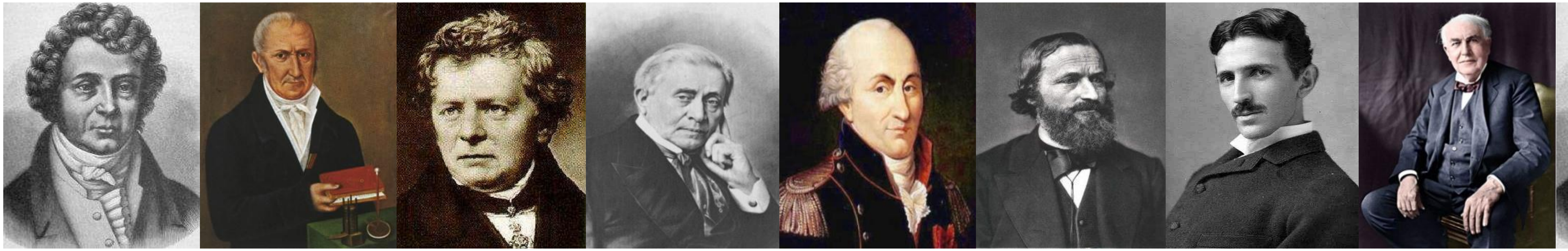
电 路 理 论

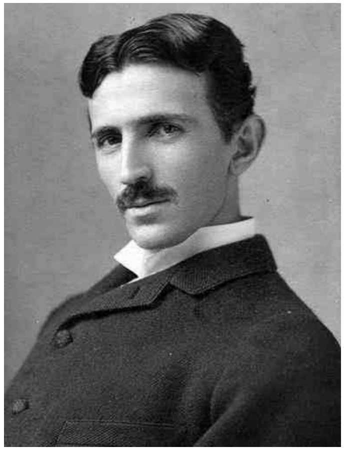
Principles of Electric Circuits

第八章　正弦稳态电路的相量模型

2024年11月



“交直之争”

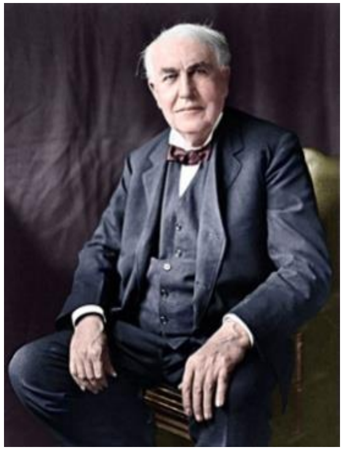


尼古拉·特斯拉

(Nikola Tesla)

塞尔维亚裔美籍发明家、物理学家

（1856-1943）



托马斯·阿尔瓦·爱迪生

(Thomas Alva Edison)

美国著名发明家、物理学家、企业家

（1847-1931）

“交直之争”

《电力之战》是由韦恩斯坦国际影业公司出品，阿方索·戈麦兹-瑞洪执导的历史传记片，于2018年1月5日在英国上映。

该片讲述了第二次工业革命时代，托马斯·爱迪生和乔治·威斯汀豪斯两大电力巨头就直流电与交流电展开竞争和对峙的故事。

电 路 理 论

Principles of Electric Circuits

第八章　正弦稳态电路的相量模型

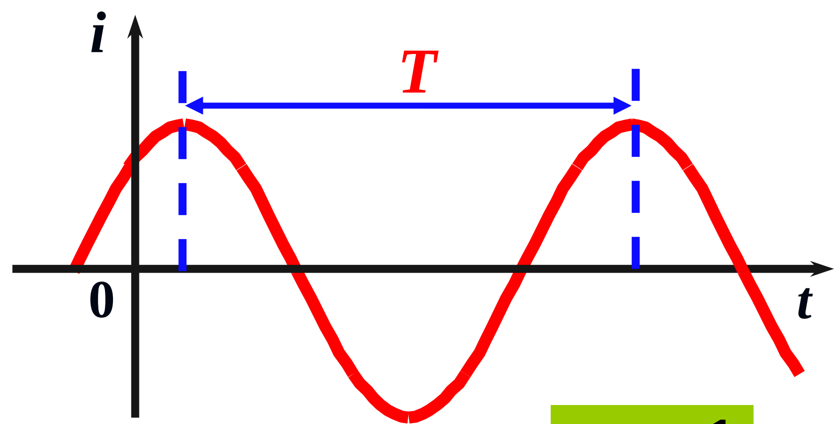
§8.1 正弦量

§ 8.1 正弦量

一、正弦量（Sinusoid）

瞬时表达式：

$$i(t) = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi)$$



正弦量为周期函数：

$$f(t) = f(t + kT)$$

$$f = \frac{1}{T}$$

周期 T (period)：重复变化一次所需的时间，**单位**：s (秒)

频率 f (frequency)：每秒重复变化的次数，**单位**：Hz（赫兹）

正弦稳态电路： 各支路电压和电流均为与电源同频率的正弦量的单一频率线性电路

§ 8.1 正弦量

一、正弦量（Sinusoid）

研究正弦稳态电路的意义

1. 正弦稳态电路在电力系统和电子技术领域的地位十分重要。

正弦函数是周期函数，其加、减、求导、积分运算后仍为同频率的正弦函数。

正弦信号容易产生、传送和使用，特别是在电力系统中利于电能的远距离传输。

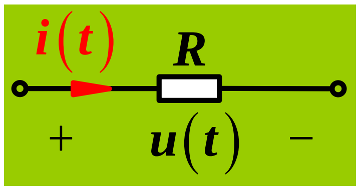
2.正弦信号是一种基本信号，非正弦周期信号在一定条件下可以分解为一系列按正弦规律变化的分量。

傅里叶级数展开：$f(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k \cos(k\omega t+\theta_k)$

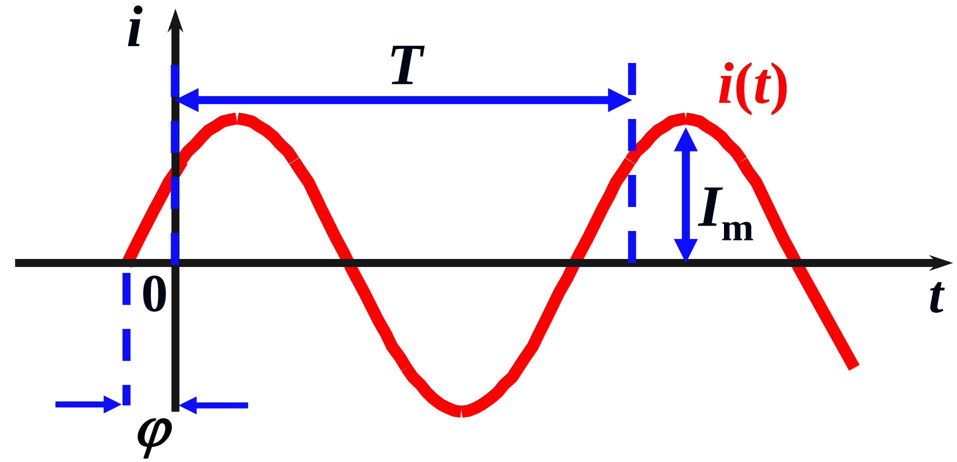
第12章将重点讲解

§ 8.1 正弦量

二、正弦量的三要素



$$i(t) = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi)$$



(a) **幅值** (Amplitude) (振幅、最大值)　I_{m}

(b) **角频率** (Angular frequency)　ω

物理量	符号	单位名称
角频率	ω	rad/s　弧度/秒
频率	f	Hz　赫[兹]
周期	T	s　秒

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = \frac{\mathrm{d}(\omega t + \varphi)}{\mathrm{d}t}$$

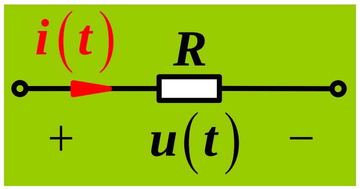
相位随时间的变化率

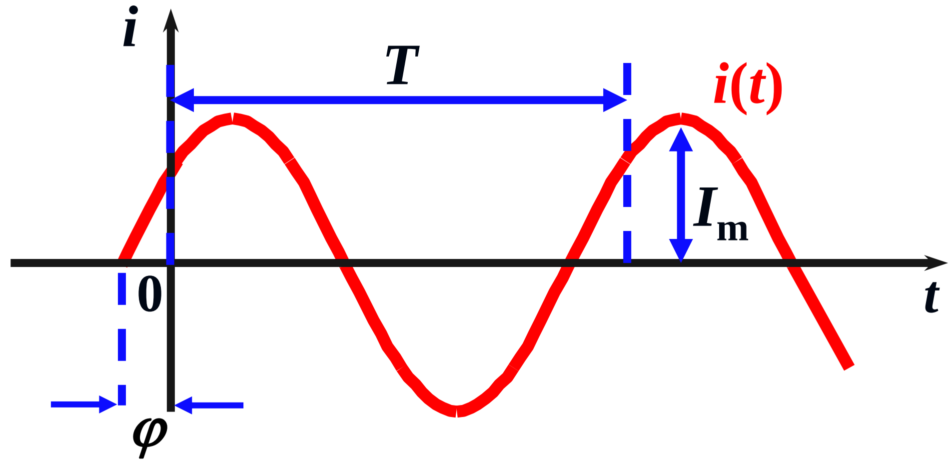
(c) **初相位/角** (Initial phase angle) φ

$$i(t)\big|_{t=0} = I_{\mathrm{m}}\sin\varphi$$

§ 8.1 正弦量

二、正弦量的三要素





$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

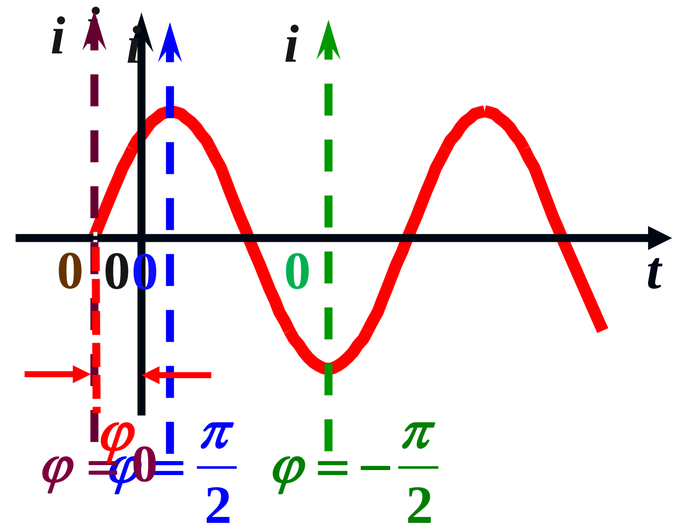
(a) 幅值 (Amplitude) (振幅、最大值) I_m

(b) 角频率 (Angular frequency) ω

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$ 单位： rad/s

(c) 初相位/角 (Initial phase angle) φ

$$i(t)\big|_{t=0} = I_m \sin\varphi$$



★ 注意：一般情况下 $|\varphi| \le \pi$

华北电力大学(保定) NORTH CHINA ELECTRIC POWER UNIVERSITY (BAODING)

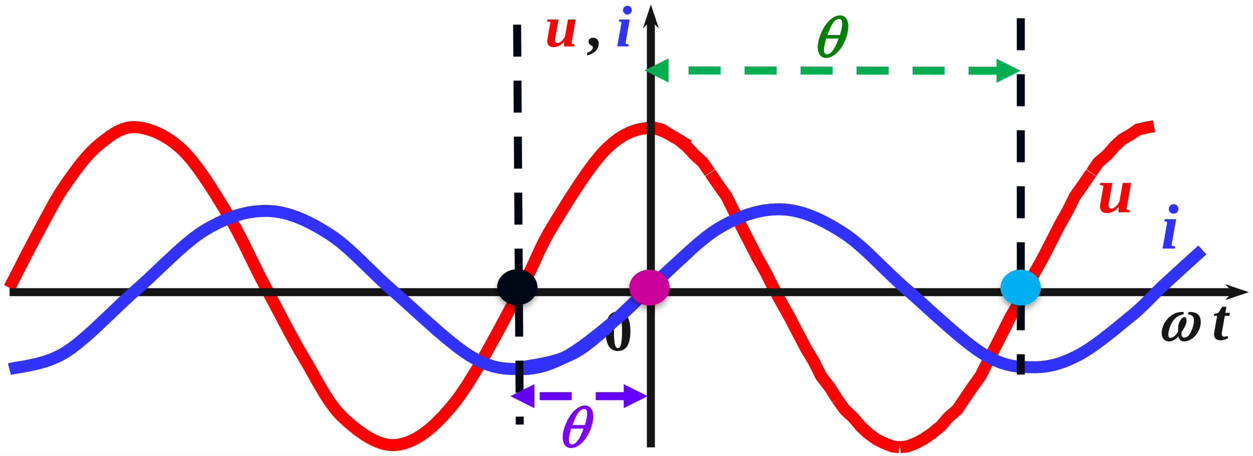
电工教研室 T&R Section of Electrical Engineering

三、同频率正弦量的相位差

设：$u(t)=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_u)$，$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_i)$

相位差：$\theta=(\omega t+\varphi_u)-(\omega t+\varphi_i)=\varphi_u-\varphi_i$

规定：$|\theta|\le\pi$ （180°）



$$\left.\begin{aligned}u(t)&=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+90^\circ)\ \mathrm{V}\\ i(t)&=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+0^\circ)\ \mathrm{A}\end{aligned}\right\}\theta=90^\circ$$

$$\left.\begin{aligned}u(t)&=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t-270^\circ)\ \mathrm{V}\\ i(t)&=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+0^\circ)\ \mathrm{A}\end{aligned}\right\}\theta=-270^\circ$$

三、同频率正弦量的相位差

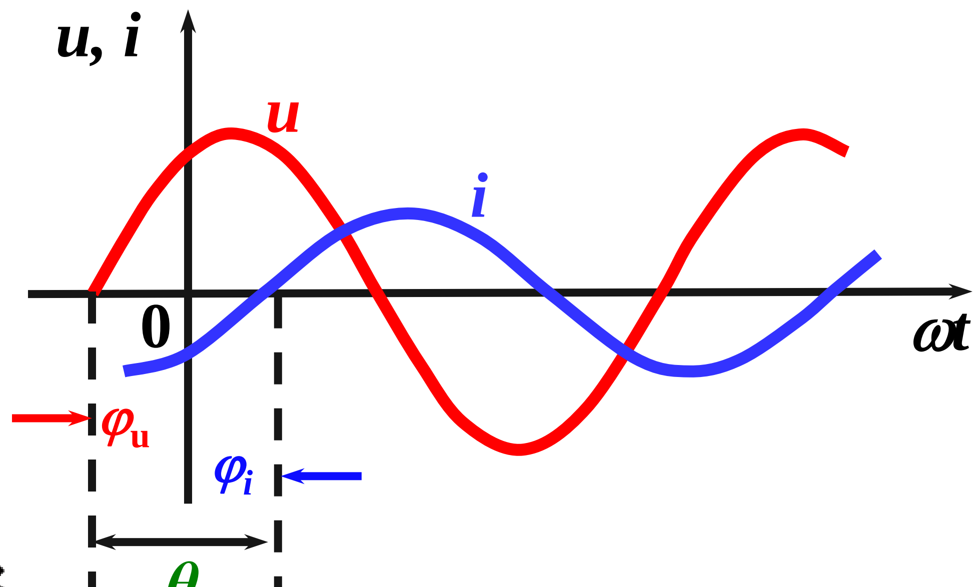
设： $u(t)=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_u)$， $i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_i)$

相位差： $\theta=(\omega t+\varphi_u)-(\omega t+\varphi_i)=\varphi_u-\varphi_i$

规定： $|\theta|\leq\pi$ （180°）

$\theta>0$，电压 u **超前**电流 i ，或电流 i **滞后**电压 u

$\theta<0$，电流 i **超前**电压 u ，或电压 u **滞后**电流 i

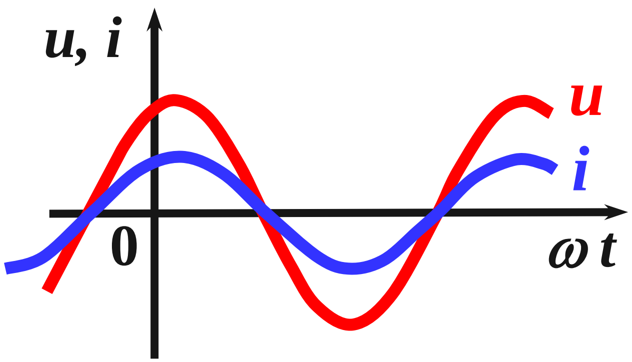


§ 8.1 正弦量

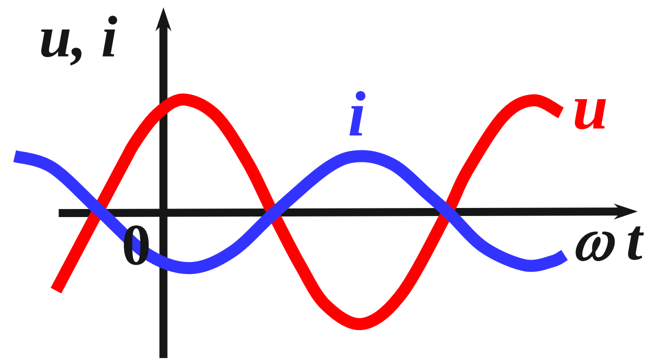
三、同频率正弦量的相位差

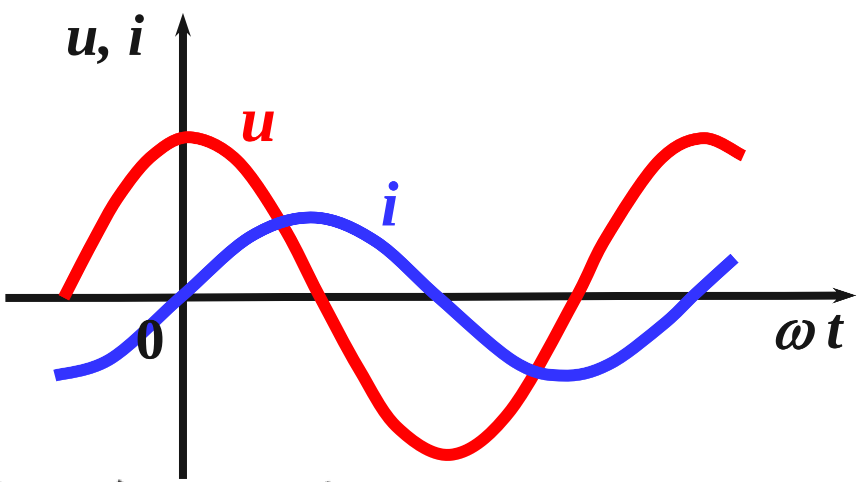
特殊相位关系

$\theta = 0$，同相



$\theta = \pm\pi\ (\pm 180^\circ)$，反相





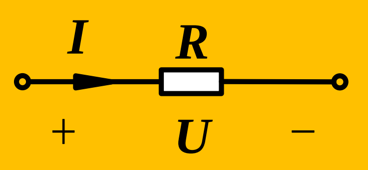
$\theta = \pm 90^\circ$，正交

u 超前 i 90°

或 i 滞后 u 90°

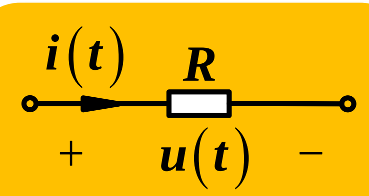
四、周期性电压、电流的有效值(Effective Value)

物理意义



直流

热效应



交流

$$W_{\mathrm{DC}} = RI^2T \quad = \quad W_{\mathrm{AC}} = \int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$$

电流有效值：$$I \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

电压有效值：$$U \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$$

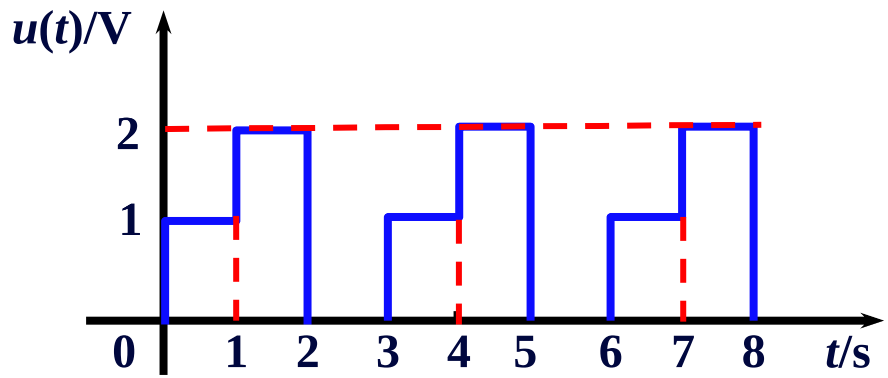
方均根值
(root-mean-square，
简记为 rms)

§ 8.1 正弦量

四、周期性电压、电流的有效值(Effective Value)

电流有效值：$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$　电压有效值：$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$

【例】电压信号$u(t)$如图所示, 求其有效值U。



解：根据有效值的定义

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\int_0^1 1^2\mathrm{d}t+\int_1^2 2^2\mathrm{d}t+\int_2^3 0^2\mathrm{d}t\right)}=1.29\ \mathrm{V}$$

四、周期性电压、电流的有效值(Effective Value)

正弦电流、电压的有效值

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$$

★ $$I_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}I$$

有效值：$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2\sin^2(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t}$

由 $\int_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t=\int_0^T \frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t\Big|_0^T=\frac{1}{2}T$

则 $I=\sqrt{\frac{1}{T}I_{\mathrm{m}}^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\approx 0.707I_{\mathrm{m}}$

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$$

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi)$$

市电电压

有效值：U=220V， U=380V

$U_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}U$

幅值：U_{m}≈311V， U_{m}≈537V

四、周期性电压、电流的有效值(Effective Value)

有效值

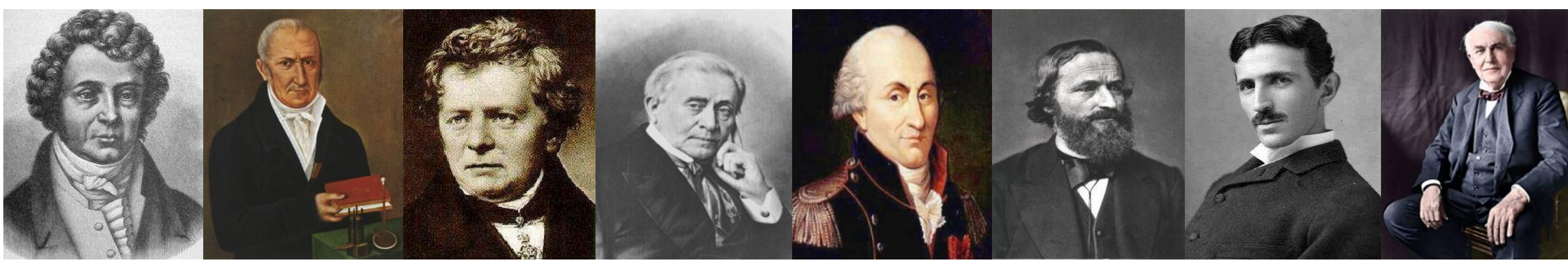
工程中：设备铭牌、电网电压等级等一般为有效值。

测量中：交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

电 路 理 论
Principles of Electric Circuits

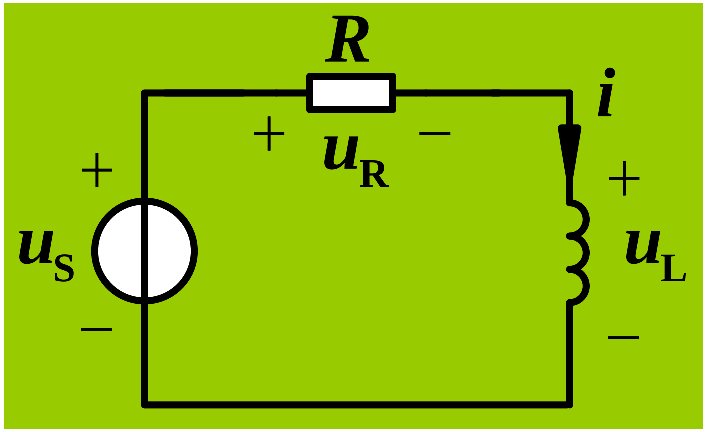
第八章 正弦稳态电路的相量模型

§ 8.2 正弦稳态响应



§ 8.2 正弦稳态响应

一、问题的提出



已知：$u_S(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

常微分方程

（Ordinary Differential Equation, ODE）

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \quad i' \quad + \quad i'' \quad (t \geq 0)$$

全解 ＝ 通解 ＋ 特解

（瞬态解）（稳态解）

代

“正弦稳态分析”即求解稳态解的过程

入

激励 $\sin \omega t$ $\xrightarrow{\text{查表}}$ $A\sin(\omega t + B)$

利用“待定系数法” → 稳态解

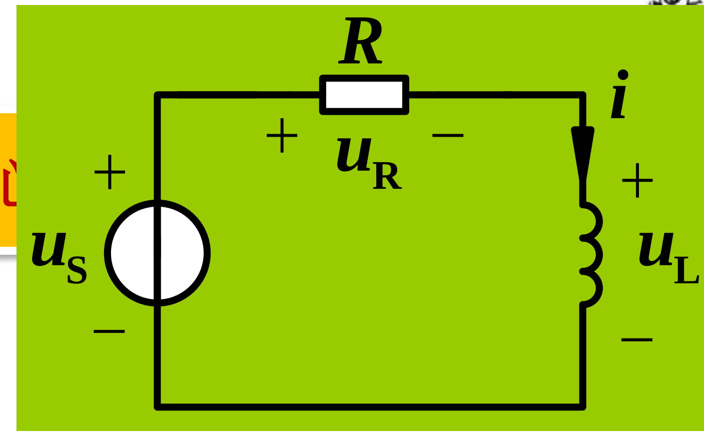
具体求解过程

见课本P196

§ 8.2 正弦稳态响应

一、问题的提出

扎心



已知：$u_S(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

稳态解：

$$i(t)=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

困难1:待定系数的求解

求导：

$$u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

$$=\frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}+90°)$$

困难2:正弦量的微积分

KVL:

$$u_R(t)=u_S-u_L(t)=\frac{RU_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

困难3:正弦量的代数和

§ 8.2 正弦稳态响应

二、如何解决

已知：$u_S(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

斯泰因梅茨(Steinmetz)
德裔美国电机工程师
(1865-1923)

稳态解：

$$i(t)=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

求导：

$$u_L(t)=\frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}+90°)$$

KVL:

$$u_R(t)=\frac{RU_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

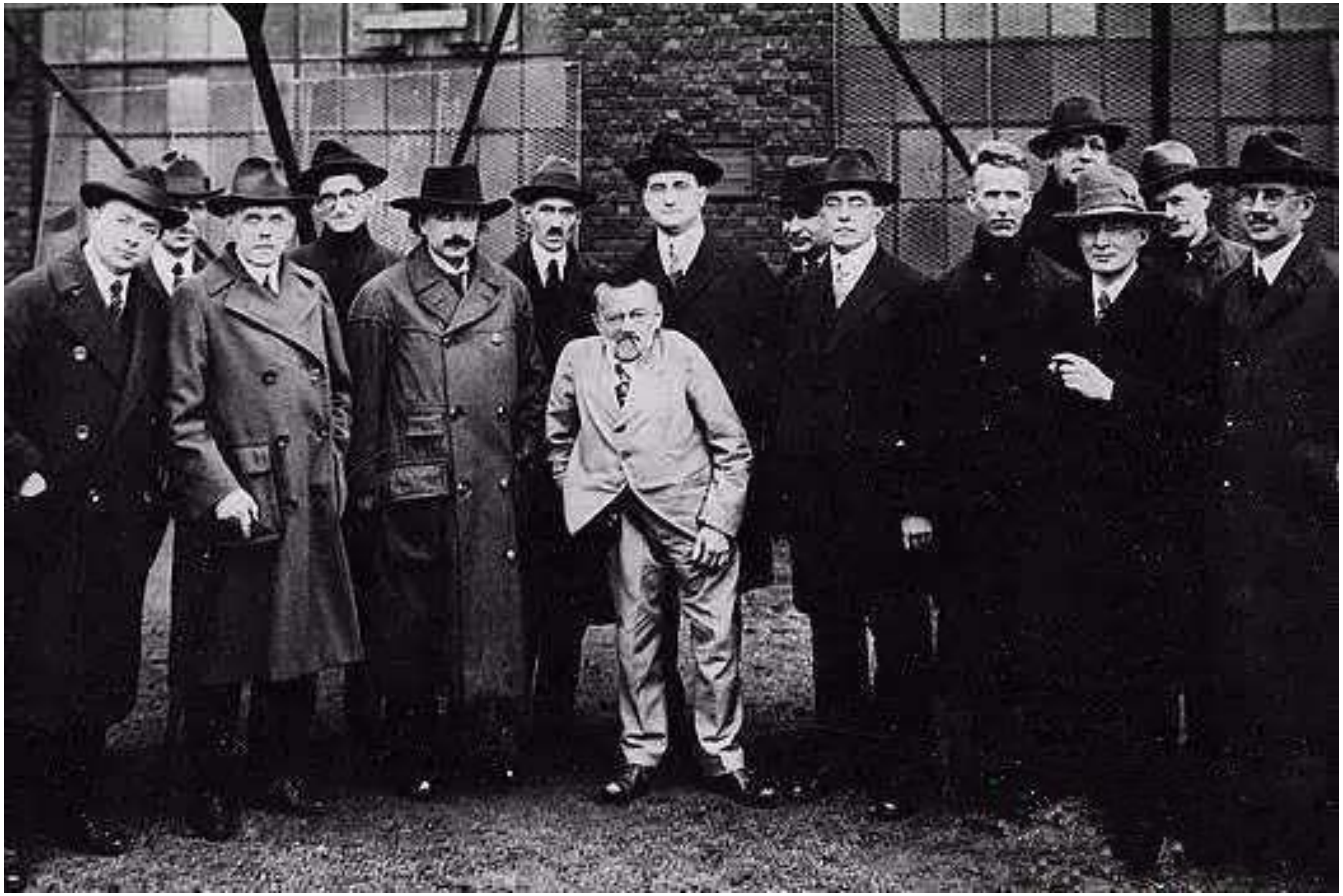
1893年发明

一种求解正弦稳态电路的简便方法

3个支路量有何特点？

所有支路电压电流均以相同频率变化！！

§ 8.2 正弦稳态响应



斯泰因梅茨 德裔美国电机工程师，美国艺术与科学学院院士，“相量法”的创始人，1901-1902 年任美国电机工程师学会主席，一生获近200项专利，涉及发电、输电、配电、电照明、电机、电化学等领域。

电 路 理 论
Principles of Electric Circuits

第八章　正弦稳态电路的相量模型

§8.3 相　量

一、相量 (Phasor)

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$$

~~(a) 角频率(ω)~~

所有支路电压电流均以相同频率变化！！

(b) 幅值 (I_{m})

(c) 初相角(φ)

如何同时表示幅值和相位？

斯泰因梅茨(Steinmetz)
德裔美国电机工程师
（1865-1923）

1893年发明

一种求解正弦稳态电路的简便方法

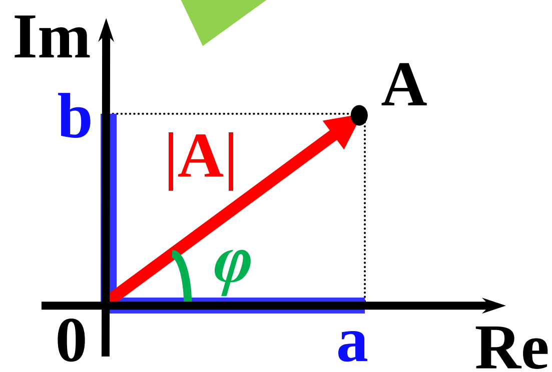
用"复数"表示正弦量

§ 8.3 相量

复数知识回顾

(a) 复数的表示形式

复平面上矢量表示



代数形式：$A = a + \mathrm{j}b$

指数形式：$A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

极坐标形式：$A = |A|\angle\varphi$

幅角取值范围：$|\varphi| \le \pi$

三角函数形式：$A = |A|(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$

★转换关系：

$$\begin{cases} a = |A|\cos\varphi \\ b = |A|\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} |A| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

§ 8.3 相量

+j , −j , −1 都是旋转因子
“一乘(j / −j /−1)就转”

复数知识回顾

(b) 复数的运算

加减运算——直角坐标 $A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2)$

乘除运算——极坐标 $A_1 \cdot A_2 = |A_1||A_2| \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$

(c) 旋转因子

欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi = 1\angle\varphi$

$$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+\varphi)}$$

A逆时针旋转一个角度φ，模值不变

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2} = +\mathrm{j}$$

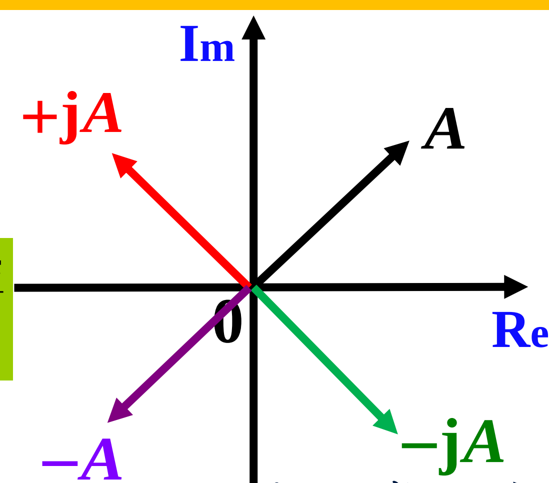
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\frac{\pi}{2})} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{j}\sin(-\frac{\pi}{2}) = -\mathrm{j}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pm\pi)} = \cos(\pm\pi) + \mathrm{j}\sin(\pm\pi) = -1$$

$$\mathrm{j}A = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$-\mathrm{j}A = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$-A = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$$



§ 8.3 相量

一、相量 (Phasor)

正弦量的相量表示：

构造一个复数 $A(t)=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$

$$A(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{j}\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$$

则： $\mathrm{Im}[A(t)]=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)=i(t)$

欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$$

一一对应

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi) \quad\Longleftrightarrow\quad A(t)=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$=\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

一一对应　　　　一一对应

$$\dot{I}=I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=I\angle\varphi$$

相量

由正弦量到相量是一种**数学变换**

相量正变换: $\dot{I}=ph\left[i(t)\right]$

相量反变换: $i(t)=ph^{-1}\left[\dot{I}\right]$

§ 8.3 相量

相量与向量的区别和联系？

一、相量 (Phasor)

正弦量的相量表示：

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)\Leftrightarrow \dot{I}=I\angle\varphi$$

- **相量的模**表示正弦量的有效值
- **相量的幅角**表示正弦量的初相位

【例1】$i(t)=-141.4\sin(314t-30^{\circ})$ A，用相量表示 $i(t)$, $u(t)$。
$u(t)=311.1\cos(314t-60^{\circ})$ V

解：$\dot{I}=ph\left[141.4\sin(314t-30^{\circ}+180^{\circ})\right]=100\angle150^{\circ}$ A

$\dot{U}=ph\left[311.1\sin(314t-60^{\circ}+90^{\circ})\right]=220\angle30^{\circ}$ V

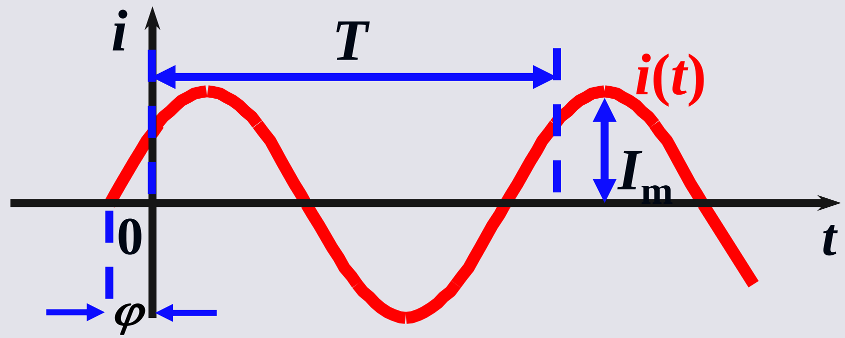
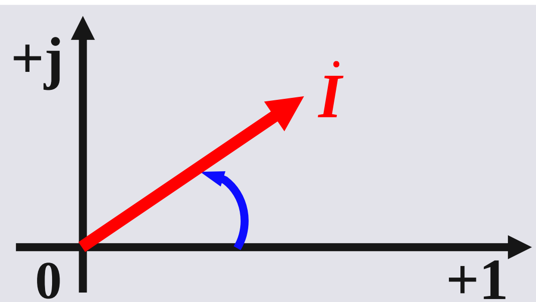
【例2】已知 $f=50\text{Hz}$, $\dot{I}_1=50\angle15^{\circ}$ A, $\dot{I}_2=\text{j}\dot{I}_1$，求时域表达式 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$。

解：$\dot{I}_2=\text{j}\dot{I}_1 \longrightarrow \dot{I}_2=50\angle(15^{\circ}+90^{\circ})=50\angle105^{\circ}$ A

$i_1(t)=50\sqrt{2}\sin(314t+15^{\circ})$ A　$i_2(t)=50\sqrt{2}\sin(314t+105^{\circ})$ A

§ 8.3 相量

小结：正弦量的表示方法

时域波形图	
正弦函数表达式	$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$
相　量	$\dot{I}=a+\mathrm{j}b=Ie^{\mathrm{j}\varphi}=I\angle\varphi$
相量图	

二、相量的运算

1. 同频正弦量的加、减

$$u_1(t)=\sqrt{2}\,U_1\sin(\omega t+\varphi_1)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}\,U_2\sin(\omega t+\varphi_2)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})+\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\underbrace{(\dot{U}_1+\dot{U}_2)}_{\dot{U}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$$

★ 同频正弦量的加减运算

↓

相量的加减运算

$$\alpha\,u_1(\mathrm{t})\pm\beta u_2(\mathrm{t})=u_3(\mathrm{t})$$

$$\alpha\dot{U}_1\pm\beta\dot{U}_2=\dot{U}_3$$

线性特性

二、相量的运算

1. 同频正弦量的加、减

【例】 $u_1(t) = 6\sqrt{2}\sin(314\,t + 30^\circ)\,\text{V}$， $u_1(t)+u_2(t)=$?

$u_2(t) = 4\sqrt{2}\cos(314\,t - 30^\circ)\,\text{V}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ\ \text{V} \\ \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ\ \text{V} \end{cases}$$

Perfect！！

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ$$

$$= \left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{j}6\times\frac{1}{2}\right) + \left(4\times\frac{1}{2} + \text{j}4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 5.19 + \text{j}3 + 2 + \text{j}3.46$$

$$= 7.19 + \text{j}6.46$$

$$= 9.67\angle 41.9^\circ\ \text{V}$$

$$\Rightarrow u_1(t)+u_2(t) = 9.67\sqrt{2}\sin\left(314t + 41.9^\circ\right)\ \text{V}$$

二、相量的运算

1. 同频正弦量的加、减

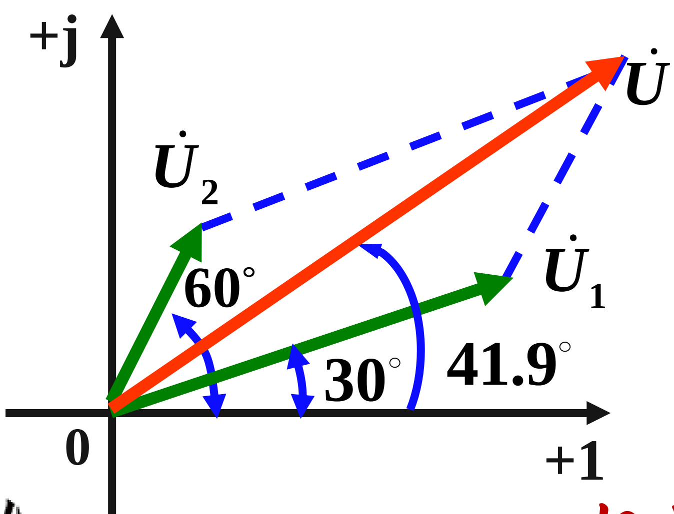
【例】 $u_1(t)=6\sqrt{2}\sin(314\,t+30^\circ)\,\mathrm{V}$， $u_1(t)+u_2(t)=$?

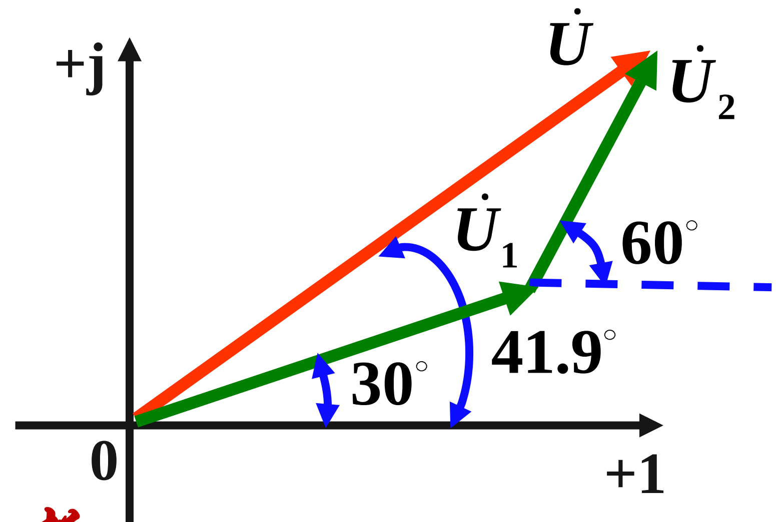
$u_2(t)=4\sqrt{2}\cos(314\,t-30^\circ)\,\mathrm{V}$

$$\begin{cases}\dot{U}_1=6\angle 30^\circ\ \mathrm{V}\\ \dot{U}_2=4\angle 60^\circ\ \mathrm{V}\end{cases}$$

由相量图可知 $\dot{U}=9.67\angle 41.9^\circ\ \mathrm{V}$

$u_1(t)+u_2(t)=9.67\sqrt{2}\sin\left(314t+41.9^\circ\right)\ \mathrm{V}$





相量图分析

二、相量的运算

2. 正弦量的微分、积分

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

微分运算

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right]$$

$$=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\,\mathrm{j}\omega\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\xleftrightarrow{\text{对应}}\mathrm{j}\omega\dot{I}$$

积分运算

$$\int i(t)\mathrm{d}t=\int\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{Im}\left[\int\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$$

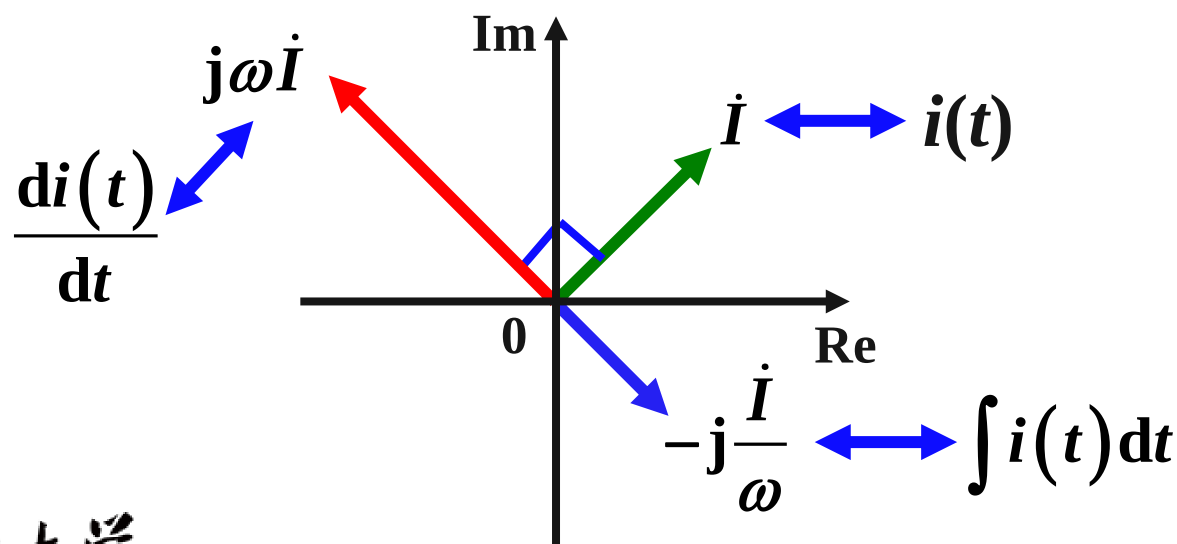
$$\int i(t)\mathrm{d}t\xleftrightarrow{\text{对应}}\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}$$

二、相量的运算

2. 正弦量的微分、积分

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

微分运算	积分运算
$\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ ⟷(对应) $\mathrm{j}\omega\dot{I}$	$\int i(t)\mathrm{d}t$ ⟷(对应) $\dfrac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}$



§ 8.3 相量

二、相量的运算

2. 正弦量的微分、积分

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

微分运算

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \xleftrightarrow{\text{对应}} \mathrm{j}\omega\dot{I}$$

积分运算

$$\int i\mathrm{d}t \xleftrightarrow{\text{对应}} \frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}$$

推广

n阶微分运算

$$\frac{\mathrm{d}^n i}{\mathrm{d}t^n} \xleftrightarrow{\text{对应}} (\mathrm{j}\omega)^n\dot{I}$$

n重积分运算

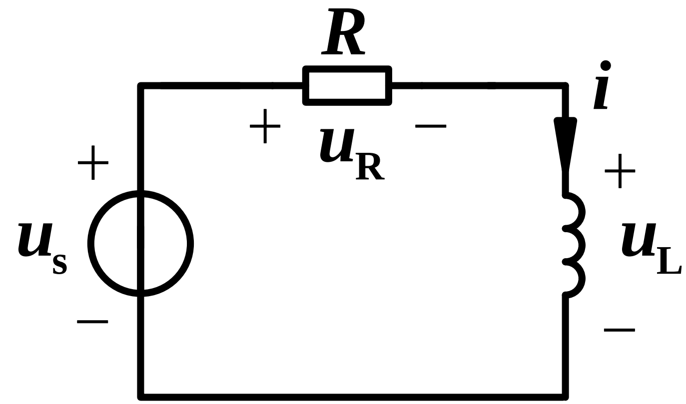
$$\int\cdots\int i\mathrm{d}t\cdots\mathrm{d}t \xleftrightarrow{\text{对应}} \frac{\dot{I}}{(\mathrm{j}\omega)^n}$$

§ 8.3 相量

回顾之前的引例

【例】已知： $u_s(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。



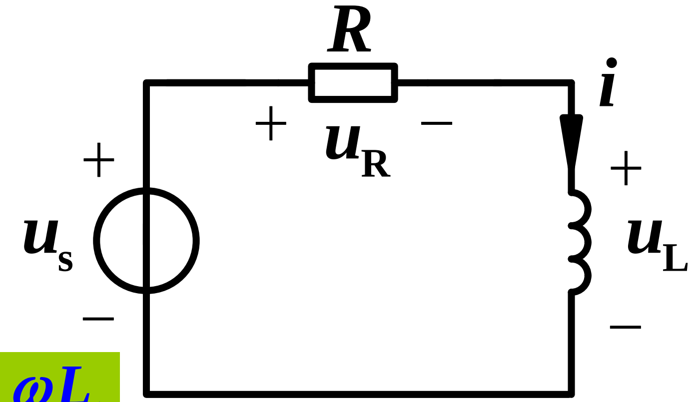
$$u_S(t)=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \dot{U}_S=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_S}{R+\mathrm{j}\omega L}=\frac{U\angle\varphi_u}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\angle\arctan\frac{\omega L}{R}}=\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=\frac{\omega LU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}+90°)$$

$$u_R=Ri \Rightarrow \dot{U}_R=R\dot{I}=\frac{RU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

§ 8.3 相量



【引例】已知：$u_s(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)$

求：$i(t), u_L(t), u_R(t)$的稳态解。

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_S}{R+j\omega L}=\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$i(t)=ph^{-1}\left[\dot{I}\right]=\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

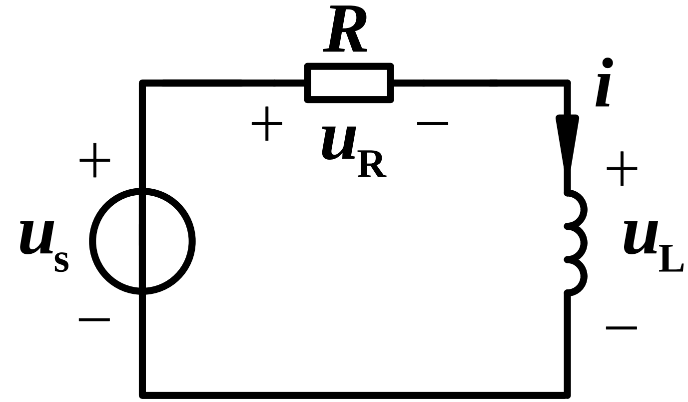
$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}=\frac{\omega LU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}+90°)$$

$$u_L(t)=ph^{-1}\left[\dot{U}_L\right]=\frac{\sqrt{2}L\omega U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}+90°)$$

$$\dot{U}_R=R\dot{I}=\frac{RU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$u_R(t)=ph^{-1}\left[\dot{U}_R\right]=\frac{\sqrt{2}RU}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

§ 8.3 相量



【引例】已知：$u_s(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_u)$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

★求解思路分析

$$u_s(t)=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

相量正变换

$$\dot{U}_s=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

复系数代数方程

求解

$$\dot{I}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\angle(\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

相量反变换

$$i(t)=\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\varphi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

若是能够直接列写该“复系数代数方程”，想必是极好的！

电 路 理 论

Principles of Electric Circuits

第八章　正弦稳态电路的相量模型

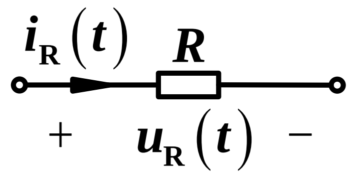
§8.4 两类约束的相量形式

§ 8.4 两类约束的相量形式

一、RLC元件和独立电源的相量形式

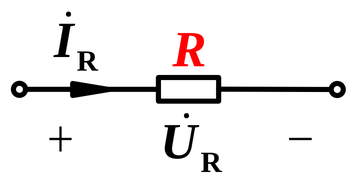
1. 电阻元件 (Resistor)

时域模型：



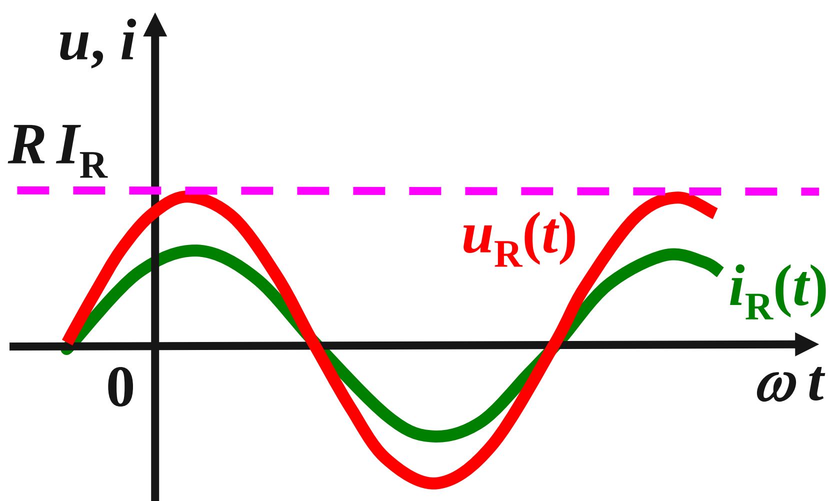
$$u_R(t) = R i_R(t)$$

相量模型：



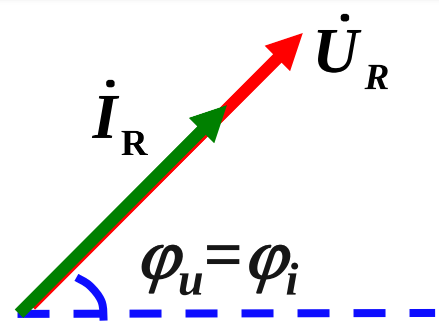
$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$$

$$\begin{cases} U_R = RI_R & \text{有效值关系} \\ \varphi_u = \varphi_i & \text{相位关系} \end{cases}$$



时域波形图

相位关系：
$u_R(t)$ 和 $i_R(t)$ 同相



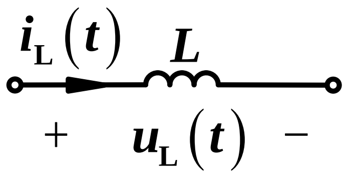
相量图

§ 8.4 两类约束的相量形式

一、RLC元件和独立电源的相量形式

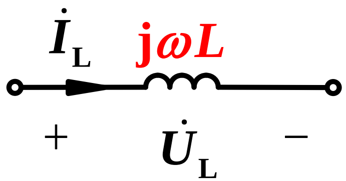
2. 电感元件 (Inductor)

时域模型：

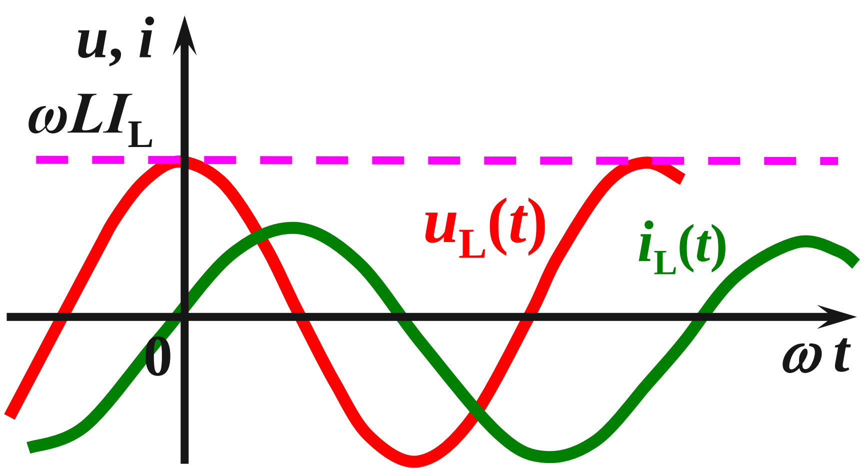


$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

相量模型：



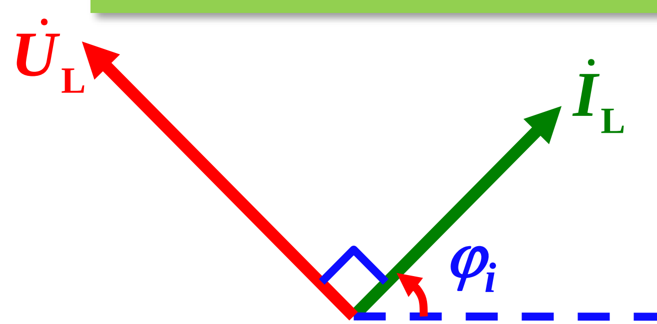
$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L \quad \begin{cases} U_L = \omega L I_L & \text{有效值关系} \\ \varphi_u = \varphi_i + 90° & \text{相位关系} \end{cases}$$



时域波形图

相位关系：

$u_L(t)$ 超前 $i_L(t)$ 90°

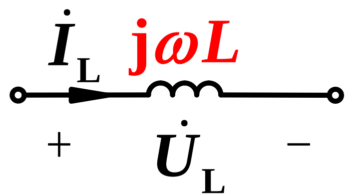


相量图

§ 8.4 两类约束的相量形式

一、RLC元件和独立电源的相量形式

2. 电感元件 (Inductor)



$$\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}X_{\mathrm{L}}\dot{I}_{\mathrm{L}} \\ \dot{I}_{\mathrm{L}} = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega L}\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}B_{\mathrm{L}}\dot{U}_{\mathrm{L}} \end{cases}$$

感抗： $X_{\mathrm{L}} = \omega L = 2\pi f L$　　单位：欧姆（Ω）

感纳： $B_{\mathrm{L}} = -\dfrac{1}{\omega L} = -\dfrac{1}{2\pi f L}$　　单位：西门子（S）

几种表示形式：

$$\omega L = \frac{u}{i} \qquad \omega L = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \qquad \omega L = \frac{U}{I}$$

§ 8.4 两类约束的相量形式

一、RLC元件和独立电源的相量形式

2. 电感元件 (Inductor)

$$\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L \dot{I}_{\mathrm{L}}$$

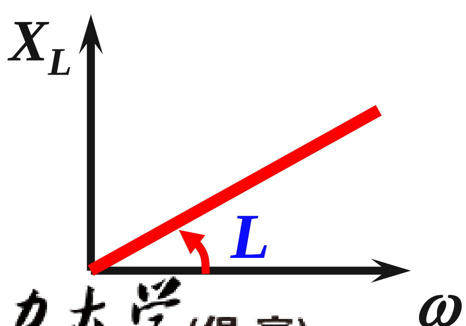
感抗： $X_{\mathrm{L}} = \omega L = 2\pi f L$ 单位：欧姆（Ω）

感纳： $B_{\mathrm{L}} = -\dfrac{1}{\omega L} = -\dfrac{1}{2\pi f L}$ 单位：西门子（S）

感抗（X_{L}）的物理意义：

（1）反映了电感对电流的限制能力；

（2）感抗与 (角)频率成正比。（理想元件）



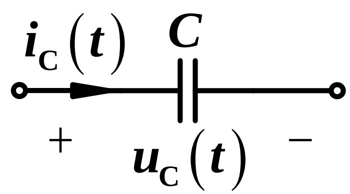
$\omega = 0$(直流)，$X_L = 0$ (短路)

$\omega \to \infty$ ，$X_L \to \infty$ (开路)

一、RLC元件和独立电源的相量形式

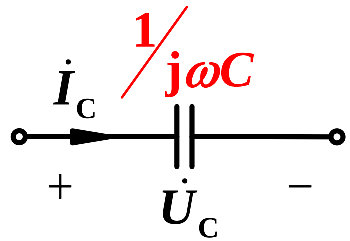
3. 电容元件 (Capacitor)

时域模型:

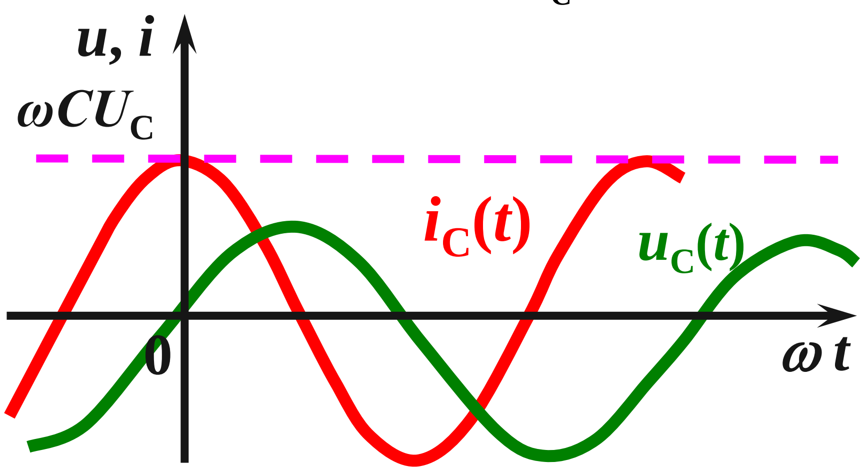


$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

相量模型:



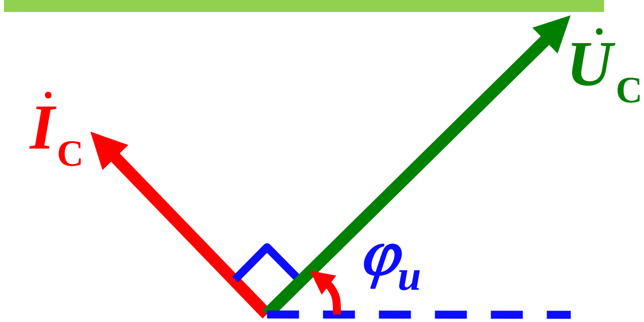
$$\dot I_C = j\omega C\dot U_C \quad \begin{cases} I_C=\omega C U_C & \text{有效值关系} \\ \varphi_u=\varphi_i-90^\circ & \text{相位关系} \end{cases}$$



时域波形图

相位关系:

$i_C(t)$超前$u_C(t)$ 90°

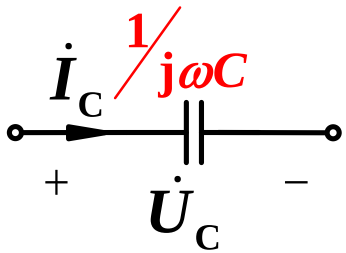


相量图

§ 8.4 两类约束的相量形式

一、RLC元件和独立电源的相量形式

3. 电容元件 (Capacitor)



$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_C$$

$$\begin{cases} \dot{U}_C = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}_C = \mathrm{j}X_C\dot{I}_C \\ \dot{I}_C = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_C = \mathrm{j}B_C\dot{U}_C \end{cases}$$

容抗： $X_C = -\dfrac{1}{\omega C} = -\dfrac{1}{2\pi f C}$ 单位：欧姆（Ω）

容纳： $B_C = \omega C = 2\pi f C$ 单位：西门子（S）

几种表示形式：

$\dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{u}{i}$ ✗

$\dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$ ✗

$\dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{U}{I}$ ✓

§ 8.4 两类约束的相量形式

一、RLC元件和独立电源的相量形式

3. 电容元件 (Capacitor)

$$\dot{I}_C = j\omega C \dot{U}_C$$

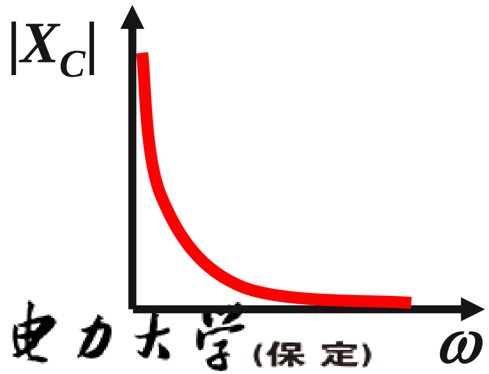
容抗： $X_C = -\dfrac{1}{\omega C} = -\dfrac{1}{2\pi f C}$　　单位：欧姆（Ω）

容纳： $B_C = \omega C = 2\pi f C$　　单位：西门子（S）

容抗（X_C）的物理意义：

（1）反映了电容对电流的限制能力；

（2）容抗绝对值与 (角)频率成反比。（理想元件）

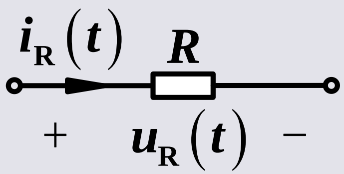


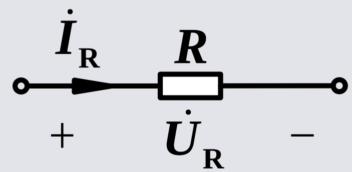
$\omega = 0$(直流)，$|X_C| \to \infty$ (开路/隔直作用)

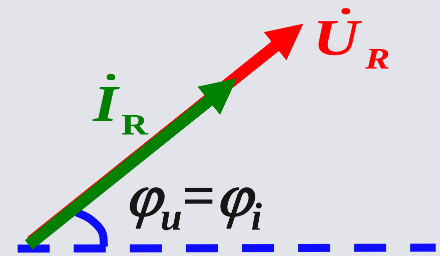
$\omega \to \infty$，$|X_C| \to 0$ (短路/旁路作用)

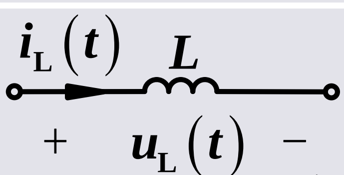
§ 8.4 两类约束的相量形式

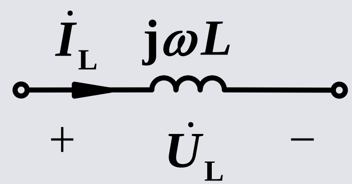
小结：RLC元件的相量形式

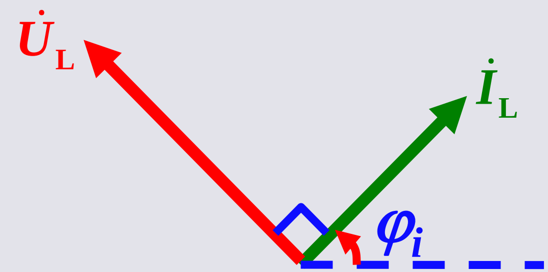
<table>
<tr><th>时域模型</th><th>相量模型</th><th>相量图</th></tr>
<tr>
<td>


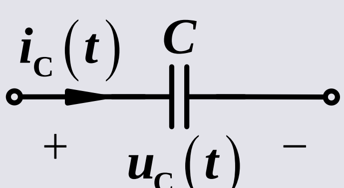
$$u_R(t)=Ri_R(t)$$
</td>
<td>


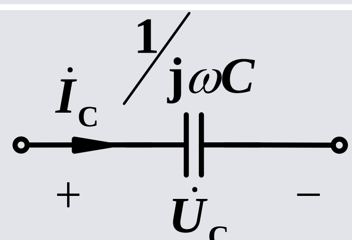
$$\dot{U}_R=R\dot{I}_R$$
</td>
<td>


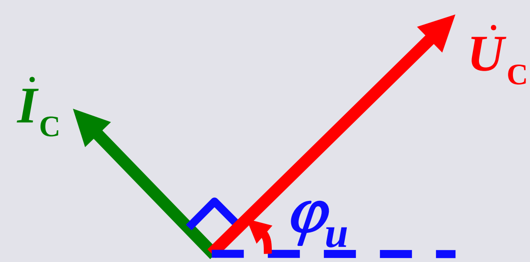
</td>
</tr>
<tr>
<td>


$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$
</td>
<td>


$$\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}_L$$
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>


$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$
</td>
<td>


$$\dot{I}_C=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_C$$
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

§ 8.4 两类约束的相量形式

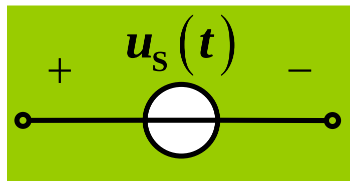
一、RLC元件和独立电源的相量形式

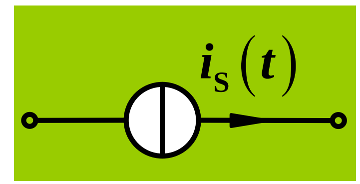
4. 独立电源 (Independent Source)

独立电压源

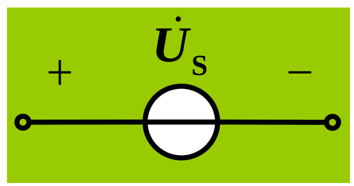
独立电流源

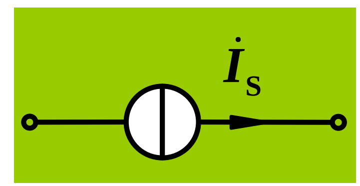
时域模型:





相量模型:





二、基尔霍夫定律的相量形式

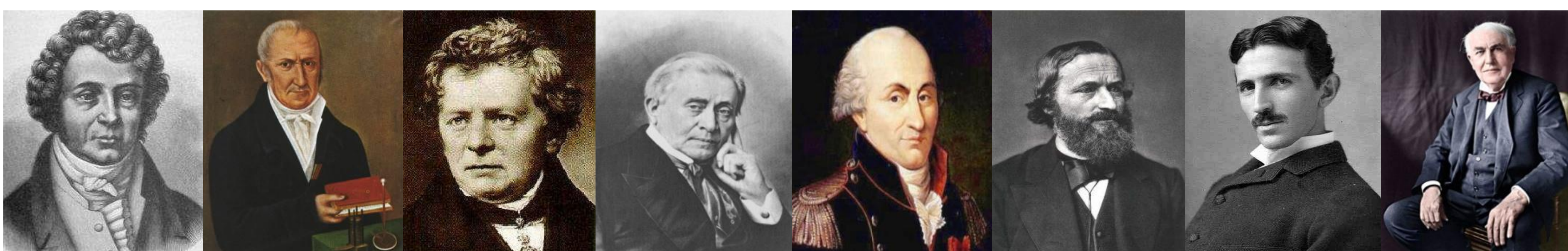
	KCL	KVL
时域形式:	$\sum i(t)=0$	$\sum u(t)=0$
相量形式:	$\sum \dot{I}=0$	$\sum \dot{U}=0$

电 路 理 论

Principles of Electric Circuits

第八章 正弦稳态电路的相量模型

§8.5 相量模型



§ 8.5 相量模型

似曾相识，有木有？

★ 利用相量分析正弦稳态电路的基本思路

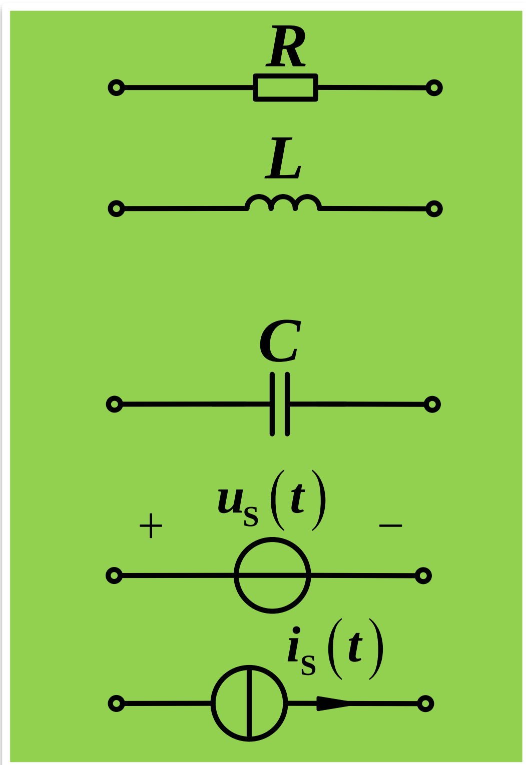
时域		频域
正弦稳态电路	两类约束的相量形式 → ?	相量模型
线性微分方程	相量正变换 →	相量方程（复代数方程）
↓ 求解		↓ 求解
响应的时域形式	← 相量反变换	响应的相量形式

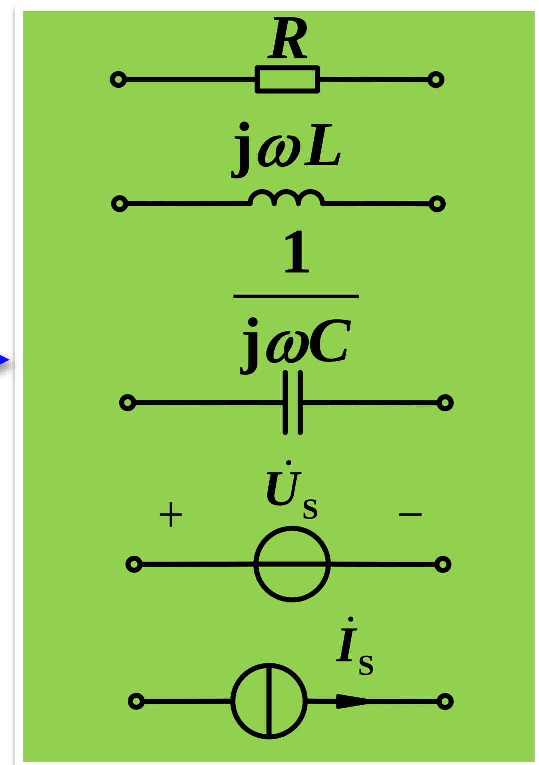
§ 8.5 相量模型

★利用相量分析正弦稳态电路的基本思路

时域 —— 两类约束的相量形式 → **频域**

正弦稳态电路 → **相量模型**





§ 8.5 相量模型

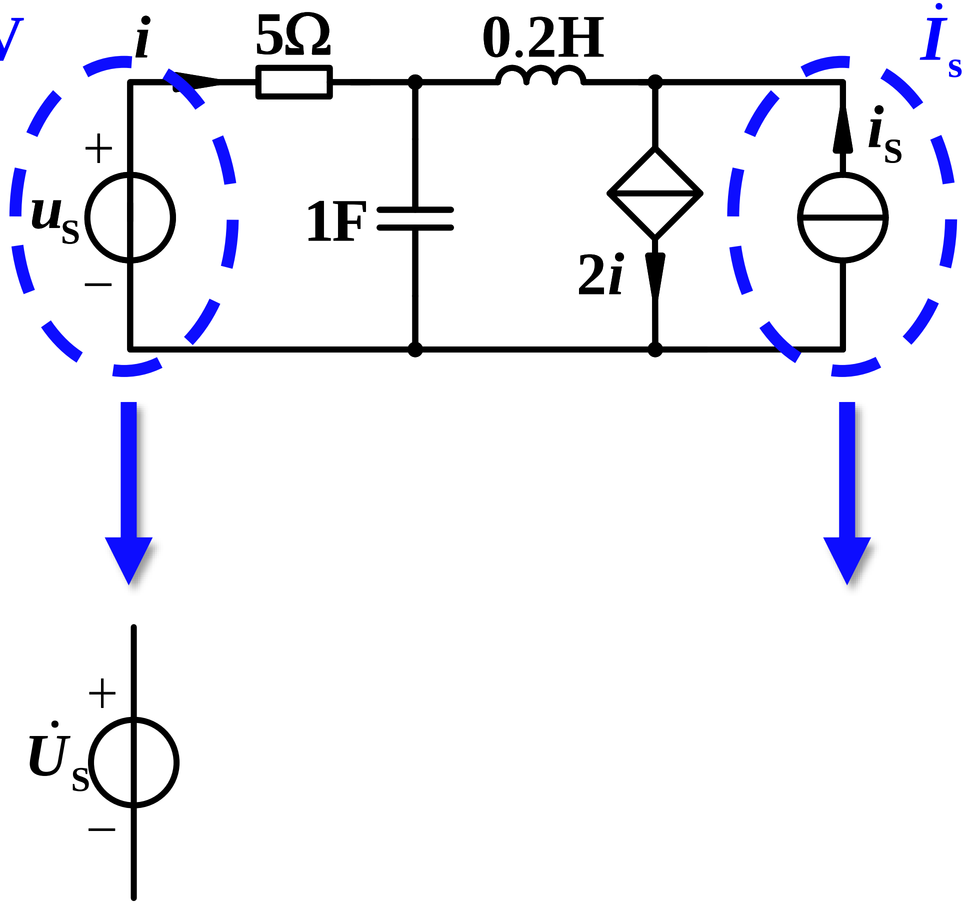
【例】电路中 $u_S(t) = 35\sin(2t + 14^\circ)\ \text{V},\ i_S(t) = 14\cos 2t\ \text{A}$

$\dot{U}_S = 24.75\angle 14^\circ\ \text{V}$

$\dot{I}_s = 9.9\angle 90^\circ\ \text{A}$

时域模型：

相量模型：



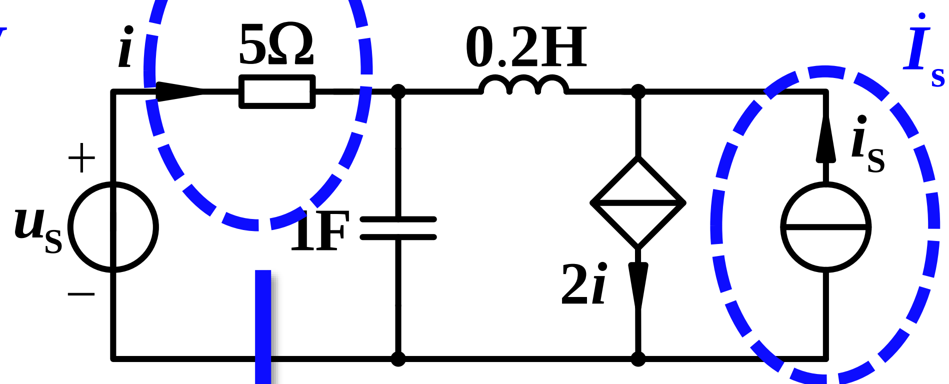
§ 8.5 相量模型

【例】电路中 $u_{\mathrm{S}}(t)=35\sin(2t+14^\circ)\ \mathrm{V},\ i_{\mathrm{S}}(t)=14\cos 2t\ \mathrm{A}$

$\dot{U}_{\mathrm{S}}=24.75\angle 14^\circ\ \mathrm{V}$

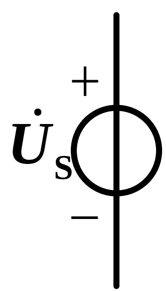
$\dot{I}_{\mathrm{s}}=9.9\angle 90^\circ\ \mathrm{A}$

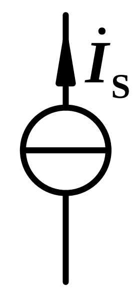
时域模型:



$\dot{U}_{\mathrm{R}}=R\dot{I}_{\mathrm{R}}$

相量模型:



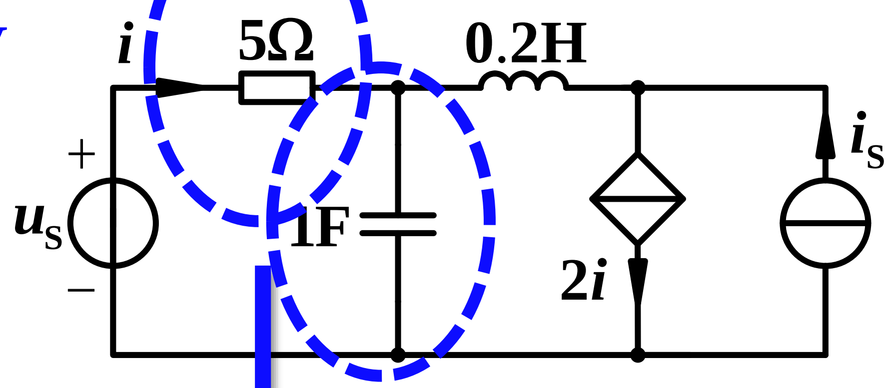


§ 8.5 相量模型

【例】电路中 $u_S(t) = 35\sin(2t + 14^\circ)\ \mathrm{V},\ i_S(t) = 14\cos 2t\ \mathrm{A}$

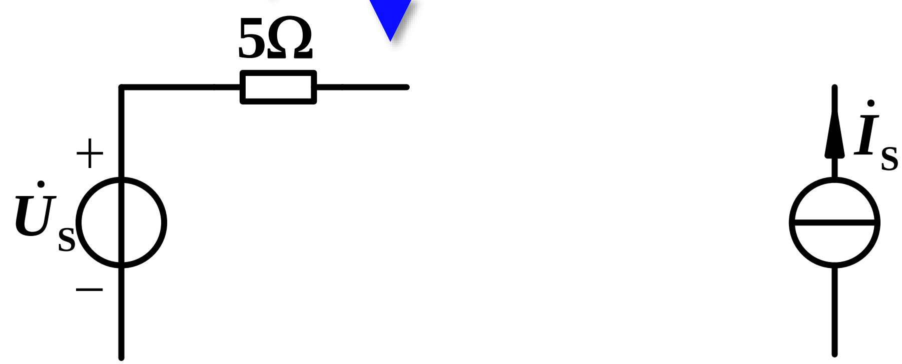
$\dot{U}_S = 24.75\angle 14^\circ\ \mathrm{V}$　　$\dot{I}_s = 9.9\angle 90^\circ\ \mathrm{A}$

时域模型：



$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$　　$\dot{U}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C$

相量模型：

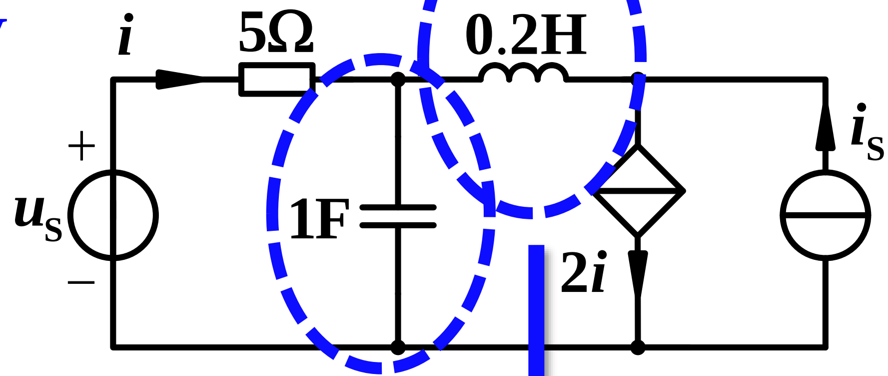


§ 8.5 相量模型

【例】电路中 $u_S(t)=35\sin(2t+14^\circ)\,\text{V}$, $i_S(t)=14\cos 2t\ \text{A}$

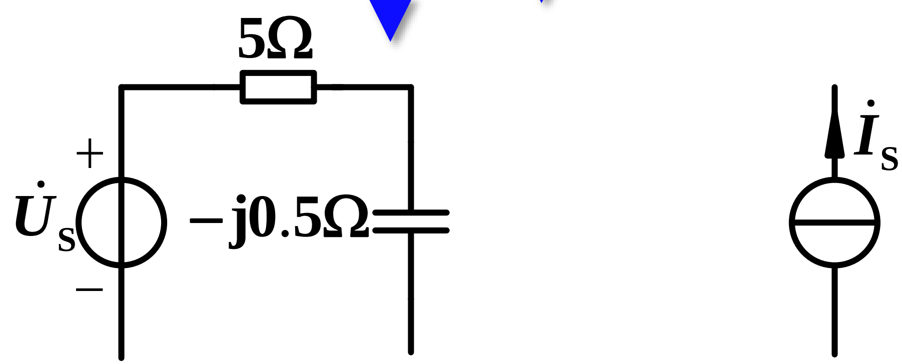
$\dot{U}_S=24.75\angle 14^\circ\ \text{V}$　　$\dot{I}_s=9.9\angle 90^\circ\ \text{A}$

时域模型:



$\dot{U}_C=\dfrac{\dot{I}_C}{j\omega C}$　　$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}$

相量模型:

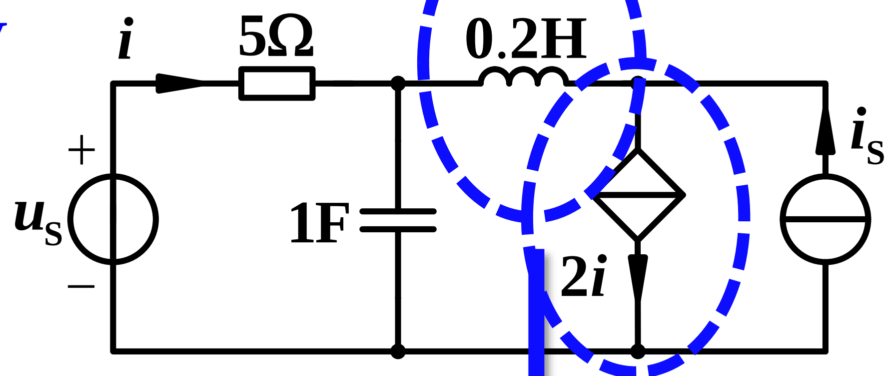


【例】电路中 $u_S(t)=35\sin(2t+14^\circ)\ \mathrm{V}$, $i_S(t)=14\cos 2t\ \mathrm{A}$

$\dot{U}_S = 24.75\angle 14^\circ\ \mathrm{V}$

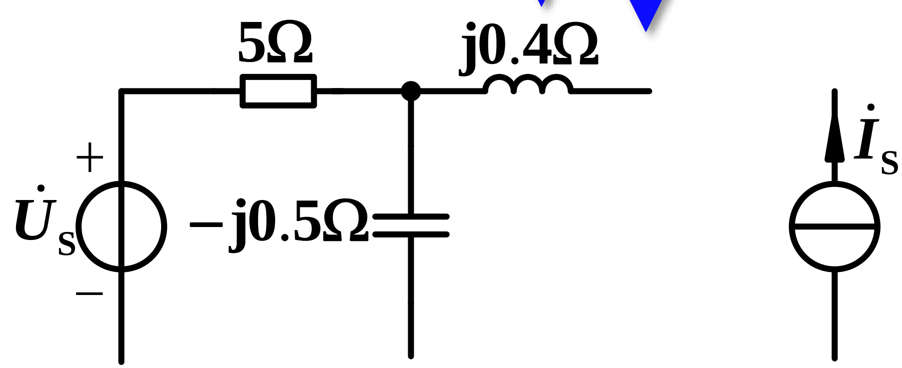
$\dot{I}_s = 9.9\angle 90^\circ\ \mathrm{A}$

时域模型：



$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I}$

相量模型：



§ 8.5 相量模型

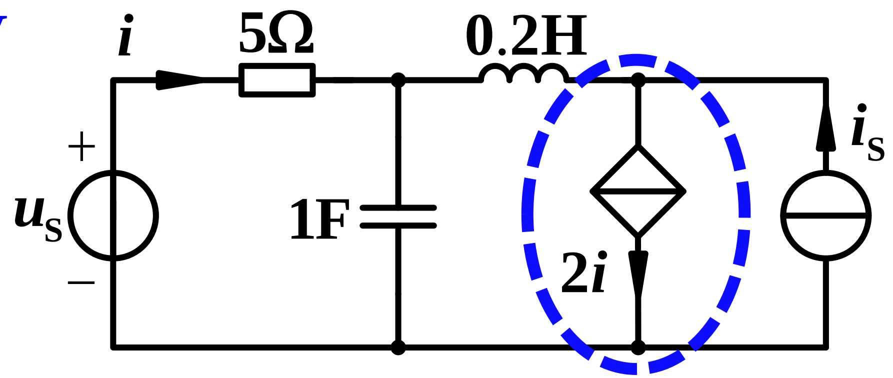
该电路模型如何求解?

【例】电路中 $u_{\mathrm{S}}(t)=35\sin(2t+14^{\circ})\,\mathrm{V},\ i_{\mathrm{S}}(t)=14\cos 2t\ \mathrm{A}$

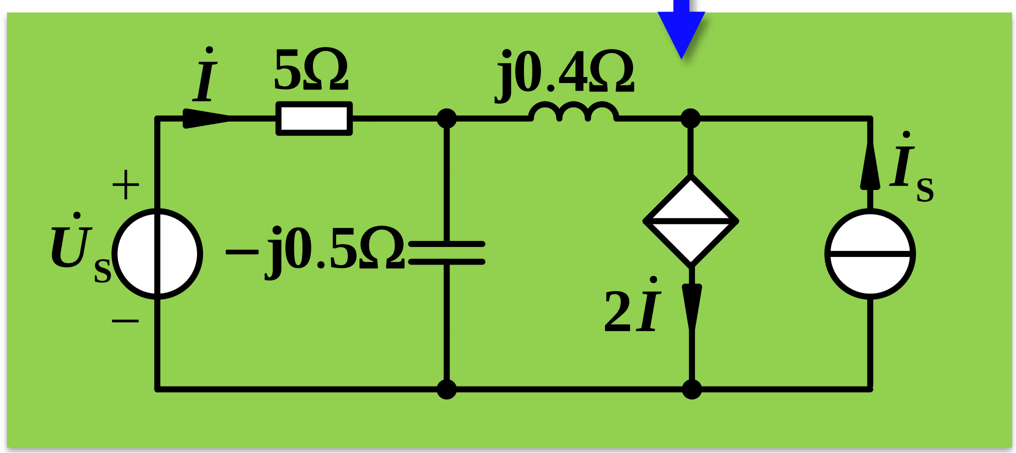
$\dot{U}_{\mathrm{S}}=24.75\angle 14^{\circ}\,\mathrm{V}$

$\dot{I}_{\mathrm{S}}=9.9\angle 90^{\circ}\,\mathrm{A}$

时域模型:

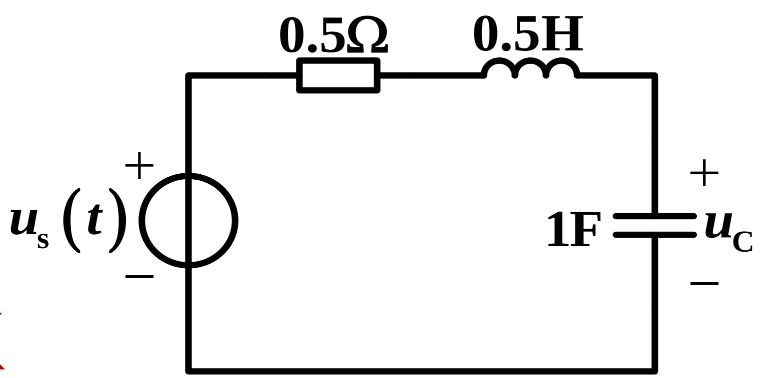


相量模型:

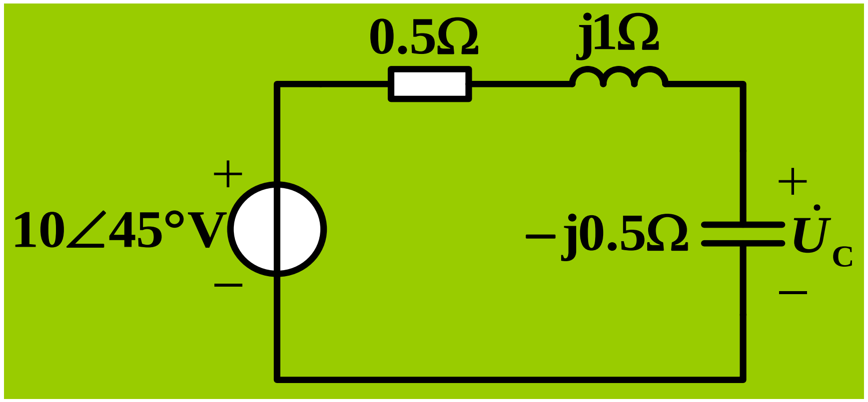


【例】如图所示正弦稳态电路中，$u_s(t)=10\sqrt{2}\sin(2t+45^\circ)\text{V}$

求电压$u_c(t)$。



相量模型



解:

（1）画出相量模型

（2）利用所学方法求解相量模型

$$\dot{U}_C=10\angle45^\circ\frac{-\text{j}0.5}{0.5+\text{j}(1-0.5)}$$

$$=10\angle45^\circ\frac{-\text{j}0.5}{0.5+\text{j}0.5}$$

$$=10\angle45^\circ\frac{0.5\angle-90^\circ}{0.5\sqrt{2}\angle45^\circ}$$

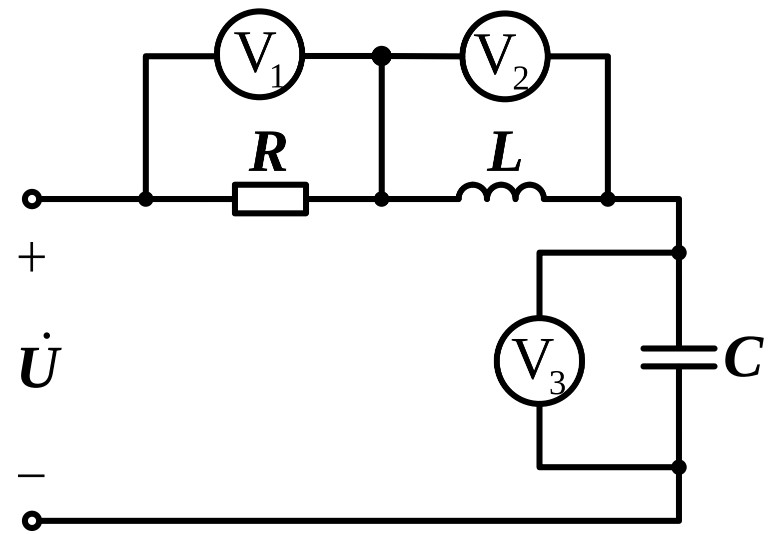
$$=5\sqrt{2}\angle-90^\circ\ \text{V}$$

（3）相量反变换

$$u_C(t)=10\sin(2t-90^\circ)\ \text{V}$$

§ 8.5 相量模型

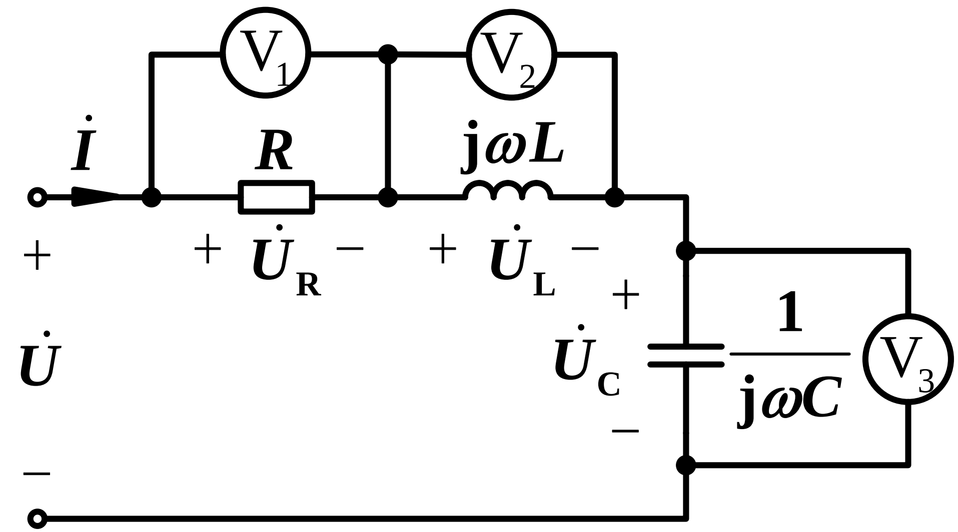
【例】正弦稳态电路中，电压表V_1的读数为15V，电压表V_2的读数为80V，电压表V_3的读数为100V。求端口电压的有效值。



§ 8.5 相量模型

【例】正弦稳态电路中，电压表V_1的读数为15V，电压表V_2的读数为80V，电压表V_3的读数为100V。求端口电压的有效值。

解：



方法1

以端口电流为参考相量，

$$\dot{I} = I\angle 0^{\mathrm{o}}\ \mathrm{A}$$

依题意可知

$$\dot{U}_{\mathrm{R}} = 15\angle 0^{\circ}$$

$$\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}80$$

$$\dot{U}_{\mathrm{C}} = -\mathrm{j}100$$

$$\begin{aligned}\dot{U} = \dot{U}_{\mathrm{R}} + \dot{U}_{\mathrm{L}} + \dot{U}_{\mathrm{C}} &= 15 - \mathrm{j}100 + \mathrm{j}80 \\ &= 15 - \mathrm{j}20 \\ &= \sqrt{15^2 + 20^2}\angle \mathrm{arc\,tg}\frac{-20}{15} \\ &= 25\angle -53.1^{\mathrm{o}}\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

端口电压有效值：$U = 25\,\mathrm{V}$

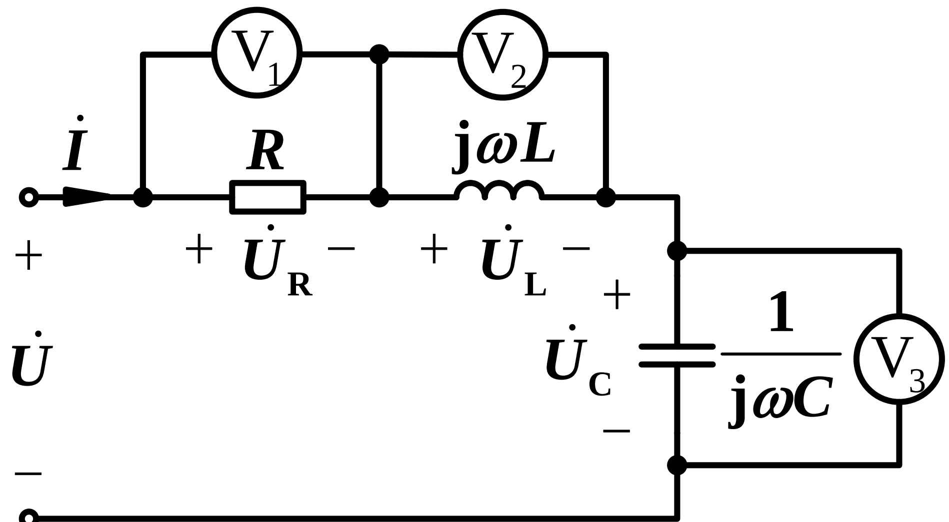
【例】正弦稳态电路中，电压表V_1的读数为15V，电压表V_2的读数为80V，电压表V_3的读数为100V。求端口电压的有效值。

解：

方法2

以端口电流为参考相量，

$$\dot{I} = I\angle 0^{\circ}\ \text{A}$$



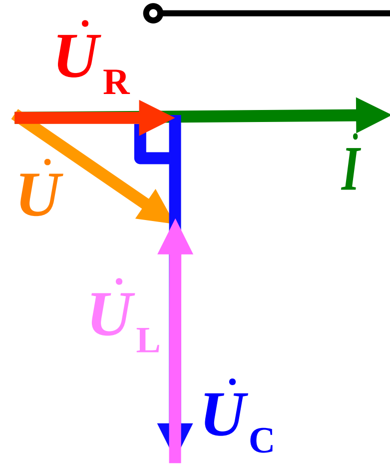
依题意可知

$$\dot{U}_R = 15\angle 0^{\circ}$$

$$\dot{U}_L = j80$$

$$\dot{U}_C = -j100$$

亦可用相量图分析



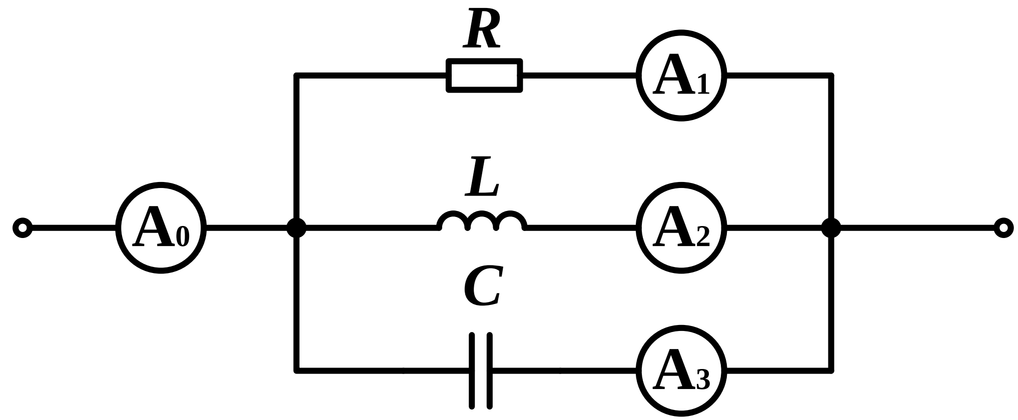
$$U^2 = U_R^2 + \left(U_C - U_L\right)^2$$

$$U = \sqrt{15^2 + \left(100 - 80\right)^2}$$

$$= \sqrt{225 + 400}$$

$$= 25\ \text{V}$$

【例】正弦稳态电路中，电流表A_1的读数为5A，电流表A_2的读数为10A，电流表A_3的读数为15A，求电流表A_0的读数。

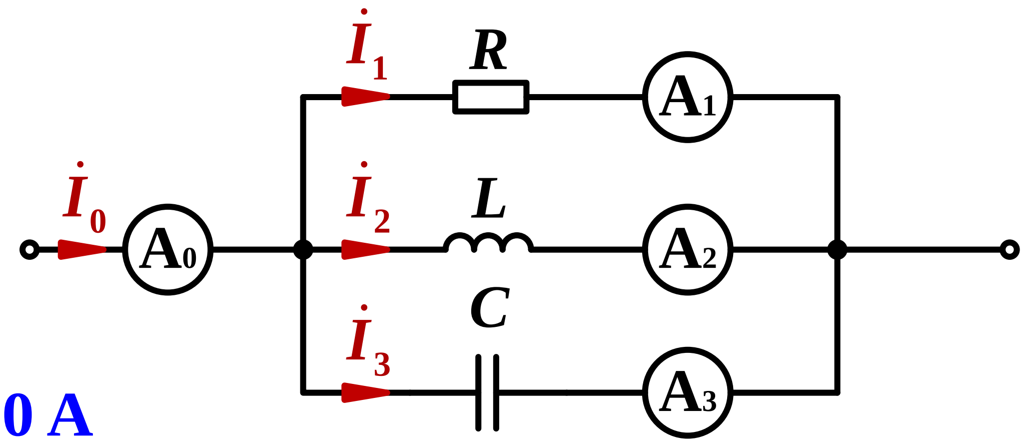


解：以端口电压为**参考相量**

$$\dot{U} = U\angle 0^{\circ}\ \mathrm{V}$$

§ 8.5 相量模型

【例】正弦稳态电路中，电流表A_1的读数为5A，电流表A_2的读数为10A，电流表A_3的读数为15A，求电流表A_0的读数。



解：以端口电压为**参考相量**

$$\dot{U} = U\angle 0^\circ \text{V}$$

依题意可知

$$\dot{I}_1 = 5\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 10\angle -90^\circ = -\text{j}10 \text{ A}$$

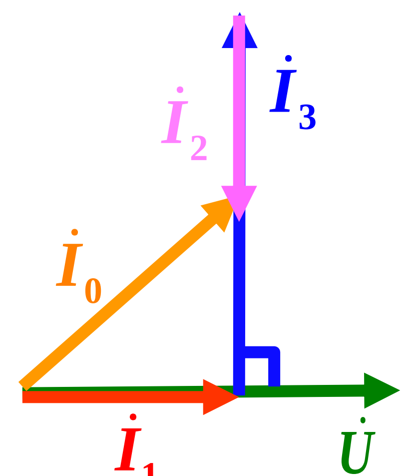
$$\dot{I}_3 = 15\angle 90^\circ = \text{j}15 \text{ A}$$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$

$$= 5 - \text{j}10 + \text{j}15$$

$$= 5 + \text{j}5$$

$$= 5\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}$$



相量图

§ 8.5 相量模型

【例】正弦稳态电路中，端口电压和电流同相，电流表A和A_2的读数分别为12A和9A，求电流表A_1的读数。