\pi\gamma_S a}$　　$r_0 = \sqrt{\dfrac{abIR}{U_0}}$　　若要减小危险区域面积怎么办？（I, R）

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.3 恒定磁场

3.3.1 基本方程

	积分方程	微分方程
全电流定律：	$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}$
电磁感应定律：	$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_S\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}\cdot d\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boxed{-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}$
磁通连续性：	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$
高斯定理：	$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \rho dV$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$

静态：与时间无关　　　　磁场：与电场无关

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.3.1 基本方程

	积分方程	微分方程	
安培环路定律：	$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$	有旋
磁通连续性原理：	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	无散
本构关系：	$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$		

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

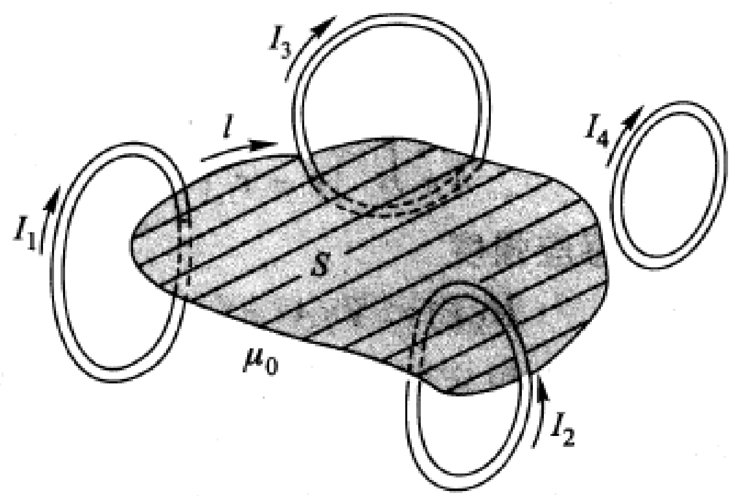
3.3.2 真空中的安培环路定律　（有旋）

在真空中，　$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$　代入前式中，

$$\oint_l \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} \quad \Rightarrow \quad \oint_l \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 \sum I_i$$

微分形式：　$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}_c$

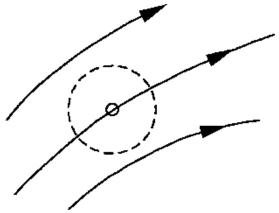
$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \left(I_1 + I_2 - I_3 \right)$$

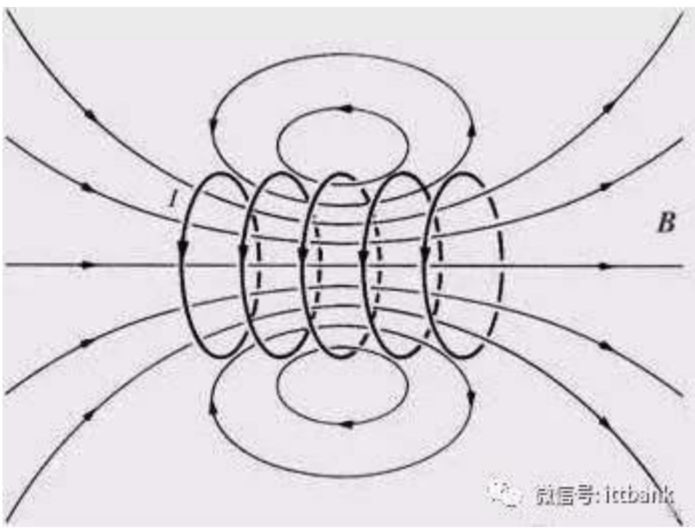


3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.3.3 磁通连续性原理 恒定磁场的无散性

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$





$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \rho=0$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.3.4 毕奥萨伐尔定律

赫姆霍兹定理： $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) + \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

由 $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ ⇨ $\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$

由 $\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}_c$ ⇨ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$ ⇨ ***A*与*J*的方向一致**

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.3.4 毕奥萨伐尔定律

由此可得到 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]dV'$$

由矢量恒等式， $\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{R}=\nabla\left(\dfrac{1}{R}\right)\times\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')+\dfrac{1}{R}\boxed{\nabla\times\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}$ 无旋

$$=\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')=-\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\times\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')\times\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

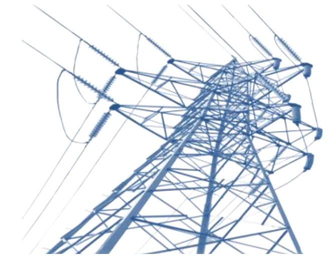
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{R}/R)}{R^2}dV'$$

3.3.4 毕奥萨伐尔定律

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{R}}{R^3}dV' \quad =\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}dV'$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\begin{cases}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}dV'\\[2ex]=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{S'}\frac{\boldsymbol{K}_c(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}dS'\\[2ex]=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{l'}\frac{Id\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}\end{cases}
\qquad
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\begin{cases}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{R}dV'\\[2ex]=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{S'}\frac{\boldsymbol{K}_c(\boldsymbol{r}')}{R}dS'\\[2ex]=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{l'}\frac{I}{R}d\boldsymbol{l}'\end{cases}$$

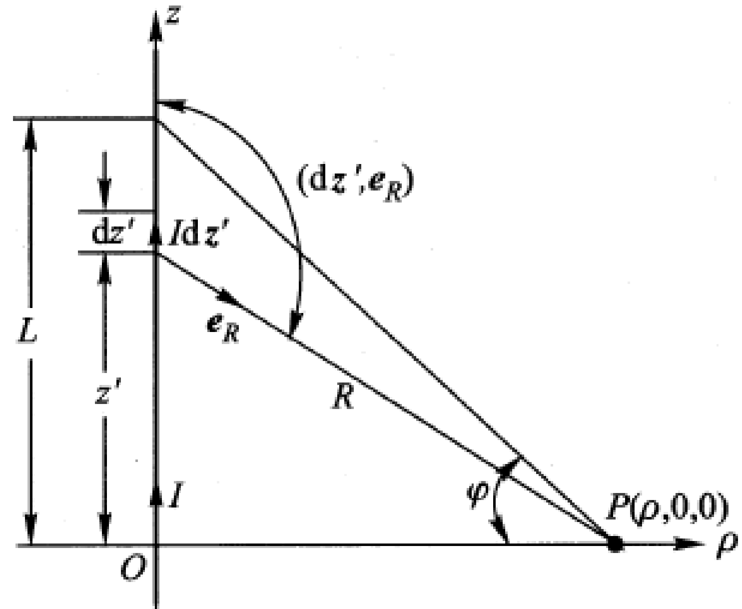


3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3. 4 自由空间的磁场

3. 4. 1 基于场量*B*的分析

例3-4：计算真空中有限长（*L*）直载流导线产生的磁感应强度。



取元电流 $I d\mathbf{l}' = I d\mathbf{z}'$ 其在*P*点处产生的场

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\mathbf{z}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\mathbf{z}' \times \mathbf{e}_R}{\rho^2 + z'^2}$$

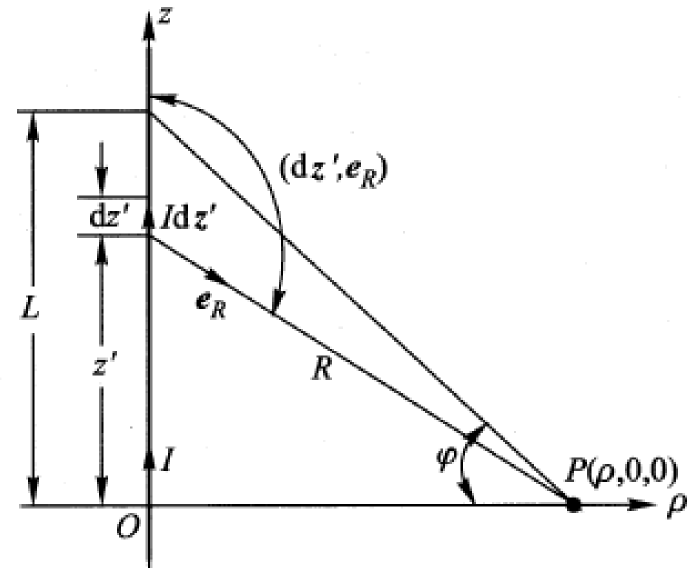
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dz'}{\rho^2 + z'^2}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dz'}{\rho^2 + z'^2}\sin(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dz'}{\rho^2 + z'^2}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}\mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\rho dz'}{\left(\rho^2 + z'^2\right)^{3/2}}\mathbf{e}_\phi$$

3.4.1 基于场量$\boldsymbol{B}$的分析

$$\boldsymbol{B}=\int_l d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_l \frac{\rho}{\left(\rho^2+z'^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}z'\boldsymbol{e}_\phi$$

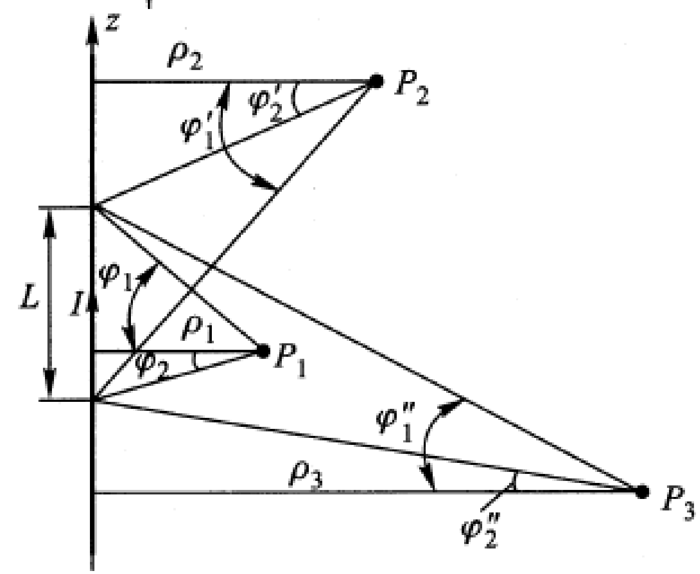
$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left.\frac{z'}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}\right|_0^L\boldsymbol{e}_\phi \quad =\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\phi$$



P_1点： $$\boldsymbol{B}_{P1}=\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho_1}\left(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2\right)\boldsymbol{e}_\phi$$

P_2点： $$\boldsymbol{B}_{P2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho_2}\left(\sin\varphi_1'-\sin\varphi_2'\right)\boldsymbol{e}_\phi$$

P_3点： $$\boldsymbol{B}_{P3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho_3}\left(\sin\varphi_1''-\sin\varphi_2''\right)\boldsymbol{e}_\phi$$

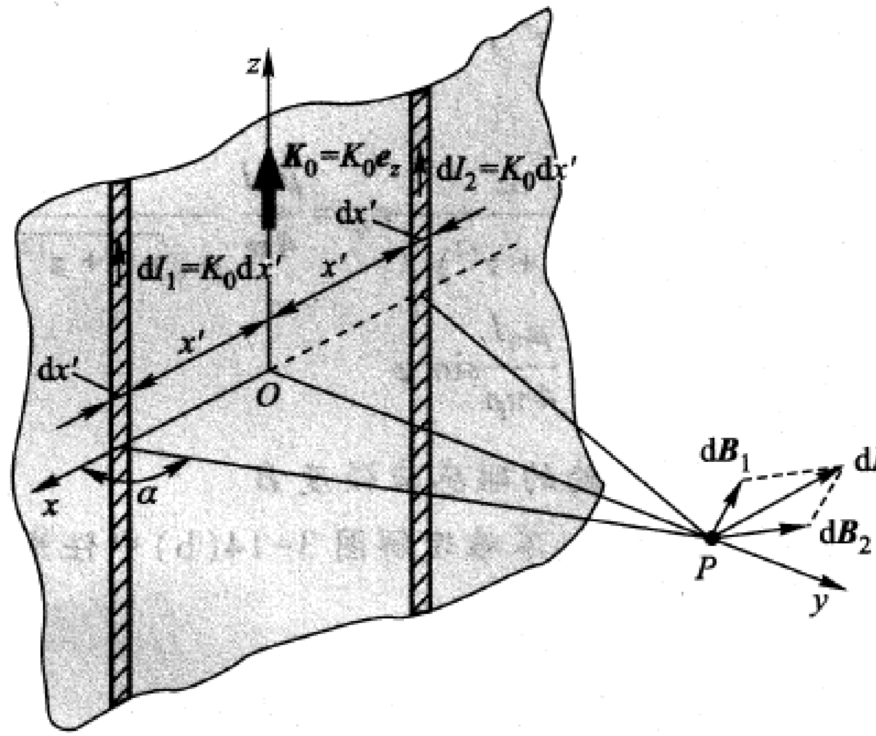


当L趋于无穷大时 $$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$ 应用

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3. 4. 1 基于场量*B*的分析

例3-5：真空中载有恒定面电流密度$\boldsymbol{K}_0$的无限大导电片，在任意点*P*所产生的的磁感应强度$\boldsymbol{B}$。



解1：如图建立直角坐标系，电流沿z方向，将面电流看作无数线电流

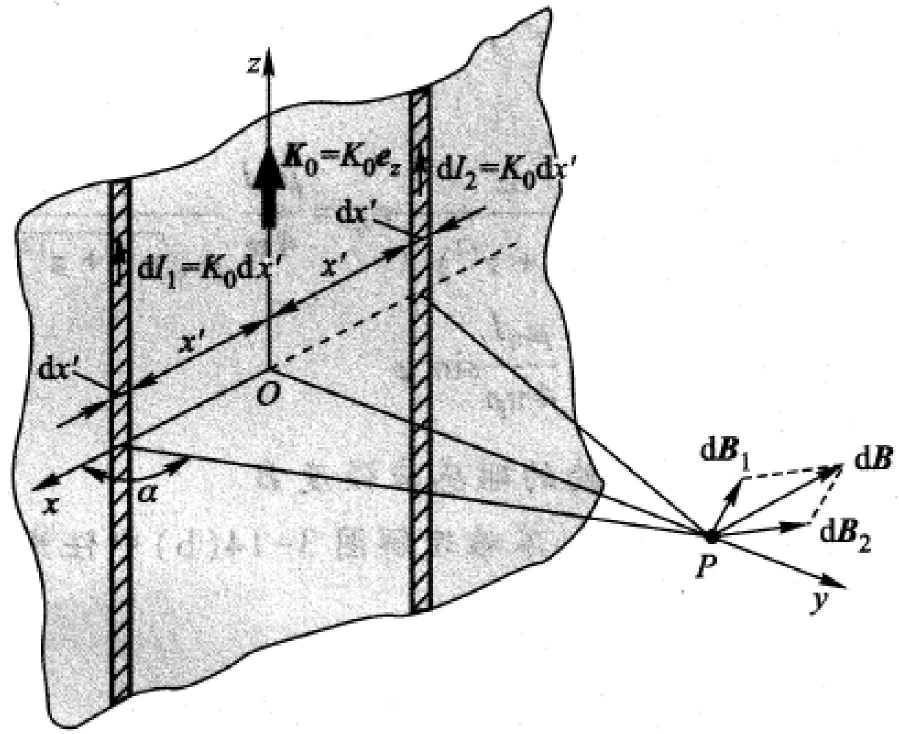
$$d\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0\boxed{(K_0dx')}}{2\pi(x'^2+y^2)^{1/2}}\boldsymbol{e}_\phi \qquad \boxed{(K_0dx')} \longrightarrow dI$$

$$\boldsymbol{e}_\phi=-\boldsymbol{e}_x\sin\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\phi=-\boldsymbol{e}_x\sin\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\alpha$$

对于P点磁场，在z轴两侧取对称的线电流，磁场只有x方向的分量，即有

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3. 4. 1 基于场量$\boldsymbol{B}$的分析



$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0 K_0\sin\alpha}{2\pi(x'^2+y^2)^{1/2}}dx'\boldsymbol{e}_x$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0 K_0}{2\pi(x'^2+y^2)^{1/2}}\frac{y}{(x'^2+y^2)^{1/2}}dx'\boldsymbol{e}_x$$

$$=-\frac{\mu_0 K_0 y}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'}{2\pi(x'^2+y^2)}\boldsymbol{e}_x$$

$$=-\frac{\mu_0 K_0}{2\pi}\arctan\left(\frac{x'}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{e}_x \quad =\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 K_0}{2\pi}\boldsymbol{e}_x & (y>0)\\ \dfrac{\mu_0 K_0}{2\pi}\boldsymbol{e}_x & (y<0)\end{cases}$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

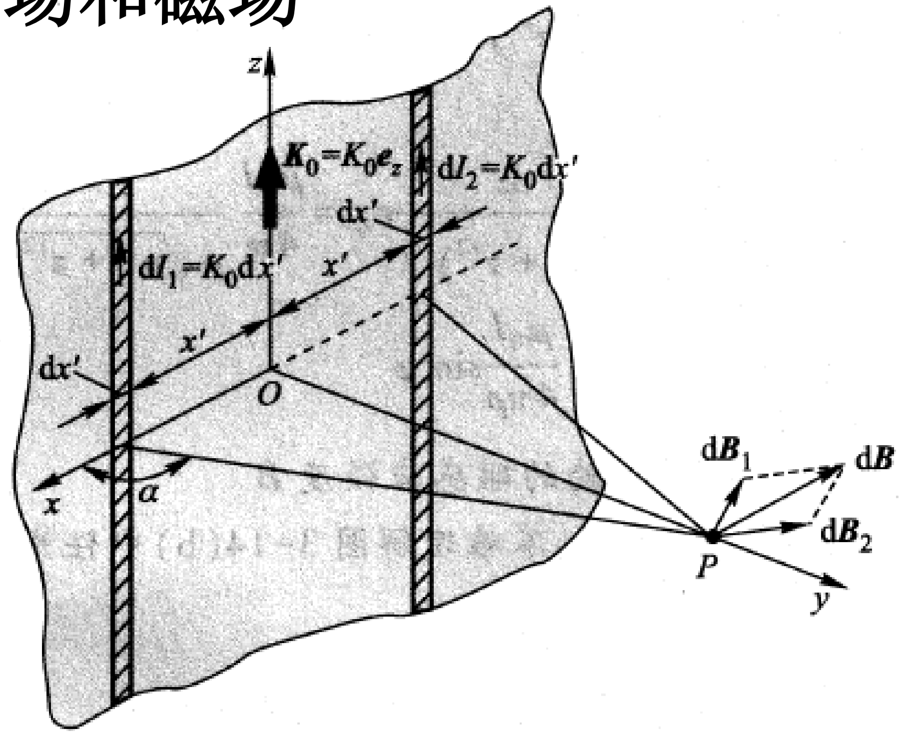
3.4.1 基于场量*B*的分析

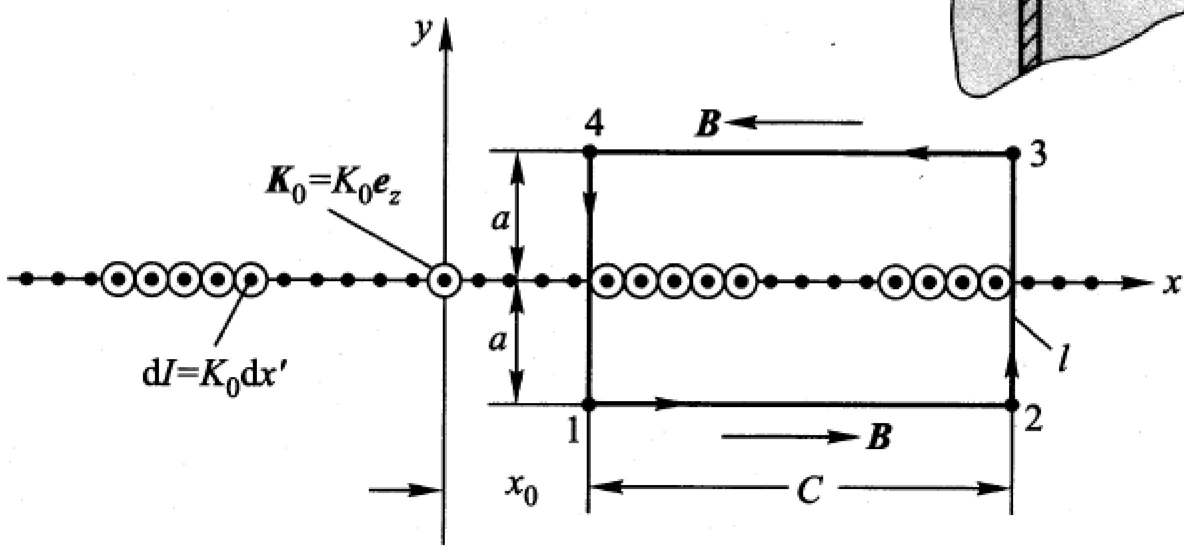
解2： 安培环路定理进行求解，如下图，

（1）由前可知***B***的方向及对称性；

（2）***B***的数值与*x*无关；

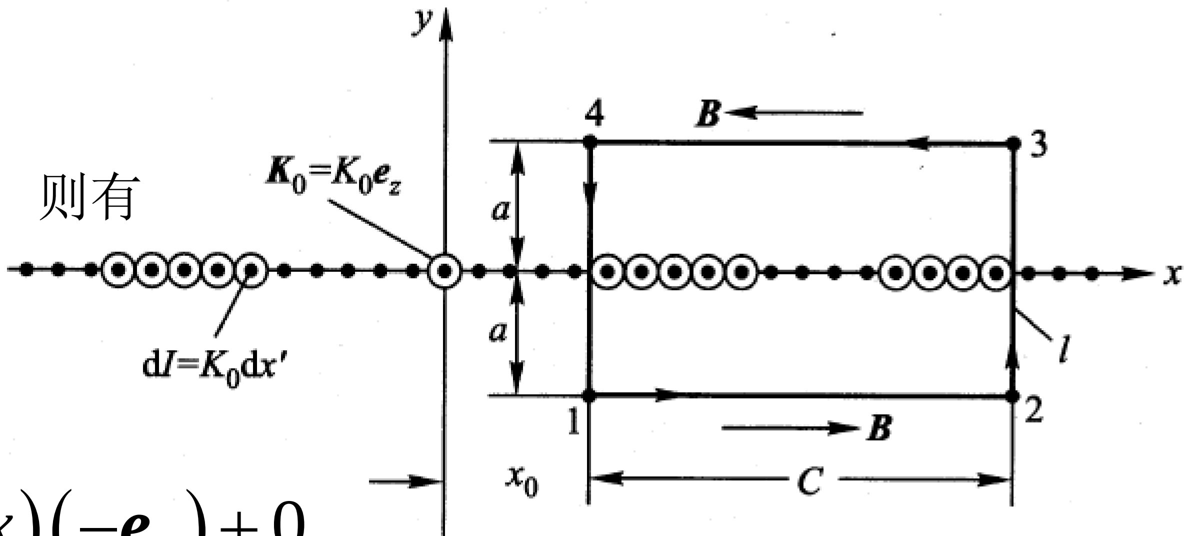
（2）***B***为关于*z*轴的平行平面场；





3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.4.1 基于场量*B*的分析



解2： 取如图所示矩形回路，则有

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_1^2 B_x \boldsymbol{e}_x\cdot dx\boldsymbol{e}_x$$

$$+0+\int_3^4 -B_x\boldsymbol{e}_x\cdot(-dx)(-\boldsymbol{e}_x)+0$$

$$=2B_xC=\mu_0\int_{x_0}^{x_0+C} dI=\mu_0\int_{x_0}^{x_0+C} K_0 dx=\mu_0 K_0 C$$

$$\Rightarrow B_x=\frac{\mu_0 K_0}{2}$$

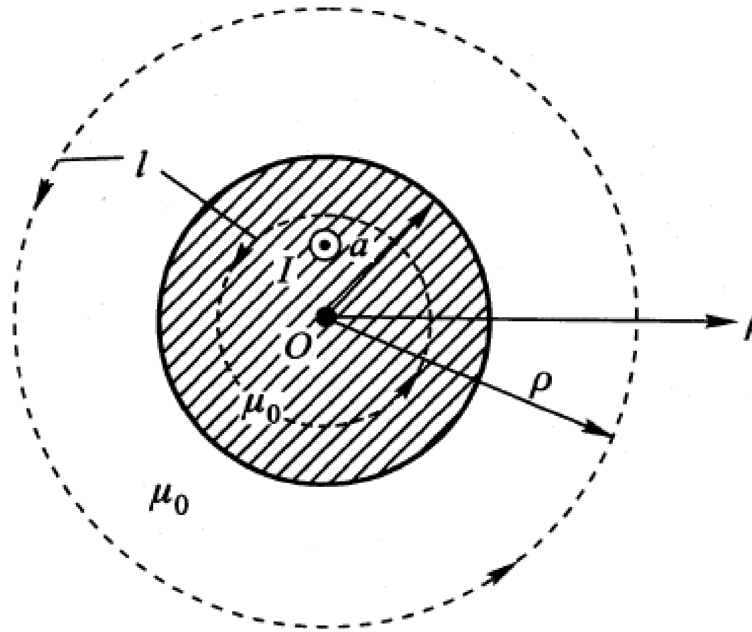
$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_1^2 \boldsymbol{B}_1\cdot d\boldsymbol{l}+\int_3^4 \boldsymbol{B}_2\cdot d\boldsymbol{l}=B_1\int_1^2 dl+B_2\int_3^4 dl$$

$$=2B_1C=2B_xC=\mu_0 K_0 C$$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.4.1 基于场量*B*的分析

例：3-7　计算真空中半径为a，载流为I的无限长圆柱形导体内外磁场。



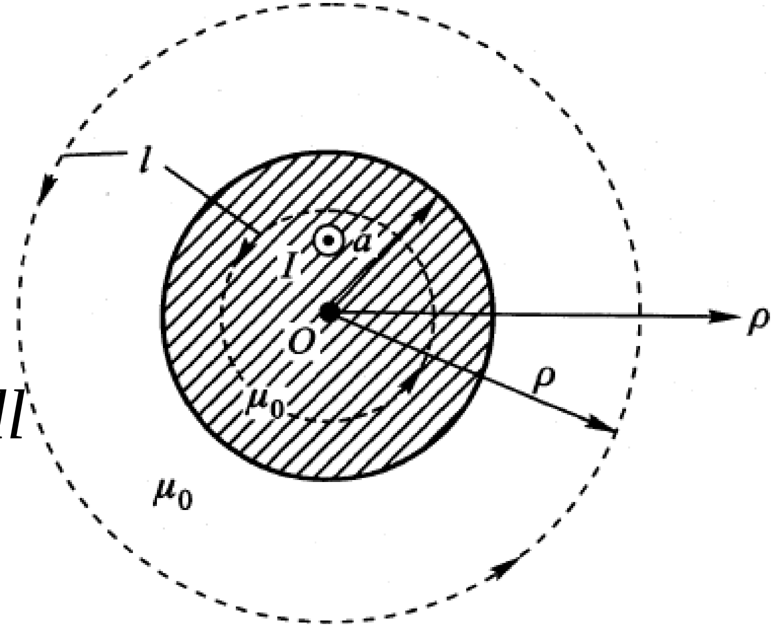
导体内：$\left(\rho < a\right)$

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_l B\boldsymbol{e}_\phi \cdot dl\boldsymbol{e}_\phi = B\int_l \left(\boldsymbol{e}_\phi \cdot \boldsymbol{e}_\phi\right) dl$$

$$= 2\pi\rho B = \mu_0 \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} I \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\phi$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.4.1 基于场量$\boldsymbol{B}$的分析



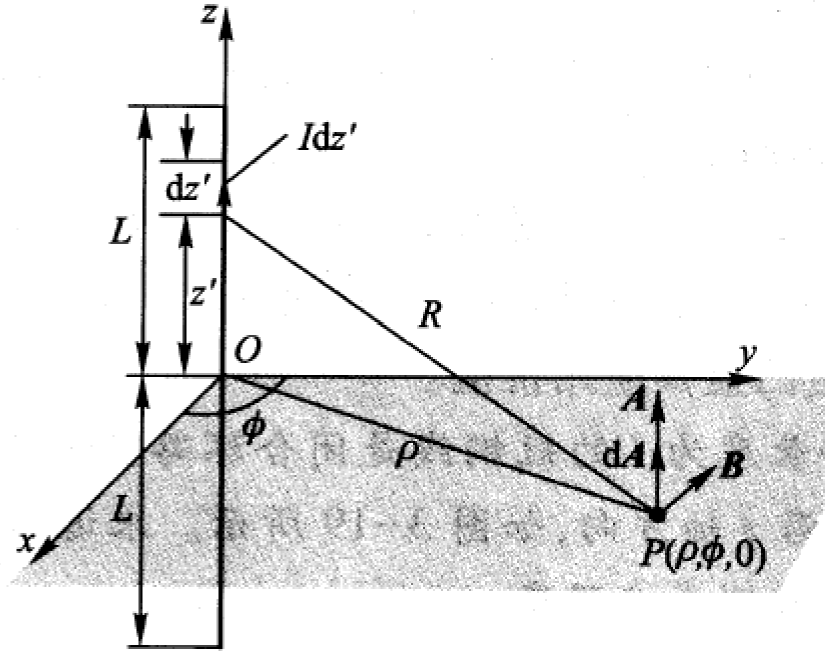
导体外： $(\rho > a)$

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_l B\boldsymbol{e}_\phi \cdot dl\boldsymbol{e}_\phi = B\int_l \left(\boldsymbol{e}_\phi \cdot \boldsymbol{e}_\phi\right) dl$$

$$= 2\pi\rho B = \mu_0 I \Rightarrow \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

3. 4. 2 基于场量A的分析

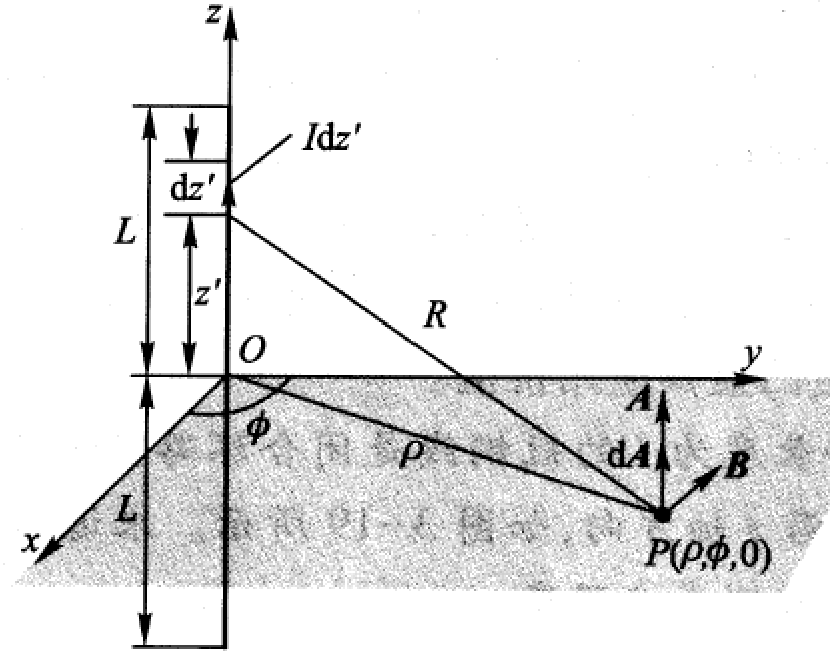
$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \begin{cases} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{V'} \dfrac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{R} dV' \\ = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{S'} \dfrac{\boldsymbol{K}_c(\boldsymbol{r}')}{R} dS' \\ = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{l'} \dfrac{I}{R} d\boldsymbol{l}' \end{cases}
$$



例3-9：　　空气中长为2L的长直载流导线，在其中截面任意点处矢量磁位***A***，及***B***。

3. 4. 2 基于场量*A*的分析

解： 建立直角坐标系，取元电流，可得



$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_z \boldsymbol{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{dz}{R}\boldsymbol{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}\boldsymbol{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\left(L + \sqrt{\rho^2 + L^2}\right) - \ln\rho\right]\boldsymbol{e}_z$$

当*L*无限大时，即 $L \gg \rho$ ⇒

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{2L}{\rho}\boldsymbol{e}_z \qquad ？？？$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

3.4.2 基于场量*A*的分析

分析：当导线无限长，即L趋于无穷大时，源分布在整个空间。但是磁矢量位的计算式实际上依据的是亥姆霍兹定理，其中规定源分布于有限区域，也就是相当于无穷远处是参考点。故上述情况不成立。此时必须把参考点选择非无穷远的某一点Q，设其与电流相距为ρ_0

修正：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'} \frac{I}{R} d\boldsymbol{l}' + \boldsymbol{C} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho} \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{C}$$

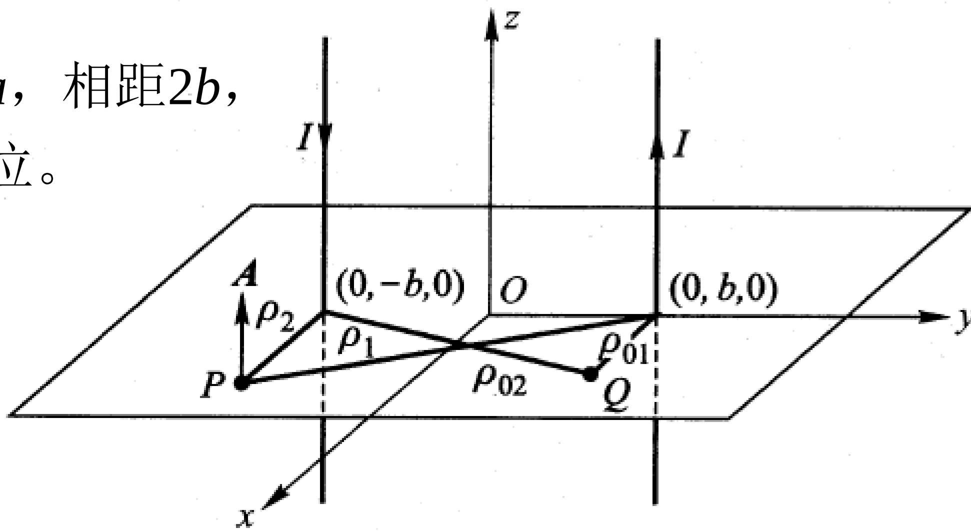
对Q点：

$$\boldsymbol{A}_Q = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho_0} \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho_0} \boldsymbol{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{e}_z \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \boldsymbol{e}_\phi$$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

例3-10　　无限长直平行输电线，半径a，相距$2b$，且b远大于a，求空间磁矢量位。



$$\boldsymbol{A}=\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_{01}}{\rho_1}-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_{02}}{\rho_2}\right]\boldsymbol{e}_z$$

$$=\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}\right]\boldsymbol{e}_z$$

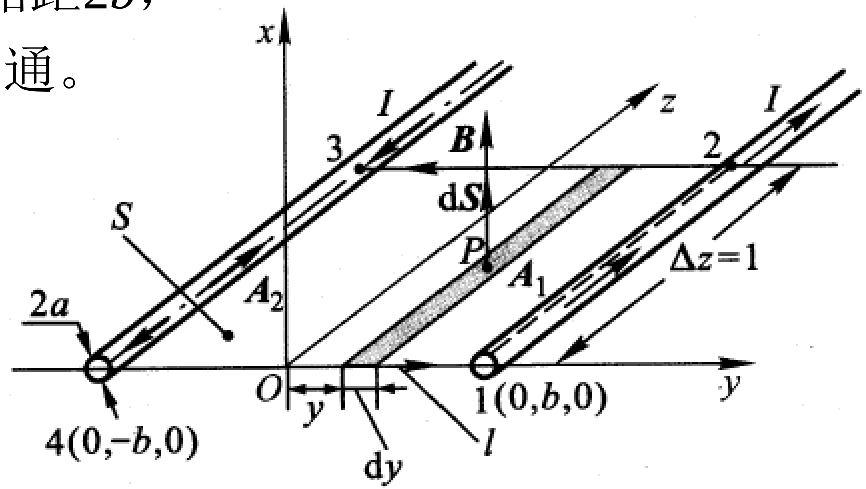
为了简化计算结果，可考虑将参考点选择在x轴上，则有 $\rho_{01}=\rho_{02}$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\boldsymbol{e}_z \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\sqrt{x^2+(y+b)^2}^{\,2}}{x^2+(y-b)^2}\boldsymbol{e}_z$$

磁通：$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$　　　**基于A求磁通**

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

例3-11 无限长直平行输电线，半径a，相距$2b$，且b远大于a，求两线间单位长磁通。



分析：本题与上题模型一致，故结论可用

解1： 由安培环路和叠加定理

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1}\boldsymbol{e}_x+\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_2}\boldsymbol{e}_x$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi(b-y)}\boldsymbol{e}_x+\frac{\mu_0 I}{2\pi(b+y)}\boldsymbol{e}_x$$

磁通：

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\Delta z dy\boldsymbol{e}_x=2\int_0^{b-a}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi(b-y)}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(b+y)}\right]dy$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi}\left[-\ln(b-y)+\ln(b+y)\right]\Big|_0^{b-a}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{2b-a}{a}$$

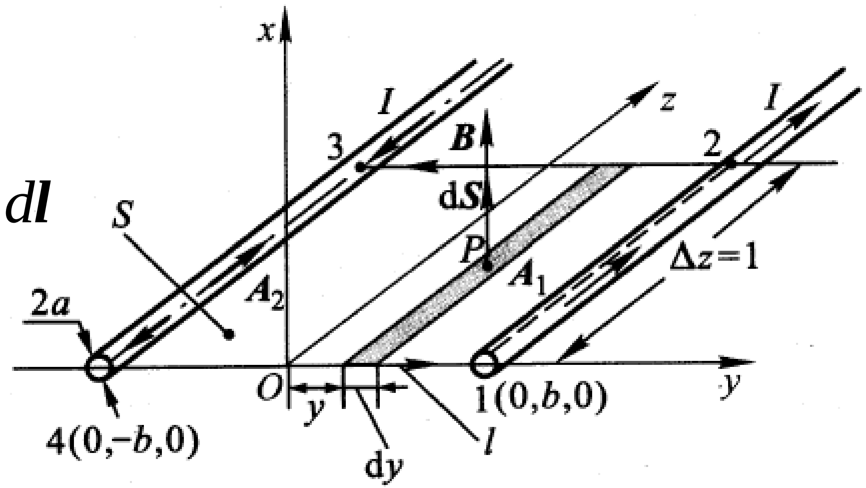
3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

解2： 基于$\boldsymbol{A}$进行求解

由 $\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$

选取有向闭合曲线$\boldsymbol{l}$（曲面$\boldsymbol{S}$的边界）：

1→2→3→4



$\boldsymbol{A}_1$: 1 $(0, b-a)$

$\boldsymbol{A}_2$: 4 $(0,-b+a)$

$$\Phi=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_1^2 \boldsymbol{A}_1\cdot d\boldsymbol{l}+0+\int_3^4 \boldsymbol{A}_2\cdot d\boldsymbol{l}+0$$

$$=\boldsymbol{A}_1\Delta z+\boldsymbol{A}_2(-\Delta z)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{(b-a+b)^2}{(b-a-b)^2}-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{(-b+a+b)^2}{(-b+a-b)^2}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{(2b-a)^2}{a^2}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{2b-a}{a}$$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

例3-12：磁偶极子远区磁场***A***，***B***。　$r \gg a$

分析：首先磁场具有轴对称特征，***A***只有ϕ方向分量，即 $\boldsymbol{A} = A_\phi(r,\theta)\boldsymbol{e}_\phi$

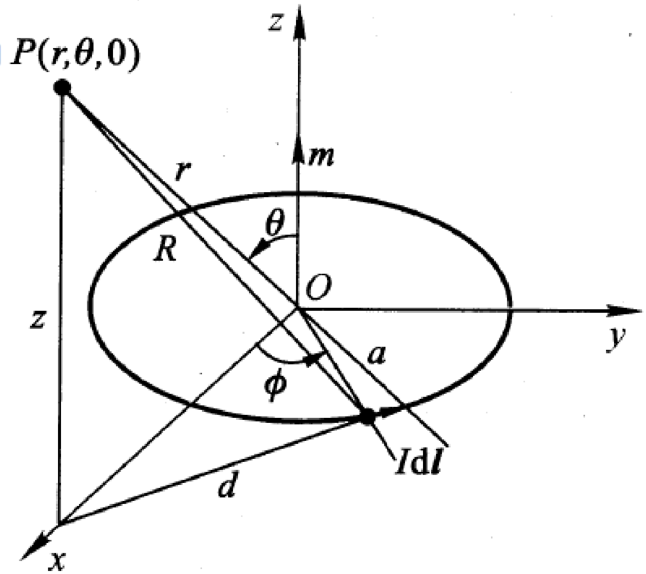
定义：　　磁偶极矩：***m=IdS***

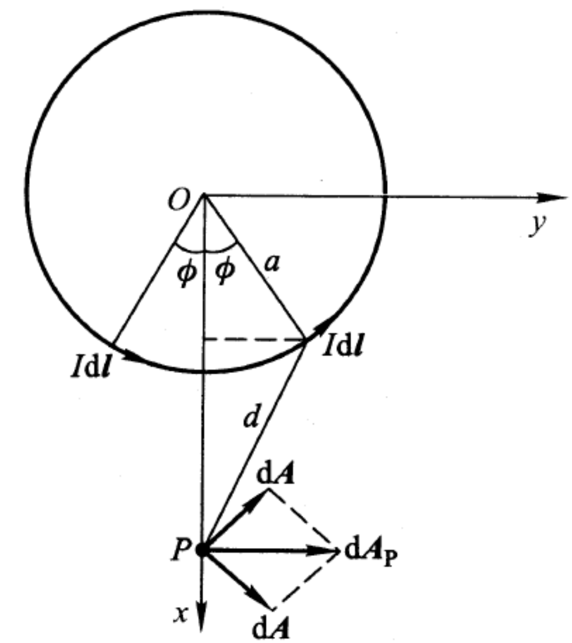
解：　　要求***A***，先取元电流***Idl***，建立球坐标系，

$$d\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I d\boldsymbol{l}}{4\pi R}$$

在子午面两侧取对称的元电流，使得*P*点***dA***只有ϕ方向分量，

$$d\boldsymbol{A}_p = 2d\boldsymbol{A}\cos\phi = 2\frac{\mu_0 Iad\phi}{4\pi R}\cos\phi\boldsymbol{e}_\phi$$





3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

$$\boldsymbol{A}_p=\int_0^{\pi} d\boldsymbol{A}_p=\int_0^{\pi} 2d\boldsymbol{A}\cos\phi=\int_0^{\pi} 2\frac{\mu_0 Iad\phi}{4\pi R}\cos\phi\boldsymbol{e}_\phi$$

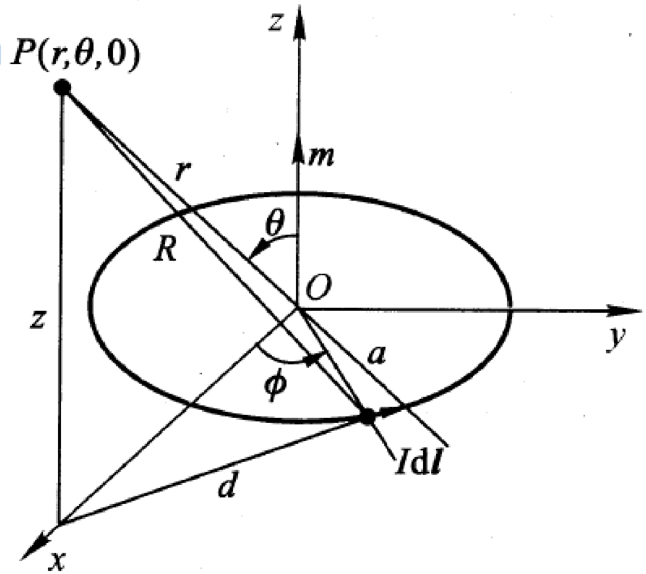
$$=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\phi}{R}d\phi\boldsymbol{e}_\phi$$

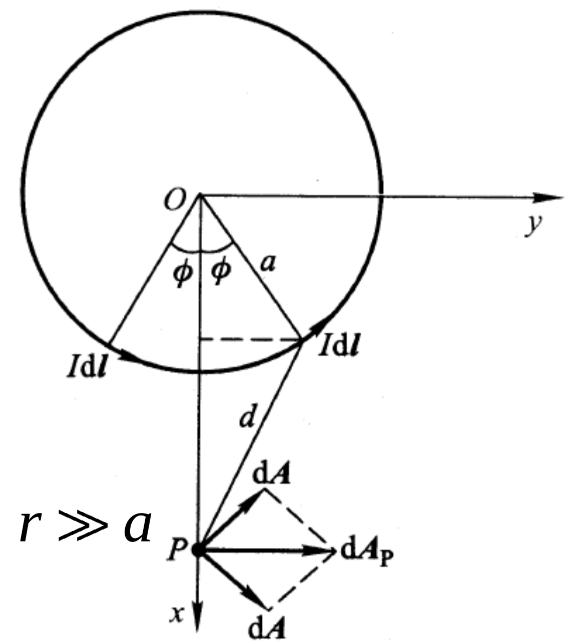
由 $R=\sqrt{z^2+d^2}=\sqrt{(r\cos\theta)^2+d^2}$

$$d^2=(a\sin\phi)^2+(r\sin\theta-\cos\phi)^2$$

$$R=\left(r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\phi\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\phi}}$$





由 $r\gg a$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

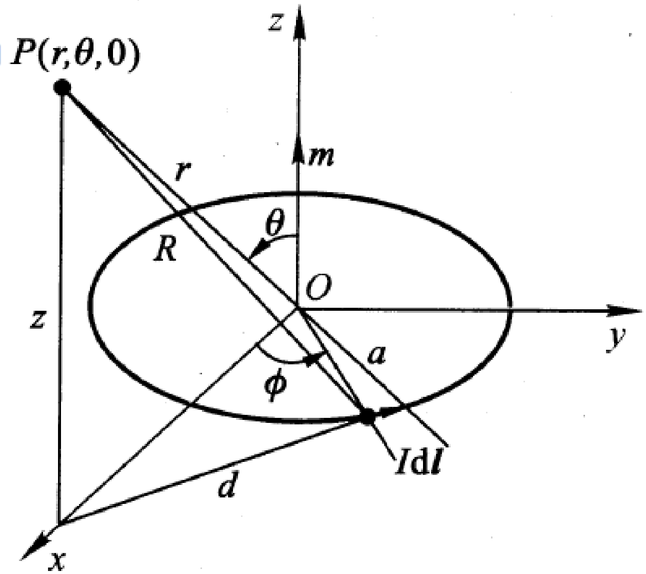
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\sin\theta\cos\phi}}$$

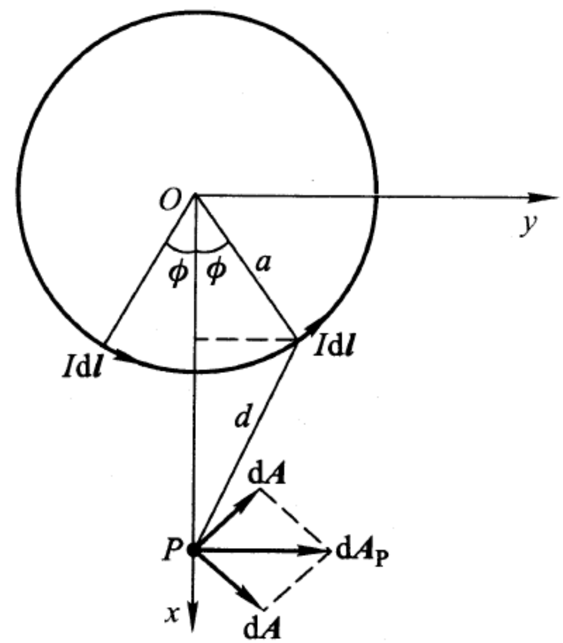
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\sin\theta\cos\phi\right)^{-1/2}$$

由 $r \gg a$ ⇨ $R \gg a$

⇨
$$\frac{1}{R}\approx\frac{1}{r}\left(1-\frac{2a}{r}\sin\theta\cos\phi\right)^{-1/2}$$
$$\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi\right)$$

代入前式





3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

$$\boldsymbol{A}_p=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\phi}{R}d\phi\boldsymbol{e}_\phi$$

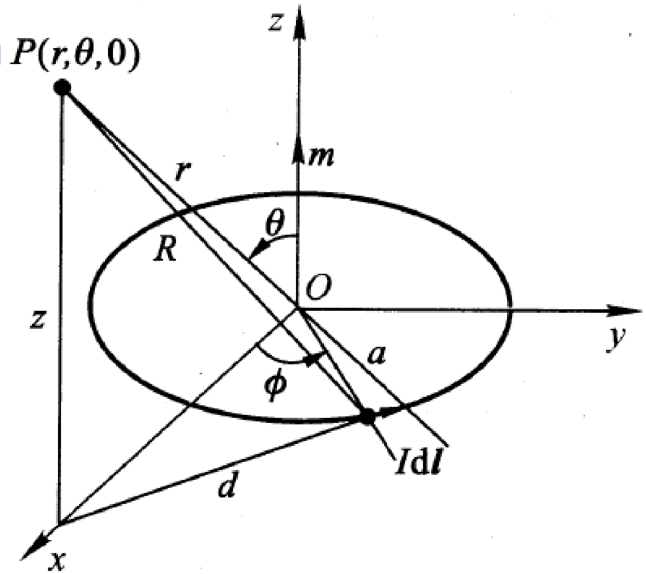
$$=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi\right)\cos\phi d\phi\boldsymbol{e}_\phi$$

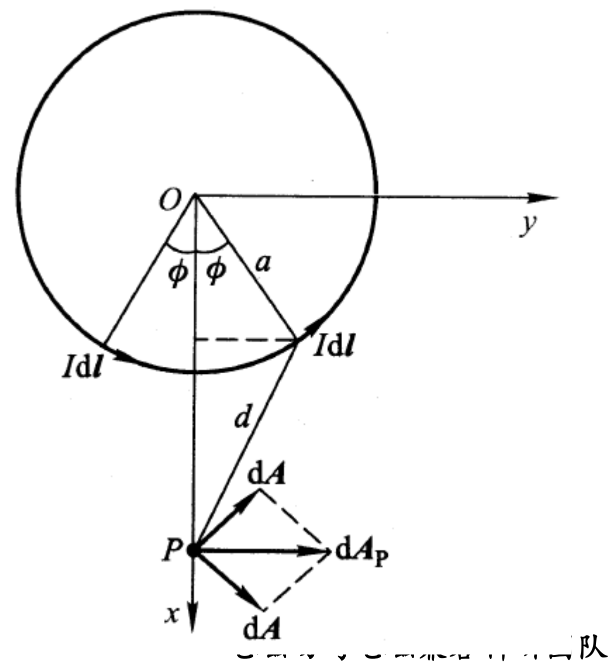
$$=\frac{\mu_0 I\pi a^2}{4\pi r^2}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)$$





3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

磁偶极子：

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_p = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2} \\ \boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) \end{cases}$$

电偶极子：

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2} \\ \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) \end{cases}$$

磁偶极子远区的磁场，与电偶极子远区的电场具有相同的分布形态；不同的是所不同的是电场线起始于正电荷，终止于负电荷，而磁场线自身闭合。

3.4.3 磁场线

与电力线的定义类似，对于描述磁场$\boldsymbol{B}$分布的磁力线有

$$\boldsymbol{B}\times d\boldsymbol{l}=0$$

$$\Rightarrow\left(B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z\right)\times\left(dx\boldsymbol{e}_x+dy\boldsymbol{e}_y+dz\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$=\left(B_y dz-B_z dy\right)\boldsymbol{e}_x+\left(B_z dx-B_x dz\right)\boldsymbol{e}_y+\left(E_x dy-E_y dx\right)\boldsymbol{e}_z=0$$

$$\Rightarrow\quad\frac{dx}{B_x}=\frac{dy}{B_y}=\frac{dz}{B_z}$$

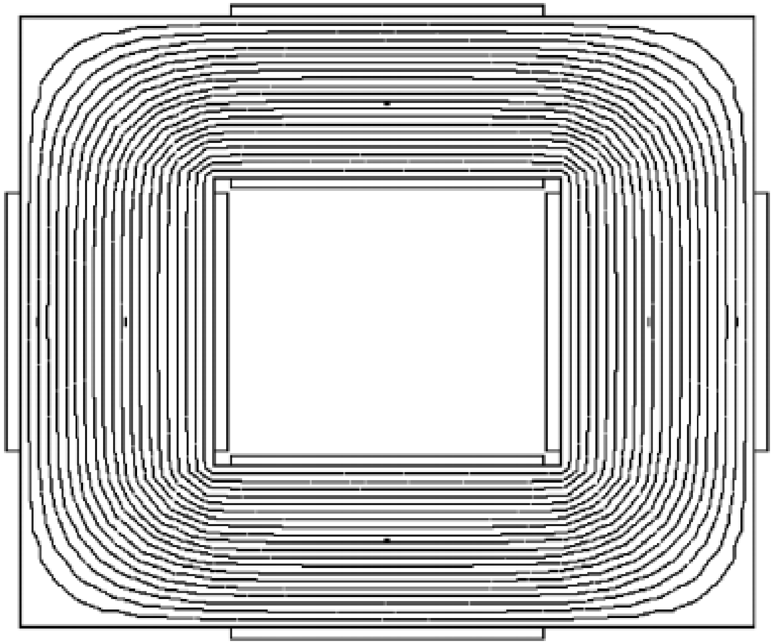
对于平行平面场，当给定 $\boldsymbol{J}=J_z\left(x,y\right)\boldsymbol{e}_z$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}=A_z\left(x,y\right)\boldsymbol{e}_z$

由 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$

3.4.3 磁场线

与电力线的定义类似，对于描述磁场**B**分布的磁力线有

$$\boldsymbol{B}\times d\boldsymbol{l}=0$$



$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}\qquad B_y=-\frac{\partial A_z}{\partial x}\qquad B_z=0$$

将上式代入前式 $\dfrac{dx}{B_x}=\dfrac{dy}{B_y}$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}dx+\frac{\partial A_z}{\partial y}dy=0 \qquad dA_z=0$$

$A_z=C$　　A_z取定值的轨迹，即为**B**线。

3.5 媒质中的磁场

3.5.1 媒质磁化

磁偶极子：

电子围绕原子核轨道运动 ➡ 环形电流 ➡ 磁偶极子 ➡ 轨道磁矩

原子、电子自旋 ➡ 磁偶极子 ➡ 自旋磁矩

为描述媒质的宏观磁化状态，定义，

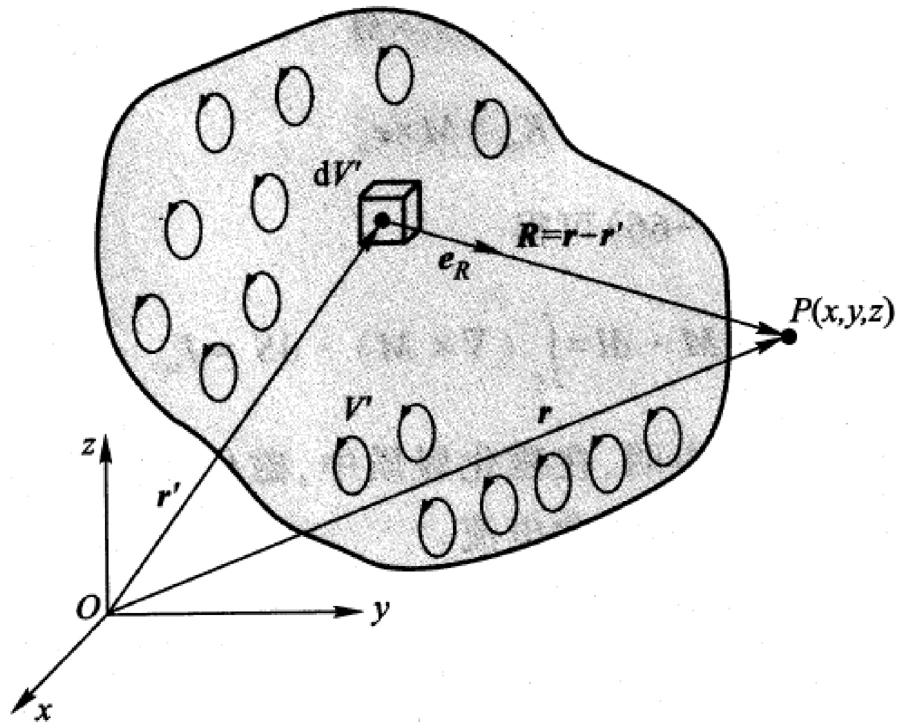
磁化强度***M***：
$$\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{m}}{\Delta V}\quad (A/m)$$

意义：单位体积中微观磁偶极矩***m***矢量之和。

3.5.1 媒质磁化

单个磁偶极子： $\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$



$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}\qquad \boldsymbol{A}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}_2\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}\;\ldots.$$

dV' 对应于P点处的场，

$$d\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{M}\times\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dV'$$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

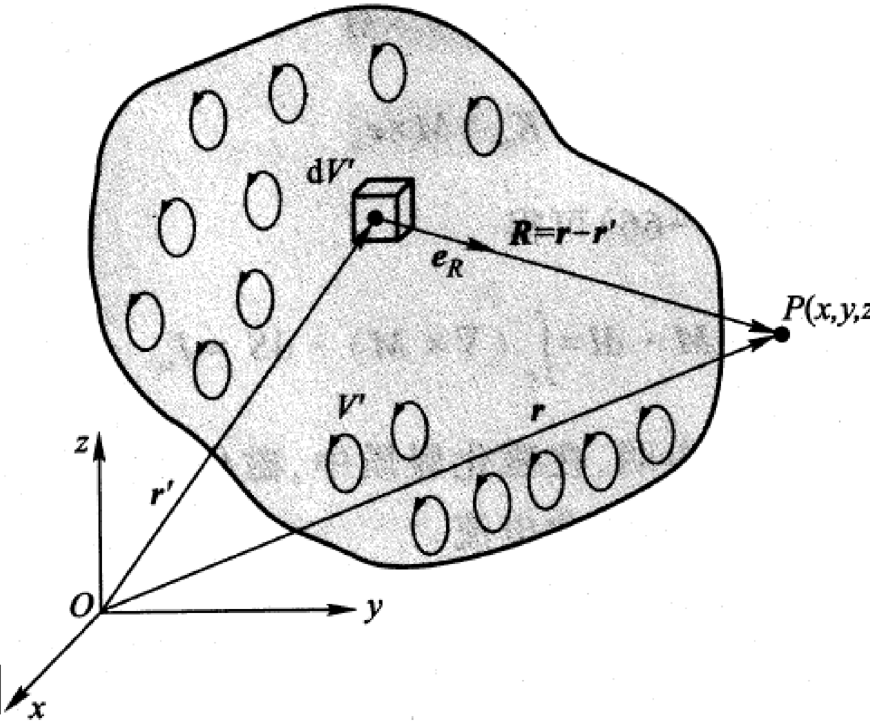
3. 5. 1 媒质磁化

$$\boldsymbol{A}=\int_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{M}\times\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dV'$$

由矢量恒等式

$$\nabla\times(\Psi\boldsymbol{A})=\Psi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\Psi\times\boldsymbol{A}$$
$$=\Psi\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\nabla\Psi$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'(\frac{1}{R})=\frac{1}{R}\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')-\nabla'\times[\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}]$$



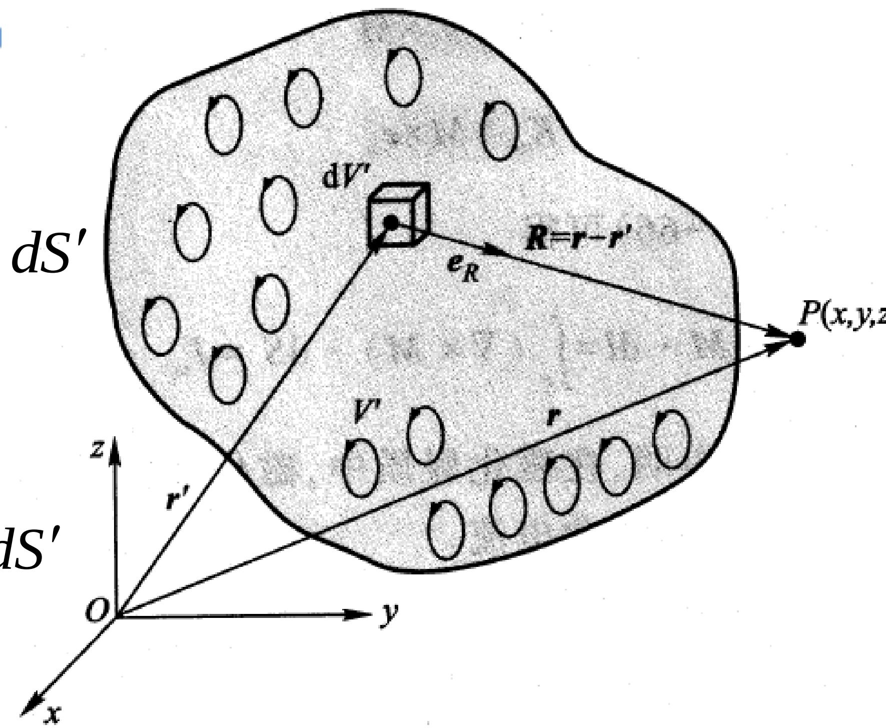
$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}dV'-\int_{V'}\nabla'\times[\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}]dV'$$

由矢量恒等式　$\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\oint_S(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}S$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.5.1 媒质磁化

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}dV'+\oint_{S'}\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_n}{R}dS'$$



自由空间传导电流产生磁场，

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{R}dV' \qquad \boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\boldsymbol{K}_c(\boldsymbol{r}')}{R}dS'$$

比较发现，规律一致，故定义如下

$$\boldsymbol{J}_m=\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \qquad \boldsymbol{K}_m=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_n$$

磁化体电流密度　　　　　　　　磁化面电流密度

$$\oint_l \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S[\nabla\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')]\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S \boldsymbol{J}_m\cdot d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_m$$

3.5.2 一般形式的安培环路定律

自由空间： $\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum I$

媒质空间： $\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \left(\sum I + \sum I_m\right)$

$$\Rightarrow \oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \left(\sum I + \oint_l \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l}\right) \Rightarrow \oint_l \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right)\cdot d\boldsymbol{l} = \sum I$$

定义： $\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \quad (A/m)$ $\Rightarrow$ $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \sum I$

对多数媒质： $\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$ $\Leftarrow$ 磁化率

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}\right) = \underline{\mu_0\left(1+\chi_m\right)}\boldsymbol{H} = \underline{\mu}\boldsymbol{H} \qquad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \left(1+\chi_m\right)$$

磁导率 相对磁导率

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.5.3 不同媒质分界面的边界条件

（1）两种不同磁媒质

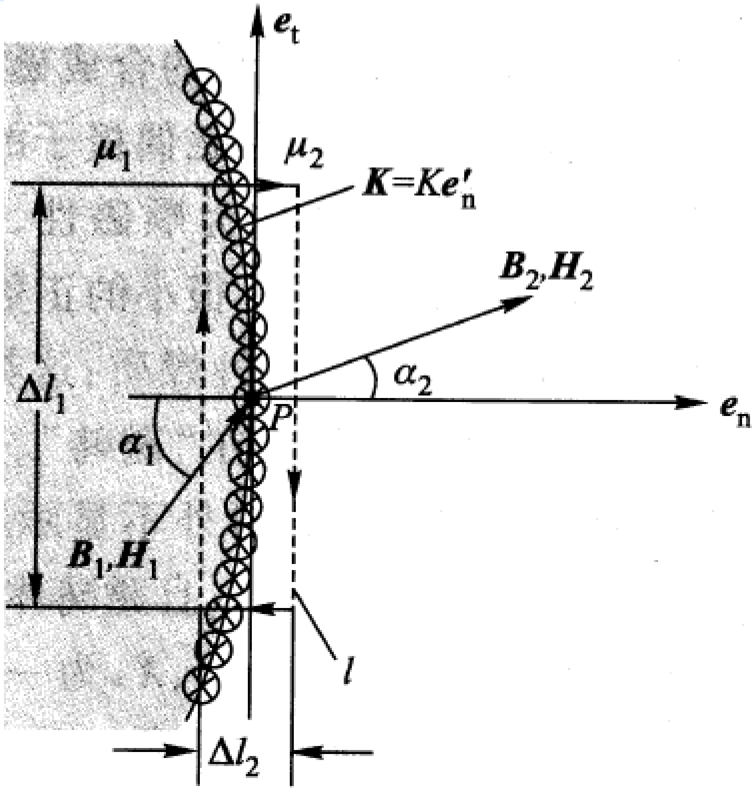
$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \sum I = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$$

设分界面上，电流密度 $\boldsymbol{K} = K\boldsymbol{e}_n{}'$ $\left(\boldsymbol{e}_n{}' = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n\right)$

分界面两侧作一个狭小的矩形回路

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = H_{1t}\Delta l_1 - H_{2t}\Delta l_1 = K\Delta l_1$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$



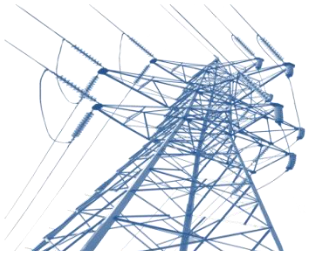
通常情况下，不同磁媒质分界面处，不存在自由面电流，即$\boldsymbol{K}$=0

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$\boldsymbol{e}_n \times \left(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1\right) = \boldsymbol{K}$$

同理由 $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$ $\Rightarrow$ $B_{1n} = B_{2n}$

$$\boldsymbol{e}_n \cdot \left(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1\right) = 0$$



3.5.3 不同媒质分界面的边界条件

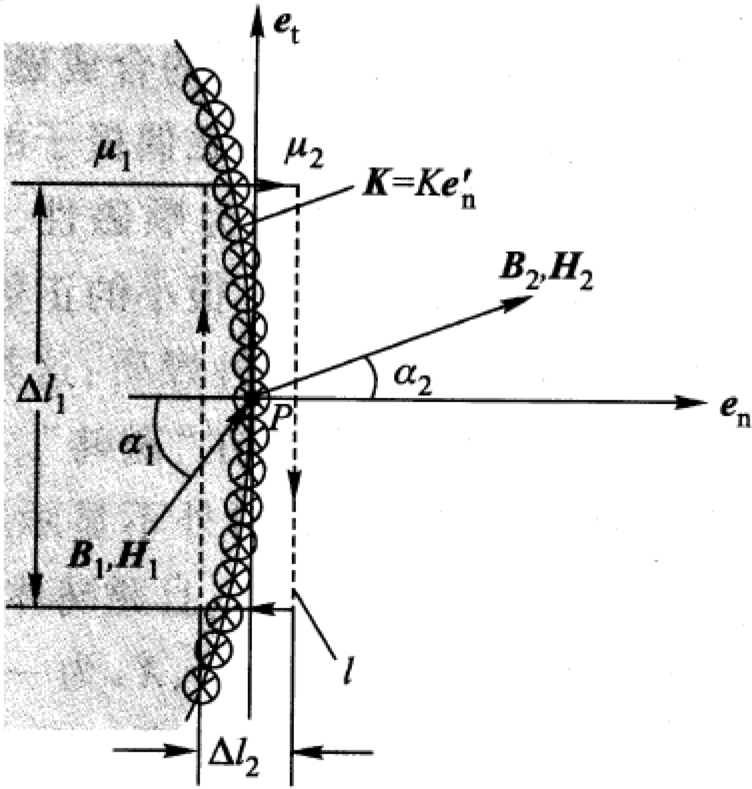
折射定理：$\dfrac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}=\dfrac{\mu_1}{\mu_2}$

（2）铁磁媒质与空气分界面 $\mu_1 \gg \mu_2 \approx \mu_0$

由折射定理可知，只要$\alpha_1 \neq \pi/2$，则 $\alpha_2 \to 0$

即空气侧场线近似垂直于分界面

$$B_{1n}=B_{2n} \quad H_{1t}=H_{2t}\approx 0$$



$$H_{1t}=H_{2t}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \quad \Rightarrow \quad B_{1n}=B_{2n}$$

$$\boldsymbol{e}_n\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{K}$$

$$\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$$

3.5.3 不同媒质分界面的边界条件

（3）基于$\boldsymbol{A}$的表述

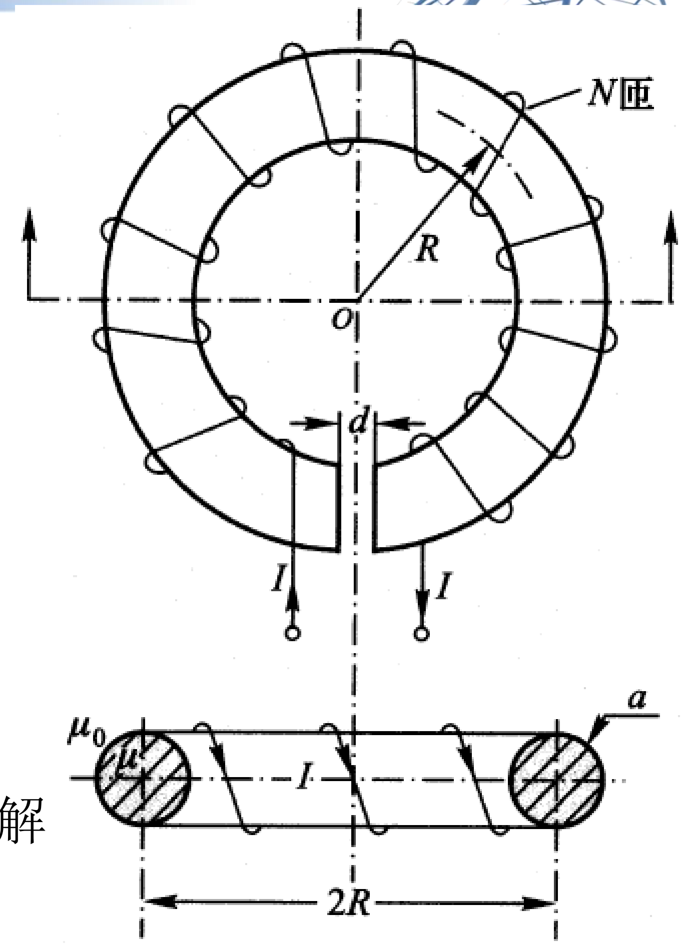
$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 \\ \dfrac{1}{\mu_1}\left(\nabla \times \boldsymbol{A}_1\right)_t - \dfrac{1}{\mu_2}\left(\nabla \times \boldsymbol{A}_2\right)_t = K \end{cases}$$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.5.4　场的分布

（1）基于场量$\boldsymbol{H}$的分析

例3-15 截面半径$a \ll R$， $d \ll R$，磁导率为μ，求铁心及气隙中$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B}$



解：设　铁心中：$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B}$　　气隙中：$\boldsymbol{H}_\delta$，$\boldsymbol{B}_\delta$

由安培环路定理，　　$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = NI$

$$H_\delta d + H\left(2\pi R - d\right) = NI$$

由分界面边界条件，

$$B_n = B_{\delta n} \Rightarrow B = B_\delta \Rightarrow \mu H = \mu_0 H_\delta$$

联立求解

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

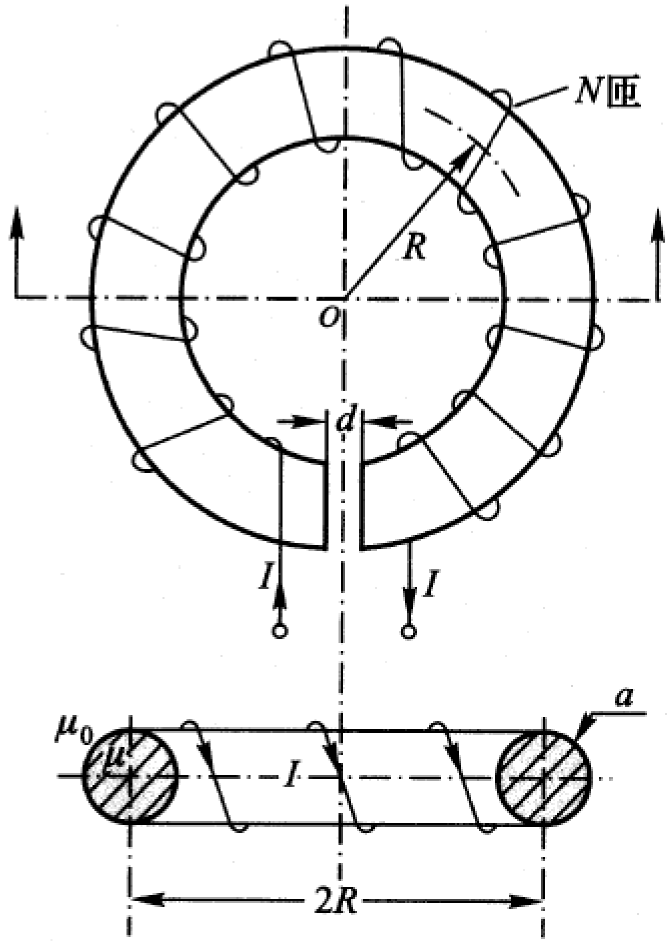
3. 5. 4　场的分布

（1）基于场量$\boldsymbol{H}$的分析

$$\boldsymbol{H}=\frac{NI}{\mu_r d+\left(2\pi R-d\right)}\boldsymbol{e}_\phi \qquad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

$$H_\delta=\frac{\mu}{\mu_0}H=\frac{\mu_r NI}{\mu_r d+\left(2\pi R-d\right)} \qquad B_\delta=\mu_0 H_\delta$$

$$\boldsymbol{H}_\delta=H_\delta\boldsymbol{e}_\phi \qquad \boldsymbol{B}_\delta=\mu_0\boldsymbol{H}_\delta$$



3.5.4 场的分布

（2）基于边值问题

前面关于磁场的求解：

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}dV' \\ &\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\sum I \\ &\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} = \sum I \end{aligned}\right\} \text{积分}$$

前面关于磁场的方程：

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \\ &\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \\ &\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \end{aligned}\right\} \text{微分}$$

3.5.4 场的分布

（2）基于边值问题

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_c \\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \end{array}\right\} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}_c$$

分析： 对于矢量场$\boldsymbol{A}$，需由其散度和旋度唯一确定，故由 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 可知，仍需要定义其散度

规定： $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 库仑规范

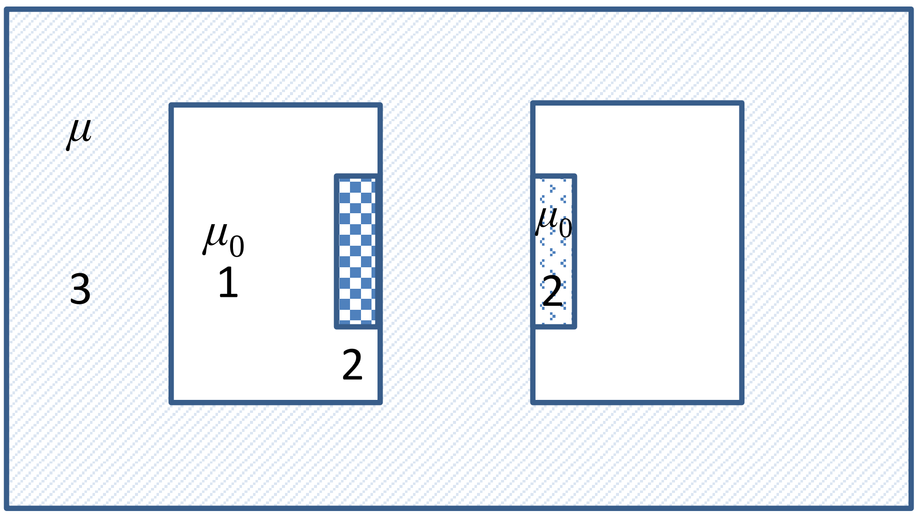
$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}_c \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_{cx} \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_{cy} \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_{cz} \end{array}\right.$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.5.4 场的分布

（2）基于边值问题

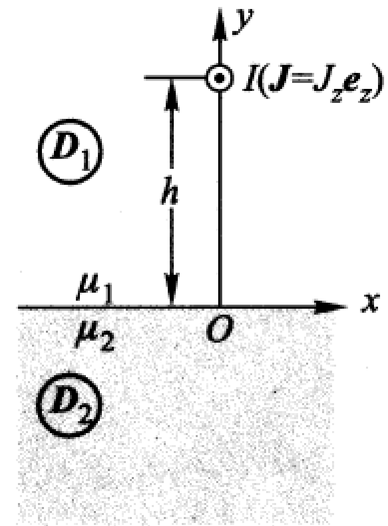
思考题： 对1,2,3区域分别列写关于A_z的边值问题，大致画出$\boldsymbol{B}$线走势。



3.5.4　场的分布

（3）镜像法　与静电场中类似，根据恒定磁场解的唯一性，计算和分析无限长直载流导线在空间的磁场问题

$$
\begin{cases}
\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_{cz} \\
A_{z1}\big|_{y=0} = A_{z2}\big|_{y=0} \quad (H_{1t} = H_{2t}) \\
\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial A_{z1}}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial A_{z2}}{\partial n} \quad (B_{1n} = B_{2n})
\end{cases}
$$



(a) 线电流–无限大平表面媒质系统

如何取镜像？

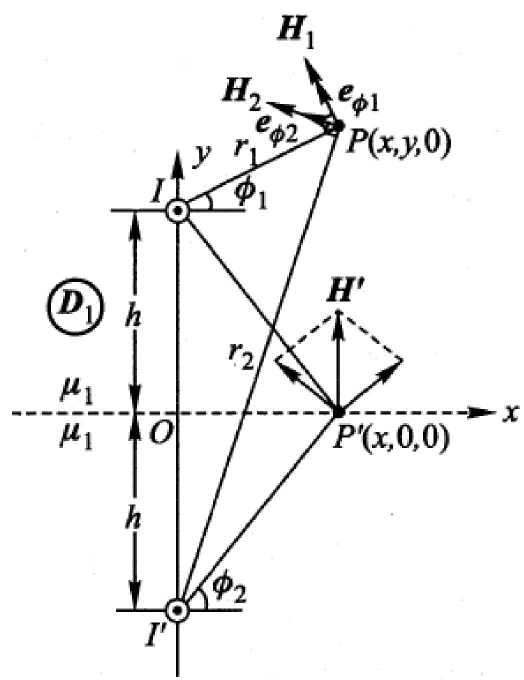
3.5.4 场的分布

（3）镜像法 与静电场中类似，根据恒定磁场解的唯一性，计算和分析无限长直载流导线在空间的磁场问题

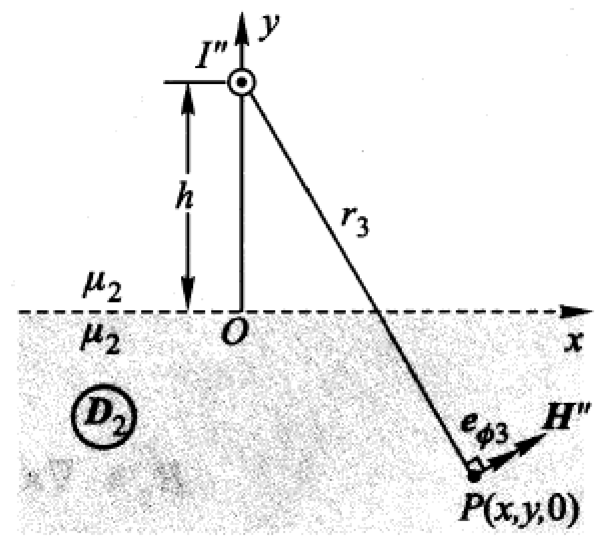
由
$$\begin{cases} \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_{cz} \\ A_{z1}\big|_{y=0} = A_{z2}\big|_{y=0} \\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial A_{z1}}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial A_{z2}}{\partial n} \end{cases}$$

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I$$

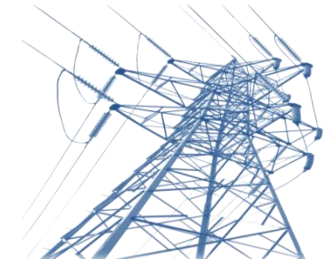
$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I$$



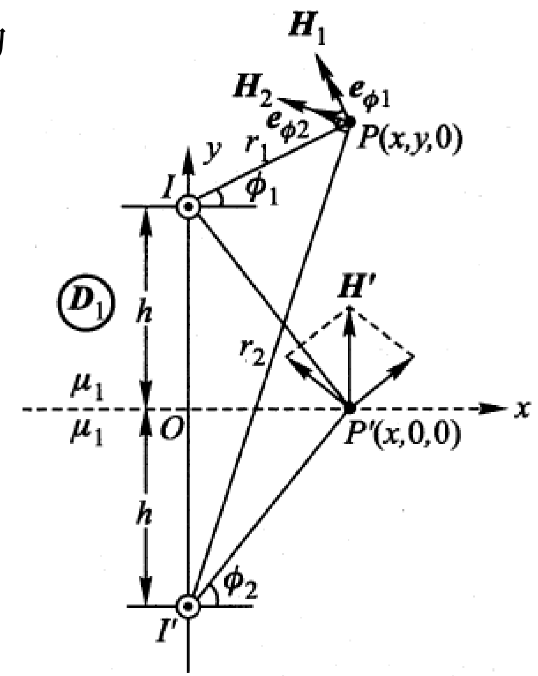
(b) 上半空间磁场的镜像法图示



(c) 下半空间磁场的镜像法图示



例3-18： 设一根载流为I的无限长直导线平行放置在无限大铁磁媒质表面上方，间距为h，试求空气中和铁磁媒质中的磁场



(b) 上半空间磁场的镜像法图示

解：由前面的分析可知， $\mu_1=\mu_0,\ \mu_2=\mu_\infty$

$$I'=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I=\frac{\mu_\infty-\mu_0}{\mu_0+\mu_\infty}I\approx I$$

$$I''=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I=\frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu_\infty}I\approx 0$$

（1）上半空间： $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2=\frac{I}{2\pi r_1}\boldsymbol{e}_{\phi1}+\frac{I}{2\pi r_2}\boldsymbol{e}_{\phi2}$

其中 $r_1=\sqrt{x^2+(y-h)^2}$ $r_2=\sqrt{x^2+(y+h)^2}$

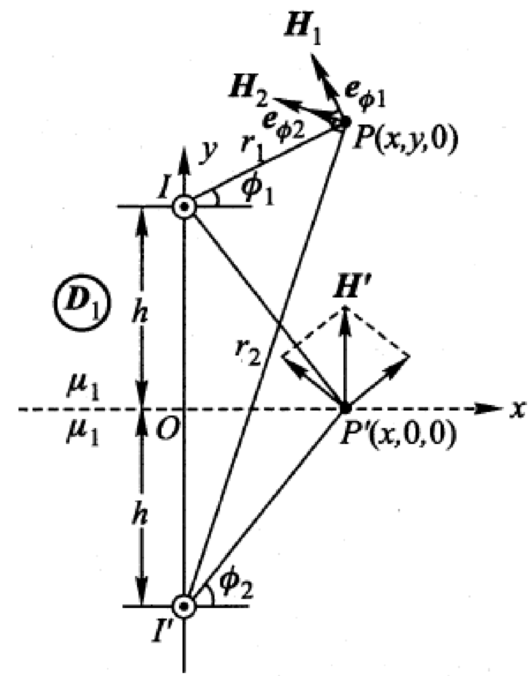
由单位矢量转换关系，
$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{\phi1}=-\boldsymbol{e}_x\sin\phi_1+\boldsymbol{e}_y\cos\phi_1\\ \boldsymbol{e}_{\phi2}=-\boldsymbol{e}_x\sin\phi_2+\boldsymbol{e}_y\cos\phi_2\end{cases}$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

又由
$$\begin{cases} \sin\phi_1 = \dfrac{y-h}{r_1}; \quad \cos\phi_1 = \dfrac{x}{r_1} \\ \sin\phi_2 = \dfrac{y+h}{r_2}; \quad \cos\phi_2 = \dfrac{x}{r_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi}\left[-\left(\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2}+\frac{y+h}{x^2+(y+h)^2}\right)\right]\boldsymbol{e}_x$$

$$= \frac{I}{2\pi}\left[\left(\frac{x}{x^2+(y-h)^2}+\frac{x}{x^2+(y+h)^2}\right)\right]\boldsymbol{e}_y$$



(b) 上半空间磁场的镜像法图示

在边界上（y=0）任意一点处:

$$\boldsymbol{H}\Big|_{y=0} = \frac{Ix}{\pi\left(x^2+h^2\right)}\boldsymbol{e}_y$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

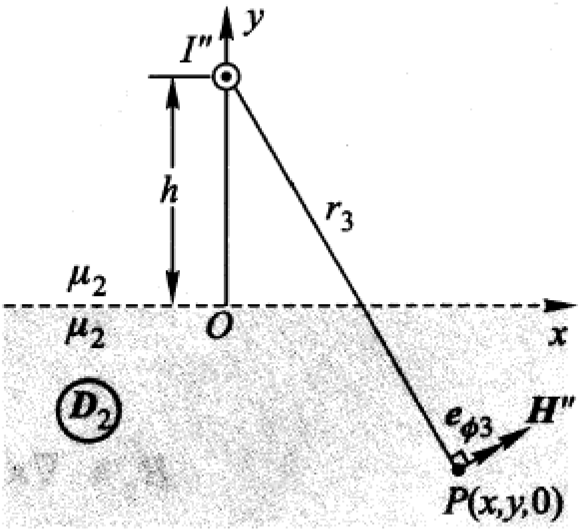
（2）下半空间

由于 $I'' \approx 0$ ⇨ $\boldsymbol{H} \approx 0$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_\infty \boldsymbol{H} = ??$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_\infty \boldsymbol{H} = \mu_\infty \frac{I''}{2\pi r_3}\boldsymbol{e}_{\phi 3} = \mu_\infty \frac{2\mu_0}{\mu_0 + \mu_\infty}\frac{I}{2\pi r_3}\boldsymbol{e}_{\phi 3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_3}\boldsymbol{e}_{\phi 3}$$

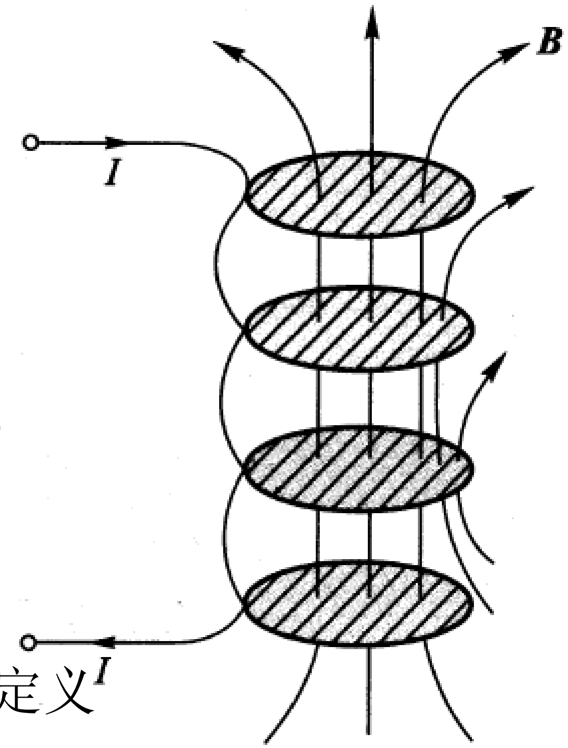


(c) 下半空间磁场的镜像法图示

3.6 电感

3.6.1 自电感

磁链： 载有电流I的线圈，其各匝交链的磁通总和，称之为磁链ψ，也称自感磁链



线圈各匝交链的磁通往往并不相同（由于漏磁存在等）

$$\Psi = \sum_{i=1}^{M} N_i \Phi_i$$

对线性媒质，线圈**自感磁链**ψ与其励磁电流I成正比，定义

$$L = \frac{\Psi}{I}$$ 静态自感系数

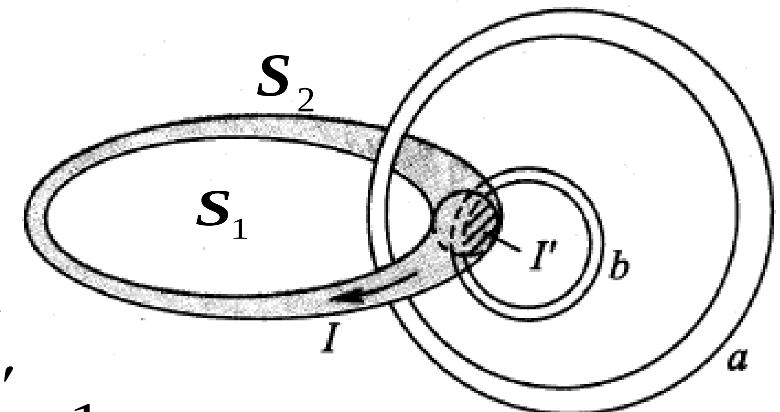
对非线性媒质，定义 $$L = \frac{d\Psi}{dI}$$ 静态自感系数

3.6.1 自电感

自感磁链： 外磁链+内磁链 （载流导体截面较大，不可忽略时）

a. 外磁链：与电流完全交链的磁通之和

b. 内磁链：与电流部分交链的磁通之和



a. 外磁链对应磁通：$d\boldsymbol{S}_1 \rightarrow d\Phi_1 \quad \rightarrow I \qquad 1$

b. 内磁链对应磁通：$d\boldsymbol{S}_2 \rightarrow d\Phi_2 \quad \rightarrow I' \qquad \dfrac{I'}{I}\times 1$

$$d\Psi_{\mathrm{o}} = d\Phi_1 \times 1 \quad \Rightarrow \quad \Psi_{\mathrm{o}} = \int_{S_1} d\Phi_1 \times 1$$

$$d\Psi_{\mathrm{i}} = d\Phi_2 \times \frac{I'}{I} \quad \Rightarrow \quad \Psi_{\mathrm{i}} = \int_{S_2} d\Phi_2 \times \frac{I'}{I}$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi_i + \Psi_o}{I}$$

$$= L_i + L_o$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.6.1 自电感

例3-19：求同轴电缆的自感。外壳厚度可忽略，导体内外径分别为a, b，长度为L，远大于a, b，内导体总电流I，绝缘层 $\mu \approx \mu_0$

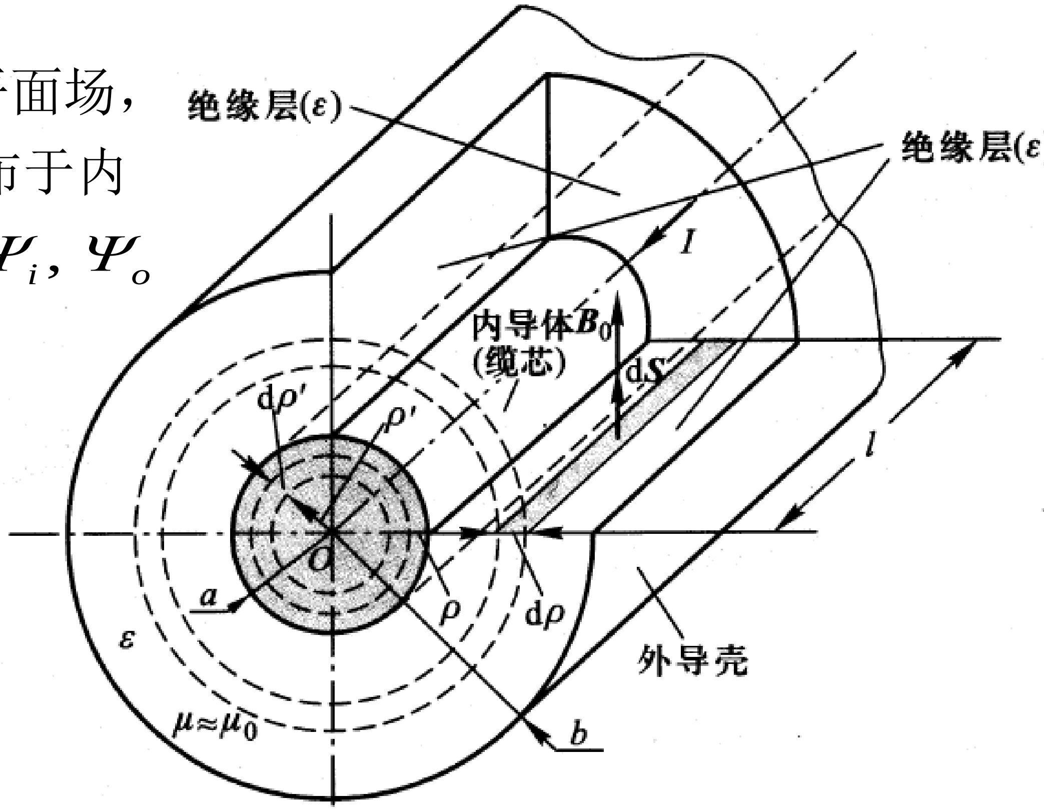
解： 由于 $L \gg b$，可视为平行平面场，场具有圆柱对称性，磁场分布于内导体和绝缘层，分别对应于 Ψ_i, Ψ_o

（1）外磁链ψ_0：

$$\Psi_o = \int_{S_1} d\Psi_o = \int_{S_1} d\Phi_o \times 1$$

$$= \int_{S_1} \boldsymbol{B}_o \cdot d\boldsymbol{S}$$

求$\boldsymbol{B}_0$和$\boldsymbol{H}_0$，确定面元$d\boldsymbol{S}$



3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

（1）外磁链ψ_o:

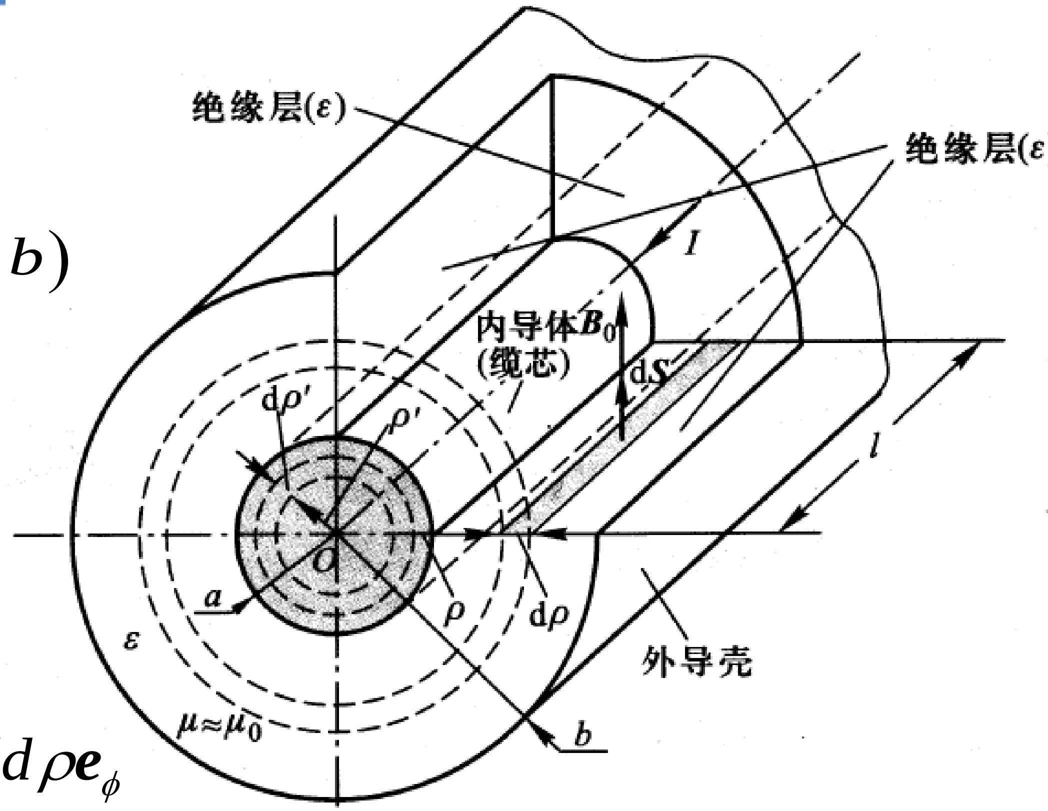
求$\boldsymbol{B}_o$和$\boldsymbol{H}_o$

作半径为ρ的环形路径$\boldsymbol{l}$ $(a < \rho < b)$

$$\oint_l \boldsymbol{H}_o \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_l H_o \boldsymbol{e}_\phi \cdot dl \boldsymbol{e}_\phi$$

$$= \oint_l H_o dl = H_o \oint_l dl = I$$

$$\boldsymbol{H}_o = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi \qquad \boldsymbol{B}_o = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$



取长度为l，宽为$d\rho$的面元　$d\boldsymbol{S} = l d\rho \boldsymbol{e}_\phi$

$$\Psi_o = \int_{S_1} d\Psi_o = \int_{S_1} d\Phi_o = \int_{S_1} \boldsymbol{B}_o \cdot d\boldsymbol{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

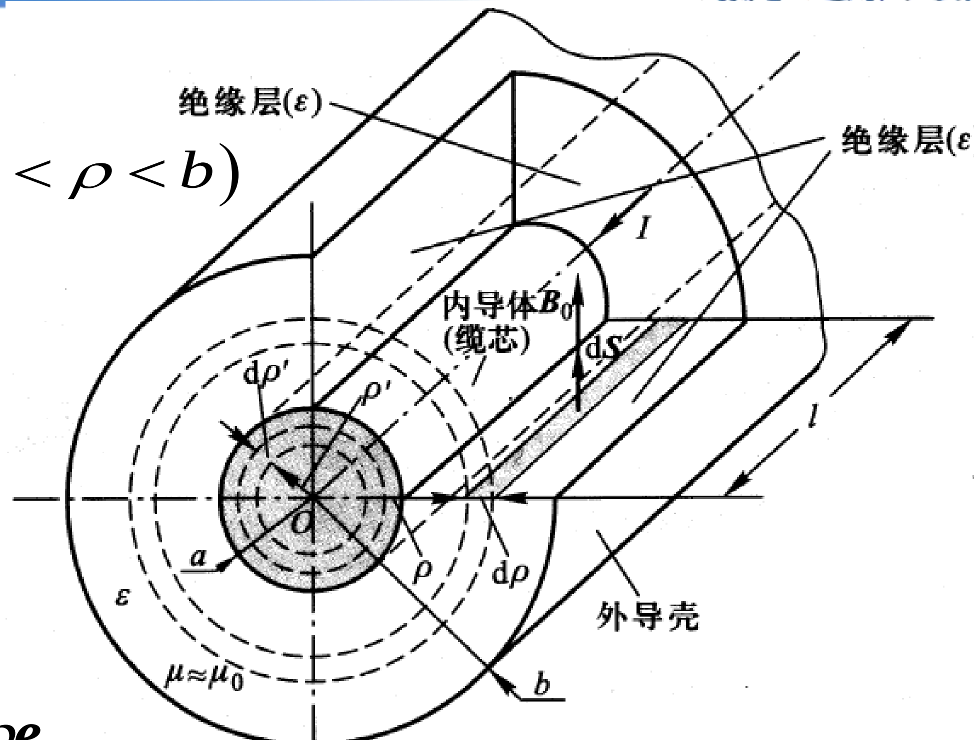
（2）内磁链$\psi_{\rm i}$：

求$\boldsymbol{B}_{\rm i}$和$\boldsymbol{H}_{\rm i}$：作半径为ρ的环形路径$\boldsymbol{l}$ $(a<\rho<b)$

$$\oint_l \boldsymbol{H}_i \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_l H_i \boldsymbol{e}_\phi \cdot dl\boldsymbol{e}_\phi = \oint_l H_i dl$$

$$= H_i \oint_l dl = I' = \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} I$$

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\phi \quad \boldsymbol{B}_i = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\phi$$



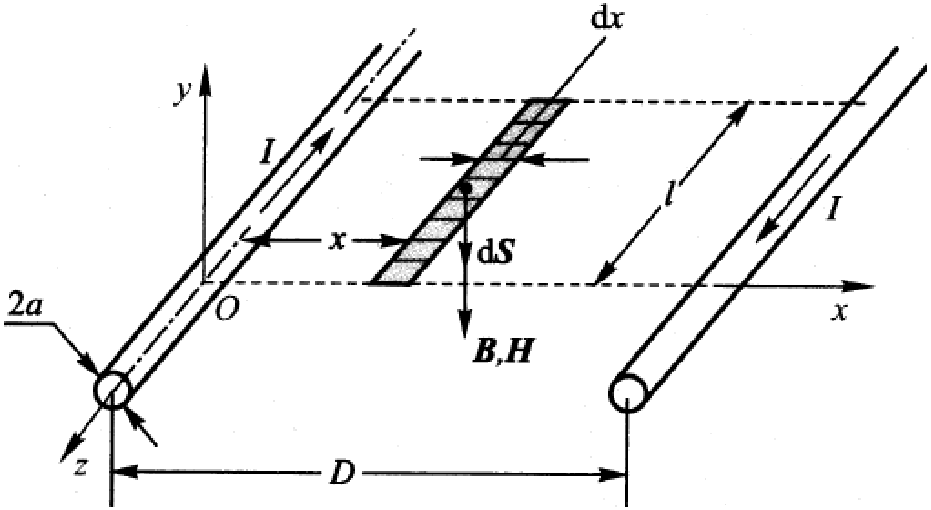
取长度为l，宽为$d\rho$的面元 $d\boldsymbol{S} = l d\rho \boldsymbol{e}_\phi$

$$\Psi_{\rm i} = \int_{S_2} d\Psi_i = \int_{S_2} d\Phi_i \times \frac{I}{I'} = \int_{S_2} \frac{I}{I'} \boldsymbol{B}_i \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^a \frac{\rho^2}{a^2}\frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2} l d\rho = \frac{\mu_0 Il}{8\pi}$$

自感： $$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi_i + \Psi_o}{I} = L_i + L_o = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a} + \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

例3-20：计算下图所示两线传输线的自感，线长为l，且远大于导线半径a和线间距D。



解：

（1）由前面分析可知，双线传输线的内自感只与长度有关，

$$L_i = \frac{\mu_0}{8\pi} 2l = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$$

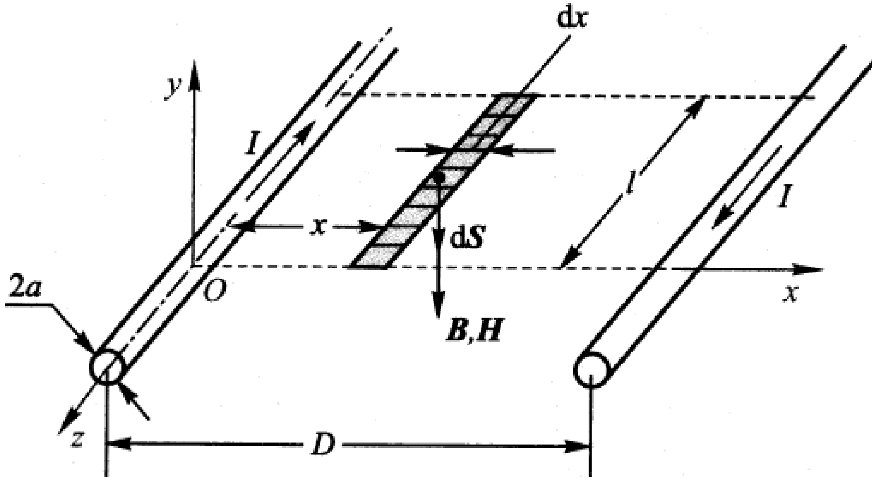
（2）外自感，可按照如下求解

$$\Psi_o = \int_S d\Psi_o = \int_S d\Phi_o = \int_S \boldsymbol{B}_o \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \mu_0 \boldsymbol{H}_o \cdot d\boldsymbol{S}$$

由安培环路和叠加定理，坐标为x处的$\boldsymbol{H}$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

$$\boldsymbol{H}_o=\left[\frac{I}{2\pi x}+\frac{I}{2\pi\left(D-x\right)}\right]\left(-\boldsymbol{e}_y\right)$$



取长度为l，宽为dx的面元 $d\boldsymbol{S}=l dx\left(-\boldsymbol{e}_y\right)$

$$\varPsi_o=\int_S d\varPsi_o=\int_S \boldsymbol{B}_o\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S \mu_0\boldsymbol{H}_o\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)dx=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}$$

$$L=L_i+L_o=\frac{\varPsi_i+\varPsi_o}{I}=\frac{\mu_0 l}{4\pi}+\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}$$

3.6.2 互电感

线性媒质中，若一个线圈k的磁链由另一个线圈h的电流I_h产生，记为互感磁链ψ_{kh}，定义线圈h对线圈k的静态互感系数

$$M_{kh} = \frac{\Psi_{kh}}{I_h} \qquad M_{hk} = \frac{\Psi_{hk}}{I_k}$$

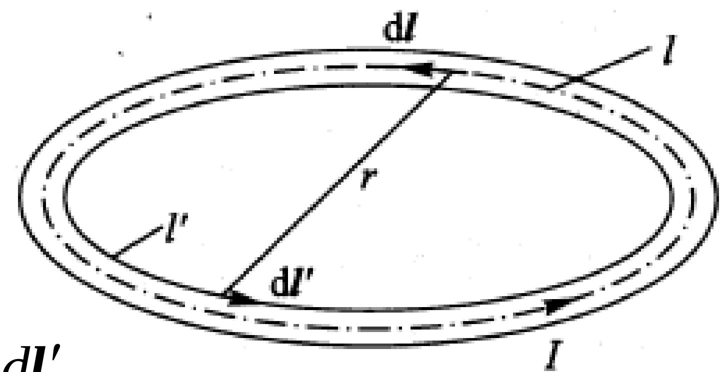
可证： $M_{kh} = M_{hk}$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

3.6.3　线形回路电感（截面可忽略）

由于截面可忽略，线电流*I*可看作集中在<u>单匝回路</u>中心轴线$\boldsymbol{l}$上流动，

$$\Psi_o = \Phi_o = \int \boldsymbol{B}_o \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{l'} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}'$$



由 $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_l \frac{I}{R} d\boldsymbol{l}$$

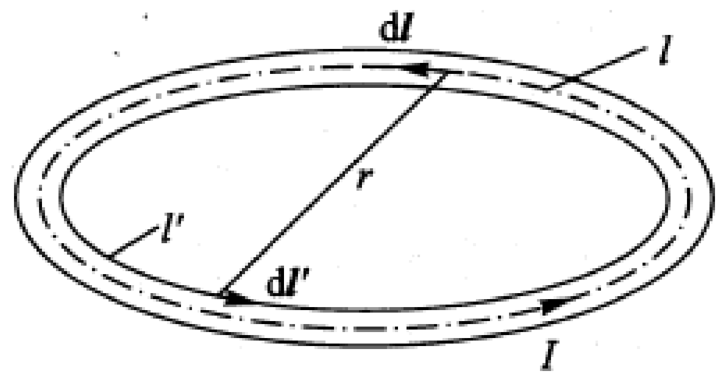
$$\Psi_o = \Phi_o = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\left(\oint_l \frac{I}{R} d\boldsymbol{l}\right)\cdot d\boldsymbol{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{l'}\oint_l \frac{d\boldsymbol{l}\cdot d\boldsymbol{l}'}{R}$$

对于多匝细导线绕制的线圈，其通过电流*I*时所产生的的磁通，可近似认为是，单匝电流I所产生的磁通的*N*倍，且该磁通与全部*N*匝线圈交链，

3.6.3 线形回路电感（截面可忽略）

外自感为

$$L_o=\frac{\Psi'}{I}=\frac{N\Phi_o'}{I}=N\frac{N\Phi_o}{I}=\frac{N^2\Phi_o}{I}$$
$$=\frac{N^2\mu_0 I}{4\pi}\oint_{l'}\oint_{l}\frac{d\mathbf{l}\cdot d\mathbf{l}'}{R}$$



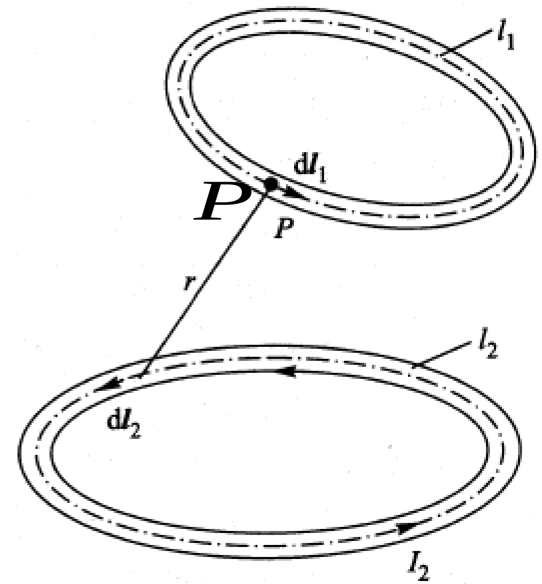
内自感：

当回路任何部位的曲率半径都大于截面半径时，其内自感等同于无限长直导线，只与其长度l有关，

$$L_i=\frac{\mu_0 l}{8\pi I}\qquad(\ll L_o)$$

$$L=L_i+L_o\approx L_o$$

3.6.3　线形回路电感（截面可忽略）



两线形回路互感：

$$\Psi_{12} = \Phi_{12} = \oint_{l_1} \boldsymbol{A}_P \cdot d\boldsymbol{l}_1 \quad = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\boldsymbol{l}_2 \cdot d\boldsymbol{l}_1}{R}$$

回路2对回路1的互感：

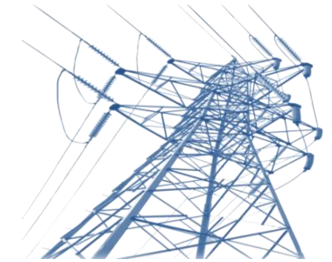
$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} == \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\boldsymbol{l}_2 \cdot d\boldsymbol{l}_1}{R}$$

同理可知，回路1对回路2的互感为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} == \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\boldsymbol{l}_2 \cdot d\boldsymbol{l}_1}{R} \quad \Rightarrow \quad M_{12} = M_{21}$$

当两个回路的匝数分别为N_1和N_2时，

$$M_{12} = M_{21} = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\boldsymbol{l}_2 \cdot d\boldsymbol{l}_1}{R}$$



3.7 磁场能量

3.7.1 载流回路系统中的磁场能量

设电流i由零逐渐增加至终值，并引起感应电动势$e=-d\Psi/dt$，外电源克服感应电动势提供给线圈能量 $dW=uidt \quad (u=-e)$

$$dW=i\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)dt=id\left(Li\right)=Lidi$$

假设过程中无能量损失（机械能、焦耳热等），电源作功转化为磁场能量，

$$dW_m=dW=Lidi$$

$$W_m=\int dW_m=\int_0^I Lidi=\frac{1}{2}LI^2$$

单个回路电感： $L=2W_m/I^2$

磁场能量：$W_m=LI^2/2=I\Psi/2$

3.7.1 载流回路系统中的磁场能量

N个载流回路系统：

设磁场建立过程如下：各回路电流按照同一比例增长（$0 \to I_k$），增长的比例系数为m（$0 \le m \le 1$），则增长过程中某一时刻k回路电流为$i_k(t)=m(t)\,I_k$，与回路k交链的磁通 $\Psi_k' = m\Psi_k$ ，在dt时间内，外源在n个载流回路中作功，

$$dW_m = dW = \sum_{k=1}^{n} i_k d\Psi_k' = \sum_{k=1}^{n} mI_k d\left(m\Psi_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} mI_k \Psi_k dm$$

当回路达到最终状态，外源所作总功：

3.7.1 载流回路系统中的磁场能量

$$W_m = \int dW_m = \sum_{k=1}^{n} I_k \Psi_k \int_0^1 m dm = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \boxed{\Psi_k}$$

对于第k个载流回路， ψ_k为自感磁链与互感磁链之和，即

$$\Psi_k = (\Psi_L)_k + (\Psi_M)_k = L_k I_k + M_{k1} I_1 + M_{k2} I_2 + \ldots + M_{kn} I_n$$

$$= L_k I_k + \sum_{h=1,h\neq k}^{n} M_{kh} I_h$$

对于第k个载流回路， ψ_k为自感磁链与互感磁链之和，即

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^{\ 2} + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\ 2} + \ldots + \frac{1}{2} L_n I_n^{\ 2} + \left(M_{12} I_1 I_2 + M_{13} I_1 I_3 + \ldots + M_{n-1,n} I_{n-1} I_n \right)$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

3.7.1 载流回路系统中的磁场能量

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}L_kI_k^{\ 2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1,h\neq k}^{n}M_{kh}I_kI_h$$

由前一节分析可知，对于某个单匝的线形回路，以k回路为例，其磁链ψ_k为

$$\Psi_k=\oint_{l_k'}\boldsymbol{A}_k\cdot d\boldsymbol{l}_k'$$

$\boldsymbol{A}_k$：各回路电流在k号回路上$d\boldsymbol{l}_k'$处产生的合磁矢量位

$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}I_k\Psi_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}I_k\oint_{l_k'}\boldsymbol{A}_k\cdot d\boldsymbol{l}_k'=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{l_k'}\boldsymbol{A}_k\boxed{I_kd\boldsymbol{l}_k'}\Rightarrow$$

元电流

$$\boldsymbol{J}_kdV_k'$$

$$\Rightarrow W_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{V_k'}\boldsymbol{A}_k\cdot\boldsymbol{J}_kdV_k'=\frac{1}{2}\int_{V'}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}dV'\left(V'=V_1'+V_2'+\ldots+V_k'\right)$$

静电场：
$$W_e=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho\varphi dV'$$

3.7.2 磁场能量分布及其密度

$$\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{J} \leftrightarrow \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

$$\Rightarrow \quad W_m = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}dV \qquad w_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \xRightarrow{\text{线性、各向同性}} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu}$$

求磁场能量：

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \Psi_k$$

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} L_k I_k{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1,h\neq k}^{n} M_{kh} I_k I_h \qquad \text{电路参数}$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}dV \qquad \text{场空间}$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{V'} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}dV' \qquad \text{源空间}$$

3. 静态电磁场 恒定电流的电场和磁场

例3-23：求同轴电缆的单位长磁场能量。

解（1）基于电路参数计算，前面已经求出过同轴电缆单位长电感为，

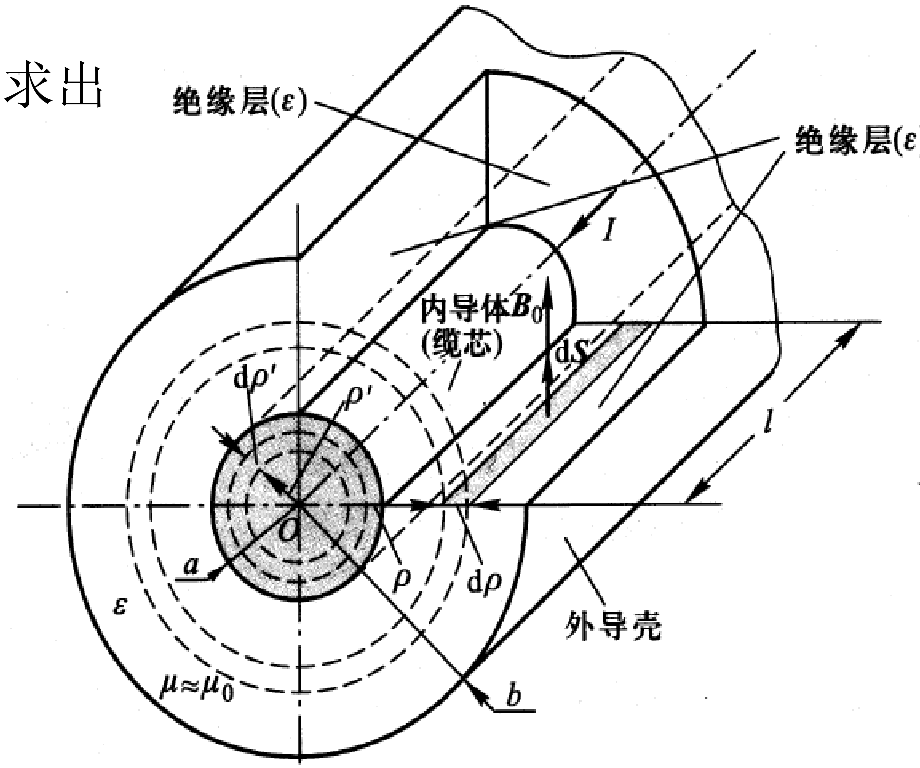
$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{4}\right)$$

$$W_m = \frac{1}{2}L\,I^{2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{4}\right)$$

（2）基于场分布计算，

内导体： $$\boldsymbol{H}_i = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\phi$$

外导体： $$\boldsymbol{H}_o = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$



$$W_{mi} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{H}_i dV = \frac{1}{2}\int_V \mu H_i^{\,2} dV$$

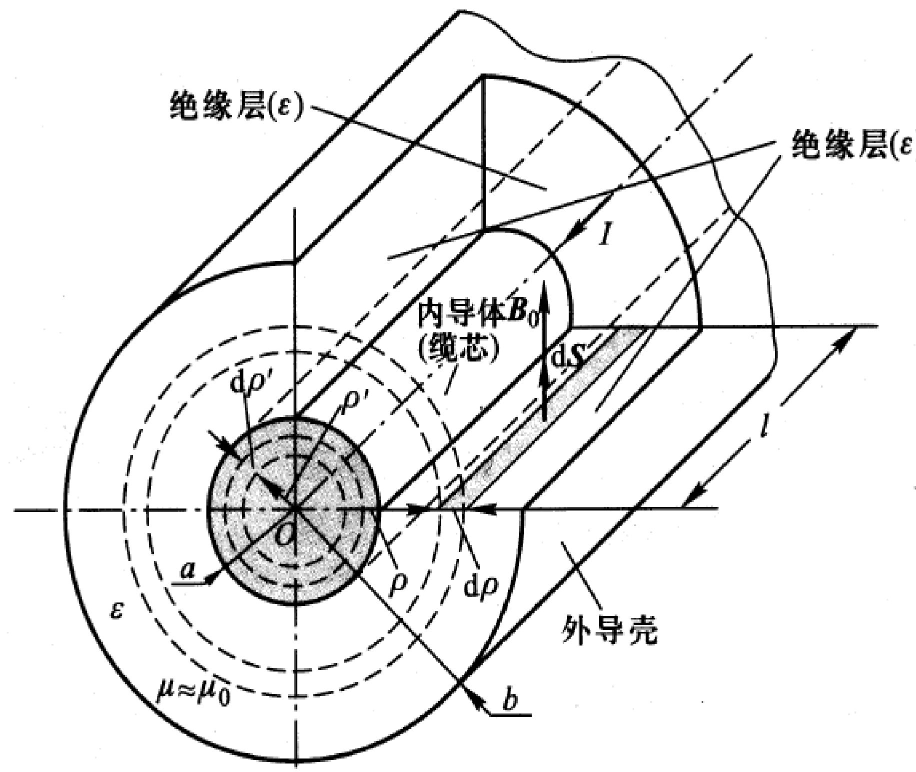
3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

$$=\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I\rho}{2\pi a^2}\right)\rho d\phi d\rho \ =\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$W_{mo}=\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}_o\cdot\boldsymbol{H}_o dV=\frac{1}{2}\int_V \mu H_o{}^2 dV$$

$$=\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)\rho d\phi d\rho$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$



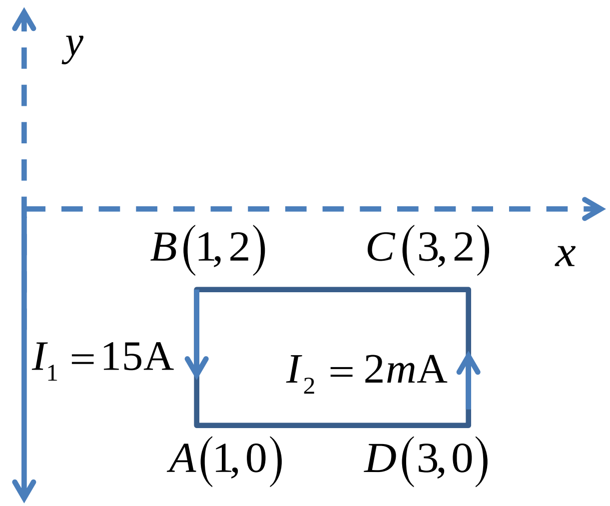
$$W_m=W_{mi}+W_{mo}=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}+\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}\ =\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{4}\right)$$

3.8　磁场力

磁场对运动电荷的力：$d\boldsymbol{F}=dq\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)$

磁场对元电流的力：　$d\boldsymbol{F}=Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$

对整个载流回路：　$d\boldsymbol{F}=\oint_l Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}=-I\oint_l \boldsymbol{B}\times d\boldsymbol{l}$



例：求载流回路受合力

解：设回路是刚性的，总力为各边受力之和，

$$d\boldsymbol{F}=\oint_{l_2} Id\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{B}=-I_2\oint_{l_2}\boldsymbol{B}\times d\boldsymbol{l}$$

$$=-2\times10^{-3}\left(\int_{BA}\boldsymbol{B}_1\times d\boldsymbol{l}+\int_{DC}\boldsymbol{B}_1\times d\boldsymbol{l}\right)$$

$$=-2\times10^{-3}\times\left(\int_{BA}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\times1}\boldsymbol{e}_z\times dl\left(-\boldsymbol{e}_y\right)+\int_{DC}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\times3}\boldsymbol{e}_z\times dl\left(-\boldsymbol{e}_y\right)\right)$$

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

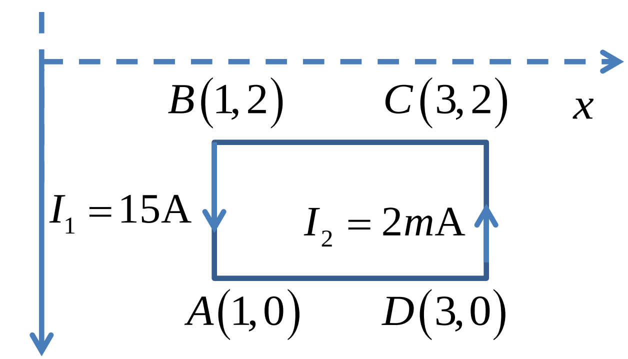
3.8　磁场力

$$= -2\times10^{-3}\times4\pi\times10^{-7}\left(\int_{BA}\frac{I_1}{2\pi\times1}dl\boldsymbol{e}_x+\int_{DC}\frac{I_1}{2\pi\times3}dl\boldsymbol{e}_x\right)$$

$$= -2\times10^{-3}\times4\pi\times10^{-7}\times15\times\left(\int_{BA}\frac{1}{2\pi\times1}dl+\int_{DC}\frac{1}{2\pi\times3}dl\right)\boldsymbol{e}_x$$

$$= -8\times10^{-9}\boldsymbol{e}_x\ (N) = -8\boldsymbol{e}_x\ (nN)$$

$$d\boldsymbol{F} = \oint_{l_2} Id\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{B}$$



思考：求载流直导线为载流回路？

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{Id\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}(I_2 d\boldsymbol{l}_2)\times\frac{I_1 d\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

麻烦

3.8　磁场力

虚位移法：

由功能守恒可得　$dW = dW_m + Fdg$

$$dW = uidt = id\Psi \left(= \sum i_k d\Psi_k \right)$$ 外源输入系统的能量

$$dW_m = \frac{1}{2}\sum i_k d\Psi_k$$ 广义坐标dg变化引起磁场能量变化

Fdg　dg方向的广义力作功

3.8 磁场力

（1）常电流系统 I_k不变，磁链变化量为$d\psi_k$

外源提供能量，故由 $dW = dW_m + Fdg$

$$\begin{cases} dW = \sum i_k d\Psi_k \\ dW_m = \frac{1}{2}\sum i_k d\Psi_k \end{cases} \Rightarrow Fdg = dW_m\big|_{I_k=C} \Rightarrow F = \frac{dW_m}{dg}\bigg|_{I_k=C}$$

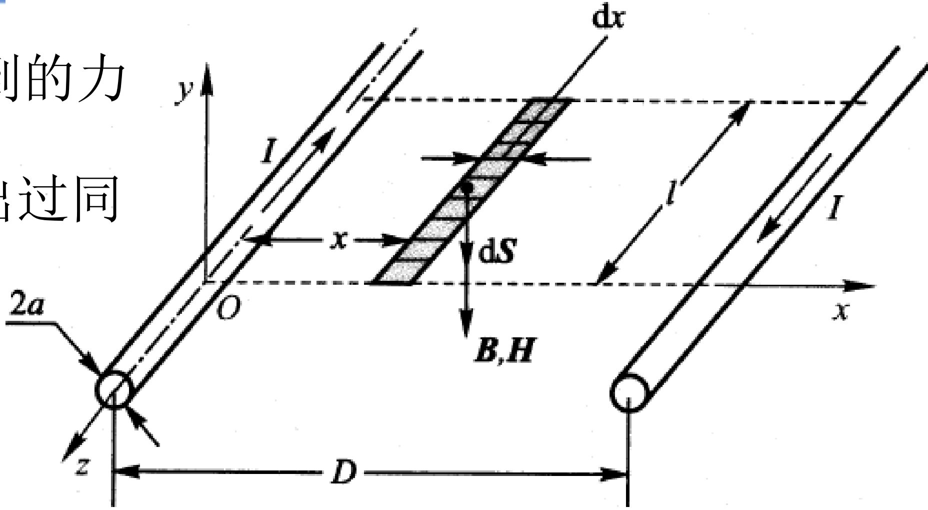
（2）常磁链系统 I_k变化，磁链不变，即$d\psi_k$

由 $d\Psi_k = 0 \rightarrow dW = 0 \Rightarrow Fdg = -dW_m\big|_{\Psi_k=C} \Rightarrow F = -\frac{dW_m}{dg}\bigg|_{\Psi_k=C}$

<u>广义力***F***的方向：广义坐标*dg*增大的方向</u>

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

例3-24：两线传输线系统，求导线所受到的力



解：基于电路参数计算，前面已经求出过同轴电缆单位长电感为，

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{D-a}{a}\right)$$

$$\approx \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{D}{a}\right)$$

系统能量 $$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \approx \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{D}{a}\right)$$

设系统为常电流系统，由虚位移法，若取广义坐标为D，导线1受力为

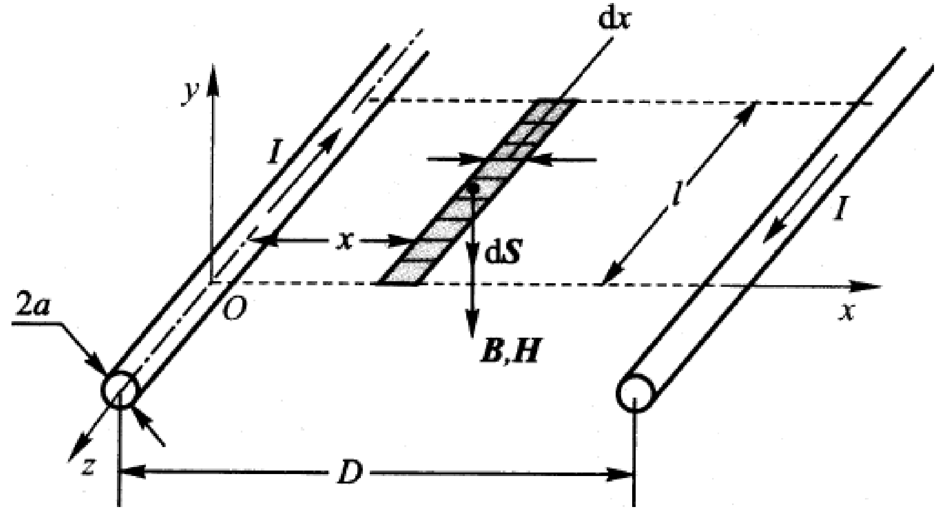
$$F_1 = \left.\frac{dW_m}{dD}\right|_{I_k=C} = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dD} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi D}$$ 正方向$\boldsymbol{e}_x$，即D增大的方向

3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

若取广义坐标为a，导线1受力为

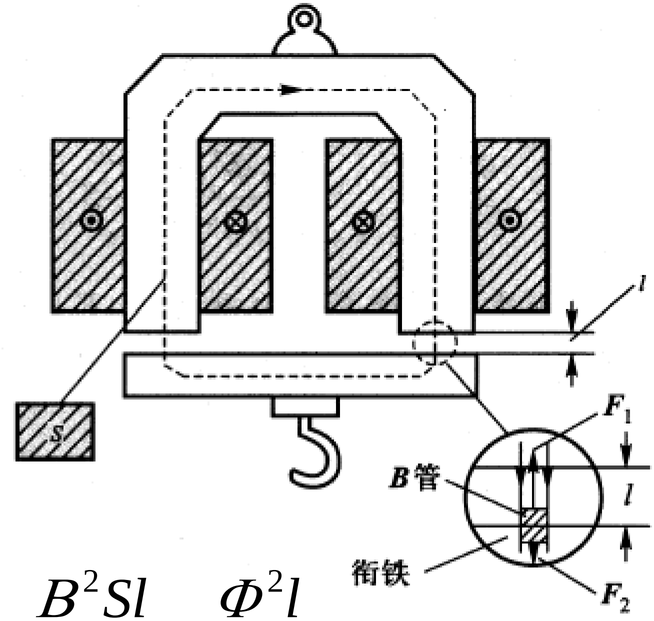
$$F_2 = \left.\frac{dW_m}{da}\right|_{I_k=C} = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{da} = -\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a}$$

正方向$\boldsymbol{e}_\rho$，即a增大的方向



3. 静态电磁场　恒定电流的电场和磁场

例3-26：求电磁铁对衔铁的吸力，已知铁心截面面积为S，空气气隙长度为l，忽略边缘效应，认为气隙中磁密B均匀分布



解：由于已知尺寸等参数，磁密B亦可认为均匀分布，故可以假定系统是常磁链系统，

系统能量：$$W_m = \frac{B^2}{2\mu}\times 2Sl' + \frac{B^2}{2\mu_0}\times 2Sl \approx \frac{B^2}{2\mu_0}\times 2Sl = \frac{B^2 Sl}{\mu_0} = \frac{\Phi^2 l}{\mu_0 S}$$

由虚位移法，若取广义坐标为l，衔铁受力为

$$F = -\left.\frac{dW}{dg}\right|_{\Phi=C} = -\frac{dW}{dl} = -\frac{\Phi^2}{\mu_0 S} = -\frac{B^2 S}{\mu_0}$$

正方向$\boldsymbol{e}_y$，即l增大的方向