

电路理论

Principles of Electric Circuits

第十三章 简单非线性电路

2024年12月



电路理论

Principles of Electric Circuits

第十三章 简单非线性电路

§ 13.1 非线性元件

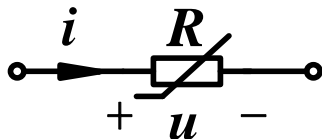


§ 13.1 非线性元件

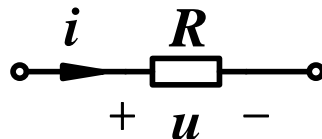
一、非线性电阻

非线性电阻

符号:



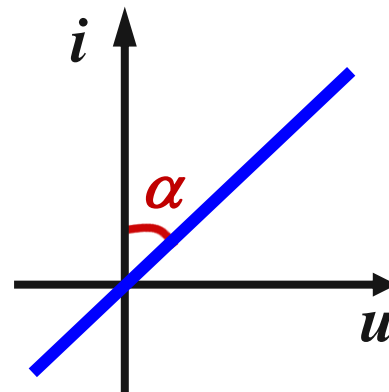
线性电阻



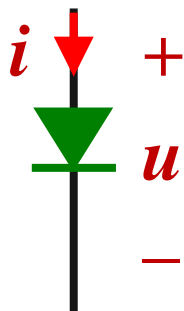
伏安关系:

$$u = f(i)$$
$$\text{或 } i = g(u)$$

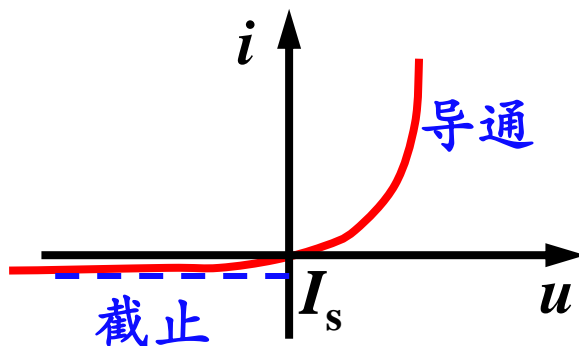
$$R = \frac{u}{i} = \tan \alpha$$



1. 单调电阻



PN结二极管



伏安关系:

$$i = I_S (e^{u/U_T} - 1)$$

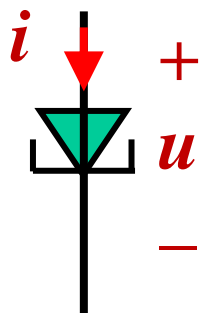
其中, I_S 为反向饱和电流
对于硅二极管来说, 其典型
值为 $I_S = 10^{-12} \text{ A} = 1 \text{ pA}$,

$$U_T = 26 \text{ mV}$$

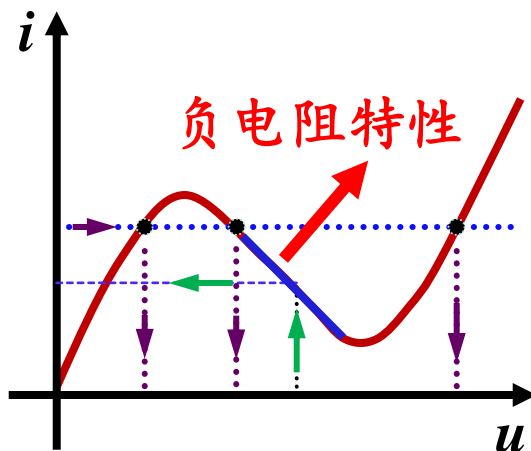
§ 13.1 非线性元件

一、非线性电阻

2. 压控电阻



隧道二极管



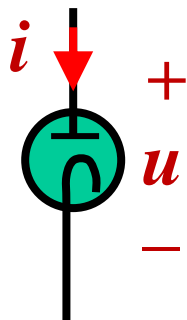
伏安关系:

$$i = g(u) = a_0u + a_1u^2 + a_2u^3$$

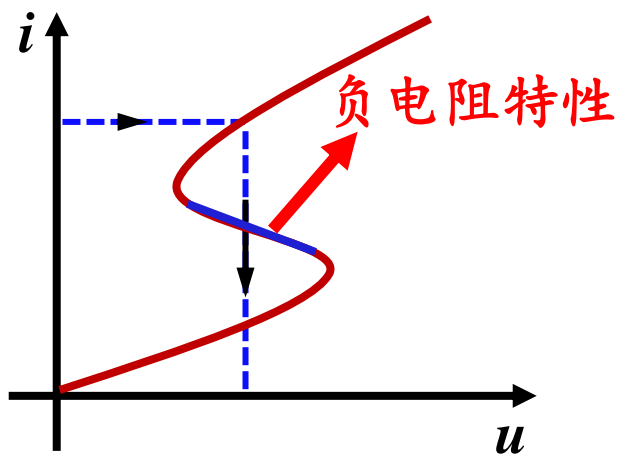
称为“压控型”或“N型”

每个电压对应唯一的电流

3. 流控电阻



充气二极管



伏安关系:

$$u = f(i) = a_0i + a_1i^2 + a_2i^3$$

称为“流控型”或“S型”

每个电流对应唯一的电压

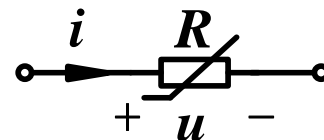
§ 13.1 非线性元件

二、非线性电阻与线性电阻的重要区别

【例】非线性电阻 $u = f(i) = 50i + 0.5i^3$

$$i_1 = 2\text{A} \quad u_1 = 50 \times 2 + 0.5 \times 2^3 = 104 \text{ V}$$

$$i_2 = 10\text{A} \quad u_2 = 50 \times 10 + 0.5 \times 10^3 = 1000 \text{ V} \quad \neq 5 \times 104$$



当 $i = i_1 + i_2$ 时

齐次性不满足！

$$\begin{aligned} u &= 50(i_1 + i_2) + 0.5(i_1 + i_2)^3 \\ &= 50i_1 + 0.5i_1^3 + 50i_2 + 0.5i_2^3 + 1.5i_1i_2(i_1 + i_2) \\ &= u_1 + u_2 + 1.5i_1i_2(i_1 + i_2) \\ &\neq u_1 + u_2 \end{aligned}$$

可加性不满足！



1. 齐次性和可加性不适用于非线性电阻。

叠加定理和戴维南定理将不再适用！ ~~~



§ 13.1 非线性元件

二、非线性电阻与线性电阻的重要区别

【例】非线性电阻 $u = f(i) = 50i + 0.5i^3$

$$i = 2\sin 60t \text{ A} \quad \omega = 60 \text{ rad/s}$$

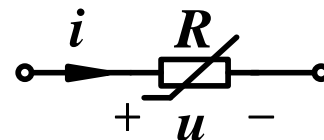
$$u = 50 \times 2\sin 60t + 0.5 \times 8\sin^3 60t$$

$$= 100\sin 60t + 3\sin 60t - \sin 180t$$

$$= 103\sin 60t - \sin 180t \text{ A}$$

3ω

出现了3倍频



$$4\sin^3 \theta = (3\sin \theta - \sin 3\theta)$$



2. 非线性电阻有可能产生不同于激励的频率成分。

(变频作用)

变频

电机变频调速、变频空调

双刃剑



谐波

滤波器



§ 13.1 非线性元件

三、静态电阻和动态电阻

1. 静态电阻 R_s

非线性电阻在某一工作状态下
(如 P 点)的电压值与电流值之比。

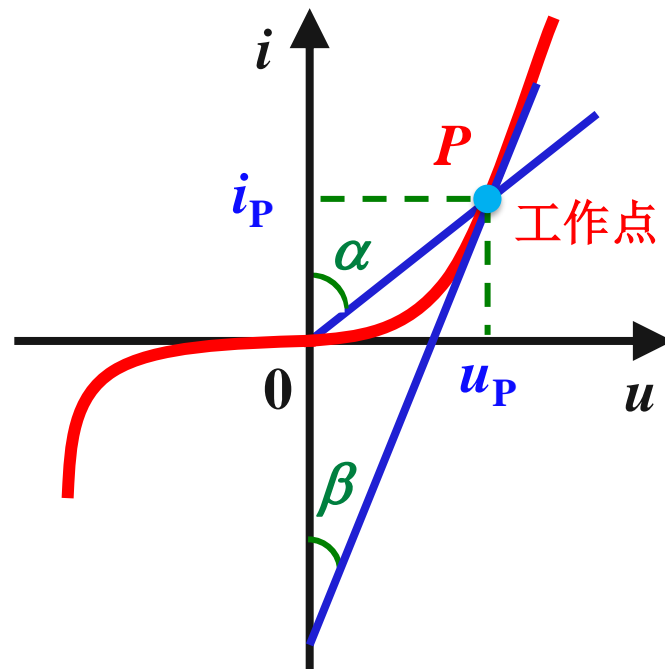
$$R_s = \frac{U_P}{I_P} = \tan \alpha$$

2. 动态电阻 R_d

非线性电阻在某一工作状态下
(如 P 点)的电压对电流的导数。

$$R_d = \left. \frac{du}{di} \right|_P = \tan \beta \quad R_d = \frac{1}{G_d} = \frac{1}{\left. \frac{di}{du} \right|_P}$$

动态电导



1. 静态电阻和动态电阻都与工作点 P 与有关。

2. 静态电阻和动态电阻均有可能表现出“负电阻”性质。

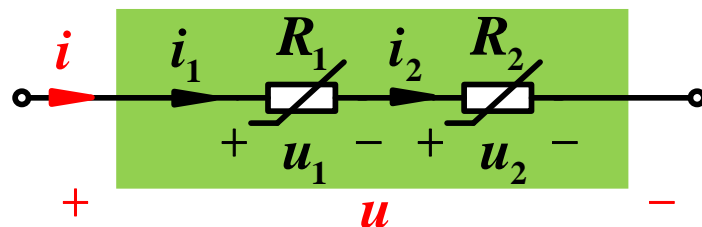


§ 13.1 非线性元件

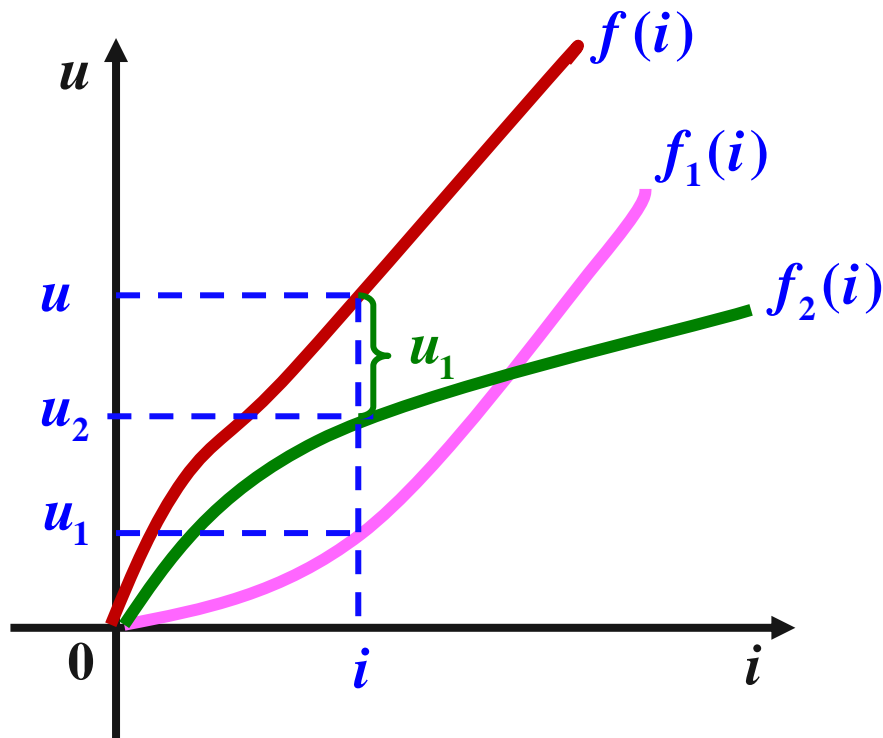
四、非线性电阻的串并联

1. 非线性电阻的串联

$$\begin{cases} i = i_1 = i_2 \\ u = u_1 + u_2 \end{cases} \longrightarrow u = f_1(i) + f_2(i)$$



同一电流下
将电压相加

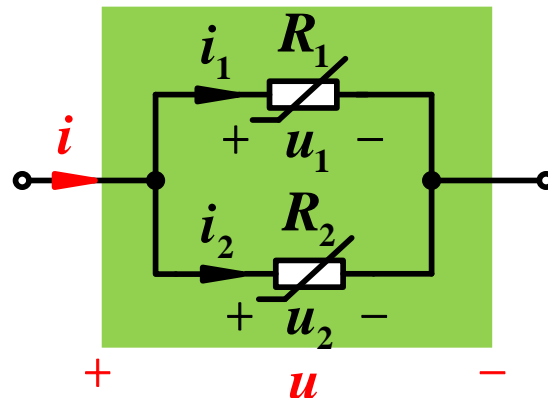


§ 13.1 非线性元件

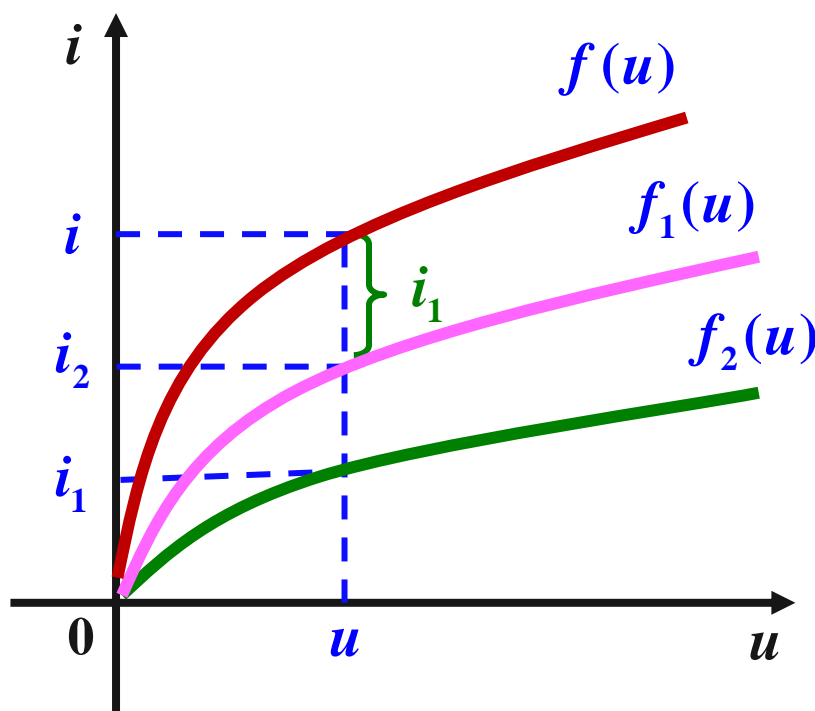
四、非线性电阻的串并联

2. 非线性电阻的并联

$$\begin{cases} u = u_1 = u_2 \\ i = i_1 + i_2 \end{cases} \longrightarrow i = f_1(u) + f_2(u)$$



同一电压下
将电流相加



电路理论

Principles of Electric Circuits

第十三章 简单非线性电路

§ 13.2 非线性电阻电路的方程



§ 13.2 非线性电阻电路的方程

非线性
电阻电路

依据
KCL、KVL
元件VAR

非线性代数方程组

【例】电路中非线性电阻的特性为 $i = u^2 + u$ ，求电压 u 。

解：

由KCL

对回路 l_1 应用KVL

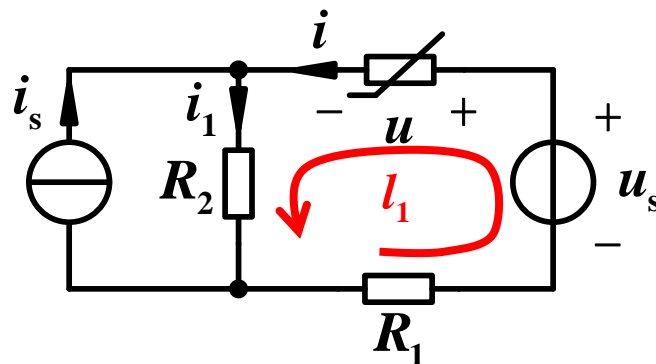
非线性电阻VAR

$$\begin{cases} i_1 = i_s + i \\ R_1 i + R_2 i_1 + u = u_s \\ i = u^2 + u \end{cases}$$

联立

$$5u^2 + 6u - 8 = 0$$

$$\begin{cases} u' = 0.8\text{V} \\ u'' = -2\text{V} \end{cases}$$



非线性电路的解可能是不唯一的。



§ 13.2 非线性电阻电路的方程

非线性
电阻电路

依据
KCL、KVL
元件VAR

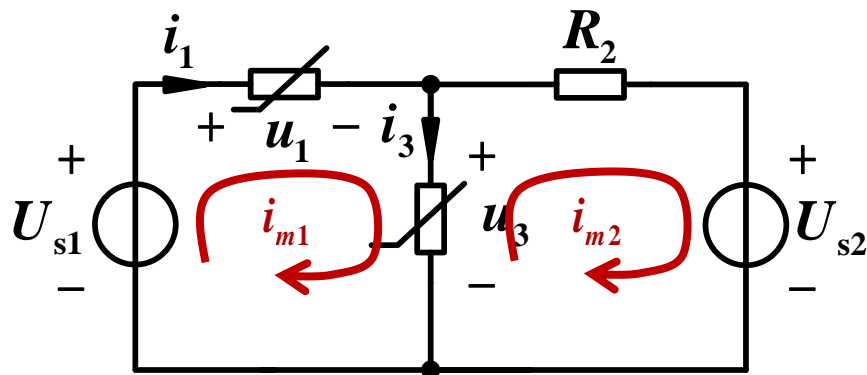
非线性代数方程组

【例】电路中非线性电阻的特性分别为 $u_1=i^2$ ， $u_3=\sin i_3$ ，试列写该电路的网孔电流方程。

解：

$$i_3 = i_{m1} - i_{m2}$$

$$\begin{cases} i_{m1}^2 + \sin(i_{m1} - i_{m2}) = U_{s1} \\ -\sin(i_{m1} - i_{m2}) + R_2 i_{m2} = -U_{s2} \end{cases}$$



电路理论

Principles of Electric Circuits

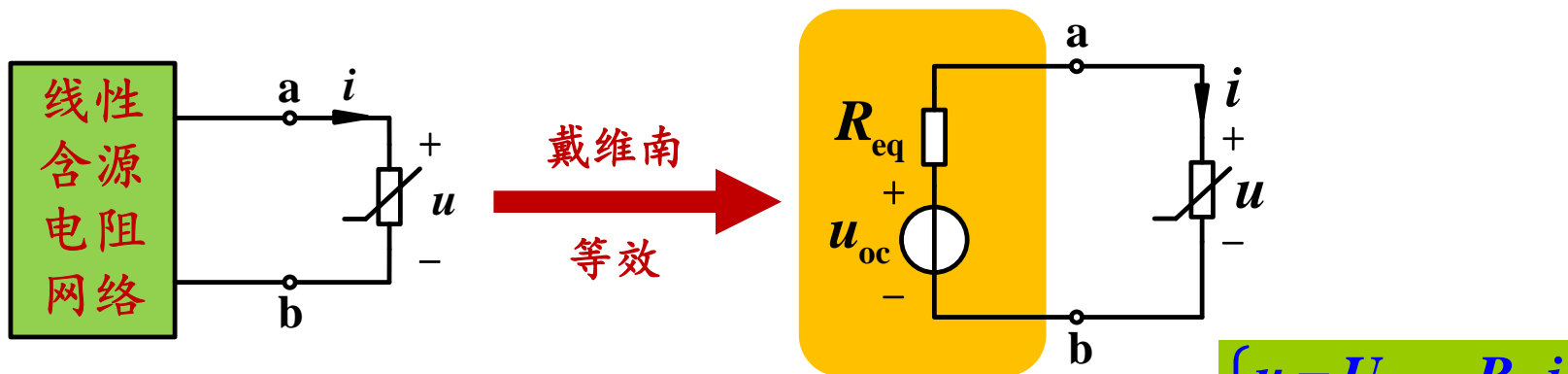
第十三章 简单非线性电路

§ 13.3 非线性电阻电路的图解法



§ 13.3 非线性电阻电路的图解法

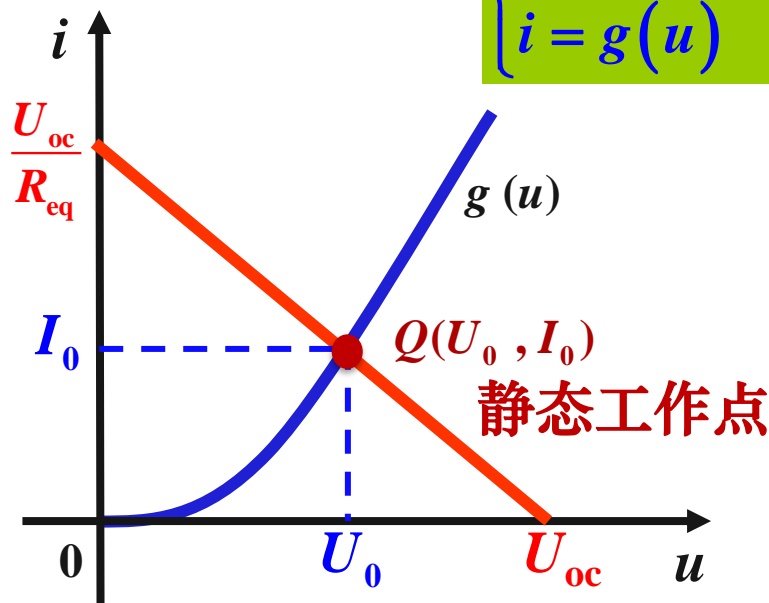
含有一个非线性电阻元件的电路



应用KVL得: $u = U_{oc} - R_{eq}i$
其外特性曲线为一直线

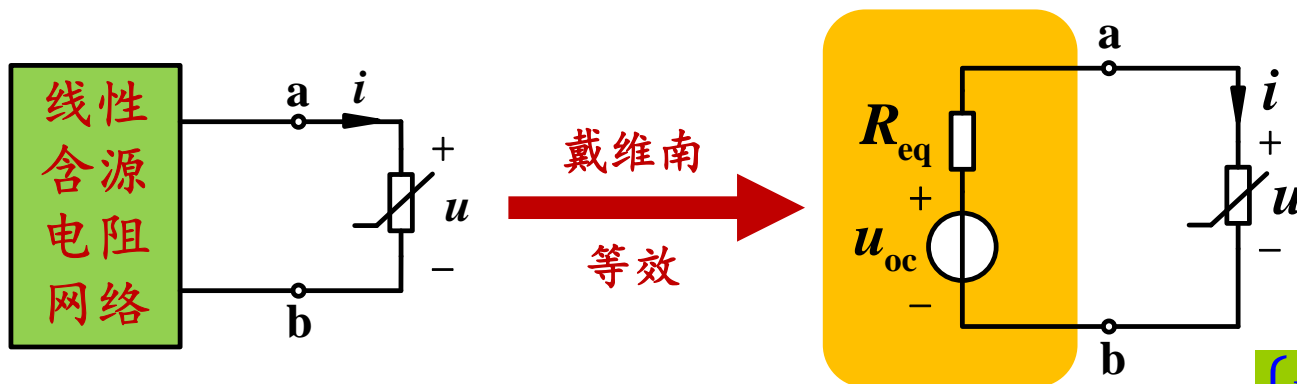
设非线性电阻
的伏安特性为: $i = g(u)$

两条曲线交点坐标 $Q(U_0, I_0)$



§ 13.3 非线性电阻电路的图解法

含有一个非线性电阻元件的电路



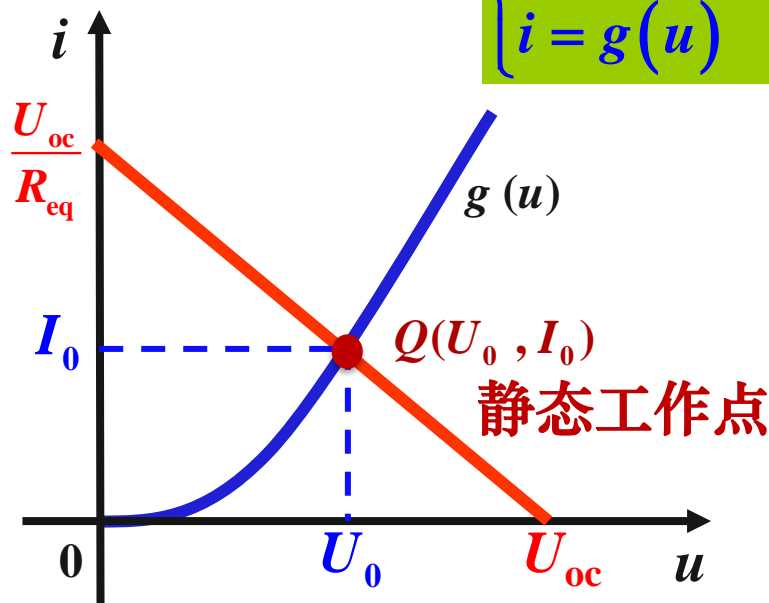
$$\begin{cases} u = U_{oc} - R_{eq}i \\ i = g(u) \end{cases}$$

★ 步骤

1. 对除非线性元件外的线性电路进行戴维南等效；
2. 画出戴维南电路和非线性元件的 $u-i$ 关系曲线，其交点即为非线性电路的工作点。

★ 特点

清晰、直观，适于定性分析。



电路理论

Principles of Electric Circuits

第十三章 简单非线性电路

§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法



§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法

小信号分析法：当电路的信号变化幅度很小时，可围绕某一工作点建立一个局部线性化的模型，运用线性电路分析方法进行分析研究。

【引例】非线性电阻 $u = f(i) = 50i + 0.5i^3$

若 $i = 2.01 \text{ A}$

$$u = 50 \times (2+0.01) + 0.5 \times (2+0.01)^3$$

$$\approx [50 \times 2 + 0.5 \times 2^3] + [50 \times 0.01 + 0.5 \times 3 \times 2^2 \times 0.01]$$

$$= f(2) + 56 \times 0.01$$

$$2^3 + 3 \times 2^2 \times 0.01 + \cancel{3 \times 2 \times 0.01^2} + \cancel{0.01^3}$$

近似

$$(50 + 0.5 \times 3 \times 2^2) \times 0.01$$

$$u = f(i) \xrightarrow{i = 2 + 0.01} \begin{cases} u_1 = f(2) = 50 \times 2 + 0.5 \times 2^3 & \text{非线性电阻作用效果} \\ + \\ u_2 = R \times 0.01 = 56 \times 0.01 & \text{线性电阻作用效果} \end{cases}$$



甚是奇妙，背后的理论为何？



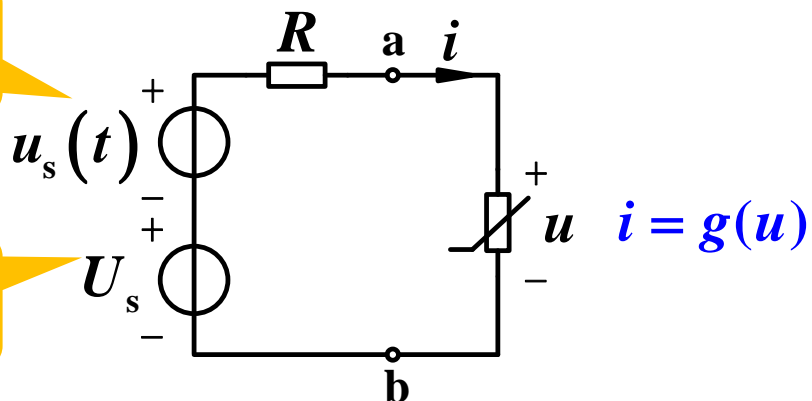
§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法

小信号分析法

任何时刻满足: $U_s \gg u_s(t)$

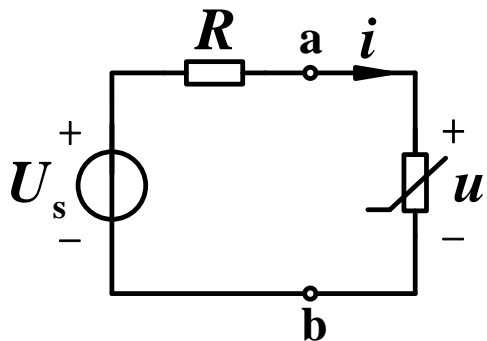
时变
小信号

直流
偏置电压



电路方程: $U_s + u_s(t) = Ri(t) + u(t)$

1. 令 $u_s(t)=0$, 求出静态工作点



$$\begin{cases} U_s = Ri + u \\ i = g(u) \end{cases}$$



$$Q(U_Q, I_Q)$$

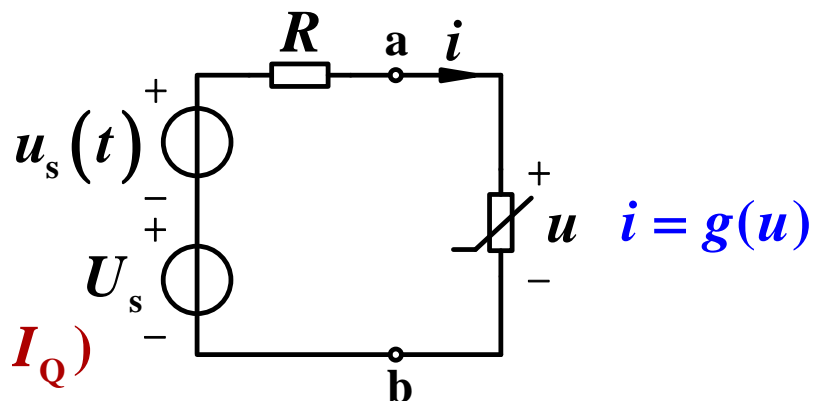
静态工作点

§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法

小信号分析法

任何时刻满足: $U_s \gg u_s(t)$

电路方程: $U_s + u_s(t) = Ri(t) + u(t)$



1. 令 $u_s(t)=0$, 求出静态工作点 $Q(U_Q, I_Q)$

2. 考虑 $u_s(t)$ 存在 $U_s \gg u_s(t)$

$$\begin{cases} u(t) = U_Q + \Delta u(t) \\ i(t) = I_Q + \Delta i(t) \end{cases} \begin{array}{l} \text{小信号引起的} \\ \text{扰动量} \end{array} \quad \text{其中: } \begin{cases} U_Q \gg \Delta u(t) \\ I_Q \gg \Delta i(t) \end{cases}$$

3. 非线性元件线性化

$$I_Q + \Delta i(t) = g[U_Q + \Delta u(t)] \xrightarrow[\text{展开}]{\text{泰勒级数}} I_Q + \Delta i(t) \approx g(U_Q) + \left. \frac{dg(u)}{du} \right|_Q \Delta u(t)$$

忽略高次项

$$\text{线性化} \begin{cases} I_Q = g(U_Q) \\ \Delta i(t) = \left. \frac{dg(u)}{du} \right|_Q \Delta u(t) = \frac{1}{R_d} \Delta u(t) \end{cases}$$

$$\Delta u(t) = R_d \Delta i(t)$$

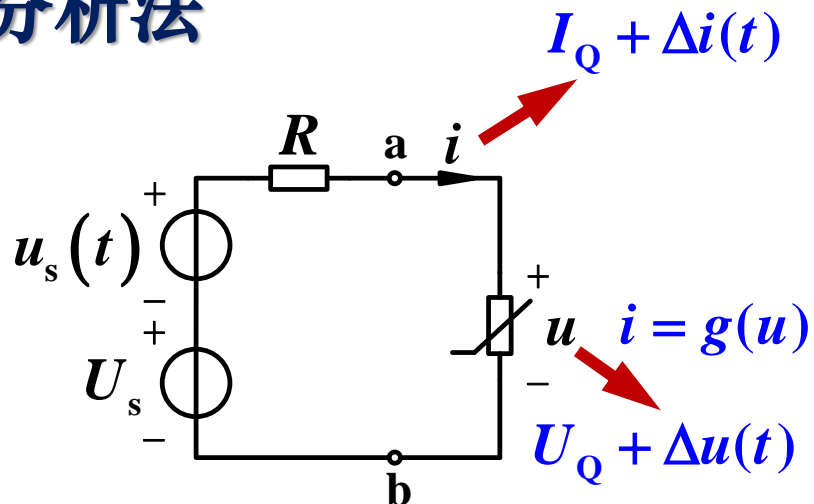


§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法

小信号分析法

任何时刻满足: $U_s \gg u_s(t)$

$$\begin{cases} U_s = Ri + u \\ i = g(u) \end{cases} \longrightarrow Q(U_Q, I_Q) \text{ 静态工作点}$$

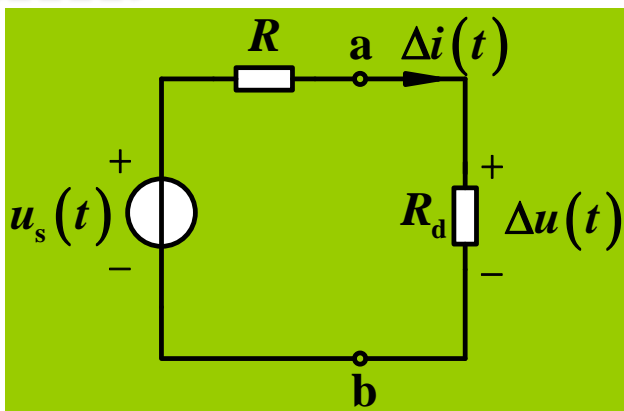


电路方程: $U_s + u_s(t) = Ri(t) + u(t)$

线性化: $\Delta u(t) = R_d \Delta i(t)$

$$\begin{aligned} U_s + u_s(t) &= R[I_Q + \Delta i(t)] + [U_Q + \Delta u(t)] \\ &= RI_Q + U_Q + R\Delta i(t) + \Delta u(t) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow u_s(t) = (R + R_d)\Delta i(t)$$

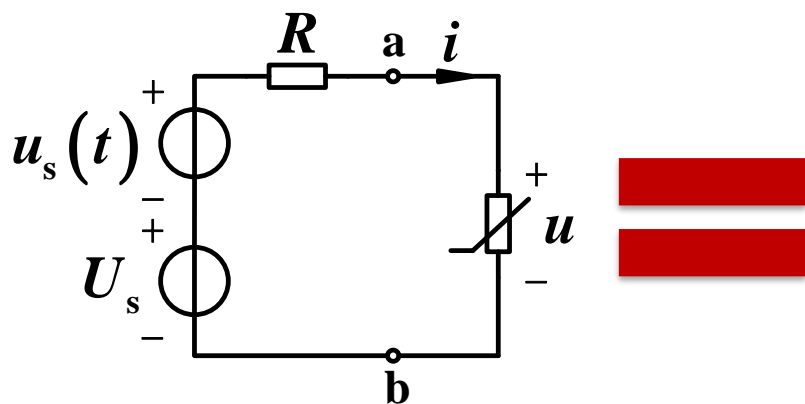


小信号
等效电路



§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法

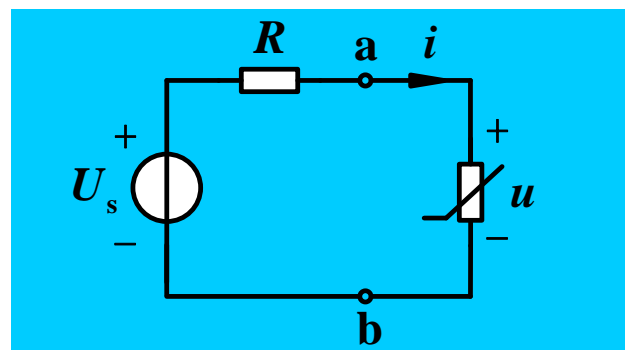
小信号分析法



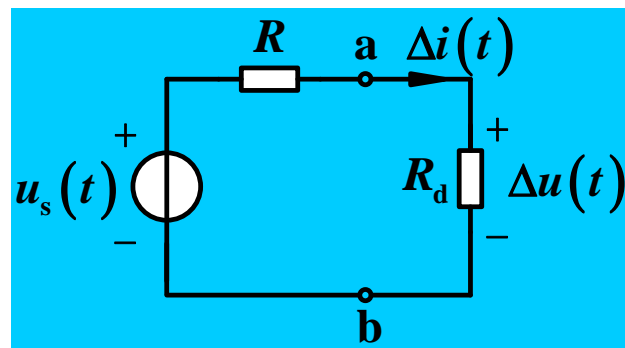
$$U_s + u_s(t) = Ri(t) + u(t)$$



是叠加定理
的应用吗？



$$\begin{cases} U_s = Ri + u \\ i = g(u) \end{cases}$$



小信号
等效电路

$$u_s(t) = (R + R_d)\Delta i(t)$$

§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法



小信号分析法解题步骤:

1. 求解非线性电路的静态工作点;
2. 求解非线性电路的动态电导或动态电阻;
3. 作出静态工作点处的小信号等效电路;
4. 根据小信号等效电路进行求解。



§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法

【例】已知 $i_s(t) = 0.5 \cos t$ A，非线性电阻的伏安特性为

$$i = g(u) = \begin{cases} u^2 & (u > 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases}$$

求电路中 $u(t)$ 和 $i(t)$ 。

解：

由KCL和KVL $i = i_1 + i_s$

$$u = 6 - Ri_1$$

$$\text{联立得 } \frac{u}{R} + g(u) = \frac{6}{R} + i_s = [6 + 0.5 \cos(\omega t)] \text{ A}$$

1. 求电路的静态工作点，令 $i_s(t) = 0$

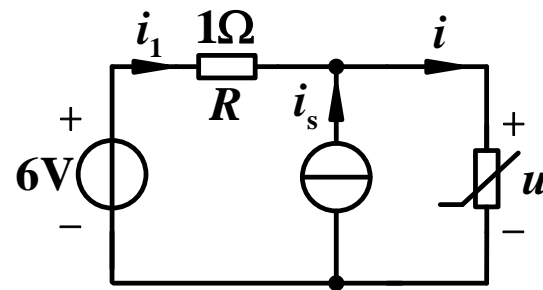
$$u + u^2 = 6$$

$$u^2 + u - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 2\text{V} \\ u = -3\text{V} \end{cases}$$

不合题意！

则静态工作点为 $U_Q = 2\text{V}$

$$I_Q = U_Q^2 = 4\text{A}$$



§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法

【例】已知 $i_s(t) = 0.5 \cos t$ A，非线性电阻的伏安特性为

$$i = g(u) = \begin{cases} u^2 & (u > 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases}$$

求电路中 $u(t)$ 和 $i(t)$ 。

解：

1. 求电路的静态工作点

$$U_Q = 2V$$

$$I_Q = U_Q^2 = 4A$$

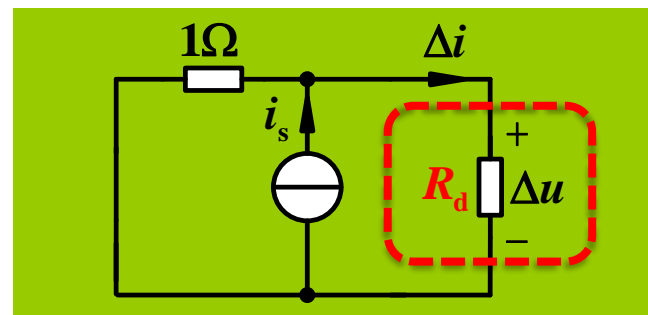
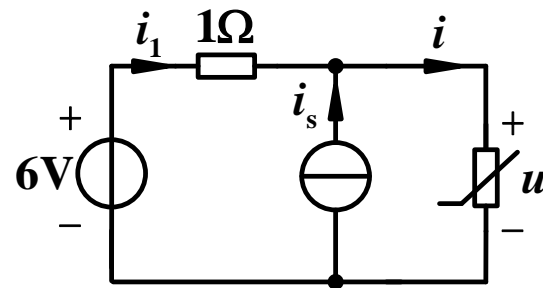
2. 求动态电阻

$$R_d = \frac{du}{di} = \frac{1}{\left. \frac{di}{du} \right|_Q} = \frac{1}{2u|_Q} = \frac{1}{4} \Omega$$

3. 作出小信号等效电路求扰动量

$$\Delta u(t) = i_s \times \left(1\Omega // R_d \right) = 0.5 \cos t \times \frac{1 \times \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = 0.1 \cos t \text{ V}$$

$$\Delta i(t) = \frac{\Delta u(t)}{R_d} = 0.1 \cos t \times 4 = 0.4 \cos t \text{ A}$$



小信号等效电路

§ 13.4 非线性电阻电路的小信号分析法

【例】已知 $i_s(t) = 0.5 \cos t$ A，非线性电阻的伏安特性为

$$i = g(u) = \begin{cases} u^2 & (u > 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases}$$

求电路中 $u(t)$ 和 $i(t)$ 。

解：

1. 求电路的静态工作点

$$U_Q = 2\text{V}$$

$$I_Q = U_Q^2 = 4\text{A}$$

2. 求动态电阻 $R_d = \frac{1}{4} \Omega$

3. 作出小信号等效电路求扰动量

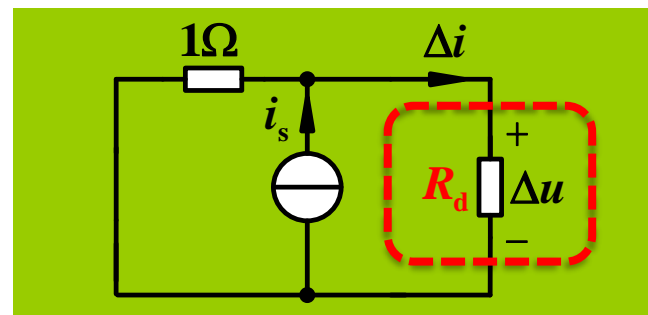
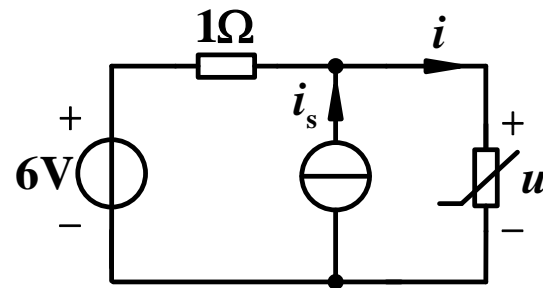
$$\Delta u(t) = 0.1 \cos t \text{ V}$$

$$\Delta i(t) = 0.4 \cos t \text{ A}$$

4. 求 $u(t)$ 和 $i(t)$

$$u(t) = U_Q + \Delta u(t) = [2 + 0.1 \cos t] \text{ V}$$

$$i(t) = I_Q + \Delta i(t) = [4 + 0.4 \cos t] \text{ A}$$



小信号等效电路

电路理论

Principles of Electric Circuits

第十三章 简单非线性电路

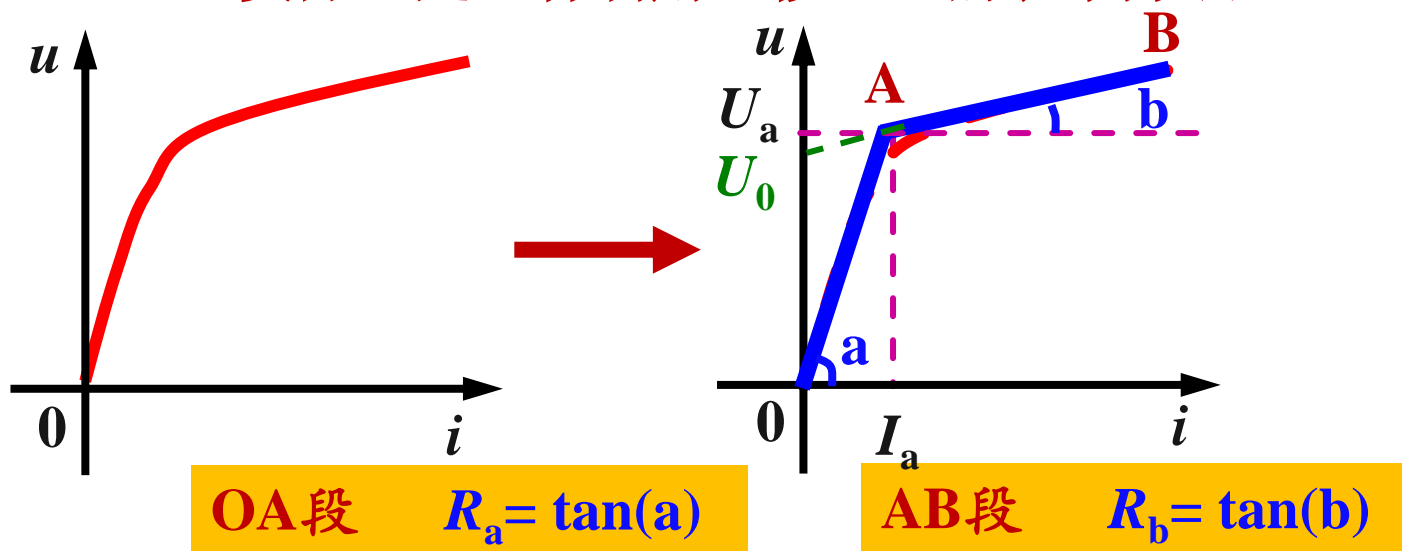
§ 13.5 分段线性化法



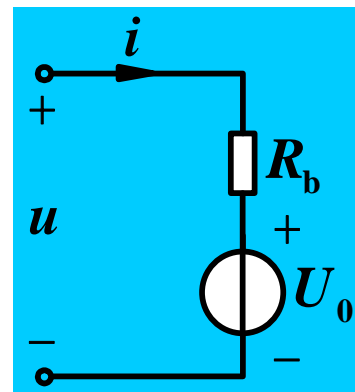
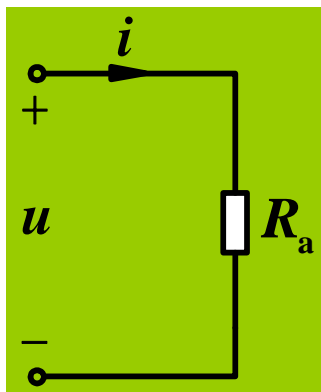
§ 13.5 分段线性化法

分段线性化法：把非线性的求解过程分成几个**线性区段**，对每个线性区段应用线性电路的计算方法。

实际上是一种利用近似逼近的表示方法。



等效电路

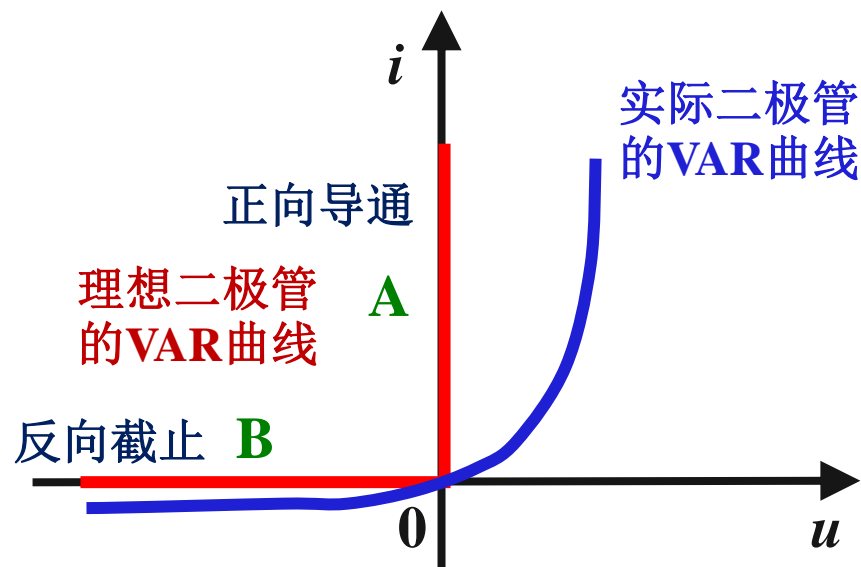
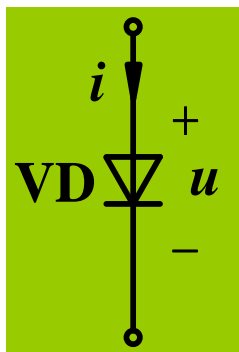


§ 13.5 分段线性化法

分段线性化法：把非线性的求解过程分成几个**线性区段**，对每个线性区段应用线性电路的计算方法。

实际上是一种利用近似逼近的表示方法。

理想二极管



§ 13.5 分段线性化法

分段线性化法：把非线性的求解过程分成几个**线性区段**，对每个线性区段应用线性电路的计算方法。

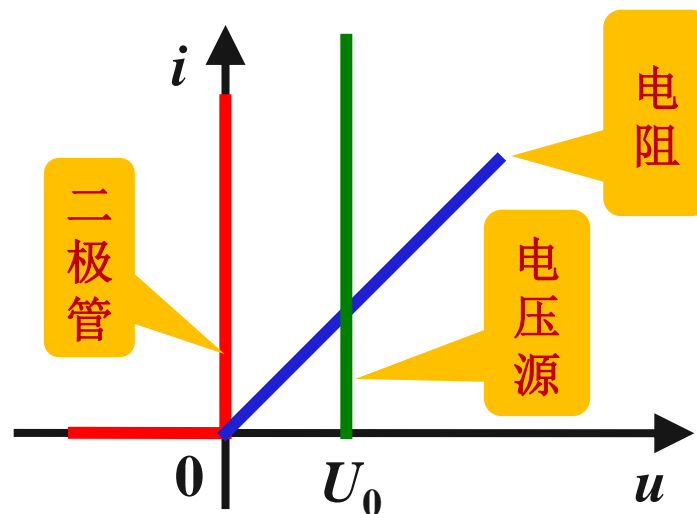
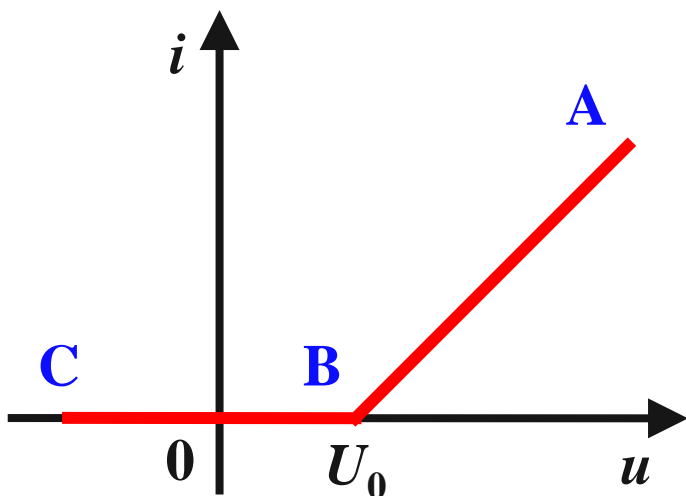
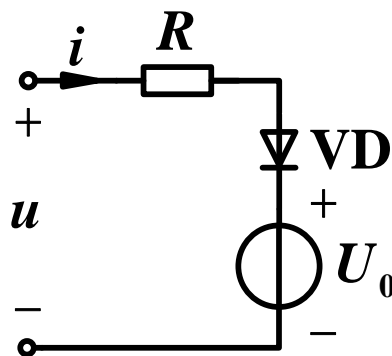
实际上是一种利用近似逼近的表示方法。

【例】画出图示串联电路的伏安特性。

电路方程： $u = Ri + u_d + U_0 \quad i > 0$

$u < U_0 \quad i = 0$

应用图解法



24-25-1 电路理论 (1)

一个学期的电路学习就这么愉快地结束了!

