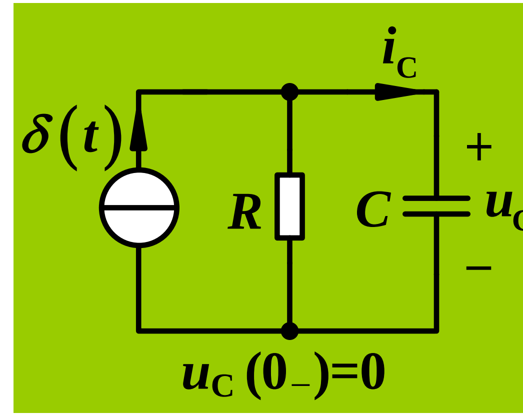
§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应

四、冲激响应 $h(t)$

冲激响应： 激励为单位冲击函数时，电路中产生的**零状态响应**。



方法1　由单位阶跃响应求单位冲激响应

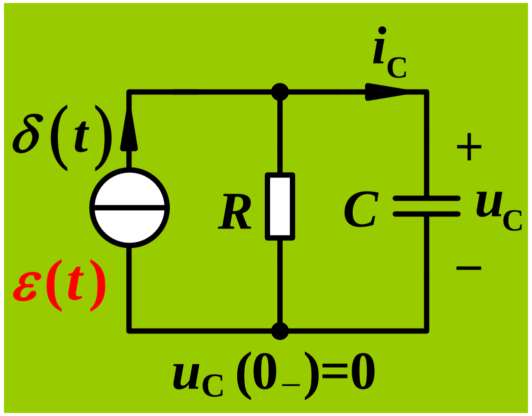
单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ → 单位阶跃响应 $s(t)$

$$\delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

单位冲激函数 $\delta(t)$ → 冲激响应 $h(t)$

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应



方法1　由单位阶跃响应求冲激响应

【例】 求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

解：先求单位阶跃响应　令$i_S(t)=\varepsilon(t)$

$u_C(0_+)=0$　　$u_C(\infty)=R$　　$\tau=RC$　　$i_C(0_+)=1$　　$i_C(\infty)=0$

$$u_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_C(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

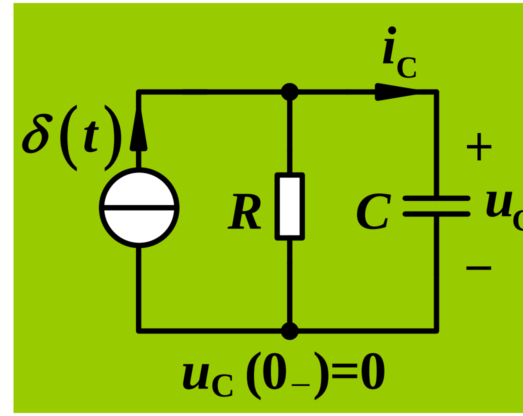
再求冲激响应　令$i_S(t)=\delta(t)$

$$u_C(t)=\frac{d}{dt}\left[R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)\right]=\underbrace{R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)}_{t=0}+\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应



方法1　由单位阶跃响应求冲激响应

【例】求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

解：先求单位阶跃响应　　令$i_S(t)=\varepsilon(t)$

$u_C(0_+)=0$　　$u_C(\infty)=R$　　$\tau=RC$　　$i_C(0_+)=1$　　$i_C(\infty)=0$

$$u_C(t)=R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_C(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

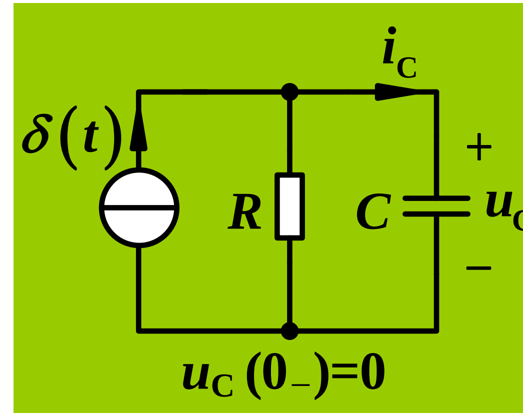
再求冲激响应　　令$i_S(t)=\delta(t)$

$$u_C(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)\right]=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应

方法1　由单位阶跃响应求冲激响应

【例】 求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。



解：先求单位阶跃响应　令$i_S(t)=\varepsilon(t)$

$u_C(0_+)=0$　　$u_C(\infty)=R$　　$\tau=RC$　　$i_C(0_+)=1$　　$i_C(\infty)=0$

$$u_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_C(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

再求冲激响应　令$i_S(t)=\delta(t)$

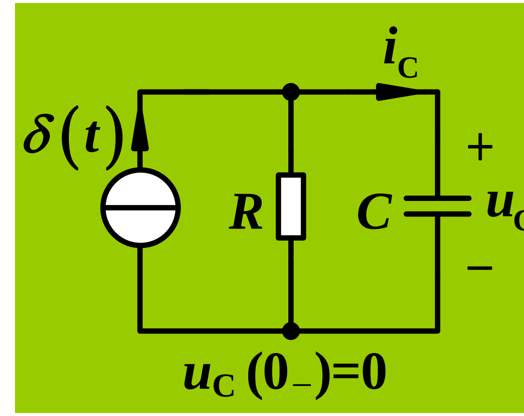
$$u_C(t)=\frac{d}{dt}\left[R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)\right]=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i_C(t)=\frac{d}{dt}[e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)]=\underbrace{e^{-\frac{t}{RC}}}_{t=0}\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应



方法1　由单位阶跃响应求冲激响应

【例】求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

解：先求单位阶跃响应　　令$i_S(t)=\varepsilon(t)$

$u_C(0_+)=0$　　$u_C(\infty)=R$　　$\tau=RC$　　$i_C(0_+)=1$　　$i_C(\infty)=0$

$$u_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_C(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

再求冲激响应　　令$i_S(t)=\delta(t)$

$$u_C(t)=\frac{d}{dt}\left[R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)\right]=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i_C(t)=\frac{d}{dt}[e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)]=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

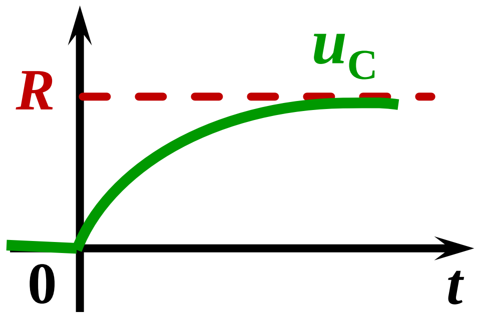
必须对表示为全时间轴（-∞ ,∞）形式的单位阶跃响应求导。

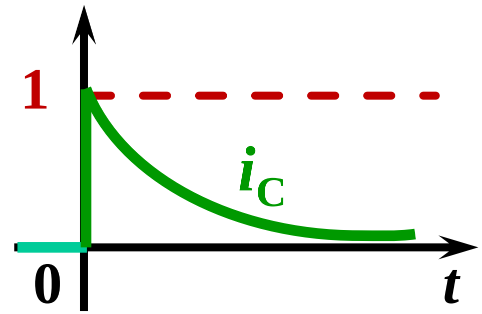
§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应

RC串联电路单位阶跃响应

$$u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i_C(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

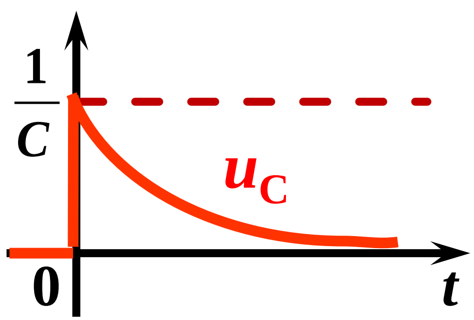


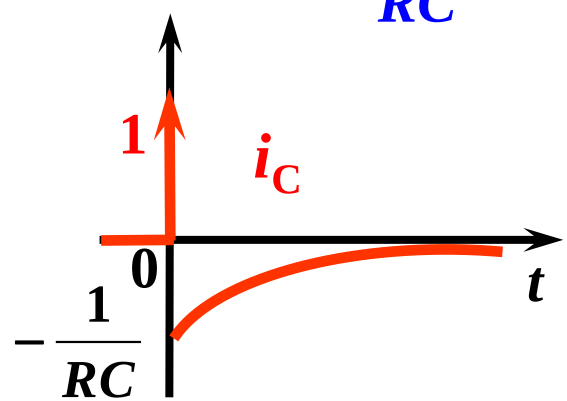


RC串联电路冲激响应

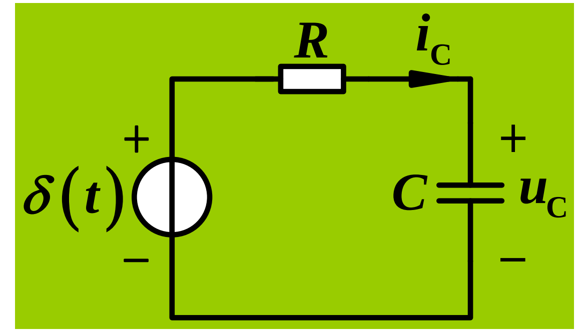
$$u_C(t) = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i_C(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$





§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应



【例】 求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

方法2　分时间段来考虑冲激响应

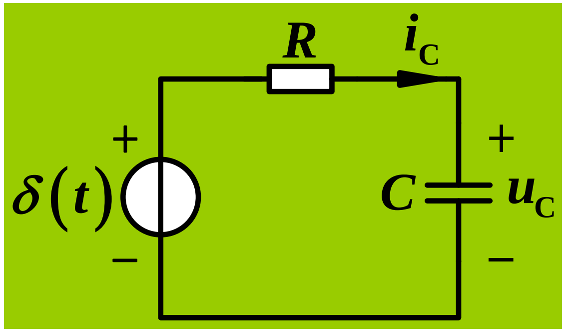
$t\begin{cases} 0_- \rightarrow 0_+ \\ 0_+ \rightarrow \infty \end{cases}$

$0_- \rightarrow 0_+$　冲激电流（冲激电压）作用使电容（电感）瞬间获得能量

$0_+ \rightarrow \infty$　零输入响应

难点在于如何求 $u_C(0_+)$, $i_L(0_+)$!

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应



【例】求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

方法2　分时间段来考虑冲激响应

t { $0_- \rightarrow 0_+$　冲激电流（冲激电压）作用使电容（电感）瞬间获得能量

$0_+ \rightarrow \infty$　**零输入响应**

分析：

1. t 在$0_- \rightarrow 0_+$间

t=0时刻，$u_C(0)$为有限值；

电容 → 短路

反证法

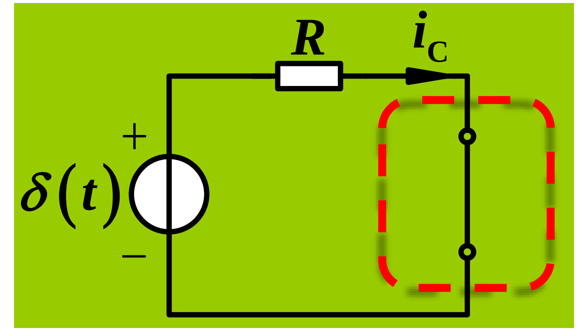
$$C\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{R}=\delta(t)$$

u_c不可能是冲激函数

否则KVL不成立

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应

【例】求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。



t=0等效电路

方法2　分时间段来考虑冲激响应

t { $0_- \rightarrow 0_+$　冲激电流（冲激电压）作用使电容（电感）瞬间获得能量

$0_+ \rightarrow \infty$　零输入响应

分析:

1. t 在$0_- \rightarrow 0_+$间

t=0时刻，$u_C(0)$为有限值；

电容 → 短路

画出t=0时刻电路，求$i_C(0)$。

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(t)\mathrm{d}t$$

$$= 0 + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} \frac{\delta(t)}{R}\mathrm{d}t = \frac{1}{RC}$$

电容中的冲激电流瞬间转移过来的电荷Δq

不相等

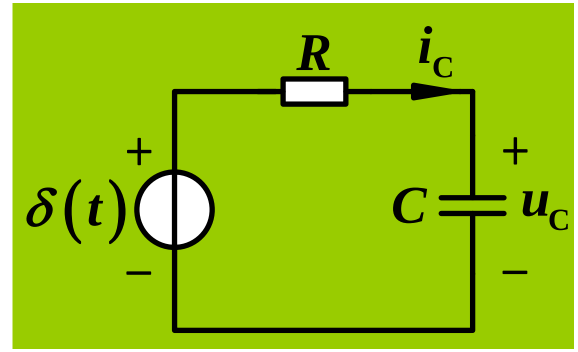
$u_C(0_-) = 0\,\mathrm{V}$

电容电压发生跃变

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应

【例】 求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

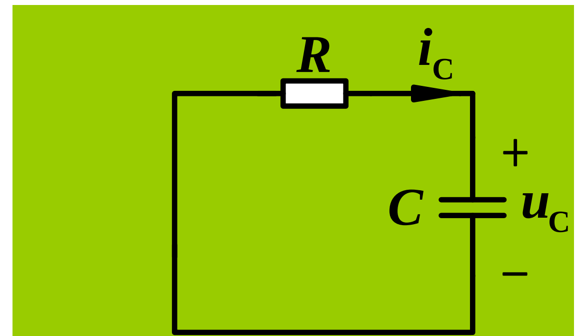
方法2　分时间段来考虑冲激响应



解：

1. t 在$0_- \longrightarrow 0_+$间

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{RC}$$



$t \geq 0_+$等效电路

2. $t \geq 0_+$ $\delta(t)$消失，零输入响应

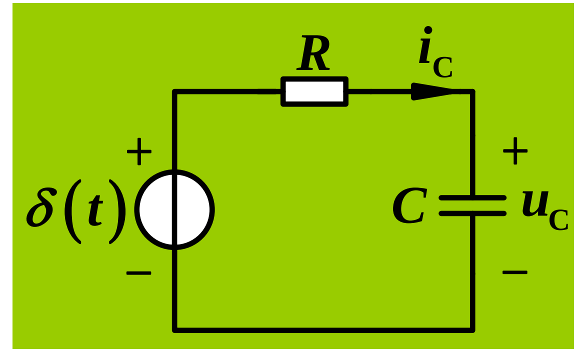
$$h_u(t) = u_C(t) = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$= \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$h_i(t) = i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$= \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应



【例】 求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

方法2　分时间段来考虑冲激响应

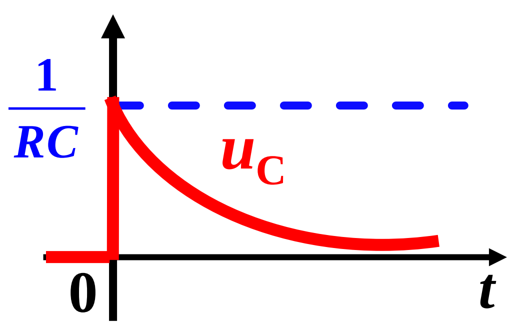
解：

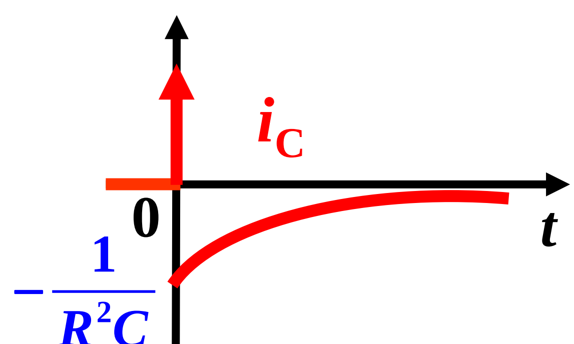
1. t 在$0_- \to 0_+$间

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{RC}$$

2. $t \geq 0_+$ $\delta(t)$消失，零输入响应

$$u_C(t) = \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \qquad i_C(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$



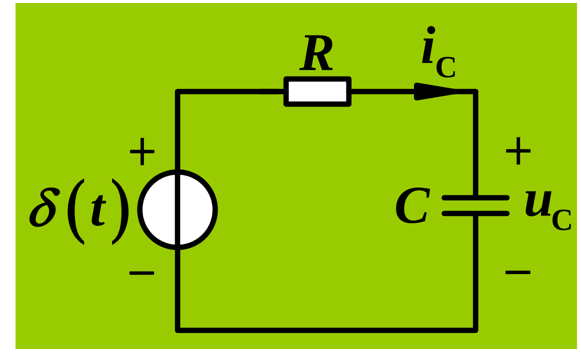


§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应

【例】 求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

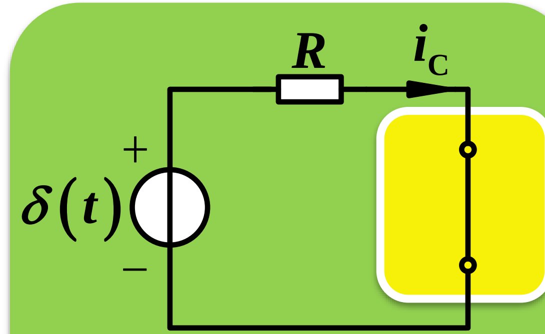
方法2　分时间段来考虑冲激响应

步骤总结：



1. 作0时刻电路，求$i_C(0)$和$u_L(0)$

电容 ⟶ 短路　电感 ⟶ 开路

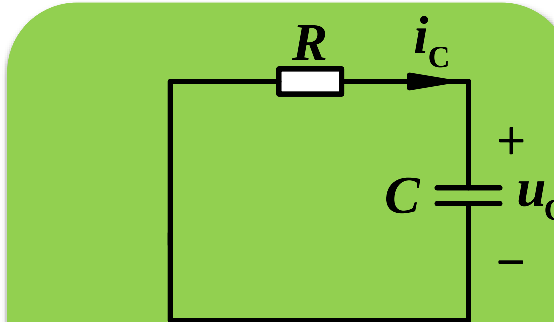


t=0等效电路

2. 利用公式

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(0)\mathrm{d}t$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u_L(0)\mathrm{d}t$$



$t\geq 0_+$等效电路

3. 求初始值

4. 冲激信号置零，求其零输入响应

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应

【例】求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

方法2　分时间段来考虑冲激响应

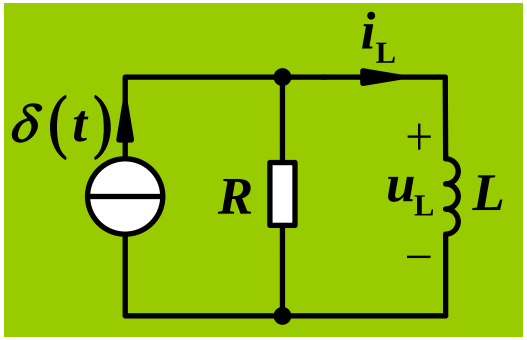
解：

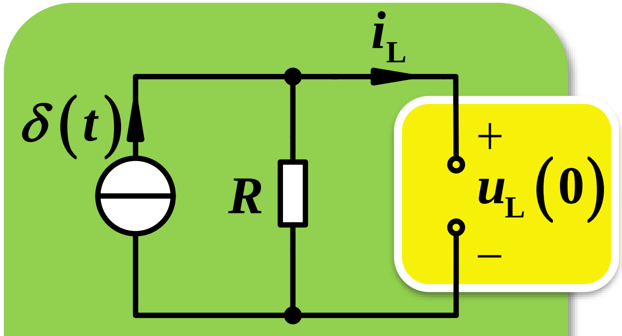
1. t 在 $0_- \longrightarrow 0_+$ 间

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u_L(0)\mathrm{d}t$$

$$= 0 + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} R\delta(t)\mathrm{d}t$$

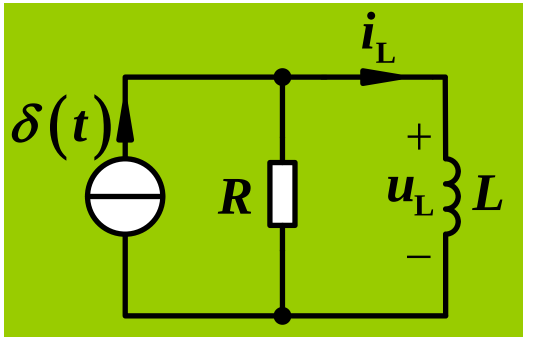
$$= \frac{R}{L}$$





t=0等效电路

§ 7.6 单位阶跃响应和冲激响应



【例】 求电路冲激响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

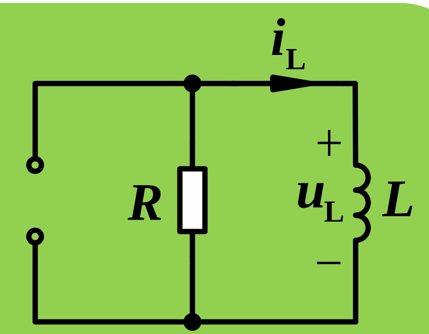
方法2　分时间段来考虑冲激响应

解:

1. t 在 $0_- \longrightarrow 0_+$ 间

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u_L(0)\mathrm{d}t = \frac{R}{L}$$

2. $t \geq 0_+$ $\delta(t)$消失，零输入响应



$t \geq 0_+$等效电路

$$h_i(t) = i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

$$= \frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

$$h_u(t) = u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = R\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\delta(t) - \frac{R^2}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

$$= R\delta(t) - \frac{R^2}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

电路理论

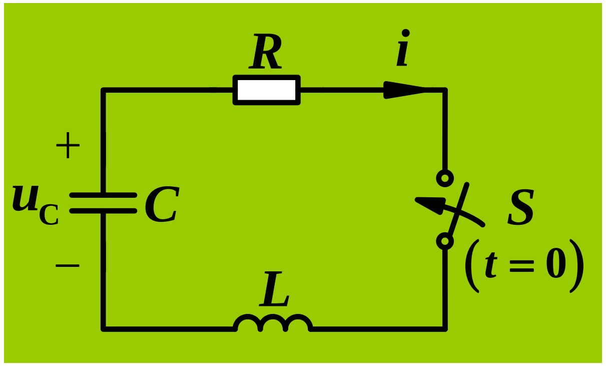
Principles of Electric Circuits

第七章 线性动态电路的时域分析

§7.7 二阶线性电路的零输入响应

§ 7.7 二阶线性电路的零输入响应

$u_C(0_+)=U_0 \quad i_L(0_+)=0$



分析： 二阶动态电路的零输入响应

$$\begin{cases} \text{KVL方程：} & Ri+u_L-u_C=0 \\ \text{VAR方程：} & u_L=L\dfrac{di}{dt} \quad i=-C\dfrac{du_C}{dt} \end{cases}$$

以电容电压为变量：$$\frac{d^2u_C}{dt}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

特征方程：

$$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

α ： **衰减系数**

$\boxed{2\alpha}$ $\boxed{\omega_0^2}$

ω_0： **自由振荡角频率**

特征根：

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

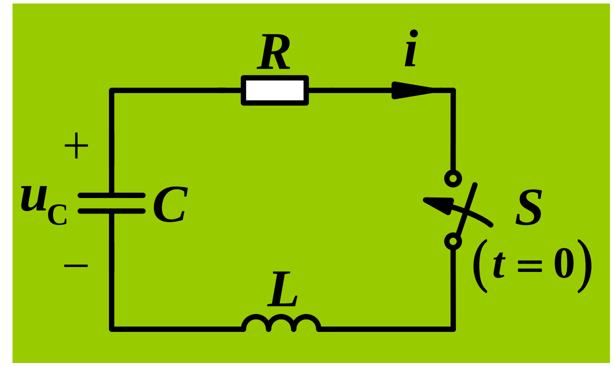
以电感电流为变量：$$\frac{d^2i}{dt}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}$$

课下练习： 以u_R、u_L为变量列写二阶电路的微分方程。

§ 7.7 二阶线性电路的零输入响应

$u_C(0_+)=U_0 \quad i_L(0_+)=0$



电路方程： $LC\dfrac{d^2u_C}{dt}+RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=0$

特征方程： $\lambda^2+\dfrac{R}{L}\lambda+\dfrac{1}{LC}=0$

特征根： $\lambda_{1,2}=\dfrac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}$

$2\alpha=\dfrac{R}{L} \qquad \omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$

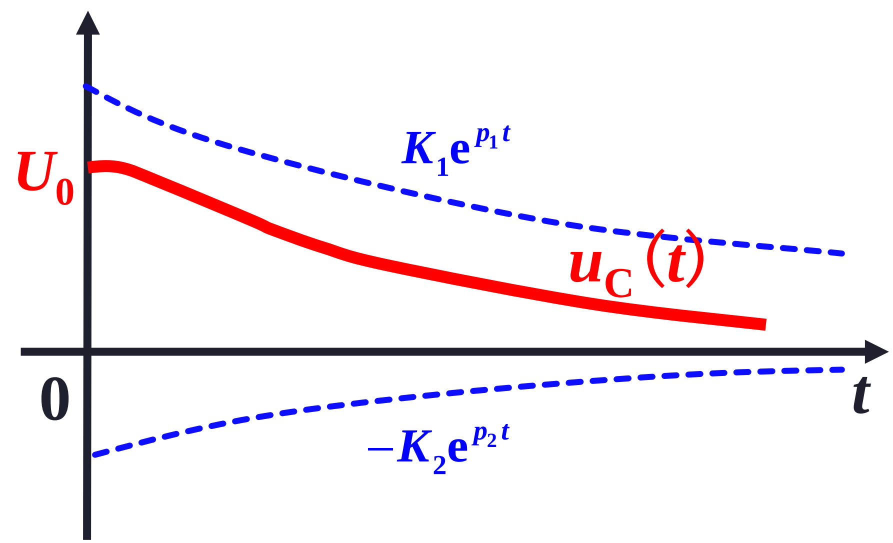
（1） $R>2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$

$u_C=K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}$

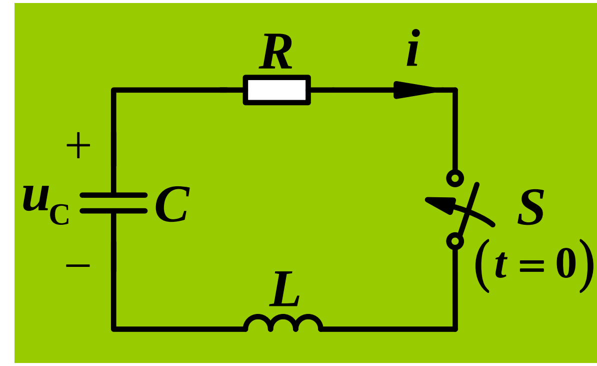
过阻尼

$(\alpha>\omega_0)$



§ 7.7 二阶线性电路的零输入响应

$u_C(0_+) = U_0 \quad i_L(0_+) = 0$



电路方程： $LC\dfrac{d^2u_C}{dt} + RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$

特征方程： $\lambda^2 + \dfrac{R}{L}\lambda + \dfrac{1}{LC} = 0$

特征根： $\lambda_{1,2} = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$

$2\alpha = \dfrac{R}{L} \qquad \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

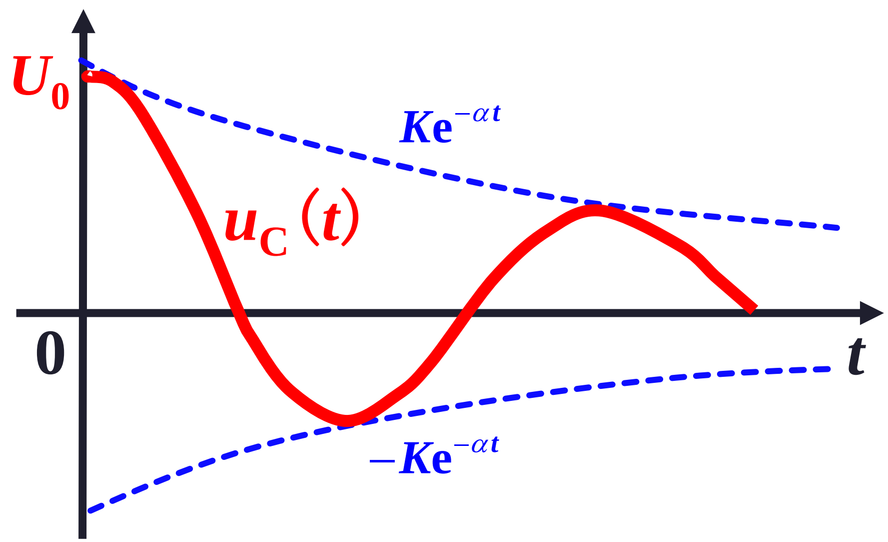
（2） $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$\boxed{u_C = Ke^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta)}$

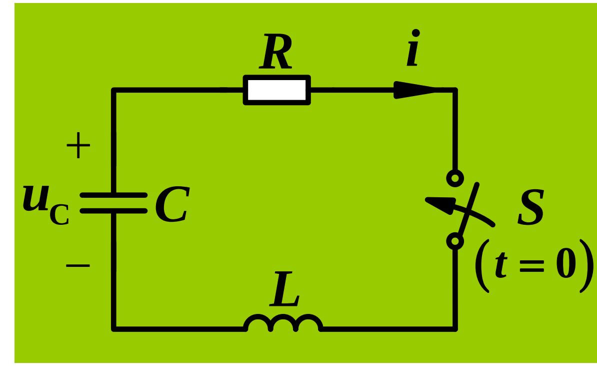
欠阻尼

$(0 < \alpha < \omega_0)$



§ 7.7 二阶线性电路的零输入响应

$u_C(0_+) = U_0 \quad i_L(0_+) = 0$



电路方程： $LC\dfrac{d^2u_C}{dt} + RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0$

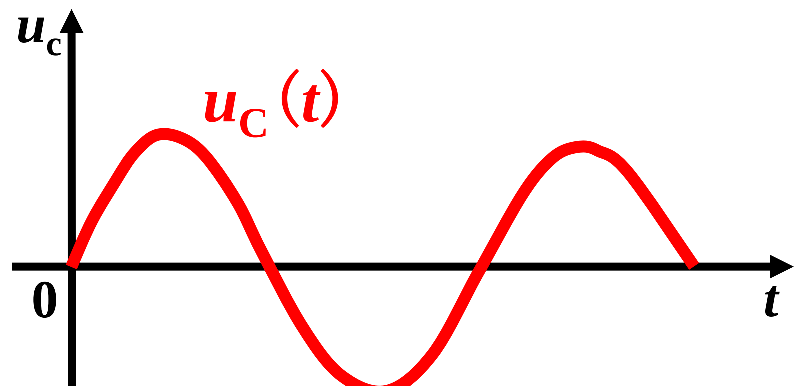
特征方程： $\lambda^2 + \dfrac{R}{L}\lambda + \dfrac{1}{LC} = 0$

特征根： $\lambda_{1,2} = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$ $\qquad 2\alpha = \dfrac{R}{L} \qquad \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

（2） $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$u_C = Ke^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta)$



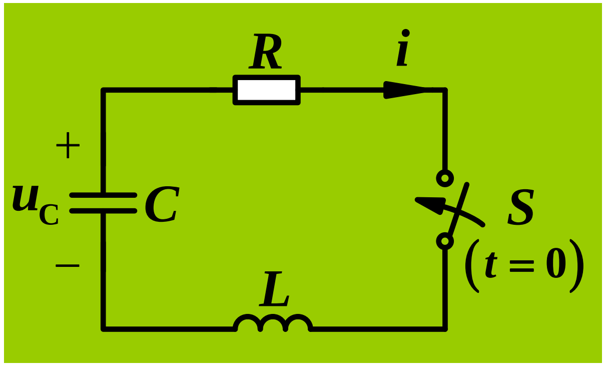
若 $R = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0$ $\qquad u_C = K\sin(\omega_0 t + \theta)$

无阻尼 $(\alpha = 0)$

§ 7.7 二阶线性电路的零输入响应

$u_C(0_+)=U_0 \quad i_L(0_+)=0$



电路方程： $$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

特征方程： $$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

特征根： $$\lambda_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}$$

$$2\alpha=\frac{R}{L} \qquad \omega_0^2=\frac{1}{LC}$$

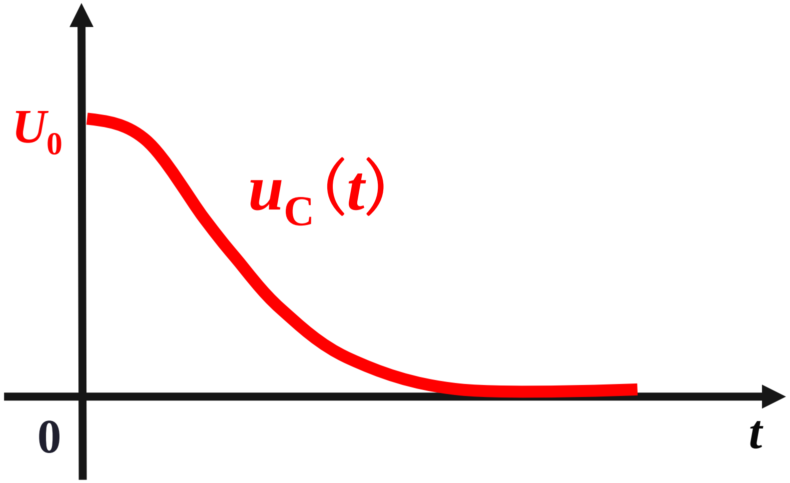
（3） $R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$\lambda_1=\lambda_2=-\alpha$$

$$u_C=K_1e^{-\alpha t}+K_2te^{-\alpha t}$$

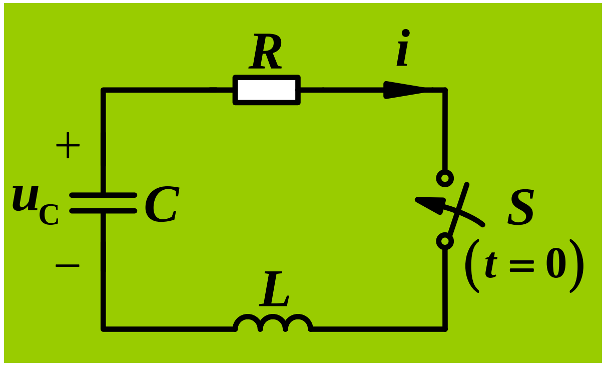
临界阻尼

$(\alpha=\omega_0)$



§ 7.7 二阶线性电路的零输入响应

$u_C(0_+)=U_0 \quad i_L(0_+)=0$



电路方程: $LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$

特征方程: $\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$

特征根: $\lambda_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}$ $\quad 2\alpha=\frac{R}{L} \quad \omega_0^2=\frac{1}{LC}$

$R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$: $\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$ → $u_C=K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}$

过阻尼 $(\alpha>\omega_0)$

$R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$: $\lambda_1=\lambda_2=-\alpha$ → $u_C=K_1e^{-\alpha t}+K_2te^{-\alpha t}$

临界阻尼 $(\alpha=\omega_0)$

$R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$: $\lambda_{1,2}=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ → $u_C=Ke^{-\alpha t}\sin(\omega_d t+\theta)$

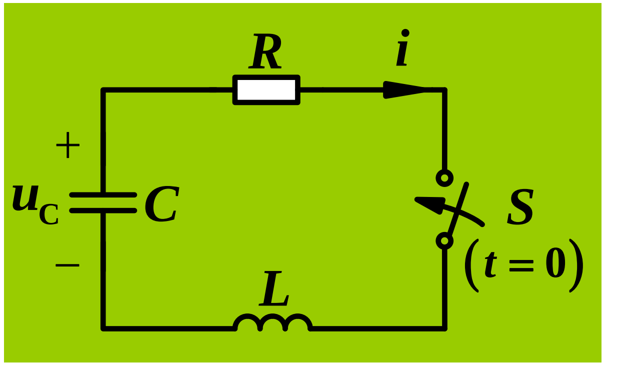
欠阻尼 $(0<\alpha<\omega_0)$

$R=0$: $\lambda_{1,2}=\pm j\omega_0$ → $u_C=K\sin(\omega_0 t+\theta)$

无阻尼 $(\alpha=0)$

§ 7.7 二阶线性电路的零输入响应

$u_C(0_+) = U_0 \quad i_L(0_+) = 0$



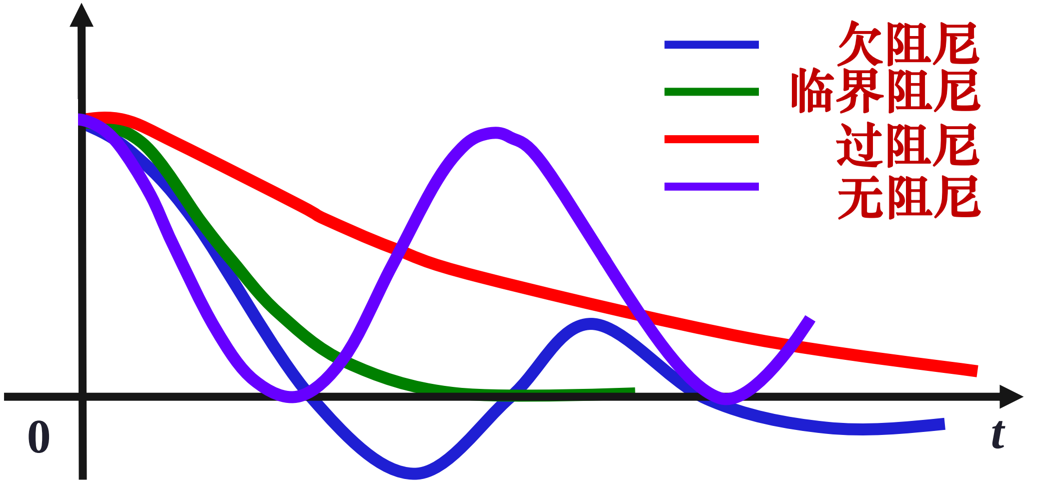
电路方程： $$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

1. 欠阻尼： $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

2. 临界阻尼： $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

3. 过阻尼： $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

4. 无阻尼： $R=0$



请自学二阶电路的零输入响应的求解。
（课本P179）

电路理论

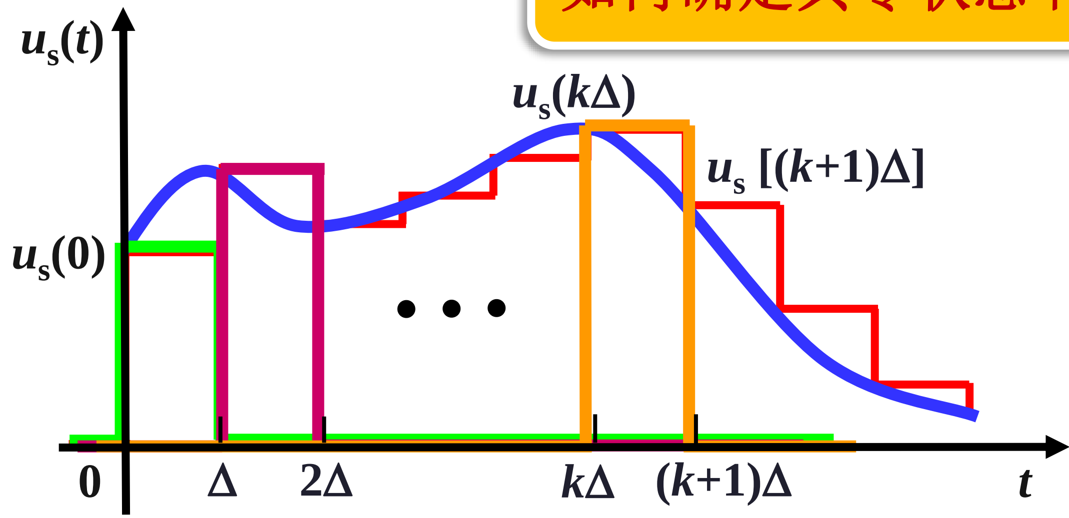
Principles of Electric Circuits

第七章 线性动态电路的时域分析

§7.8 零状态响应的卷积积分计算法

§ 7.8 零状态响应的卷积积分计算法

激励为**任意波形**的线性电路



则：$$u_s(t)\approx\sum_{k=0}^{n}\left[u_s(k\Delta)\frac{\varepsilon(t-k\Delta)-\varepsilon\left[t-(k+1)\Delta\right]}{\Delta}\Delta\right]$$

令 $\Delta\to 0$ ，即 $n\to\infty$

$$u_s(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=0}^{n}\left[u_s(k\Delta)\frac{\varepsilon(t-k\Delta)-\varepsilon\left[t-(k+1)\Delta\right]}{\Delta}\Delta\right]$$

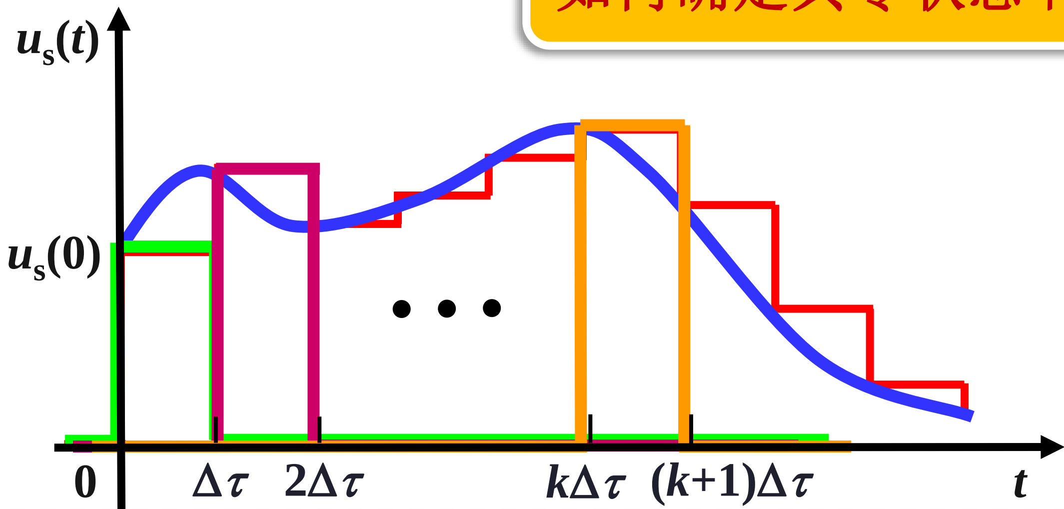
$$\delta(t-\tau)$$

$$=\int_{0_-}^{t}u_s(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

§ 7.8 零状态响应的卷积积分计算法

激励为**任意波形**的线性电路

如何确定其零状态响应。



$$u_s(t)=\int_{0_-}^{t}u_s(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \xrightarrow{\text{零状态响应}} r(t)=u_s(t)\otimes h(t)$$

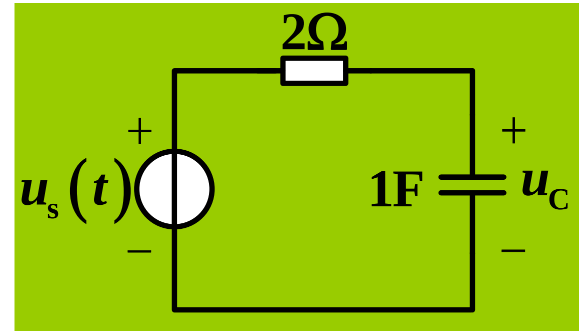
激励 $\xrightarrow[u_s(\tau)\delta(t-\tau)]{\delta(t)}$ 线性电路零状态响应 $\xrightarrow[u_s(\tau)h(t-\tau)]{h(t)}$ 响应

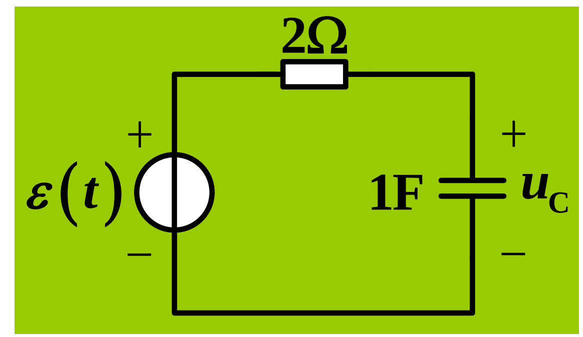
$$r(t)=\int_{0_-}^{t}u_s(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \xrightarrow{\text{简计为}} r(t)=u_s(t)\otimes h(t)$$

卷积积分

§ 7.8 零状态响应的卷积积分计算法

【例】 $u_s(t)=5e^{-t}\varepsilon(t)$, 求电容电压$u_C(t)$的零状态响应。





解：

1. 求冲激响应

阶跃响应： $s(t)=(1-e^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t)$

冲激响应： $h(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}=0.5e^{-\frac{t}{2}}\varepsilon(t)$

2. 求零状态响应$u_C(t)$

$$u_C(t)=\int_{0_-}^{t}u_s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{0_-}^{t}5e^{-\tau}\cdot 0.5e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}d\tau$$
$$=2.5e^{-\frac{t}{2}}\int_{0_-}^{t}e^{-\frac{\tau}{2}}d\tau$$
$$=5\left(e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}\right)\varepsilon(t)\ \text{V}$$

电路理论
Principles of Electric Circuits

第七章 线性动态电路的时域分析

§7.9 动态电路的状态方程

§ 7.9 动态电路的状态方程

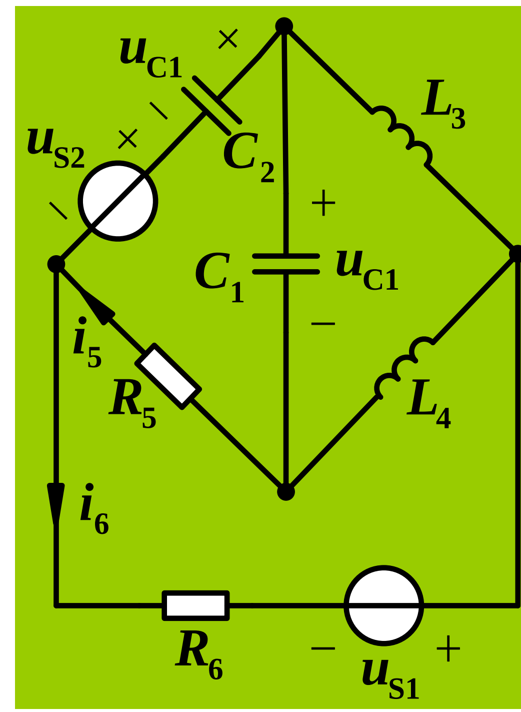
对于高阶动态电路，列写**单变量的微分方程**并求解，其过程十分复杂。

取代 ↑

多变量的状态方程

一、状态变量

对于某个动态电路，如果已知n个独立变量在t_0时刻的初始值和$t \geq t_0$以后电路激励，就可以完全确定$t \geq t_0$以后任何时刻电路的所有响应，则称此n个独立变量为电路的一组**状态变量**。



状态变量 $\xrightarrow{\text{表征}}$ **电路状态**

u_C

i_L

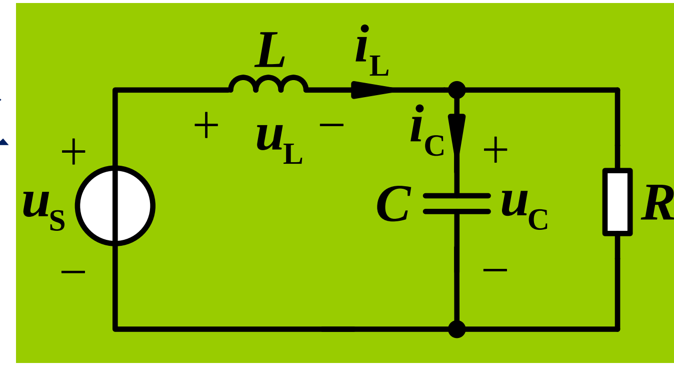
q

ψ

↓

能量状态

§ 7.9 动态电路的状态方程—状态方程



二、状态方程：求解状态变量的微分方程组

以 u_C，i_L为状态变量

——用**状态变量**和**激励**（输入量）的线性组合来表示状态变量的微分

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i_L - \frac{u_C}{R}$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = u_s - u_C$$

改写 →

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{RC}u_C + \dfrac{1}{C}i_L \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{L}u_C + \dfrac{1}{L}u_s \end{cases}$$

状态方程

★ 特点

（1）**一阶**微分方程组

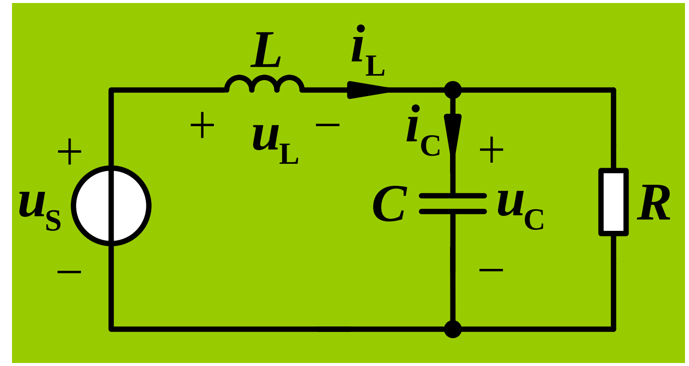
（2）左端为状态变量的**一阶导数**

（3）右端仅含**状态变量**和**输入量**

矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u_s$$

§ 7.9 动态电路的状态方程—状态方程



状态方程

$$\begin{cases} \dfrac{du_C}{dt} = -\dfrac{1}{RC}u_C + \dfrac{1}{C}i_L \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{L}u_C + \dfrac{1}{L}u_s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u_s$$

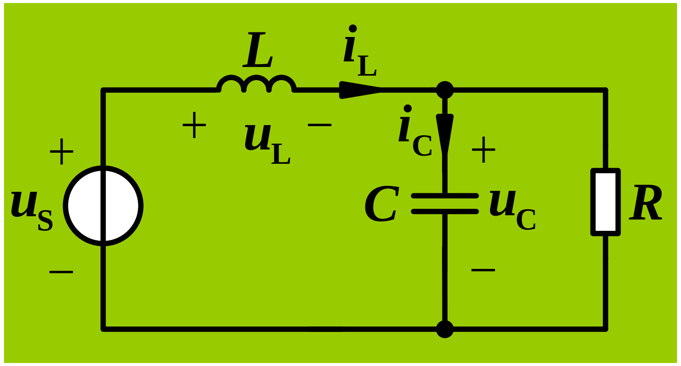
一般形式：$\dot{x} = \underbrace{[A]}_{n\times n}\overbrace{[x]}^{n\times 1} + \underbrace{[B]}_{n\times r}\overbrace{[u]}^{r\times 1}$

状态向量：$[x] = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^T$

$[\dot{x}] = [\dot{x}_1\ \dot{x}_2 \cdots \dot{x}_n]^T$

输入向量：$[u] = [u_1\ u_2 \cdots u_r]^T$

§ 7.9 动态电路的状态方程—状态方程



状态方程

一般形式：$\dot{x}=[A][x]+[B][u]$

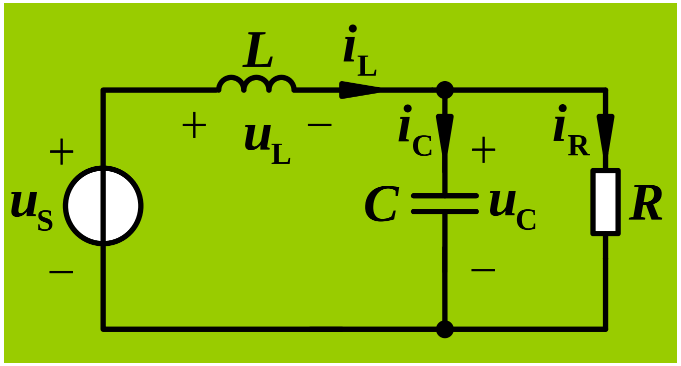
说明：

（1）**过渡过程**就是一个**稳定的能量状态**过渡到另一个**稳定能量状态**的过程。

线性电路中的能量状态完全由**电感电流**和**电容电压**决定，因而选其为电路的状态变量。

（2）状态变量的个数等于**独立的储能元件**个数。

（3）一般选择u_C和i_L为状态变量，也可以选 q 和 ψ为状态变量。**状态变量的选择不唯一。**



三、输出方程

——用**状态变量**表示**输出**的代数方程

设输出变量为u_L、i_C

$$u_L(t)=u_s(t)-u_C(t)$$

$$i_C(t)=i_L(t)-u_C(t)/R$$

$$\begin{bmatrix} u_L \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_S$$

可用于描述输出为u_L、i_C的两输出系统

一般形式：$[y]=[C][x]+[D][u]$　　**输出方程**

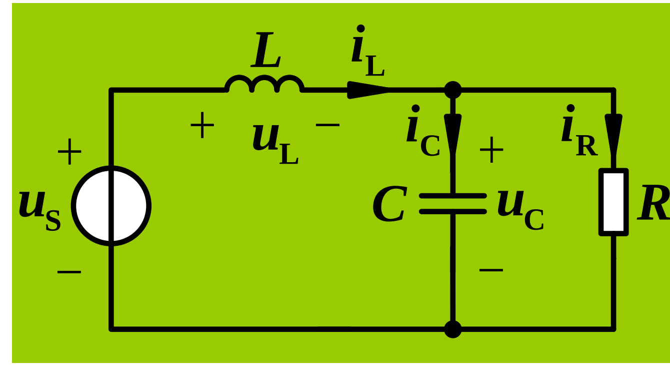
★ **特点：**

（1）代数方程；

（2）用状态变量和输入量的线性组合表示输出量。

§ 7.9 动态电路的状态方程——列写方法

四、状态方程的列写方法 直观法



以 u_C，i_L为状态变量

$\dfrac{du_C}{dt}$ → 由电容节点列KCL

$\dfrac{di_L}{dt}$ → 由电感回路列KVL

$$C\frac{du_C}{dt}=i_L-i_R$$

$$L\frac{di_L}{dt}=u_S-u_C$$

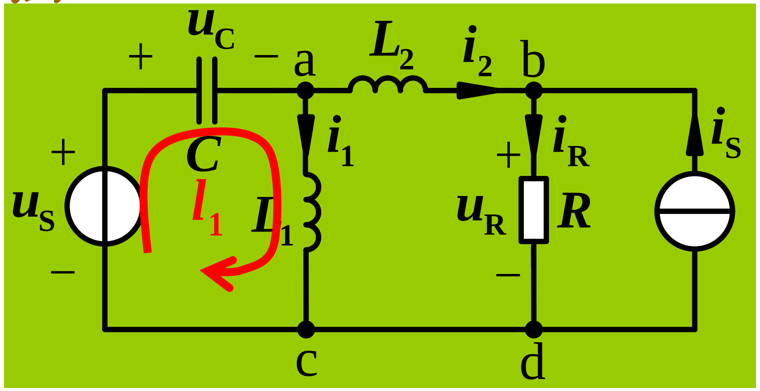
将非状态变量用状态变量和输入量表示 →

$$\begin{cases}\dfrac{du_C}{dt}=\dfrac{i_L}{C}-\dfrac{u_C}{RC}\\[2ex]\dfrac{di_L}{dt}=\dfrac{u_S}{L}-\dfrac{u_C}{L}\end{cases}$$

状态方程标准形式：

$$\begin{bmatrix}\dfrac{du_C}{dt}\\[2ex]\dfrac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C}\\[2ex]-\dfrac{1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\[1ex]\dfrac{u_S}{L}\end{bmatrix}$$

§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法



【例】列写电路的状态方程和以u_C，u_R为输出的输出方程。

对**节点a**列写KCL方程

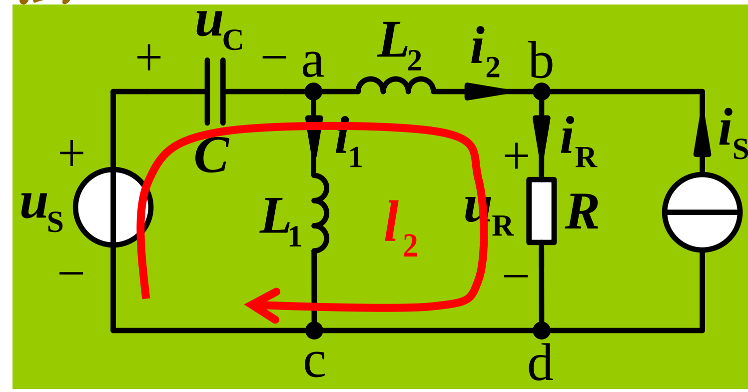
$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_1+i_2$$

对**回路l_1**列写KVL方程

$$L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-u_C+u_S$$

§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法

【例】列写电路的状态方程和以u_C，u_R为输出的输出方程。



对节点a列写KCL方程

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_1+i_2$$

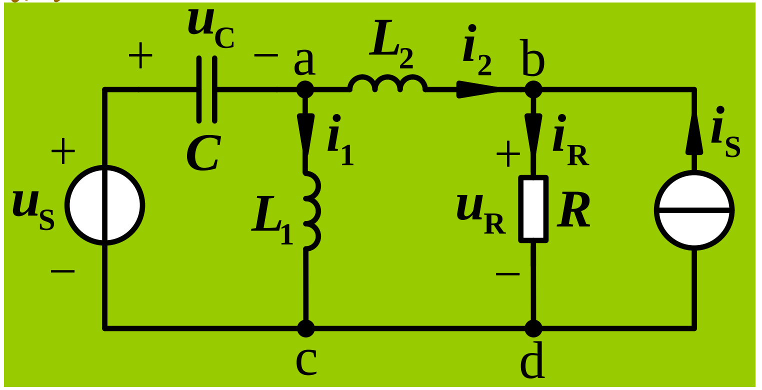
对回路l_1列写KVL方程

$$L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-u_C+u_S$$

对回路l_2列写KVL方程

$$\left.\begin{aligned}L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}&=-u_C-u_R+u_S\\ u_R&=R(i_S+i_2)\end{aligned}\right\}\longrightarrow L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=-Ri_2-u_C-Ri_S+u_S$$

§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法



【例】列写电路的状态方程和以u_C，u_R为输出的输出方程。

$$C\frac{du_C}{dt}=i_1+i_2$$

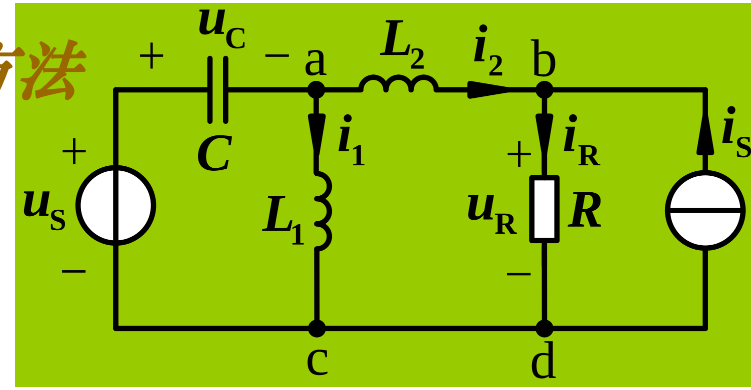
$$L_1\frac{di_1}{dt}=-u_C+u_S$$

$$L_2\frac{di_2}{dt}=-Ri_2-u_C-Ri_S+u_S$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dfrac{du_C}{dt}\\ \dfrac{di_1}{dt}\\ \dfrac{di_2}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{C} & \dfrac{1}{C}\\ -\dfrac{1}{L_1} & 0 & 0\\ -\dfrac{1}{L_2} & 0 & -\dfrac{R}{L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_1\\ i_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ \dfrac{1}{L_1} & 0\\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R}{L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_S\\ i_S\end{bmatrix}$$

§ 7.9 动态电路的状态方程——列写方法



【例】列写电路的状态方程和以u_C，u_R为输出的输出方程。

状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{L_2} & 0 & -\dfrac{R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

输出方程：

$$u_C = u_C$$

$$u_R = Ri_2 + Ri_S$$

$$\begin{bmatrix} u_C \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法

四、状态方程的列写方法 直观法

★ **总结：**

（1）选取独立电容电压u_C和独立电感电流i_L为**状态变量**；

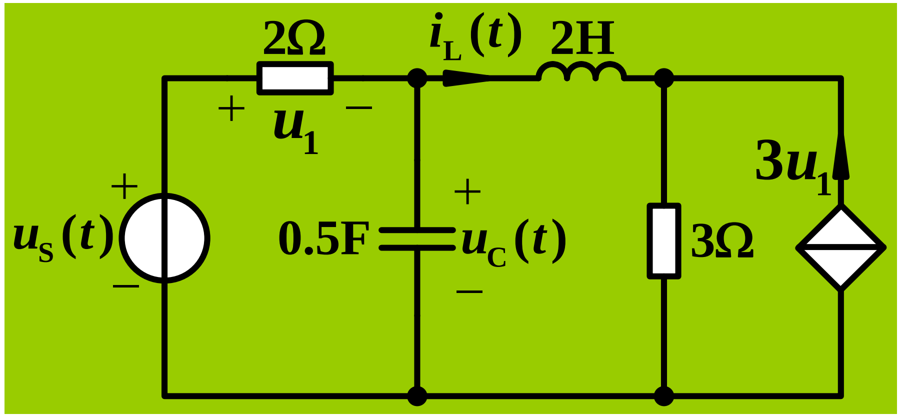
（2）列写独立电容所关联节点的**KCL方程**和电容的**VAR方程**；

（3）列写独立电感所在回路的**KVL方程**和电感的**VAR方程**；

（4）将上述方程中**非状态变量**用**状态变量**和**输出量**表示；

（5）消去**非状态变量**，整理成标准形式。

【例】列写以u_C，i_L为变量的状态方程。



解:

$$\begin{cases} 0.5\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{u_1}{2} - i_L = \dfrac{u_S - u_C}{2} - i_L \\ 2\dfrac{di_L}{dt} = u_C - (i_L + 3u_1)\times 3 = u_C - [i_L + 3(u_S - u_C)]\times 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{du_C}{dt} = -u_C - 2i_L + u_S \\ \dfrac{di_L}{dt} = 5u_C - 1.5i_L - 4.5u_S \end{cases}$$

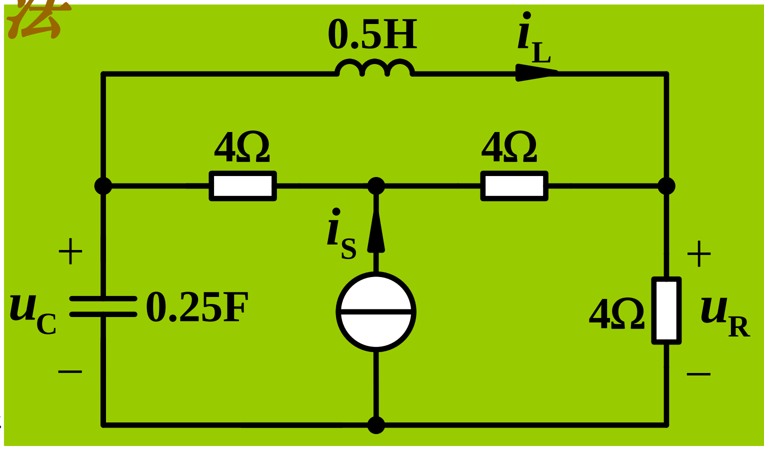
$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4.5 \end{bmatrix} u_S$$

状态方程的矩阵形式

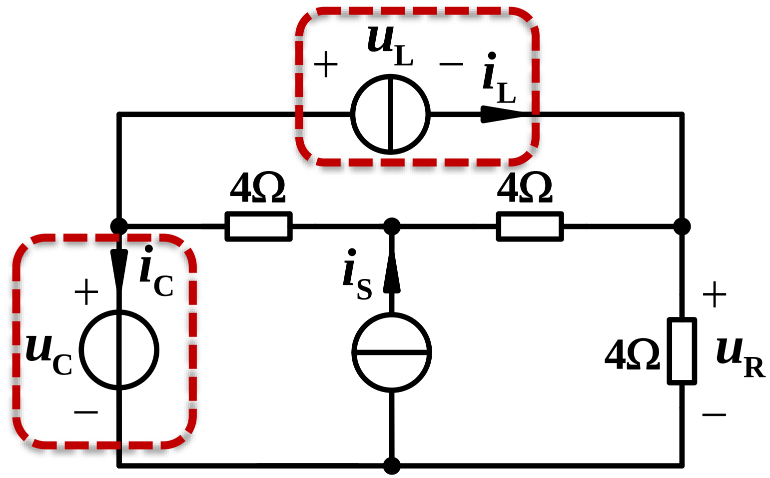
§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法

四、状态方程的列写方法　叠加法

【例】以u_C和i_L为状态变量列写电路的状态方程和以u_L和u_R为输出的输出方程。



将电容、电感分别用电压源和电流源代替



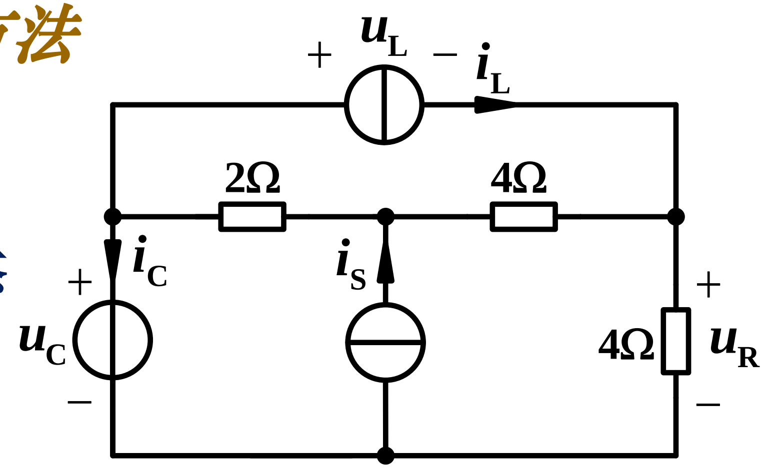
根据叠加定理和齐性定理可得：

$$i_C = a_{11}u_C + a_{12}i_L + b_1 i_S$$
$$u_L = a_{21}u_C + a_{22}i_L + b_2 i_S$$
$$u_R = a_{31}u_C + a_{32}i_L + b_3 i_S$$

如果能确定方程中各个系数，状态方程就容易得到了。

§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法

四、状态方程的列写方法　叠加法



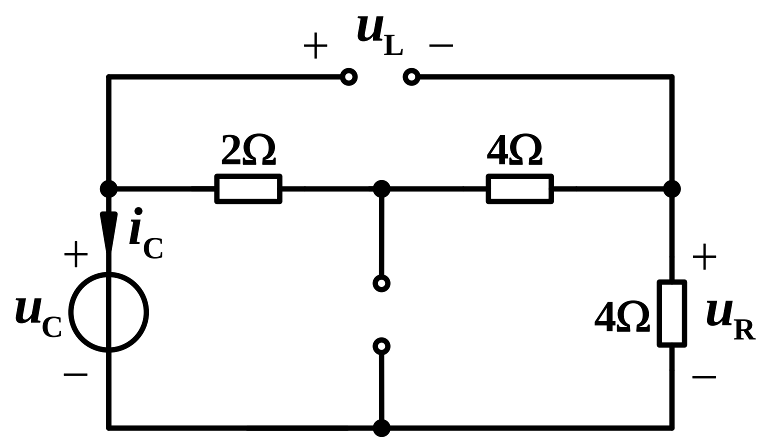
【例】以u_C和i_L为状态变量列写电路的状态方程和以u_L和u_R为输出的输出方程。

$$i_C = a_{11}u_C + a_{12}i_L + b_1 i_S$$

$$u_L = a_{21}u_C + a_{22}i_L + b_2 i_S$$

$$u_R = a_{31}u_C + a_{32}i_L + b_3 i_S$$

（1）电压源u_C单独作用



令u_C=1V

$$i_C = \frac{-u_C}{2+4+4} = -0.1\text{A}$$

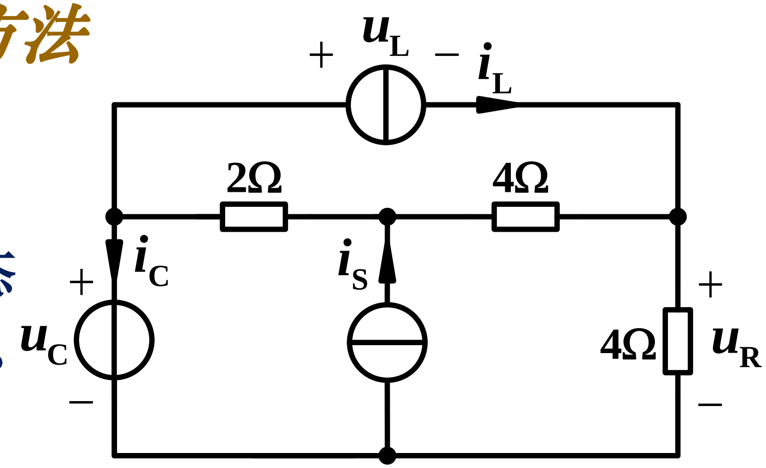
$$u_L = \frac{(2+4)}{2+4+4}u_C = 0.6\text{V}$$

$$u_R = \frac{4}{2+4+4}u_C = 0.4\text{V}$$

则：$a_{11} = -0.1$　$a_{21} = 0.6$　$a_{31} = 0.4$

四、状态方程的列写方法　叠加法

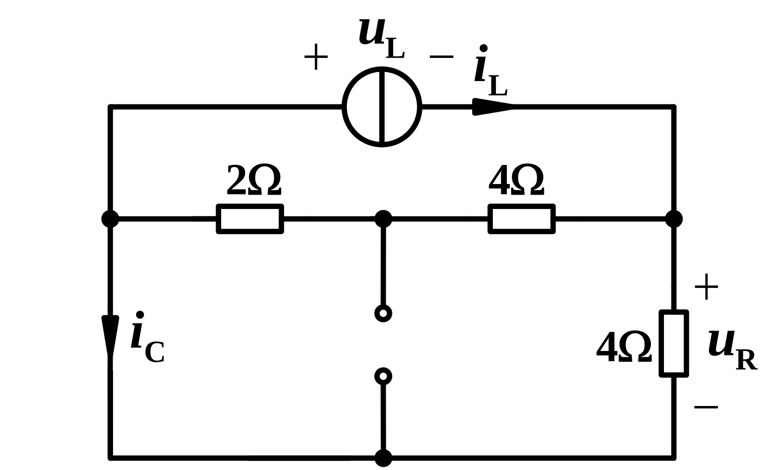
【例】以u_C和i_L为状态变量列写电路的状态方程和以u_L和u_R为输出的输出方程。



$$i_C = a_{11}u_C + a_{12}i_L + b_1 i_S$$

$$u_L = a_{21}u_C + a_{22}i_L + b_2 i_S$$

$$u_R = a_{31}u_C + a_{32}i_L + b_3 i_S$$



（2）电流源i_L单独作用

令i_L=1A

$$i_C = -\frac{2+4}{2+4+4} = -0.6\text{A}$$

$$u_L = -(2+4)//4\times 1 = -2.4\text{V}$$

则：$a_{12} = -0.6$　$a_{22} = -2.4$　$a_{32} = 2.4$

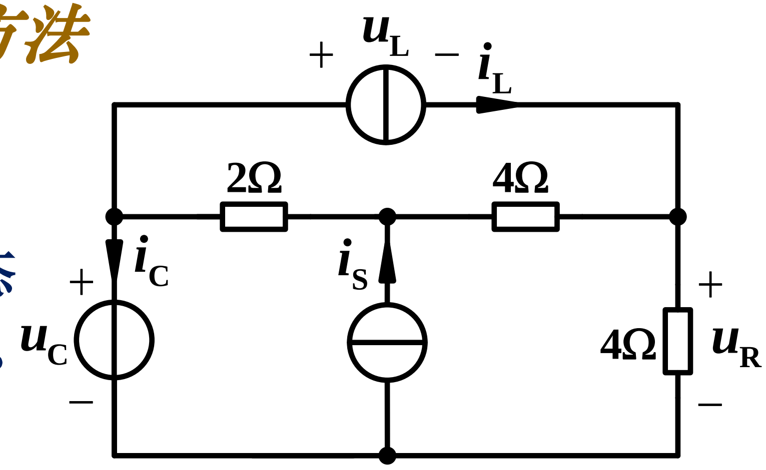
$$u_R = -u_L = 2.4\text{V}$$

§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法

四、状态方程的列写方法

叠加法

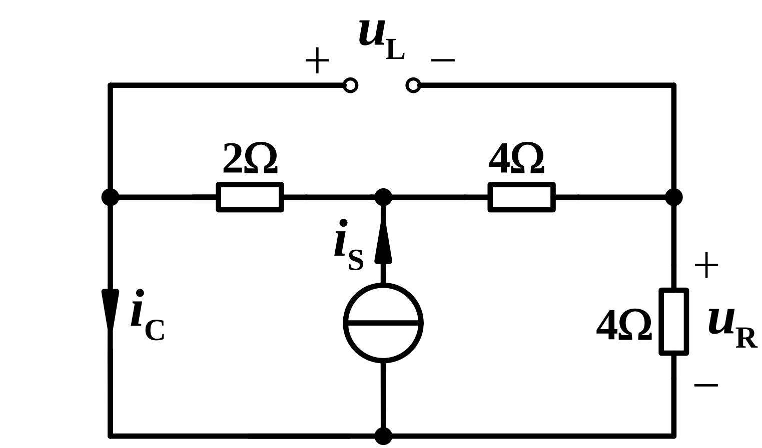
【例】以u_C和i_L为状态变量列写电路的状态方程和以u_L和u_R为输出的输出方程。



$$i_C = a_{11}u_C + a_{12}i_L + b_1 i_S$$

$$u_L = a_{21}u_C + a_{22}i_L + b_2 i_S$$

$$u_R = a_{31}u_C + a_{32}i_L + b_3 i_S$$



（3）电流源i_S单独作用

令i_S=1A

$$i_C = \frac{4+4}{2+4+4} = 0.8\text{A}$$

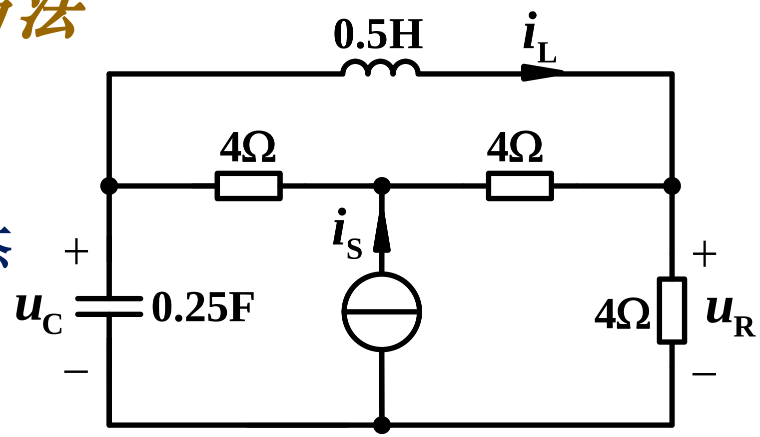
$$u_L = -\frac{2}{2+4+4}\times 4 = -0.8\text{V}$$

则：$b_1 = 0.8 \quad b_2 = -0.8 \quad b_3 = 0.8$

$$u_R = -u_L = 0.8\text{V}$$

§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法

四、状态方程的列写方法　叠加法



【例】以u_C和i_L为状态变量列写电路的状态方程和以u_L和u_R为输出的输出方程。

$$i_C = -0.1u_C - 0.6i_L + 0.8i_S$$

$$u_L = 0.6u_C - 2.4i_L + -0.8i_S$$

$$u_R = 0.4u_C + 2.4i_L + 0.8i_S$$

将i_C、u_L代换为：$C\frac{du_C}{dt}$ 和 $L\frac{di_L}{dt}$

$$\begin{cases} C\dfrac{du_C}{dt} = -0.1u_C - 0.6i_L + 0.8i_S \\ L\dfrac{di_L}{dt} = -0.6u_C - 2.4i_L - 0.8i_S \end{cases}$$

整理

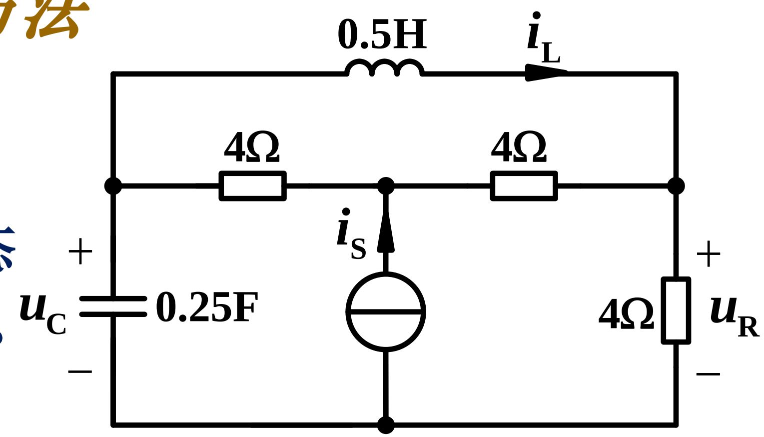
$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & -2.4 \\ 1.2 & -4.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.2 \\ -1.6 \end{bmatrix} i_S$$

状态方程

§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法

四、状态方程的列写方法 叠加法

【例】以u_C和i_L为状态变量列写电路的状态方程和以u_L和u_R为输出的输出方程。



状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & -2.4 \\ 1.2 & -4.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.2 \\ -1.6 \end{bmatrix} i_S$$

输出方程：

$$i_C = -0.1u_C - 0.6i_L + 0.8i_S$$

$$u_L = 0.6u_C - 2.4i_L + -0.8i_S$$

$$u_R = 0.4u_C + 2.4i_L + 0.8i_S$$

$$\begin{bmatrix} u_L \\ u_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -2.4 \\ 0.4 & 2.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix} i_S$$

§ 7.9 动态电路的状态方程—列写方法

四、状态方程的列写方法　叠加法

★ **总结：**

（1）**替代**　电容C $\xrightarrow{\text{替代为}}$ 电压为u_C的电压源

电感L $\xrightarrow{\text{替代为}}$ 电流为i_L的电流源

（2）利用叠加定理和齐性定理求解电容电流i_C和电感电压u_L；

（3）**代换**　i_C 代换为 $C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

u_L 代换为 $L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

（4）整理**状态方程**和**输出方程**的**标准形式**。