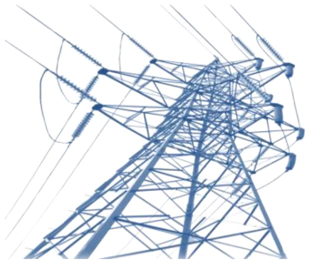
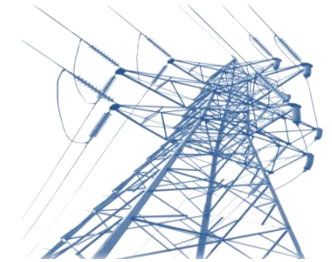


工程电磁场

稻叶先生

2. 静态电磁场 静电场



2.1 基本方程与场的特性

	积分方程	微分方程
全电流定律：	$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}$
电磁感应定律：	$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_S\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}\cdot d\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boxed{-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}$
磁通连续性：	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$
高斯定理：	$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \rho dV$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$

静态：与时间无关　　　电场：与磁场无关

2. 静态电磁场　静电场

2.1.1 静电场基本方程

由前可知，在静止条件下电场和磁场之间没有相互耦合的关系，可以分别对电场和磁场进行分析和讨论。由于此时电场或磁场的源量与场量都不随时间变化，故统称为静态电磁场，下面我们先看静电场。

	积分方程		微分方程		
电磁感应定律：	$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$	(2-1a)	$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$	(2-2a)	无旋
高斯定理：	$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \rho dV$	(2-1b)	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$	(2-2b)	有散
本构关系：	$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$				

2. 静态电磁场　静电场

2.1.2 真空中的高斯定理

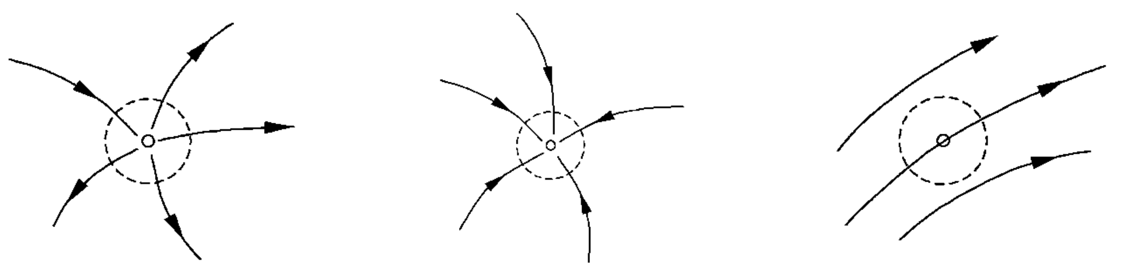
自由空间：理想的真空状态（无任何介质）　$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$

由（2-1b）可得，

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$$

散度与场源：



$\nabla\cdot\boldsymbol{E}>0,\quad \rho>0$　　$\nabla\cdot\boldsymbol{E}<0,\quad \rho<0$　　$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \rho=0$

2.1.2 真空中的高斯定理

例2-1 已知真空中半径为a的球形区域内分布有呈球对称形态的电荷，在空间中产生的电场：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r & (0\le r\le a)\\[2ex] \dfrac{a^2}{2\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & (r>a)\end{cases}$$

试求空间电荷分布。

解：由真空中的高斯定理， $\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

在球坐标系下： $$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{2\varepsilon_0}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{1}{2\varepsilon_0}2r \Rightarrow \rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r}\quad(0\le r\le a)$$

2.1.2 真空中的高斯定理

同理，可求　$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}\right) = 0 \qquad (r > a)$

$$\Rightarrow \quad \rho = \begin{cases} \dfrac{1}{r} & (0 \le r \le a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

2. 静态电磁场　静电场

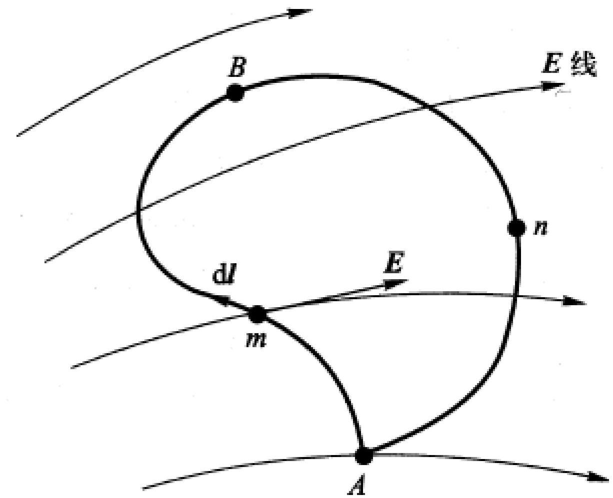
2.1.3 静电场的无旋性

由2-1(a)可知，

$$\oint_{AmBnA} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

$$\int_{AmB} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{BnA} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

即 $$\int_{AmB} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{BnA} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{AnB} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$



静电场中电场强度E的线积分与路径无关，只与起点和终点的位置有关。

$$W = \int_{AmB} \boldsymbol{E}q \cdot d\boldsymbol{l} = q\int_{AmB} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = q\int_{AnB} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

电场力作功与路径无关，只取决于起点与终点的位置，将这样的场称之为保守场（位场）。

2. 静态电磁场 静电场

2.2 自由空间中的电场

2.2.1 电场强度E和电位φ

赫姆霍兹定理： $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) + \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

2.2 自由空间中的电场

2.2.1 电场强度E和电位φ

赫姆霍兹定理： $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) + \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{2-3}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{2-4}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{2-5}$$

由真空中高斯定理和无旋性： $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ 　 $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$

标量电位： $$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' \tag{2-6}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{2-7}$$

2.2.1 电场强度E和电位φ

2-7式的意义：
- 找到可用于描述静电场的标量位函数
- 便于求解电场：　$\rho \rightarrow \varphi \rightarrow \boldsymbol{E}$

问题：　$\boldsymbol{E} \rightarrow \varphi$？

思考：要确定空间中任一点的电位，需要前提条件？

（1）零电位参考点？

（2）电位差　（待求点与参考点之间）

设电场$\boldsymbol{E}$中有一个点电荷，由P点到Q点，电场力作功为

$$W = \int_P^Q \boldsymbol{E} q \cdot d\boldsymbol{l} = q\int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = q\int_P^Q \left(-\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{e}_l\right) dl = -q\int_P^Q \left(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{e}_l\right) dl$$

$$= -q\int_P^Q \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = q\left(\varphi_P - \varphi_Q\right)$$

2. 静态电磁场　静电场

2.2.1 电场强度E和电位φ

电位差： $U_{PQ} = \dfrac{W}{q} = \varphi_P - \varphi_Q = \int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$

电位参考点：　计算及工程中，常常取无穷远处（或大地）作为电位参考点，则

$$\varphi_P - \varphi_Q = \varphi_P - \varphi_\infty = \underline{\varphi_P = \int_P^\infty \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}} \qquad (2\text{-}8)$$

总结：

（1）电位（差）如何求？

（2） $\boldsymbol{E}$的线积分与路径无关。

2.2.2 场的分布：基于*E*的分析

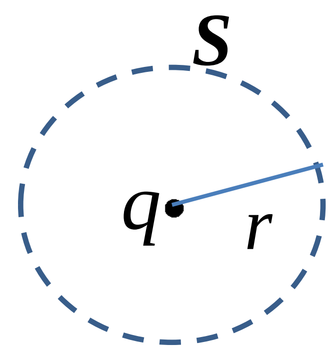
电荷的四种分布形态：点(q)、线(τ)、面(σ)、体(ρ)

点电荷： 显然，自由空间中点电荷产生的场具有球对称性，在距离q所在点距离为r处作球面$\boldsymbol{S}$，利用高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{\int_V \rho dV}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

分析：（1）电场强度方向沿径向： $\boldsymbol{E}=E_r\boldsymbol{e}_r$

（2） 球面上任意点处的电场强度大小E_r相等。



$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_S E_r\boldsymbol{e}_r\cdot dS\boldsymbol{e}_r=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S E_r dS=E_r\oint_S dS=q/\varepsilon_0$$

2. 静态电磁场　静电场

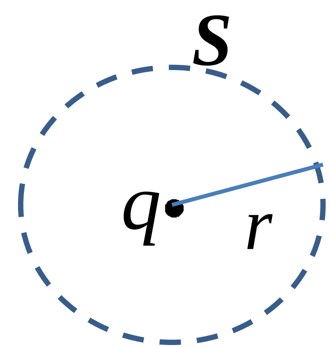
2.2.2 场的分布：基于*E*的分析

$$E_r 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = E_r \boldsymbol{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (2\text{-}9)$$

思考：空间中任意一点的电位？

$$\varphi_P = \int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_r^\infty \left(E_r \boldsymbol{e}_r\right)\cdot\left(dr\boldsymbol{e}_r\right)$$

$$= \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (2\text{-}10)$$



规律：（1）***E***的大小与源点和场点距离的平方成反比；

（2）***E***的方向：由源点指向场点；

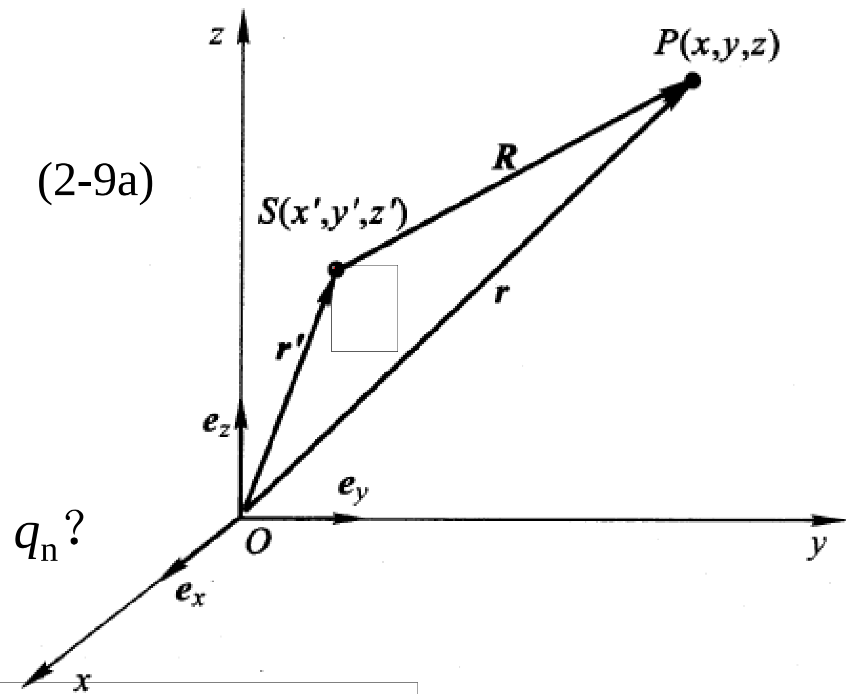
（3）电位φ的大小与距离成反比；

一般的，点电荷不在坐标原点，其所在点对应的距离矢量为r'，场点*P*处：

2.2.2 场的分布：基于$\boldsymbol{E}$的分析

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} \qquad \text{(2-9a)}$$

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} \qquad \text{(2-10a)}$$



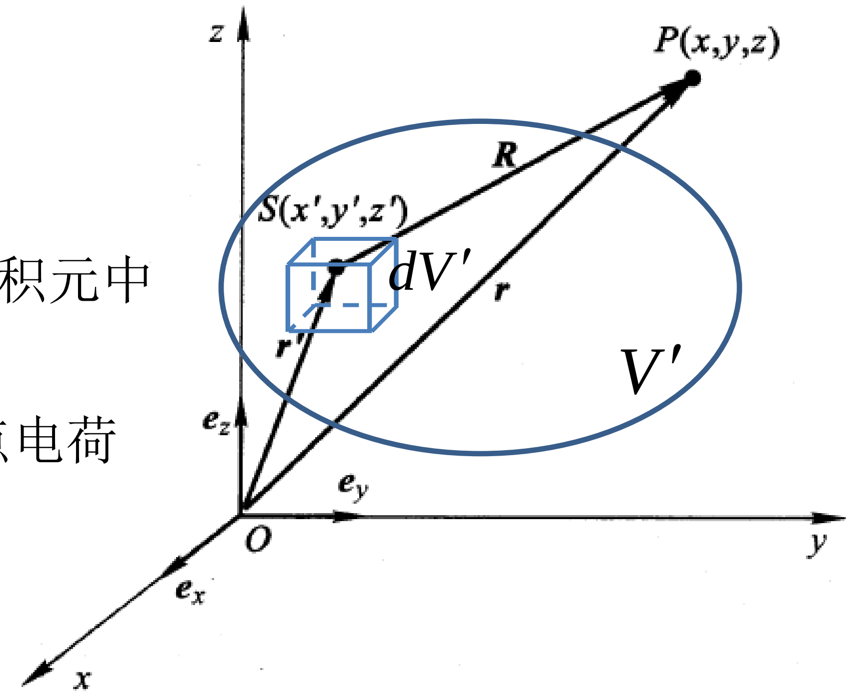
思考：如果空间中有多个点电荷q_1、q_2、…q_n?

叠加定理：

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{R_k}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\left|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_k'\right|}$$

2. 静态电磁场　静电场

2.2.2 场的分布：基于*E*的分析



电荷连续分布：

分析：将源区分为无数个体积元，每个体积元中所含电荷量为，

$$dq=\rho(\mathbf{r}')dV'$$

➡ 可视为一点电荷

$$d\boldsymbol{E}=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0R^2}\boldsymbol{e}_R=\frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0R^2}dV'\boldsymbol{e}_R$$

对于整个源区，在P点处场强的贡献，

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\boldsymbol{e}_R dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$

➡

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}dV'$$

2.2.3 场的分布：基于φ的分析

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}dV' \qquad \mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R^2}\mathbf{e}_R dV'$$

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R}dS' \qquad \mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R^2}\mathbf{e}_R dS'$$

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau(\mathbf{r}')}{R}dl' \qquad \mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau(\mathbf{r}')}{R^2}\mathbf{e}_R dl'$$

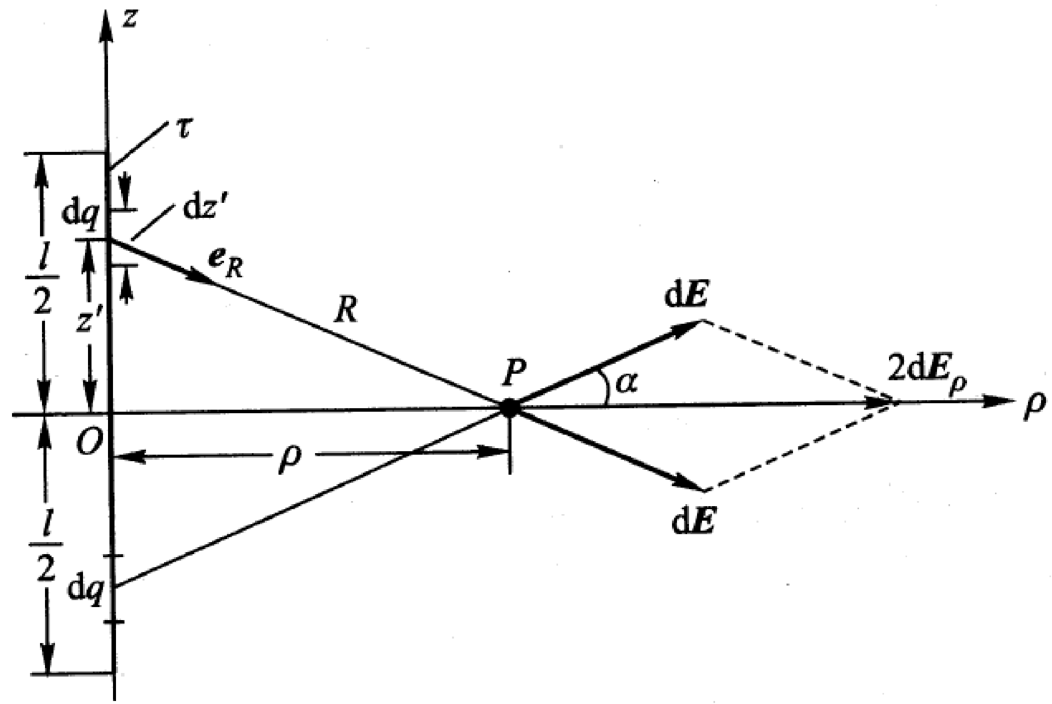
总结： 自由空间中电场求解：

（1）从表征电场的物理量来看，可求$\mathbf{E}$或者φ；

（2）具体方法：
- 基于高斯定理，利用对称性；
- 利用积分（已知电荷分布）求电场$\mathbf{E}$或者φ；

2. 静态电磁场　静电场

例2-3 真空中长为l的线段上分布有密度为τ的电荷，求其中垂面上任一点P处的$\boldsymbol{E}$。



解：

a. 根据场的圆柱对称性建立柱坐标系，

b. 思路：先取线元，求线元所对应的元电荷在P点处的场，再积分求解。

P点处的$d\boldsymbol{E}$：
- 方向：$\boldsymbol{e}_\rho$
- 大小：$2dE\cos\alpha$

$$\mathrm{d}E_\rho=\mathrm{d}E\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\mathrm{d}z'}{R^2}\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\rho\mathrm{d}z'}{(\rho^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2. 静态电磁场　静电场

从而， $E_P(\rho,0,0)=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\mathrm{d}E_\rho=2\cdot\dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{l}{2}}\dfrac{\rho\,\mathrm{d}z'}{(\rho^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$

利用变量代换 $z'=\rho\tan\alpha$, $\mathrm{d}z'=\rho\sec^2\alpha\mathrm{d}\alpha$，代入上式，最终解得

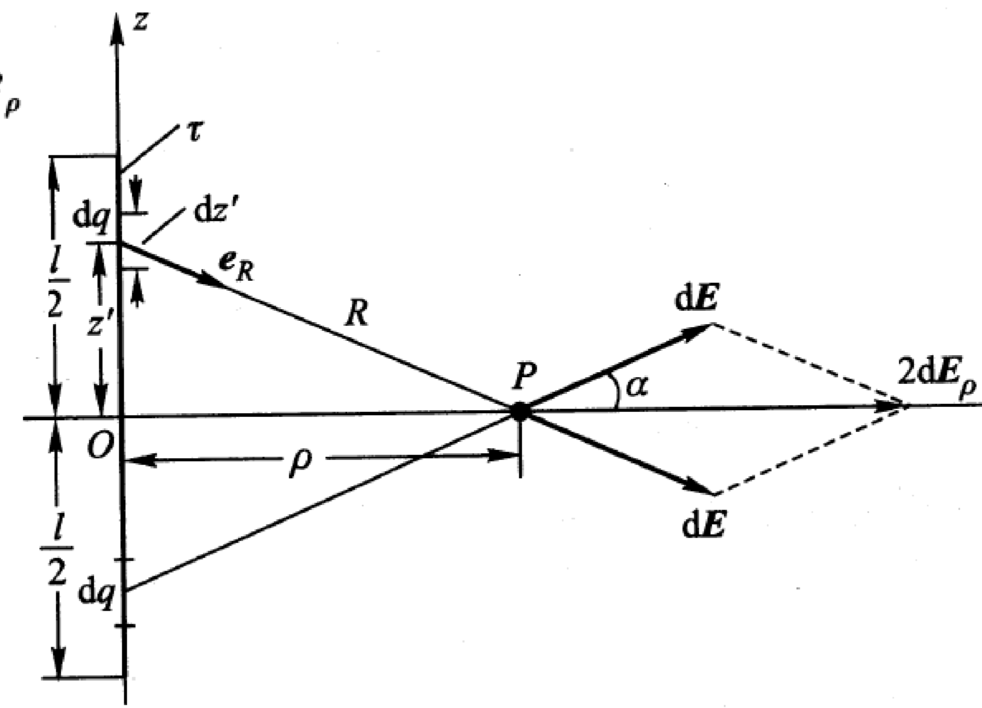
$$\boldsymbol{E}_P(\rho,0,0)=2\cdot\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\int_0^{\alpha_0}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\boldsymbol{e}_\rho$$

$$=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\sin\alpha_0\boldsymbol{e}_\rho$$

式中，$\alpha_0=\arctan\left(\dfrac{l}{2\rho}\right)$

讨论： $l/2\ll\rho$

$l/2\gg\rho$



2. 静态电磁场　静电场

当 $l/2 \ll \rho$ ⇨ $\alpha_0 \to 0$ ⇨ $\sin\alpha_0 \sim \alpha_0 \sim \tan\alpha_0 = \dfrac{l}{2\rho}$

则有，$$\boldsymbol{E} = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}\boldsymbol{e}_\rho$$

当 $l/2 \gg \rho$ ⇨ $\alpha_0 \to \pi/2$ ⇨ $\sin\alpha_0 = 1$

则有，$$\boldsymbol{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$ ⇦ 电轴的电场强度

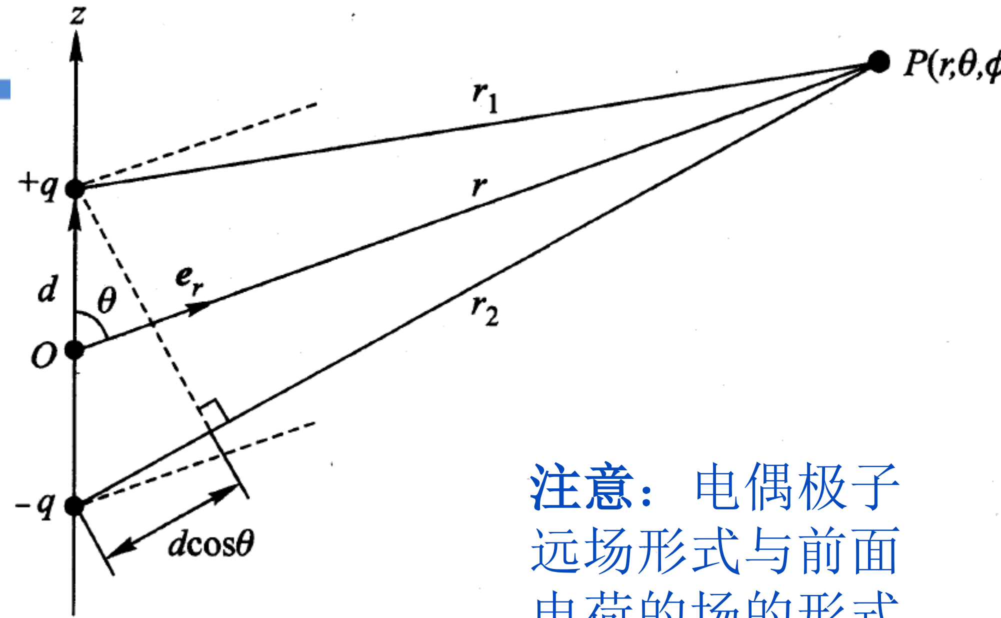
思考题2-1：

内外径分别为r_1和r_2的球壳，均匀带电荷量为Q，求空间中的$\boldsymbol{E}$和φ

（提示：基于对称性，先采用高斯定理求电场强度，在求电位）

2. 静态电磁场　静电场

例2-6 试求电偶极子的远区场。$d \ll r$



解：

电偶极子：+q、-q，**d**

电偶极矩：　$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$

注意：电偶极子远场形式与前面电荷的场的形式有何不同？

思路：基于叠加定理，先求电位，再求电场强度。

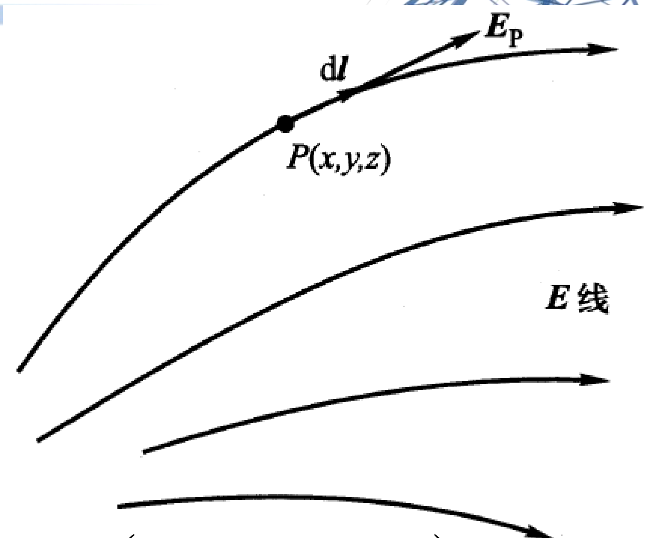
$$\varphi = \varphi_q + \varphi_{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

由于　$d \ll r$ ⇒ $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}$近似平行 ⇒ $r_2 - r_1 \approx d\cos\theta$　　$r_2 r_1 \approx r^2$

代入上式中，$\varphi = \dfrac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}$ ⇒ $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right)$

2. 静态电磁场　静电场

2.2.4 电场线与等位面



电场线（E线）： E线上任一点的切线方向应与该点的电场强度方向一致。

$$\boldsymbol{E}\times d\boldsymbol{l}=0$$

$$\left(E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z\right)\times\left(\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$=\left(E_y\mathrm{d}z-E_z\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{e}_x+\left(E_z\mathrm{d}x-E_x\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_y+\left(E_x\mathrm{d}y-E_y\mathrm{d}x\right)\boldsymbol{e}_z=0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x}=\frac{\mathrm{d}y}{E_y}=\frac{\mathrm{d}z}{E_z}$$

满足以上方程的解的集合即为电场线对应的曲线

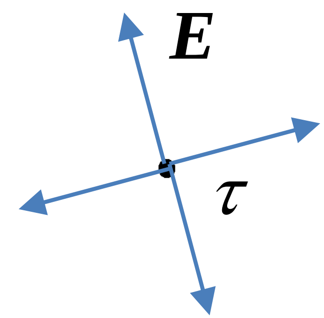
描绘E线的函数关系式，通常可一般性地记为： $\psi(x,y,z)=C$

场强大小：可以用该点处的电力线疏密程度表征

2. 静态电磁场 静电场

例： 无限长带电导线（电轴），电荷线为$\tau=2\pi\varepsilon_0$, 空间中电场强度如下，求电场线对应的曲线形式。

$$\boldsymbol{E}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$



解： 在直角坐标系下，

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y$$

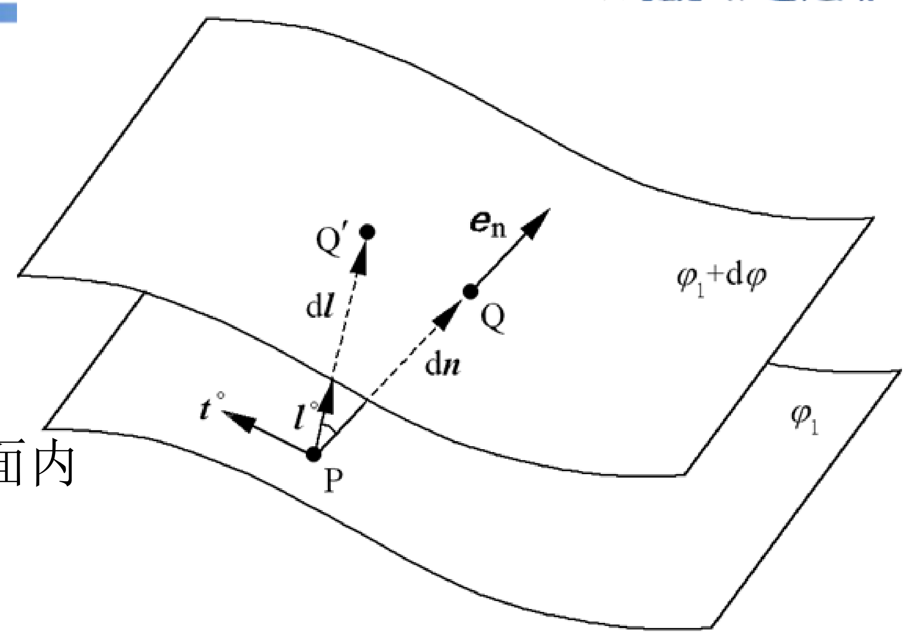
$$E_x=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_x=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_x=\frac{1}{\rho}\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$E_y=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_y=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_y=\frac{1}{\rho}\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{E_y}{E_x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+c \Rightarrow y=c'x$$

2. 静态电磁场　静电场

2.2.4 电场线与等位面



等位面（线）：　$\varphi(x,y,z)=c$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_l=|\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{e}_l)$$

在等位面上有任一点P，过P点的切平面内任取切向单位矢量$\boldsymbol{e}_t$，令$\boldsymbol{e}_t=\boldsymbol{e}_l$，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=0=|\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{e}_t)$$

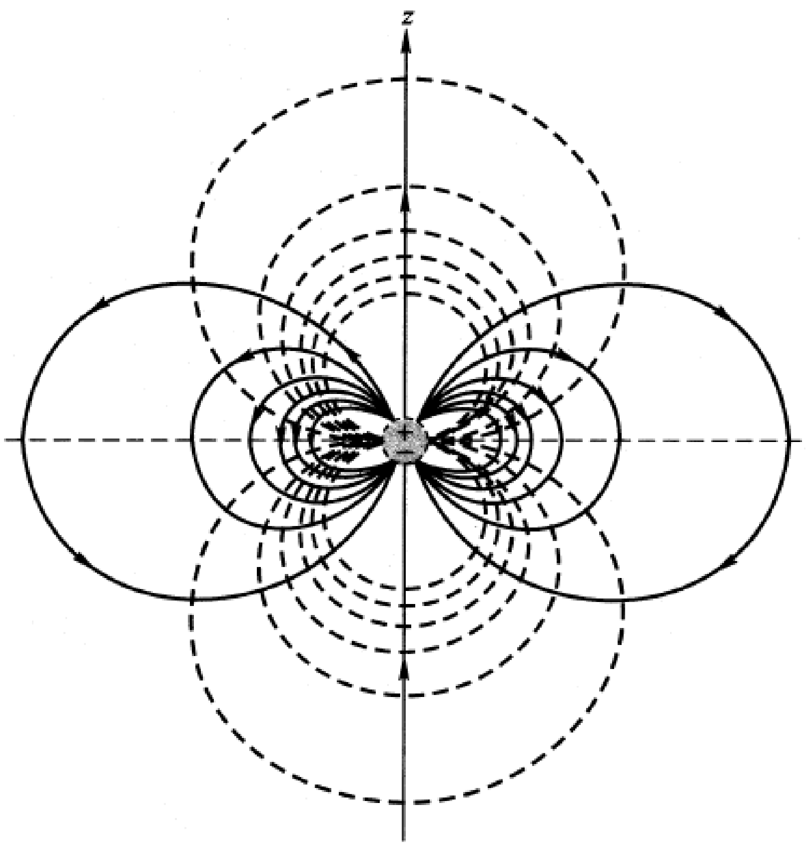
由于 $|\boldsymbol{G}|\geq 0$　且$\boldsymbol{e}_t$任意，故必须满足令$\boldsymbol{e}_t$和$\boldsymbol{e}_l$垂直。

即 $\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{e}_t)=0$ ⇨ 故$\boldsymbol{E}$线与等位面垂直

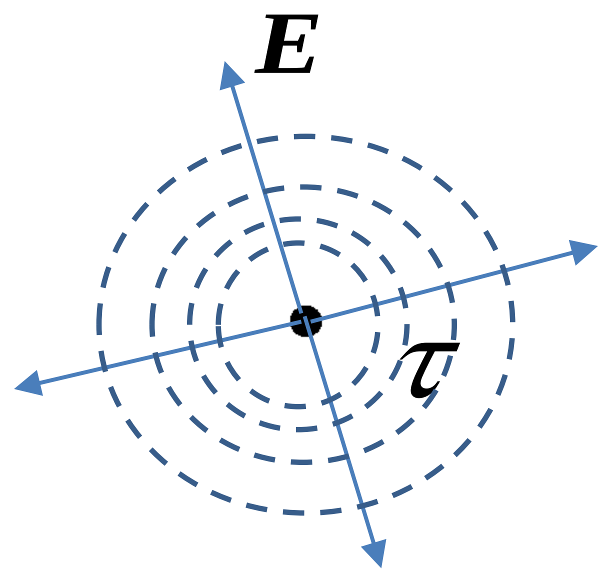
特别注意： $\boldsymbol{G}=\nabla\varphi$ 指向φ增加的方向；$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 指向φ减小的方向；

2. 静态电磁场　静电场

2.2.4 电场线与等位面



电偶极子场线剖面图



电轴电场线分布图

2. 静态电磁场　静电场

2.3 导体和电介质

回顾　　源：电荷　　点电荷、连续分布电荷 → 自由电荷；电偶极子 → 束缚电荷

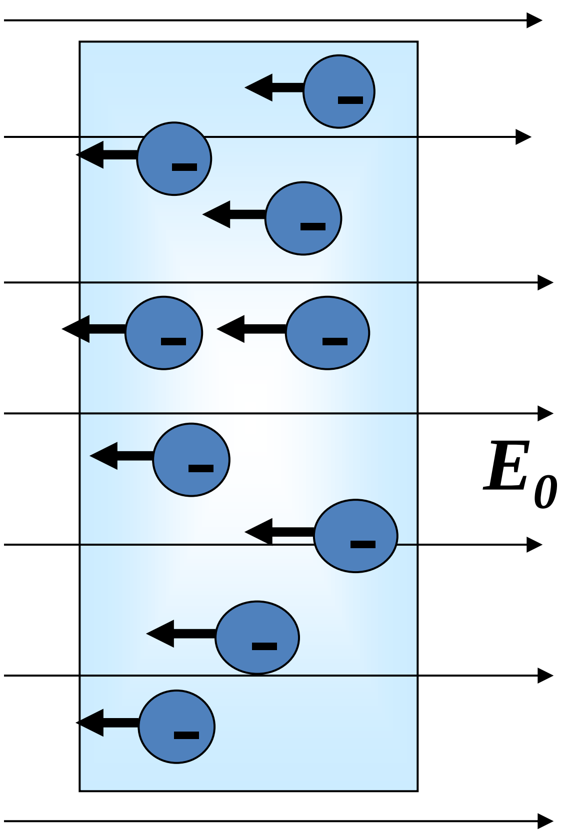
场：$\boldsymbol{E}, \varphi$　　高斯定理、$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$、直接积分 → 源：电荷　（自由空间）

实际工程中：

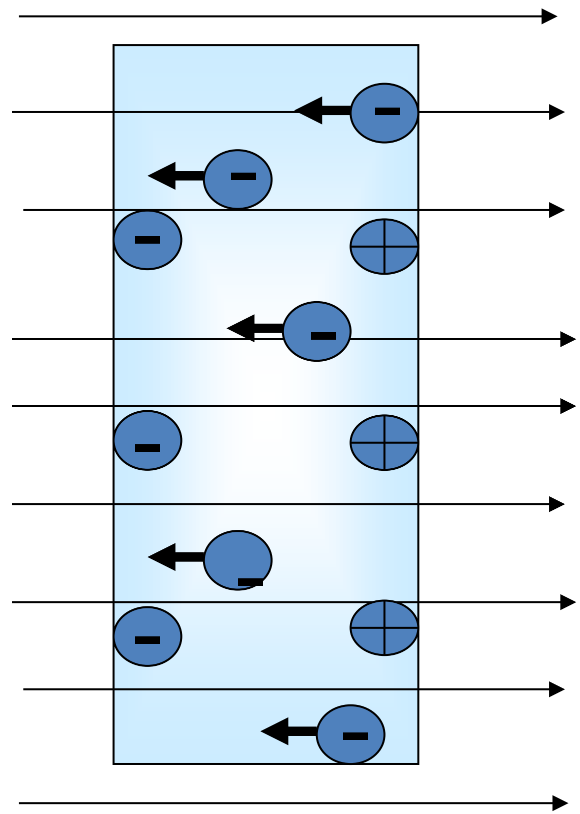
空间有媒质存在，场存在于媒质空间当中，对电场而言，媒质主要包括两类：导体、电介质

2. 静态电磁场　静电场

2.3.1 静电场中的导体



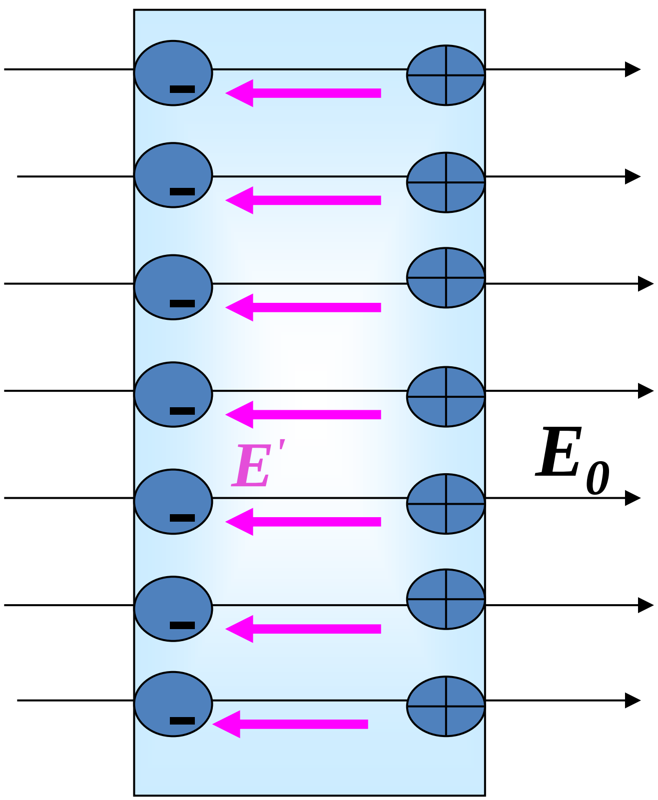
1. 导体中自由电荷在电场力作用下将发生定向移动.

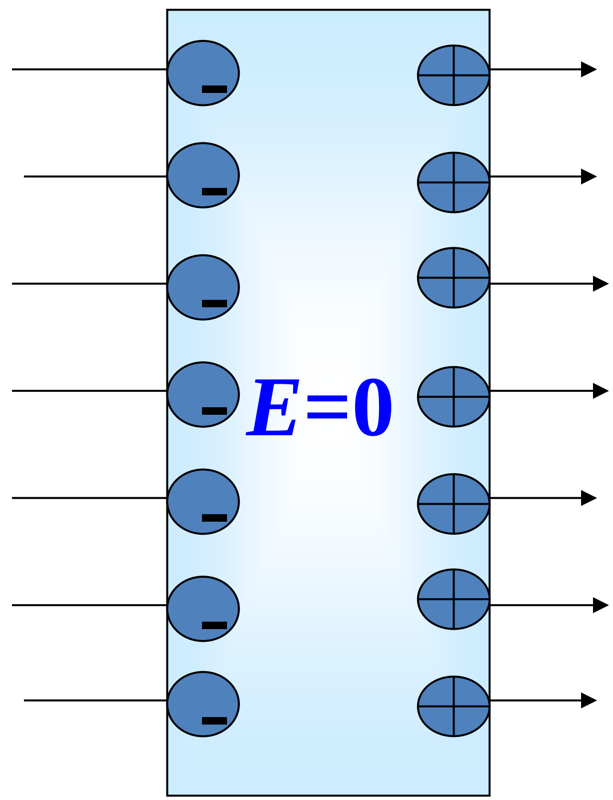


2. 导体两端出现感应电荷,感应电荷在导体中中产生反方向的附加场.

2. 静态电磁场　静电场

2.3.1 静电场中的导体





3. 感应电荷的电场增到与外电场相等时，导体内合场强为零。自由电荷的定向移动停止 .

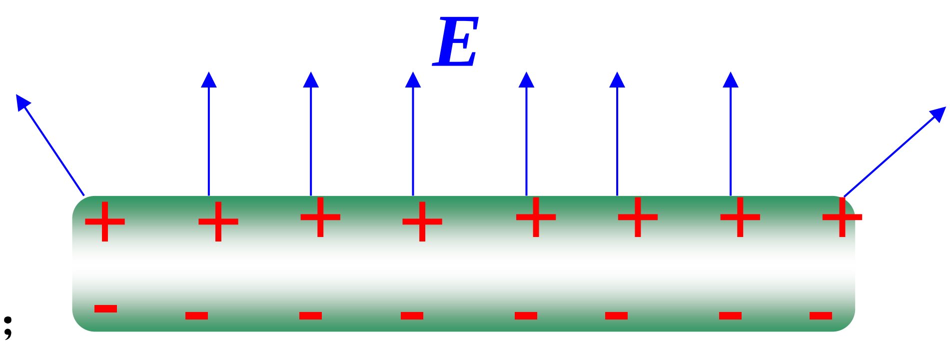
4. 静电平衡状态：导体中无电荷定向移动的状态，就叫静电平衡状态.

2. 静态电磁场　静电场

2.3.1 静电场中的导体

由于外电场的存在，受电场力的作用，导体内的电子（自由电荷）将反电场方向产生宏观定向运动，使得导体中的电荷重新分布，当感应电荷产生的附加电场E和原电场E_0在导体内叠加为零，即$E=E_0$时，自由电子停止定向移动，这时导体所处的状态叫**静电平衡状态**。

导体静电平衡下的基本特征：



（1）导体内部$E=0$；

（2）导体为等位体；

（3）导体表面必与外侧的E线垂直；

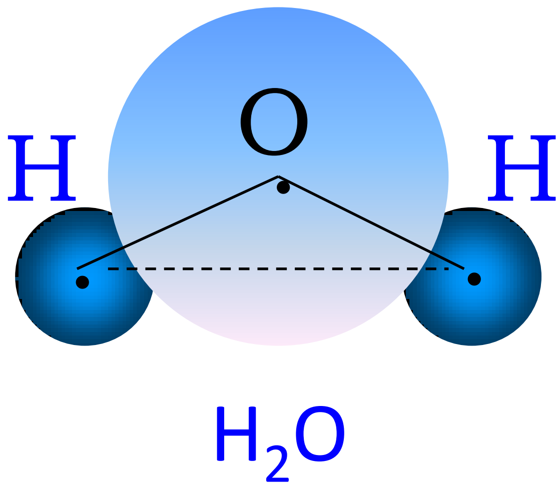
（4）电荷必然以面密度分布的形态，呈现在导体表面，且其分布密度取决于导体表面的曲率（曲率越大，面电荷密度越大）；

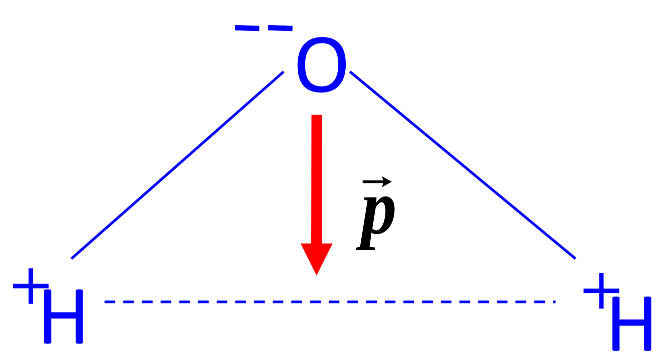
应用：尖端放电，静电屏蔽等

2.3.2 静电场中电介质及其极化

束缚电荷：只能微小移动，不能离开分子的范围，被原子、分子内在力或者分子间作用力束缚。

（1）有极分子：正、负电荷中心不重合（H_2O、N_2O、SO_2）；



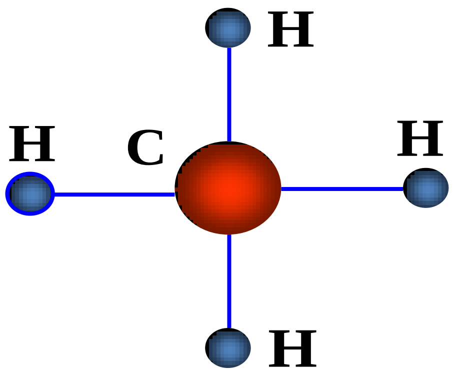


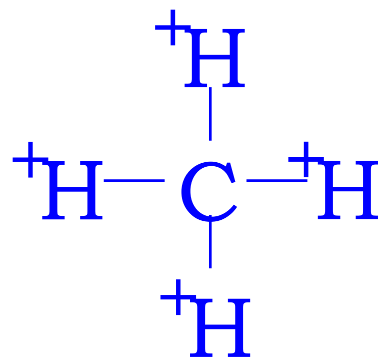
固有电偶极矩 $\sim 10^{-30}$ C·m

2. 静态电磁场　静电场

2.3.2 静电场中电介质及其极化

（2）无极分子：正、负电荷中心重合（CH_4、H_2、N_2）；





CH_4

外电场作用下的响应：

（1）取向极化：有极分子电矩转向，等效电偶极矩矢量和不为零；

（2）位移极化：重合的中心发生相对位移，形成的等效电偶极矩矢量和不为零；

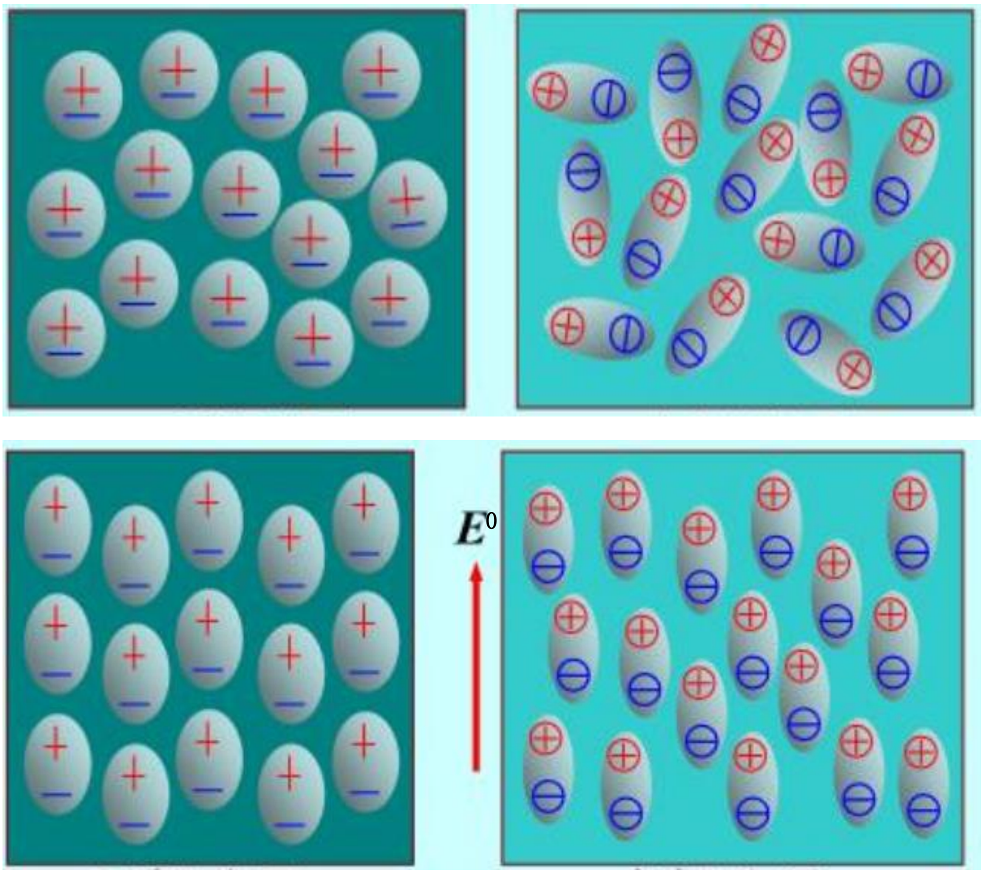
2. 静态电磁场　静电场

2.3.2 静电场中电介质及其极化

无极分子　　有极分子

外电场施加前：

外电场施加后：



2.3.2 静电场中电介质及其极化

关心问题： 电介质极化后，所有电偶极子在空间中所产生的场？

（1）例2-6中给出了单个电偶极子的远场；

（2）如何表征不同电介质的极化程度？

电极化强度$\boldsymbol{P}$：
$$\boldsymbol{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

每单位体积内电偶极矩的矢量和（电偶极矩之和的密度）

含电介质空间电场$\boldsymbol{E}$：
- 自由空间（真空）电偶极子产生电场（远场）
- 自由空间（真空）中外电场（如自由电荷产生）

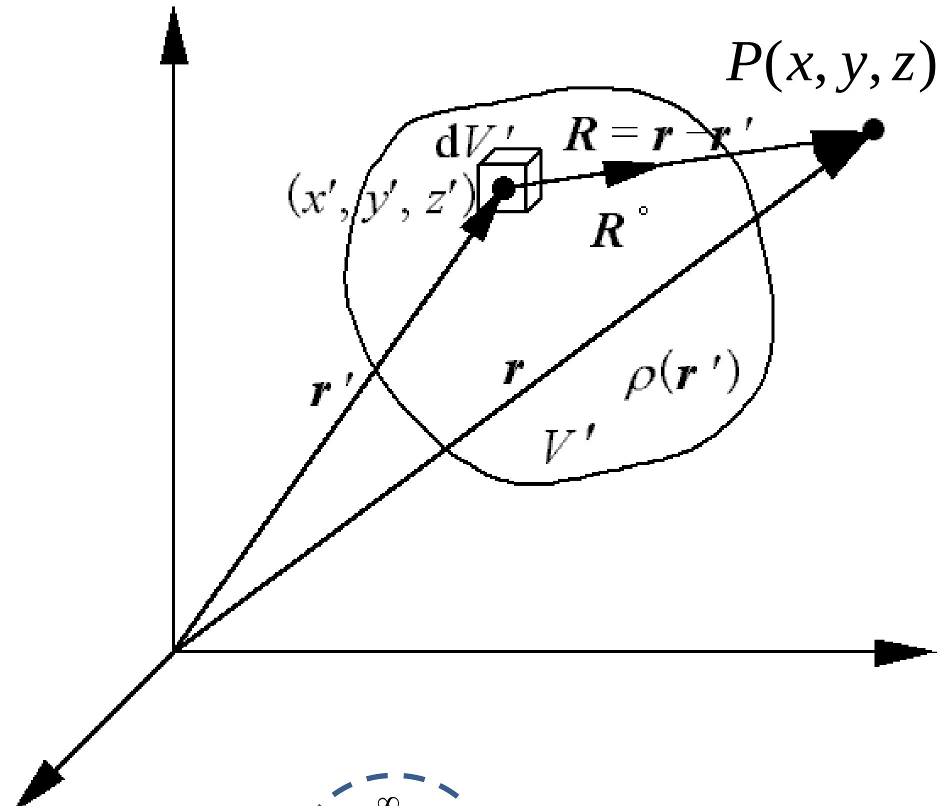
2. 静态电磁场　静电场

2.3.2 静电场中电介质及其极化

设已知$\boldsymbol{P}$，则单个电偶极子远区场

源在坐标原点：
$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}$$

源不在坐标原点：
$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$



元体积 dV' 中所有电偶极子在P点处产生的远场可以叠加，

$$d\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{e}_R}{R^2}+\frac{\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}_R}{R^2}+\ldots\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_i\,\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

2.3.2 静电场中电介质及其极化

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{P}dV'\cdot\boldsymbol{e}_R}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{P}dV'\cdot\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

由第一章作业题可知， $\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} = \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{P}dV'\cdot\boldsymbol{e}_R}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{P}dV'\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$$

又由矢量恒等式： $\nabla\cdot(\Psi\boldsymbol{A}) = \Psi\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\Psi$

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Psi = \nabla\cdot(\Psi\boldsymbol{A}) - \Psi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{P}\cdot\nabla'\frac{1}{R} = \nabla'\cdot\left(\boldsymbol{P}\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\nabla'\cdot\boldsymbol{P}$$

2.3.2 静电场中电介质及其极化

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\frac{1}{R}\right)dV'-\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}dV'\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'}\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{e}_n dS'}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}dV'$$

对比： $\varphi(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}dV'$　　$\varphi(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{S'}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{R}dS'$

基于二者的相似性，作如下定义：

$\sigma_P=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n$　极化面电荷　　　$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$　极化体电荷

2. 静态电磁场 静电场

2.3.2 静电场中电介质及其极化

极化电荷：

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'}\frac{\sigma_P(\boldsymbol{r}')}{R}dS'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_P(\boldsymbol{r}')}{R}dV'$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})==\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'}\frac{\sigma_P(\boldsymbol{r}')}{R^2}\boldsymbol{e}_R dS'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_P(\boldsymbol{r}')}{R^2}\boldsymbol{e}_R dV'$$

自由电荷：

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}dV' \quad + \quad \varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{R}dS'$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R^2}\boldsymbol{e}_R dV' \quad + \quad \boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{R^2}\boldsymbol{e}_R dS'$$

2. 静态电磁场　静电场

2.4 含电介质的空间电场

2.4.1 电介质中的高斯定理

库仑电场：
- 自由电荷　$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho / \varepsilon_0$
- 极化电荷　$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_P / \varepsilon_0$

含导体和电介质空间：$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \left(\rho + \rho_P\right) / \varepsilon_0 \Leftarrow \rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}\right) = \rho$$

定义：　$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$　电位移矢量（电通量密度）

$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \quad \longleftrightarrow \quad \oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV$　一般形式的高斯定理

2.4.2 介电常数 & 击穿场强

介电常数：　实验表明，大多数的电介质，P和E成正比，即

$$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E} \qquad \chi_e \Longleftarrow \text{电极化率}$$

代入到　$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\left(1+\chi_e\right)\boldsymbol{E}$

令　$\varepsilon=\varepsilon_0\left(1+\chi_e\right) \Longrightarrow \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$

$\Downarrow$

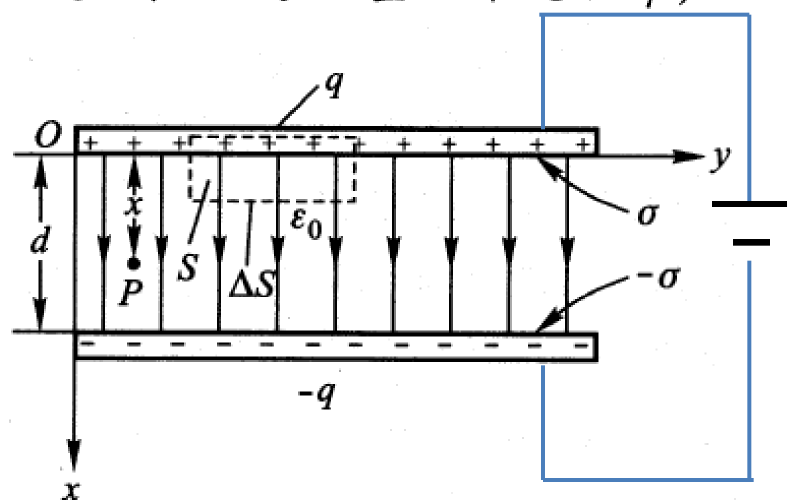
介电常数 $\Longrightarrow$ $\varepsilon_r=\varepsilon/\varepsilon_0=\left(1+\chi_e\right)$　相对介电常数

击穿场强：　当电场足够大时，介质中的束缚电荷可能脱离分子自由移动，此时电介质丧失绝缘性能，成为击穿。某种介质所能承受最大场强，成为该介质的击穿场强。

例2-8 一个理想的平行板电容器，由直流电压源充电后又断开电源，然后在两极板间插入一厚度为d的均匀介质板，其介电常数为$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r\ (\varepsilon_r>1)$，忽略极板间的边缘效应，试求：

（1）插入介质板前后平行板间各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$、电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和电位 φ，以及极板上的自由电荷分布；

（2）介质板表面和内部的极化电荷分布。



解：　理想平行板电容器的电场，可视为具有平行平面场特征的均匀电场，

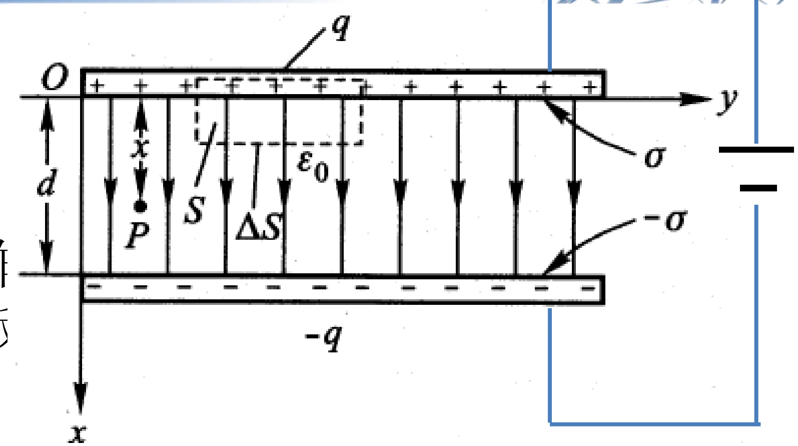
（1a）插入介质前，设所求场量分别为：

$$\boldsymbol{D}_0, \boldsymbol{E}_0, \varphi_0, \sigma_0$$

$$U_0=\int_+^- \boldsymbol{E}_0\cdot d\boldsymbol{l}=\int_+^-(E_0\boldsymbol{e}_x)\cdot(dx\boldsymbol{e}_x)=E_0 d \Rightarrow \boldsymbol{E}_0=\frac{U_0}{d}\boldsymbol{e}_x \Rightarrow \boldsymbol{D}_0=\frac{\varepsilon_0 U_0}{d}\boldsymbol{e}_x$$

2. 静态电磁场 静电场

$$\varphi_0=\int_P^{-}\boldsymbol{E}_0\cdot d\boldsymbol{l}=\int_x^d E_0\cdot dx=\frac{U_0}{d}(d-x)$$



基于高斯定理，沿极板与介质的交界面，作一个圆柱形的高斯面，上下底面平行于极板面积为ΔS，则有，

$$\oint_S \boldsymbol{D}_0\cdot d\boldsymbol{S}=(D_0\boldsymbol{e}_x)\cdot(\Delta S\boldsymbol{e}_x)=D_0\Delta S=\int_{S'}\sigma_0 dS=\sigma_0\Delta S$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_0=D_0=\frac{\varepsilon_0 U_0}{d}$$

导体与电介质交界面处的边界条件

（1b）插入介质后，设所求场量分别为：$\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{E}_1,\varphi_1,\sigma_1$

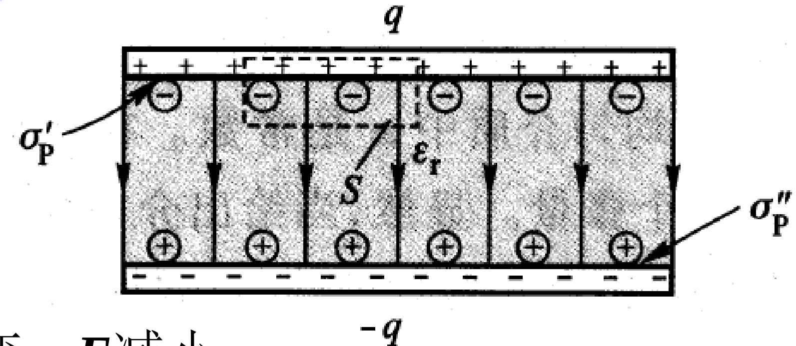
分析：电源断开后，插入介质，极板上电荷不变，电压改变。

显然，$\sigma_1=\sigma_0$ 基于高斯定理，$D_1=\sigma_1=\sigma_0=D_0$ 即 $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}_0$

2. 静态电磁场　静电场

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{D}_1/\varepsilon=\boldsymbol{D}_0/\varepsilon=\frac{\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{U_0}{\varepsilon_r d}\boldsymbol{e}_x$$

$$\varphi_1=\int_P^{-}\boldsymbol{E}_1\cdot d\boldsymbol{l}=\int_x^d E_1\cdot dx=\frac{U_0}{\varepsilon_r d}(d-x)$$



结论：插入介质前后电荷密度σ不变，**D**不变，**E**减小。

电介质中的极化电场对原电场有抵消作用。（变压器绝缘油、纸板等用于减小空间电场强度）

（2） 假设与极板上、下交界面处的极化电荷面密度分别为：σ_P', σ_P''

$$\boldsymbol{P}_1=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1=\frac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}\frac{\varepsilon_0 U_0}{d}\boldsymbol{e}_x$$

上表面：$\sigma_P'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n'=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\sigma_0\boldsymbol{e}_x\cdot(-\boldsymbol{e}_x)=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\sigma_0$

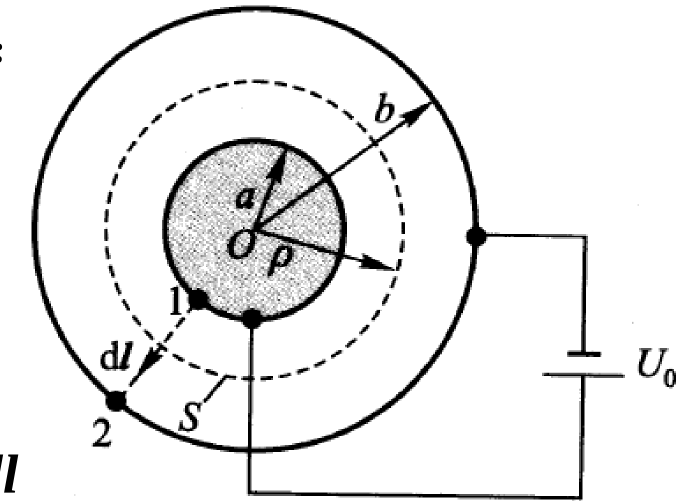
$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=0$$

下表面：$\sigma_P''=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n''=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\sigma_0\boldsymbol{e}_x\cdot(\boldsymbol{e}_x)=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\sigma_0$

例2-9 单芯同轴电缆如图所示，其长度$L>>b$，已知其内外半径为a，b，中间介质的介电常数为ε，电缆与电压U_0相连，试求：

（1）介质中的电场强度$\boldsymbol{E}$，作出$E-\rho$变化图形

（2）介质中E_{max}位于哪里？其值多大？

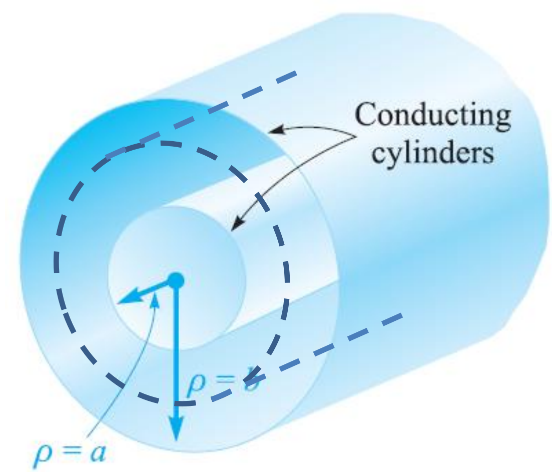


分析：（a）电场呈轴对称特征；

（b）可考虑利用高斯定理；

（c）已知电位差，可考虑用 $U_0=\int_{+}^{-}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$

解：（1）作半径为ρ，长为l的圆柱面为高斯面，设内外导体电荷线密度为$+\tau$、$-\tau$，则



$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{S_c}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{S_c}\left(D\boldsymbol{e}_\rho\cdot dS\boldsymbol{e}_\rho\right)$$

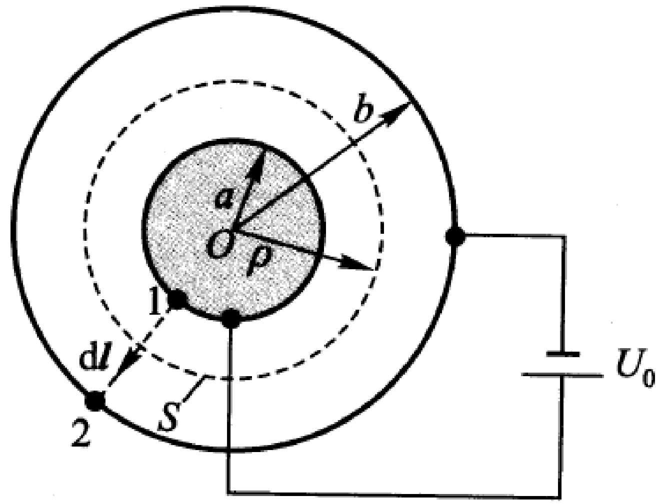
$$=\int_{S_c}DdS\ =D\cdot 2\pi\rho l\ =\tau l$$

2. 静态电磁场　静电场

$$\boldsymbol{D}=\frac{\tau}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\rho \Rightarrow \boldsymbol{E}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\rho}\boldsymbol{e}_\rho \quad (a<\rho<b)$$

$+\tau$、$-\tau$ 则是假设的，未知：

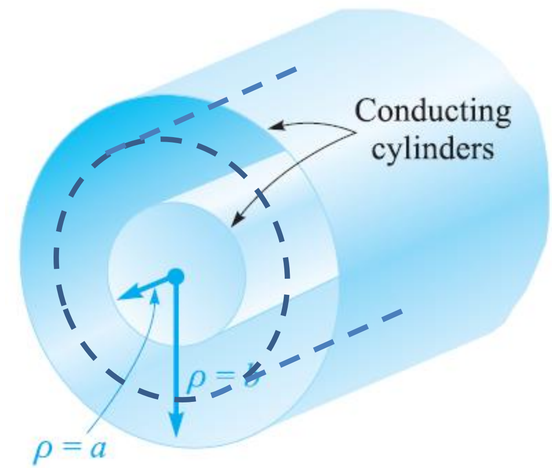
$$U_0=\int_+^- \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} =\int_a^b\left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\rho}\boldsymbol{e}_\rho\cdot d\rho\boldsymbol{e}_\rho\right)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$



$\Rightarrow \tau=2\pi\varepsilon U_0/\ln\frac{b}{a}$ 代入到电场表达式，可得

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}=\frac{U_0}{\rho\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{e}_\rho \quad (a<\rho<b)$$

（2）
$$\boldsymbol{E}_{\max}=\frac{U_0}{a\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{e}_\rho$$



2. 静态电磁场　静电场

总结：

（1）平板、球形电容器，同轴电缆适用高斯定理；$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = q$

（2）电位差与电场强度的关系：$U_0 = \int_+^- \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$

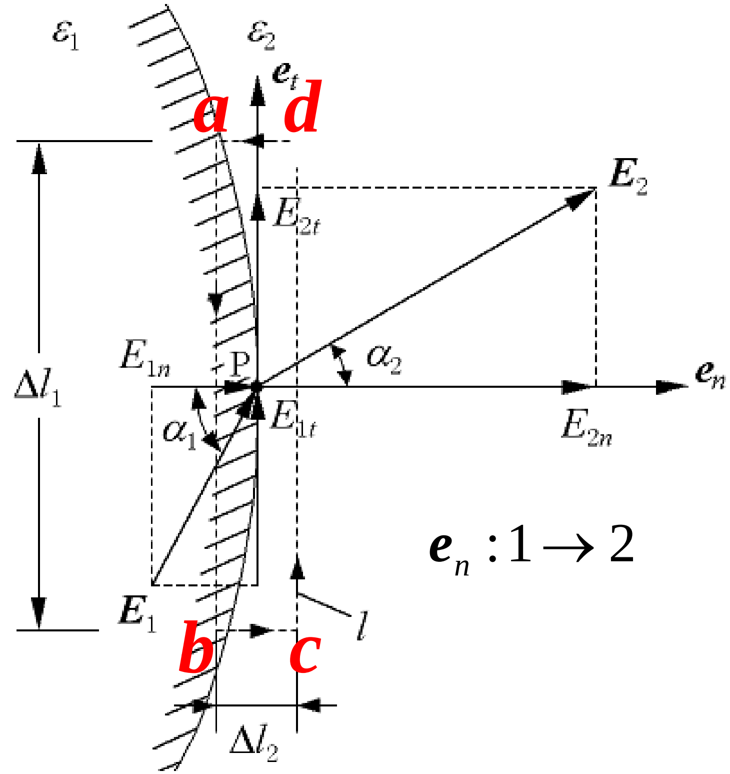
（3）导体与电介质的交界面：　$\sigma = D_n$

2. 静态电磁场　静电场

2.4.3 不同媒质分界面上的边界条件

生活实例：光的折射现象在生活中很常见 ➡ 光在本质上就是电磁场

（1）两种不同电介质



紧贴分界面，围绕*P*点作一很小的矩形回路***l***，则Δl_1很小，Δl_2近似为零。

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l} + \int_c^d \boldsymbol{E}_2 \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= \int_a^b \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{e}_t dl + \int_c^d \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{e}_t dl$$

$$= \left(-E_{1t}\Delta l_1\right) + E_{2t}\Delta l_1 = 0$$

➡ $E_{1t} = E_{2t}$　　　$\boldsymbol{e}_n \times \left(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1\right) = 0$

电场强度切向连续

2. 静态电磁场　静电场

2.4.3 不同媒质分界面上的边界条件

（1）两种不同电介质

紧贴分界面，围绕P点作一很小的扁平闭合圆柱面$\boldsymbol{S}$，则Δh近似为零，利用高斯定理，

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_T} \boldsymbol{D}_1\cdot(-\boldsymbol{e}_n)\,dS + \int_{S_B} \boldsymbol{D}_2\cdot(\boldsymbol{e}_n)\,dS$$

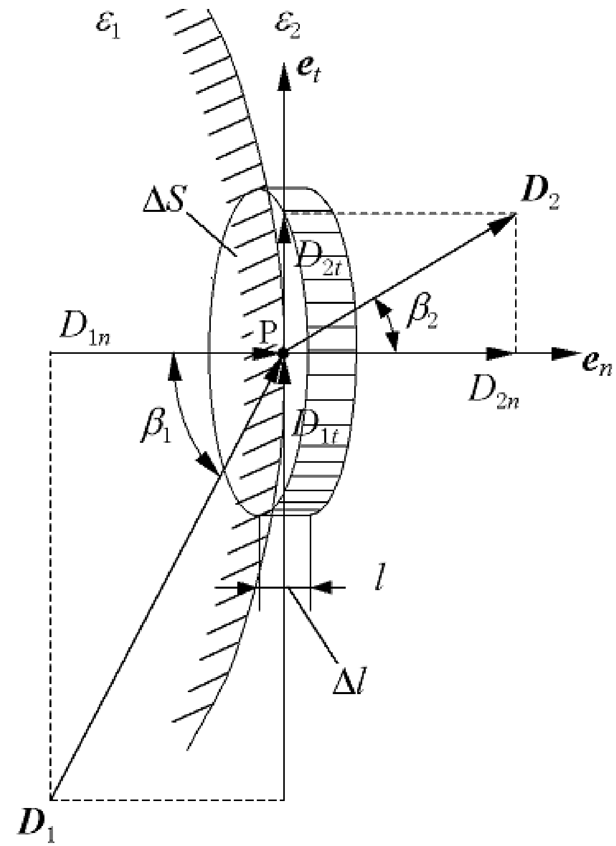
$$= D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = \sigma\Delta S$$

➡ $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$　　　$\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma$

对于电介质交界面，通常有σ=0

➡ $D_{2n} = D_{1n}$　　　$\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = 0$

电位移矢量法向连续



$\boldsymbol{e}_n : 1 \rightarrow 2$

2. 静态电磁场　静电场

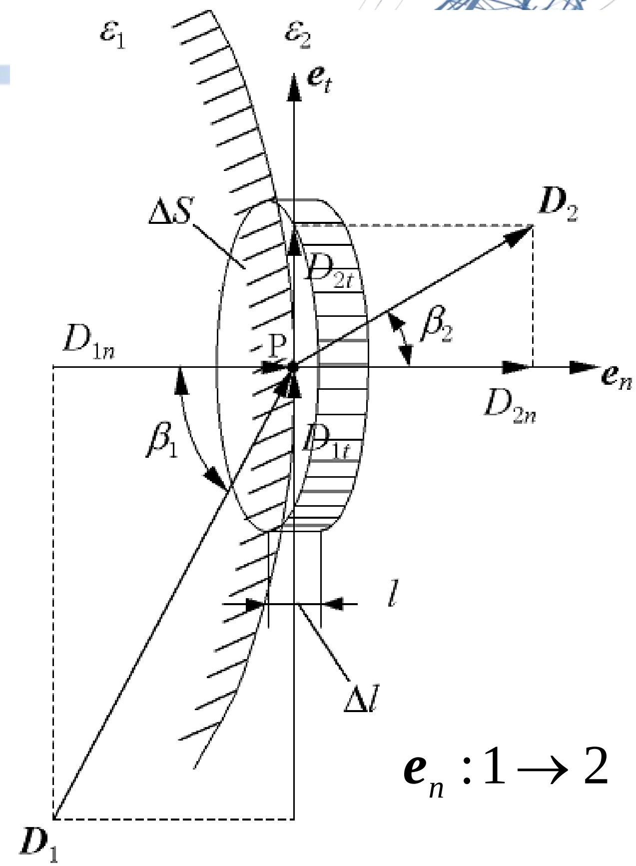
2.4.3 不同媒质分界面上的边界条件

折射定理：

$E_{1t}=E_{2t} \Rightarrow E_1\sin\alpha_1=E_2\sin\alpha_2$

$D_{2n}=D_{1n} \Rightarrow \varepsilon_1E_1\cos\alpha_1=\varepsilon_2E_2\cos\alpha_2$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$



$\boldsymbol{e}_n: 1\rightarrow 2$

（2）导体和电介质交界面

分析：在静电场中的导体，处于静电平衡，特征为

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{D}_1=0 \Rightarrow \begin{cases} D_{1n}=D_{1t}=0 \\ E_{1n}=E_{1t}=0 \end{cases}$$

由 $D_{2n}-D_{1n}=\sigma \Rightarrow D_{2n}=\sigma \Rightarrow \begin{cases} E_{1t}=E_{2t}=0 \\ D_{2n}=\sigma \end{cases}$

电场线垂直于导体表面

例2-8

$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}_1=0$　　　$\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}_2=\sigma$

2.4.3 不同媒质分界面上的边界条件

（3）由电位表述的边界条件

a. 两种不同电介质

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{2n} = D_{1n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma \end{cases}$$

b. 导体和电介质

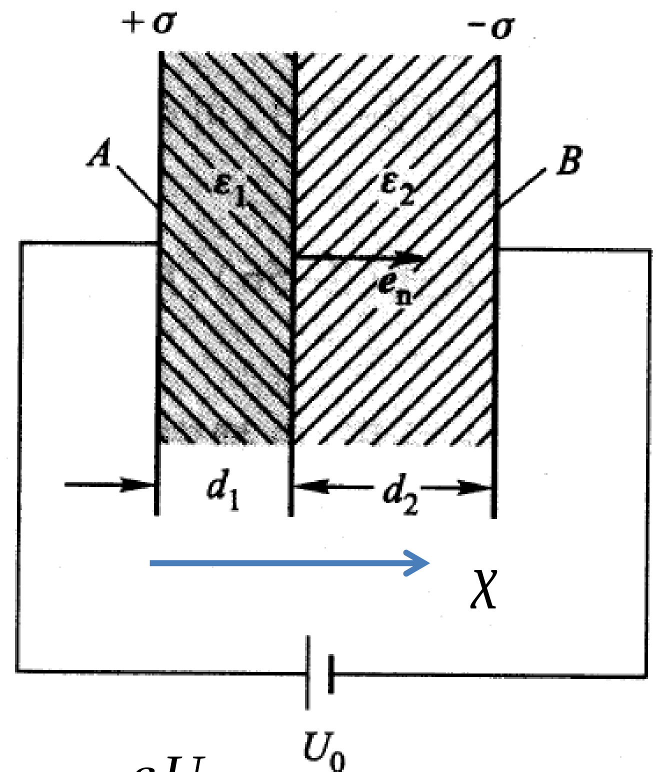
$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} = 0 \\ D_{2n} = \sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \equiv C \\ \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma \end{cases}$$

2. 静态电磁场　静电场

例2-10 一平行板电容器，板间介质为两种不同绝缘材料，外施电压U_0，求：

（1）两绝缘材料中的电场强度；

（2）极板上的电荷面密度。



分析：介质不均匀，导体、两种不同电介质，已知电位差

解：设交界面法向为由A指向B，

$$\begin{cases} \int_{l_1} \boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{l_2} \boldsymbol{E}_2 \cdot d\boldsymbol{l} = U_0 \\ D_{1n}|_S = D_{2n}|_S \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0 \\ \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{E}_1 = \frac{\varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \boldsymbol{e}_x \quad \boldsymbol{E}_2 = \frac{\varepsilon_1 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \boldsymbol{e}_x$$

2. 静态电磁场 静电场

总结：目前所学的静电场的求解方法如下，

（1）叠加定理；

（2）高斯定理： $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV$

（3）直接积分； $\boldsymbol{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\dfrac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R^2}\boldsymbol{e}_R dV'$

（4）电位差与电场强度； $U_{PQ} = \int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$

微分方程： $\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \end{cases}$ 解微分方程是否可以求解？

2. 静态电磁场　静电场

2.5 边值问题

2.5.1 数学模型

（1）泛定方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon=\rho$$

若介质均匀：$\nabla\varepsilon=0$ ⇒ $\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho$ ⇒ $\nabla\cdot\nabla\varphi=-\rho/\varepsilon$　泊松方程

当电荷密度为零时，$\nabla\cdot\nabla\varphi=0$　拉普拉斯方程

定义拉普拉斯算子：$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$

$\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon$　泊松方程　　　$\nabla^2\varphi=0$　拉普拉斯方程

（2）定解条件（边界条件）

2.5.1 数学模型

（2）定解条件（边界条件）

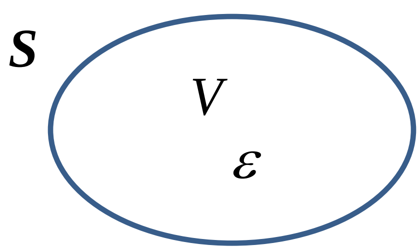
即是在定义域边界上给定的边界条件，有以下几种类型，

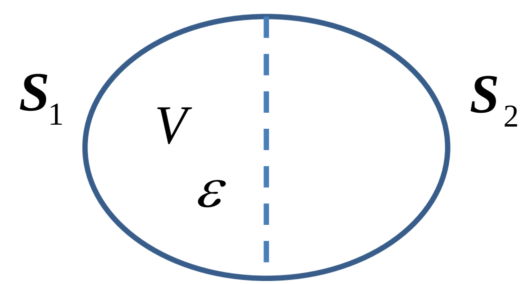
边界点的位矢

a. 给定场域边界上的电位 $\varphi(\boldsymbol{r})\big|_S = f_1(\boldsymbol{r}_b)$

b. 给定场域边界上电位的法向导数 $\left.\dfrac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_S = f_2(\boldsymbol{r}_b)$

c. 上述两种情况的线性组合 $\left.\left[\varphi(\boldsymbol{r}) + f_3(\boldsymbol{r})\dfrac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\right|_S = f_4(\boldsymbol{r}_b)$



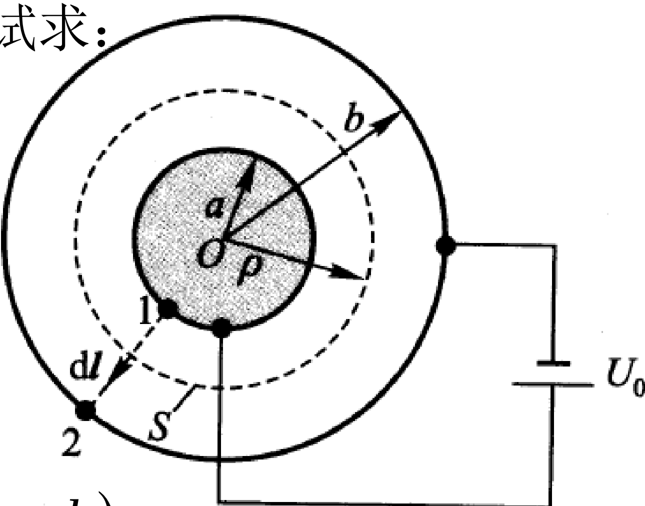


2. 静态电磁场　静电场

2. 5. 2 直接积分法

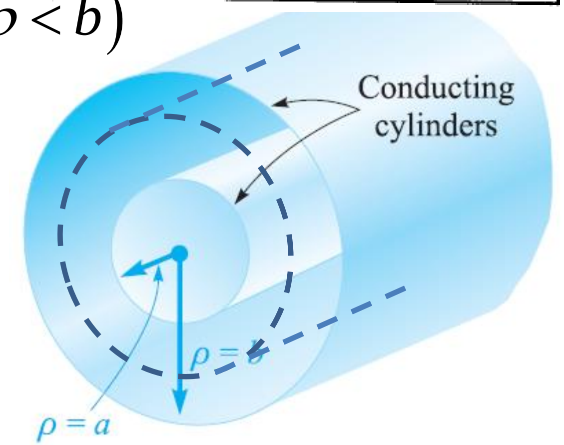
例2-11（2-9） 单芯同轴电缆如图所示，其长度$L>>b$，已知其内外半径为a，b，中间介质的介电常数为ε，电缆与电压U_0相连，试求：

介质中的电场强度$\boldsymbol{E}$



解：该电场对应的边值问题为：
$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=0\left(a<\rho<b\right)\\ \varphi\big|_{\rho=a}=U_0\\ \varphi\big|_{\rho=b}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\left(a<\rho<b\right)\\ \varphi\big|_{\rho=a}=U_0\\ \varphi\big|_{\rho=b}=0\end{cases}$$

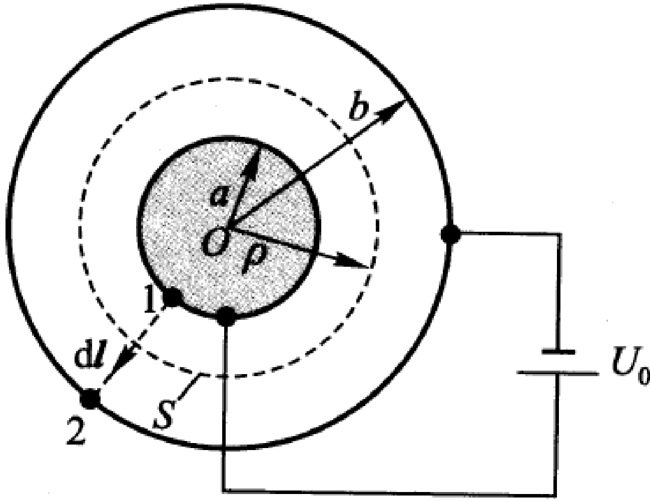


2. 静态电磁场　静电场

分析：　由于内外导体上的电荷对称分布，因此电场沿径向，等位面（线）与之垂直，为与导体同轴的圆柱面，故电位φ只与ρ有关。

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=C \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=\frac{C}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \varphi=C_1\ln\rho+C_2$$

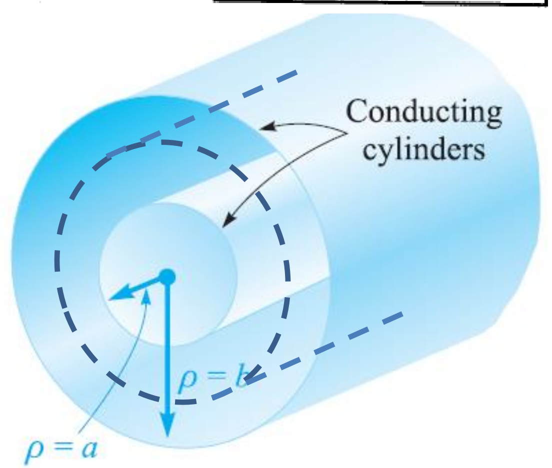


结合边界条件，有

$$\begin{aligned}\varphi(a)&=C_1\ln a+C_2=U_0\\ \varphi(b)&=C_1\ln b+C_2=0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}C_1&=-U_0/\ln\frac{b}{a}\\ C_2&=U_0\ln b/\ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

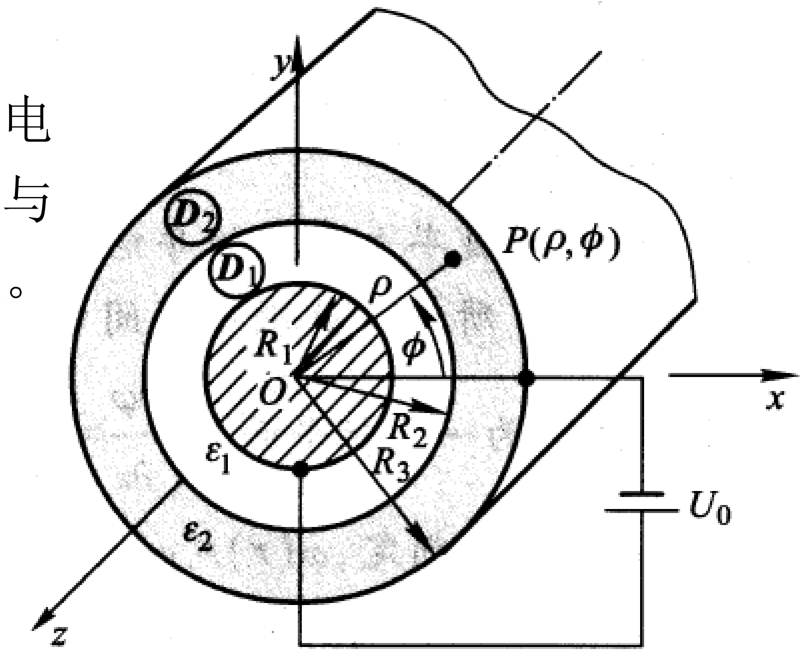
$$\Rightarrow \quad \varphi=U_0\ln(b/\rho)/\ln(b/a)$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{\partial\varphi}{\rho\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)=\frac{U_0}{\rho\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{e}_\rho$$



例2-12 如图所示为双层介质的同轴电缆，内外导体半径为R_1，R_3，双层介质的交界面处半径为R_2，电缆与电压U_0相连，试基于边值问题求介质内的电位分布。

分析：由于内外导体上的电荷对称分布，因此电场沿径向，等位面（线）与之垂直，为与导体同轴的圆柱面，故电位φ只与ρ有关。



$$
\begin{cases}
\nabla^2\varphi_1=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \quad (R_1<\rho<R_2,\phi)\in D_1 \\
\nabla^2\varphi_2=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \quad (R_2<\rho<R_3,\phi)\in D_2 \\
\varphi_1\big|_{\rho=R_1}=U_0 \quad 和 \quad \varphi_2\big|_{\rho=R_3}=0 \\
\varphi_1\big|_{\rho=R_2}=\varphi_2\big|_{\rho=R_2} \quad 和 \quad \varepsilon_1\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\rho}\Big|_{\rho=R_2}=\varepsilon_2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\rho}\Big|_{\rho=R_2}
\end{cases}
$$

2. 静态电磁场　静电场

电位通解：

$$\varphi_1 = C_1 \ln \rho + C_2$$

$$\varphi_2 = C_3 \ln \rho + C_4$$

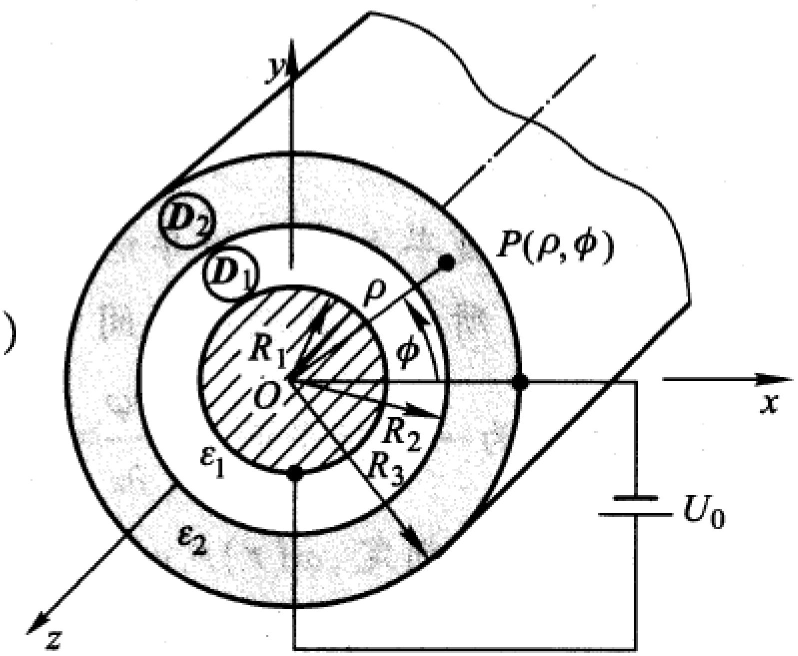
边界条件

$$C_1 = \frac{-\varepsilon_2 U_0}{K}, C_2 = U_0 + \frac{\varepsilon_2 U_0}{K} \ln R_1, C_3 = \frac{-\varepsilon_1 U_0}{K}, C_4 = \frac{\varepsilon_1 U_0}{K} \ln R_3$$

$$K = \varepsilon_2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \varepsilon_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)$$

$$\varphi_1 = \frac{U_0}{K}(K + \varepsilon_2 \ln R_1 - \varepsilon_2 \ln \rho) \quad (R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2)$$

$$\varphi_2 = \frac{U_0}{K}(\varepsilon_1 \ln R_3 - \varepsilon_1 \ln \rho) \quad (R_2 \leqslant \rho \leqslant R_3)$$



2. 静态电磁场　静电场

2.5.3 分离变量法

直接积分法的局限：只适用于求解仅与一个坐标变量有关的函数。

当电位与两个坐标变量均有关？

设该平行平面场中位函数 $U(\boldsymbol{r})=U(x,y)$ 为坐标 x,y 的函数，在场域 D 内满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U(x,y)=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \qquad (x,y)\in D$$

假定：$U(x,y)=X(x)Y(y)$

$$\Rightarrow \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}=\lambda \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}-\lambda X=0\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}+\lambda Y=0\end{cases}$$

待定常数 λ 在实数范围内取值（$\lambda=0$；$\lambda=m_n^2>0$ 和 $\lambda=-m_n^2<0$），可分别得出

2.5.3 分离变量法

当 $\lambda=0$ 时　　$X(x)=A_{10}+A_{20}x$；　　$Y(y)=B_{10}+B_{20}y$

当 $\lambda=m_n^2>0$ 时　　$X(x)=A_{1n}\cosh(m_n x)+A_{2n}\sinh(m_n x)$；

$Y(y)=B_{1n}\cos(m_n y)+B_{2n}\sin(m_n y)$

当 $\lambda=-m_n^2<0$ 时　　$X(x)=A'_{1n}\cos(m_n x)+A'_{2n}\sin(m_n x)$；

$Y(y)=B'_{1n}\cosh(m_n y)+B'_{2n}\sinh(m_n y)$

位函数U的通解可认为是以上各个特解的线性组合，则有

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}\cosh(m_n x)+A_{2n}\sinh(m_n x)\right]\left[B_{1n}\cos(m_n y)+B_{2n}\sin(m_n y)\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}'\cos(m_n x)+A_{2n}'\sin(m_n x)\right]\left[B_{1n}'\cosh(m_n y)+B_{2n}'\sinh(m_n y)\right]$$

$$+\left(A_{10}+A_{20}x\right)\left(B_{10}+B_{20}y\right)$$

最后根据边界条件通过比较系数方法确定待定系数的值。

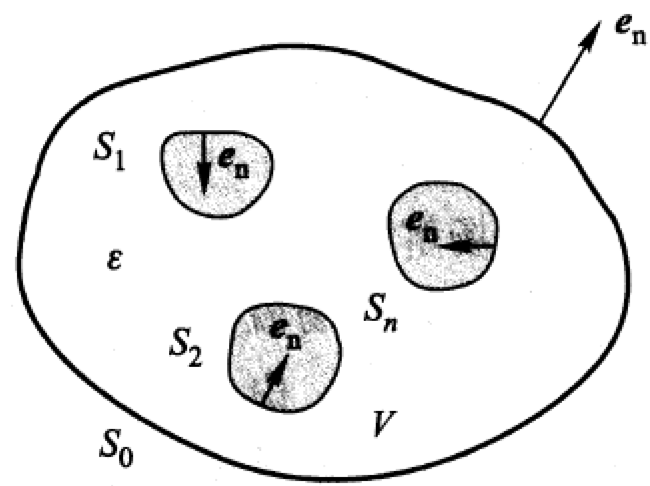
2.5.4 静电场解的唯一性

解的唯一性：

在给定的定解条件下，所求的解是唯一的（满足给定边值的泊松方程的解是唯一的解）。

$$\nabla^2\varphi_1 = -\rho/\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2\varphi_2 = -\rho/\varepsilon$$

$$\varphi_1\big|_{S_i} = f_i \qquad \varphi_2\big|_{S_i} = f_i$$

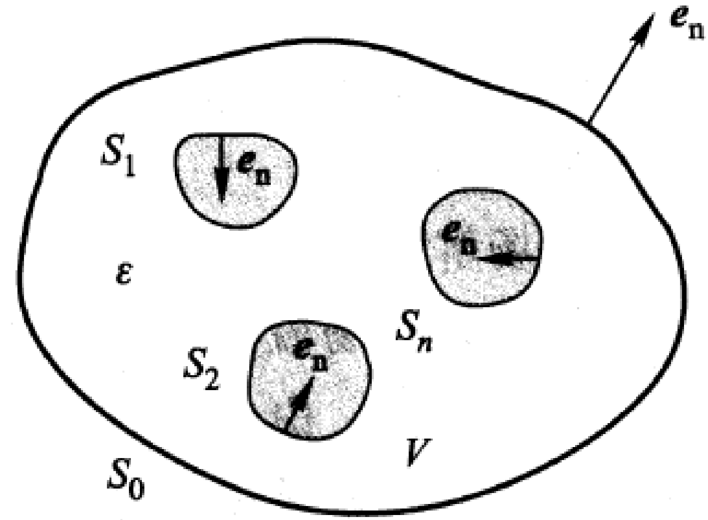


$$\nabla^2\varphi_1 = -\rho/\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2\varphi_2 = -\rho/\varepsilon$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{S_i} = g_i \qquad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{S_i} = g_i$$

2.5.4 静电场解的唯一性

证明：采用反证法，假设V中存在两个不同的电位函数φ_1、φ_2，在给定的边值条件下均满足泊松方程，

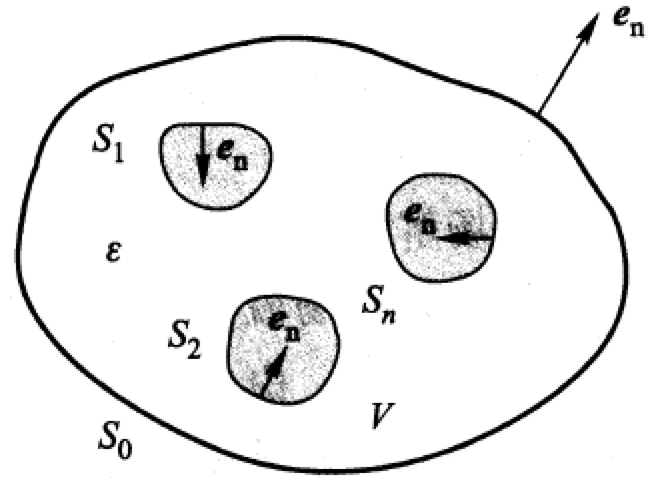


$$\nabla^2\varphi_1 = -\rho/\varepsilon \qquad \nabla^2\varphi_2 = -\rho/\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = \nabla^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \nabla^2\varphi_d = 0$$

在导体的边界上，电位是定的（等位体），故导体边界上必有 $\varphi_d = 0$

2.5.4 静电场解的唯一性



由格林公式，

$$\int_V \left[\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\right]dV = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS$$

令 $\psi=\varphi=\varphi_d$ 代入上式

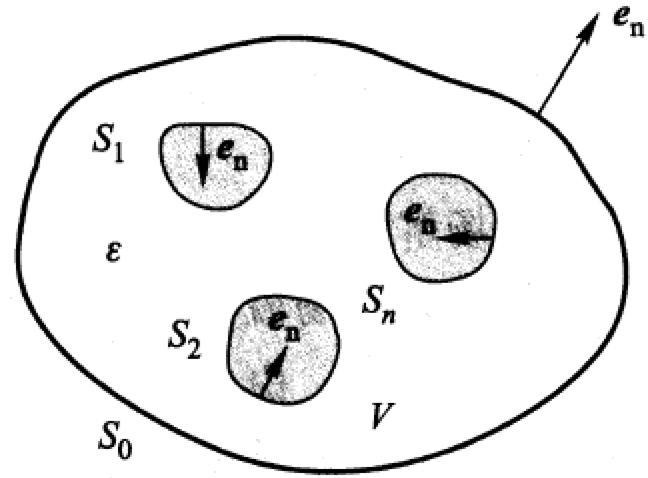
$$\Rightarrow \quad \int_V (\nabla\varphi_d)^2\, dV = \oint_S \varphi_d \frac{\partial\varphi_d}{\partial n}dS$$

如图所示，整个问题区域的边界$S=S_0+S_1+S_2+\ldots+S_n$。那么在这些边界上，**已知**两个位函数必将有相同的一类边值或者二类边值，即

$$\varphi_1\big|_{S_i} = \varphi_2\big|_{S_i} = f_i \qquad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{S_i} = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{S_i} = g_i$$

进而可得， $\varphi_d\big|_{S_i} = 0 \qquad \left.\frac{\partial\varphi_d}{\partial n}\right|_{S_i} = 0$ 代入前式得

2.5.4 静电场解的唯一性



$$\int_V (\nabla \varphi_d)^2 \, dV = 0$$

由于V任意，要满足上式恒为零，只有

$\nabla \varphi_d = 0$ ➡ 即场域V内电位φ_d的梯度恒为零

又由于在导体表面上

$$\varphi_d = 0$$

且场域V内有没有电位差（电位梯度），

故场域V内任意点必有 $\varphi_d = 0$

➡ $\varphi_1 = \varphi_2$

2. 静态电磁场　静电场

2.6 镜像法

回顾：边值问题：BVP（Boundary Value Problem）

BVP: 泊松方程 + 边界条件 ⇒ 静电场具有唯一解

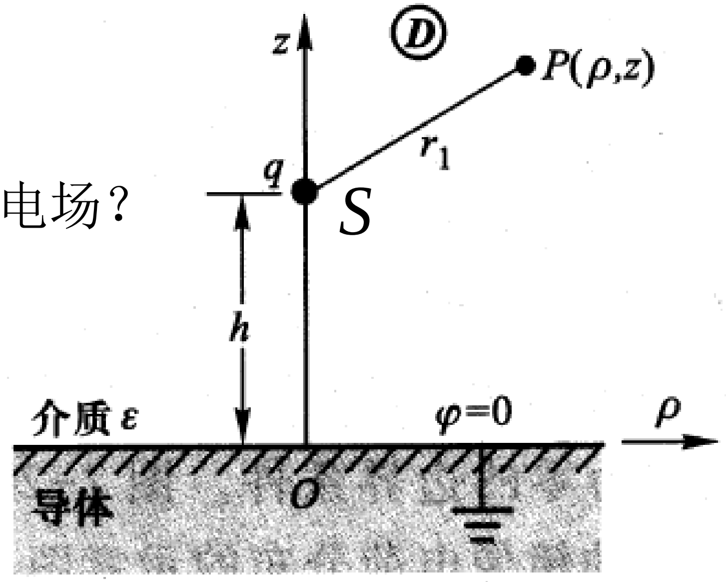
BVP相同：

- 问题A　难以求解
- 问题B　容易求解

⇐ 具有相同的解

2.6.1 点电荷与无限大接地导电平面

求解区域D（$z>0$）中除S外任意一点P处的电场？



问题A

a. 高斯定理？？

b. 叠加定理？？

c. 由电荷密度积分？？

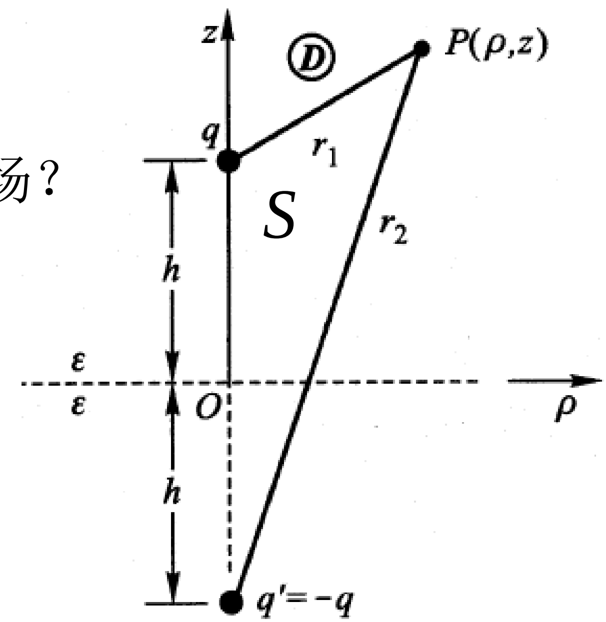
d. 边值问题？？

BVP：$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \ \left(z>0 \ Exp\, S \right) \\ \varphi\big|_{z=0} = 0 \end{cases}$ 直接积分不能用 ➡ 以上方法都不可行 ✖

2. 静态电磁场　静电场

2.6.1 点电荷与无限大接地导电平面

求解区域D（$z>0$）中除S外任意一点P处的电场？



问题B

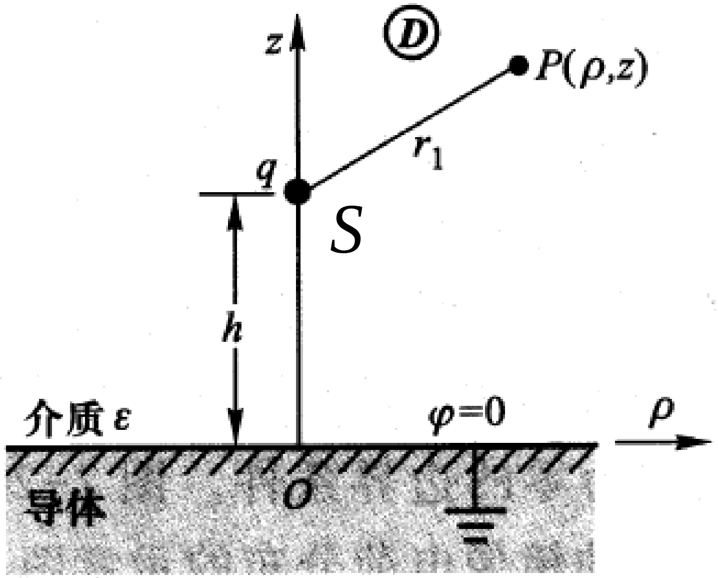
点电荷电场+叠加定理

$$\varphi_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

BVP：$\begin{cases}\nabla^2\varphi=0 \ \left(z>0 \ Exp\,S\right)\\ \varphi\big|_{z=0}=0\end{cases}$ ⇒ 问题A、问题B → BVP相同 ⇒ 解相同

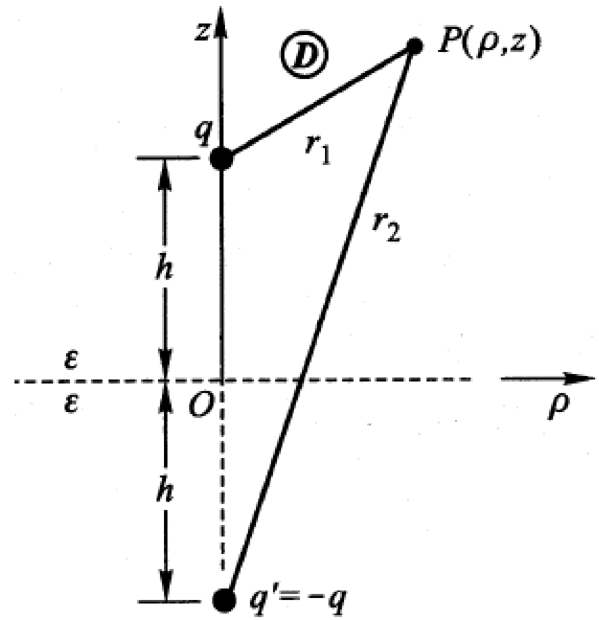
2. 静态电磁场　静电场

2.6.1 点电荷与无限大接地导电平面



问题A

镜像法



问题B

镜像法：

a. 求解区域及源分布不变；

b. 空间介质均匀化；　⟺　镜像前后BVP相同

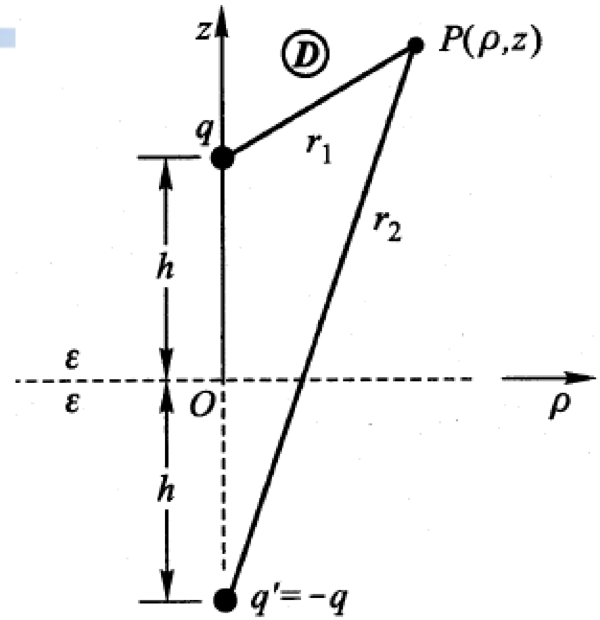
c. 镜像电荷位置、电量，在求解区域外

2. 静态电磁场　静电场

2.6.1 点电荷与无限大接地导电平面

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon r_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon r_2}\quad=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{-1}{r_2}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-h)^2}}+\frac{-1}{\sqrt{\rho^2+(z+h)^2}}\right)$$

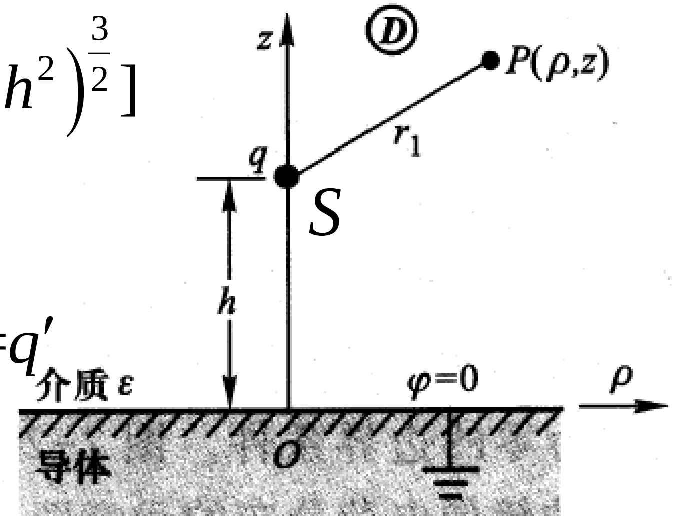


$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$　　可得电场强度。

$$\sigma=D_n=\varepsilon E_n=\varepsilon E_z=\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}=-qh/[2\pi\left(\rho^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}]$$

导体上总的感应电荷：

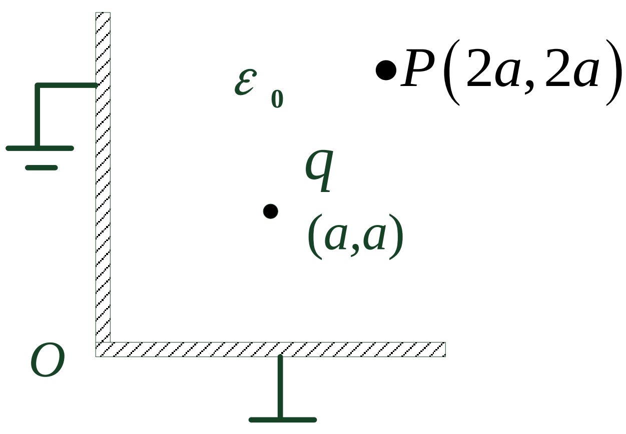
$$\int_S\sigma dS=\frac{-qh}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(\rho^2+h^2\right)^{3/2}}\rho d\rho d\phi=-q=q'$$

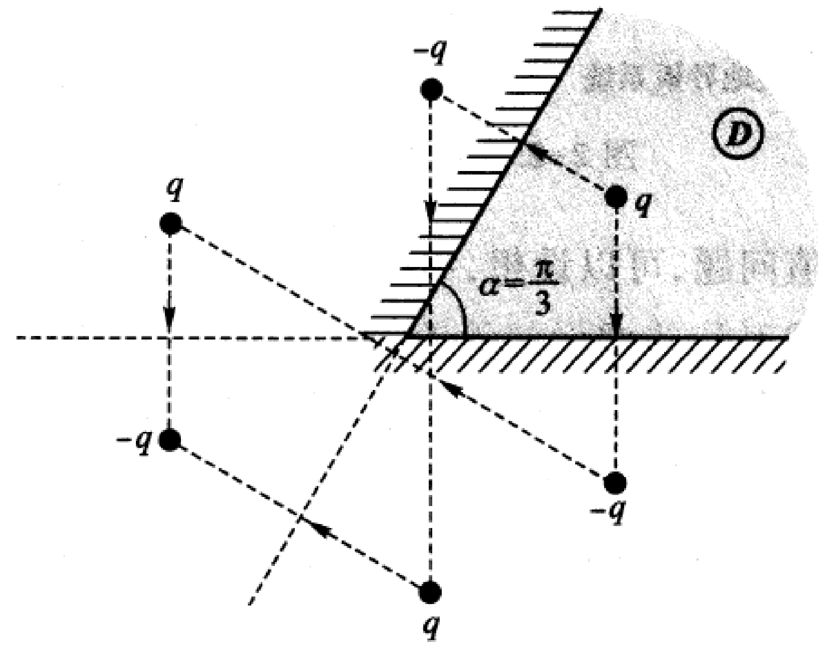


2. 静态电磁场　静电场

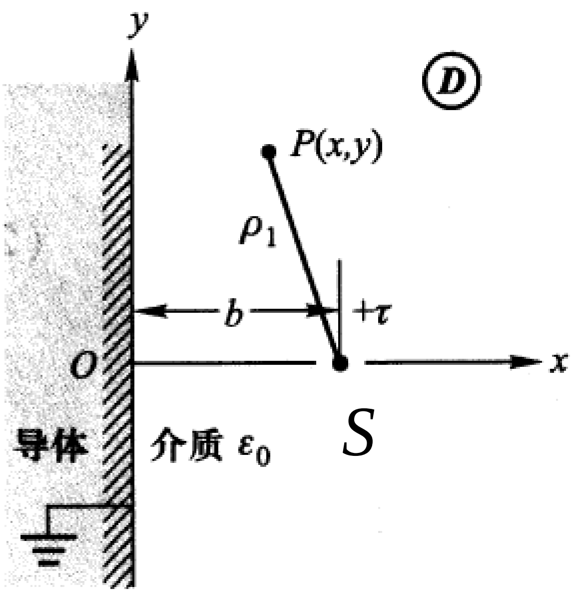
2.6.1 点电荷与无限大接地导电平面

思考题：如图所示，求P(2a, 2a)点处电位

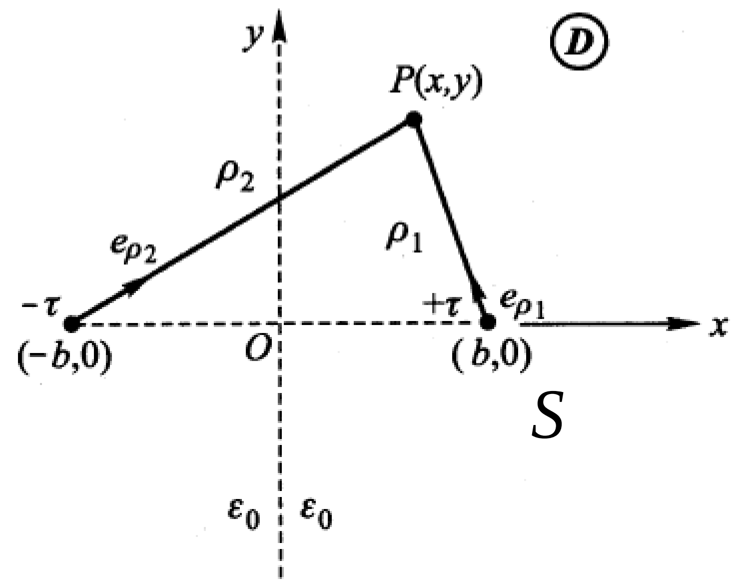




2.6.2 电轴与无限大接地导电平面



镜像法



BVP：
$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \ (x>0 \ Exp\, S) \\ \varphi|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

BVP：
$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \ (x>0 \ Exp\, S) \\ \varphi|_{x=0} = ?? \end{cases}$$

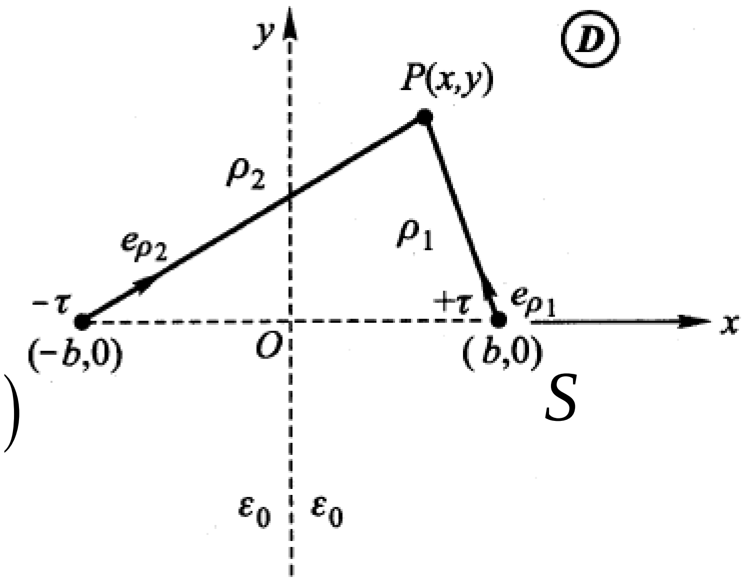
2.6.2 电轴与无限大接地导电平面

任意点电位：$\varphi_P = \int_P^Q \boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l} + \int_P^Q \boldsymbol{E}_2 \cdot d\boldsymbol{l}$

$$\varphi_P = \int_{\rho_1}^{\rho_{1Q}} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho} d\rho + \int_{\rho_2}^{\rho_{2Q}} \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho} d\rho$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\rho_{1Q} - \ln\rho_1\right) + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\rho_2 - \ln\rho_{2Q}\right)$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\rho_2/\rho_1\right) + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\rho_{1Q}/\rho_{2Q}\right)$$



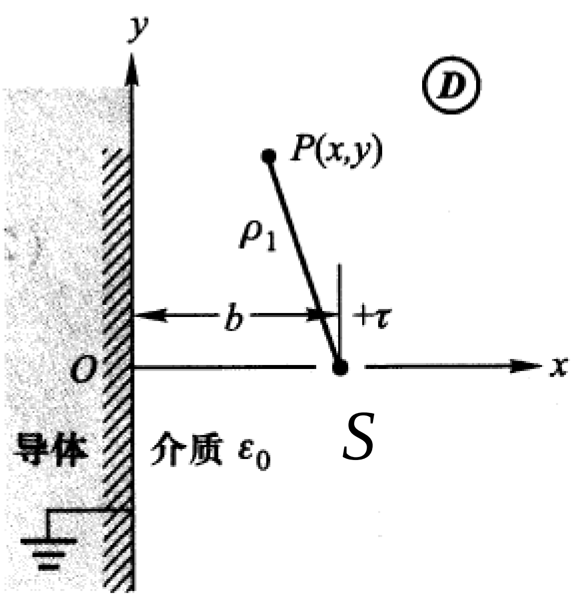
$$\varphi\big|_{x=0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\rho_{1Q}/\rho_{2Q}\right)$$

参考点的选取对结果影响，Q点选在哪里？

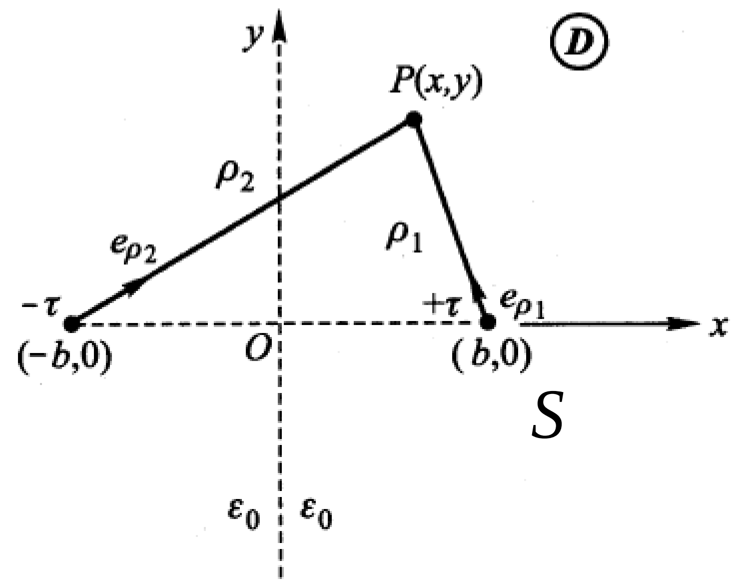
如果参考点Q选在x=0上，则有 ρ_{1Q}/ρ_{2Q} ⇒ $\varphi\big|_{x=0} = 0$

2. 静态电磁场　静电场

2.6.2 电轴与无限大接地导电平面



镜像法



BVP：
$$\begin{cases}\nabla^2\varphi = 0 \ \left(x>0 \ Exp\, S\right) \\ \varphi\big|_{x=0} = 0\end{cases}$$

BVP：
$$\begin{cases}\nabla^2\varphi = 0 \ \left(x>0 \ Exp\, S\right) \\ \varphi\big|_{x=0} = 0\end{cases}$$

参考点选在y轴上

2.6.2 电轴与无限大接地导电平面

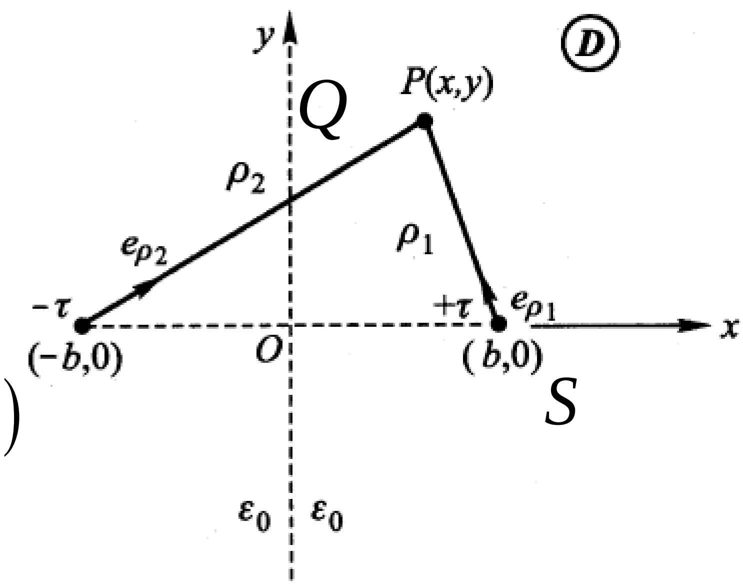
任意点电位：$\varphi_P = \int_P^Q \boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l} + \int_P^Q \boldsymbol{E}_2 \cdot d\boldsymbol{l}$

$$\varphi_P = \int_{\rho_1}^{\rho_{1Q}} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho} d\rho + \int_{\rho_2}^{\rho_{2Q}} \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho} d\rho$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\rho_{1Q} - \ln\rho_1\right) + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\rho_2 - \ln\rho_{2Q}\right)$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\rho_2/\rho_1\right) + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\rho_{1Q}/\rho_{2Q}\right)$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\rho_2/\rho_1\right) \quad = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}\right]^{1/2}$$



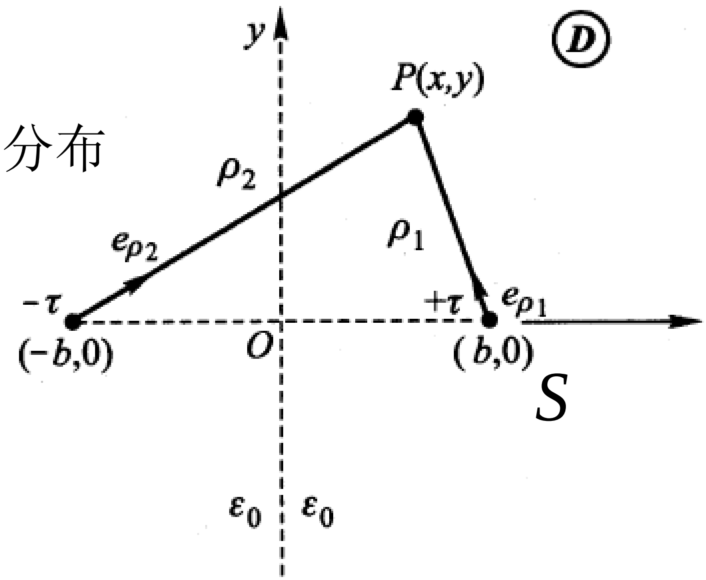
参考点选在y轴上

2.6.2 电轴与无限大接地导电平面

假设有两电轴系统，我们来研究下其空间场的分布

等位线：$\varphi = C$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}\right]^{1/2} = C$$



$$\Rightarrow \quad \frac{\rho_2^{\,2}}{\rho_1^{\,2}} = \frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2} = K^2$$

$$\Rightarrow \quad \left[x\text{-}b(K^2+1)/(K^2-1)\right]^2 + y^2 = \left[2bK/(K^2-1)\right]^2$$

$$\left[\frac{b(K^2+1)}{K^2-1}, 0\right] \qquad \left|\frac{2bK}{K^2-1}\right|$$

$$h \qquad a$$

$$\Rightarrow \quad [x-h]^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{其中有} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

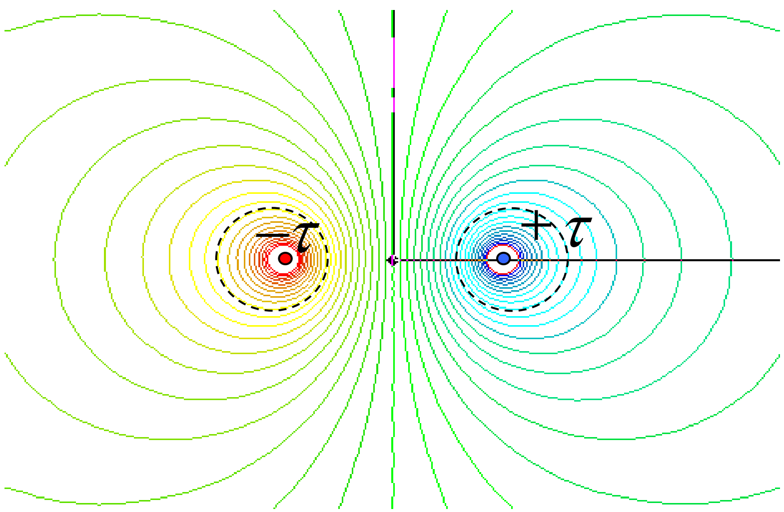
由此可得两电轴系统的等位线如下

2. 静态电磁场 静电场

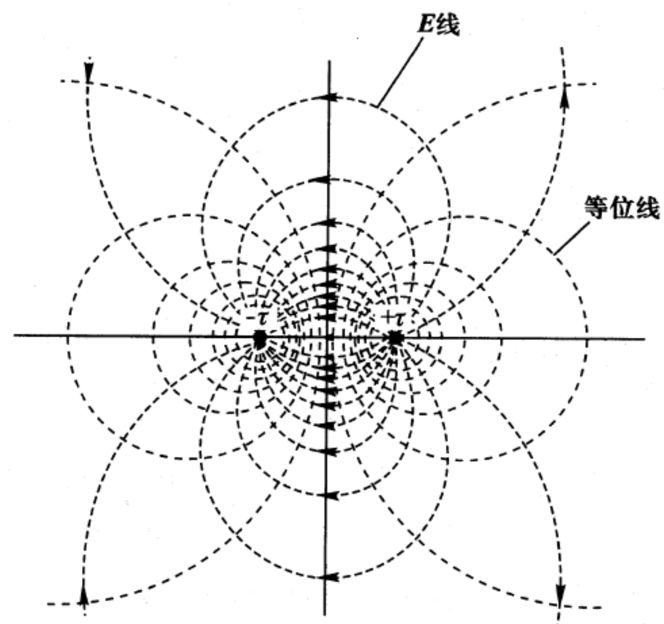
2.6.2 电轴与无限大接地导电平面

$$h=\frac{b\left(K^2+1\right)}{K^2-1}<0 \quad 左侧等位线$$

$$h=\frac{b\left(K^2+1\right)}{K^2-1}>0 \quad 右侧等位线$$

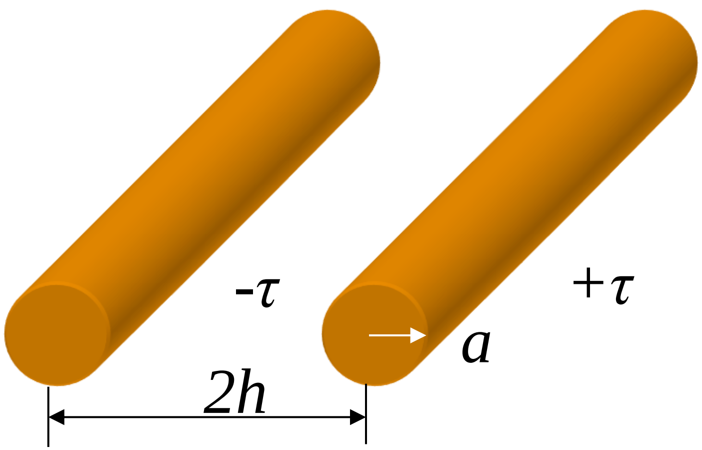


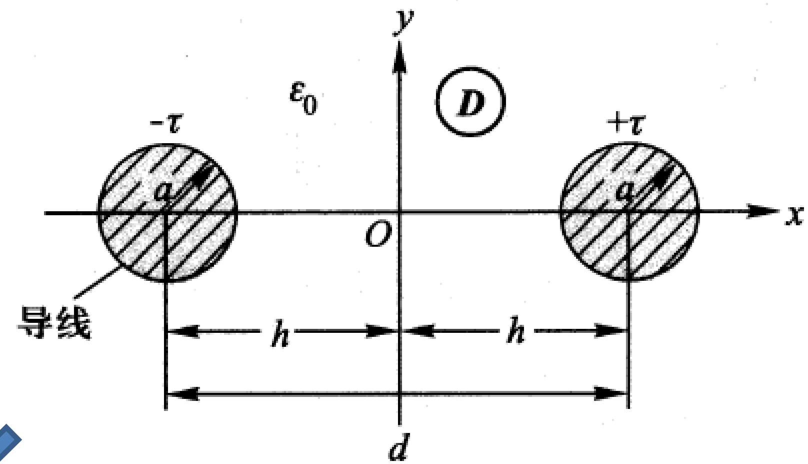
两电轴系统等位线



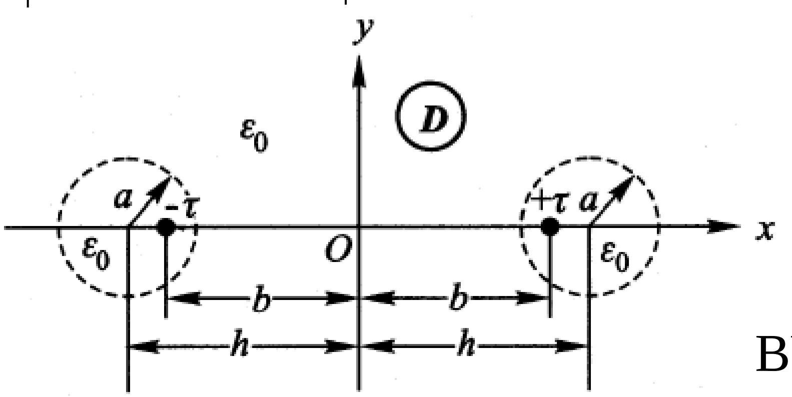
2.6.3 电轴法

假设有两个同半径，带等量异号电荷的长直圆柱导体，研究其形成的空间电场，





BVP：$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \left[\left(x \pm h \right)^2 + y^2 > a^2 \right] \\ \varphi|_S = c \left[\left(x \pm h \right)^2 + y^2 = a^2 \right] \end{cases}$



BVP：$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \left[\left(x \pm h \right)^2 + y^2 > a^2 \right] \\ \varphi|_S = c' \left[\left(x \pm h \right)^2 + y^2 = a^2 \right] \end{cases}$

2.6.3 电轴法

假设两个问题有不同的解，分别为位函数φ_1、φ_2，

由格林公式，
$$\int_V \left[\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\right]dV = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS$$

令 $\psi=\varphi=\varphi_d$
$$\int_V (\nabla\varphi_d)^2 dV = \oint_S \varphi_d\frac{\partial\varphi_d}{\partial n}dS$$
且 $\varphi_d\big|_S = c - c' = c''$

$$\Rightarrow \int_V (\nabla\varphi_d)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla\varphi_d = 0$$

对于场φ_d，在场区域内必存在某一参考点，有 $\varphi_d=0$

又由于场域内 $\nabla\varphi_d=0$

故其他任意一点处必有 $\varphi_d=0$ $\Rightarrow \varphi_d\big|_S = c - c' = c'' = 0$

得证。

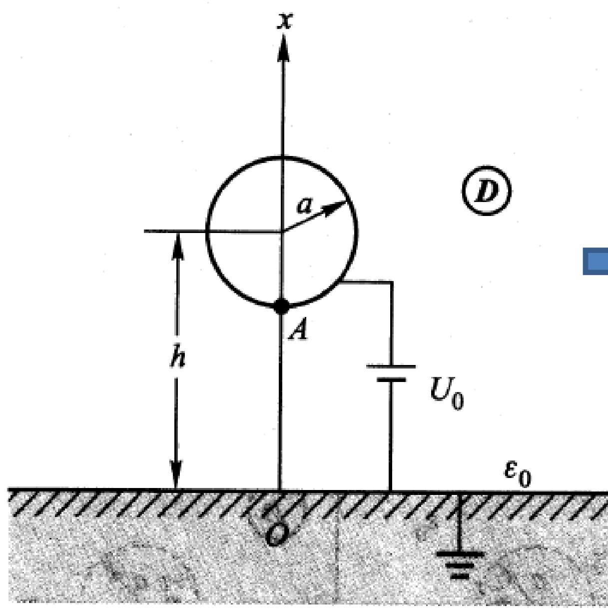
2. 静态电磁场　静电场

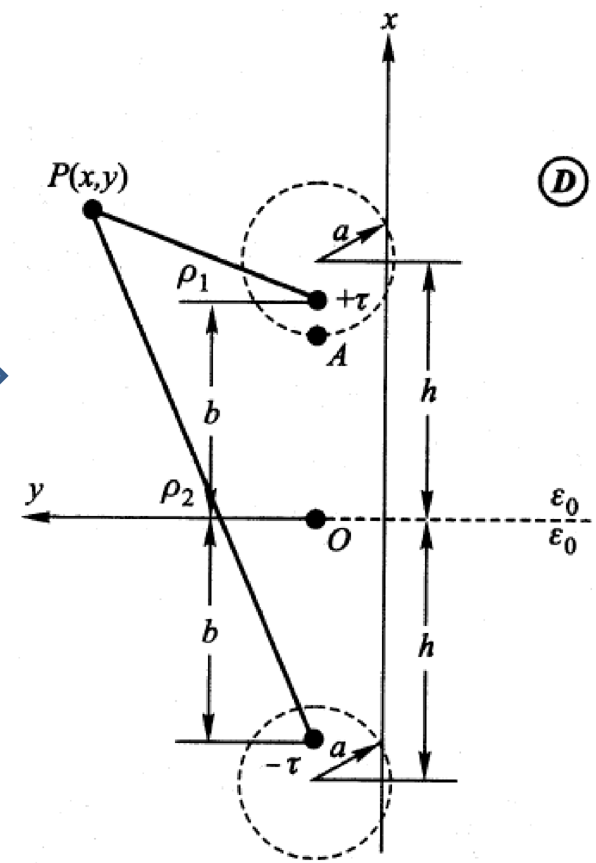
例2-15 半径为a的传输线平行于地面，假设高度为h，对地电位差U_0，求：

（1）大地上方传输线的电场分布(电位)；

（2）系统中最大场强的位置及其数值。

分析：应用镜像法，首先给出传输线对地的镜像导线，再应用电轴法，确定等效电轴的位置，设电荷线密度为τ，大地上方任意点处电位为：

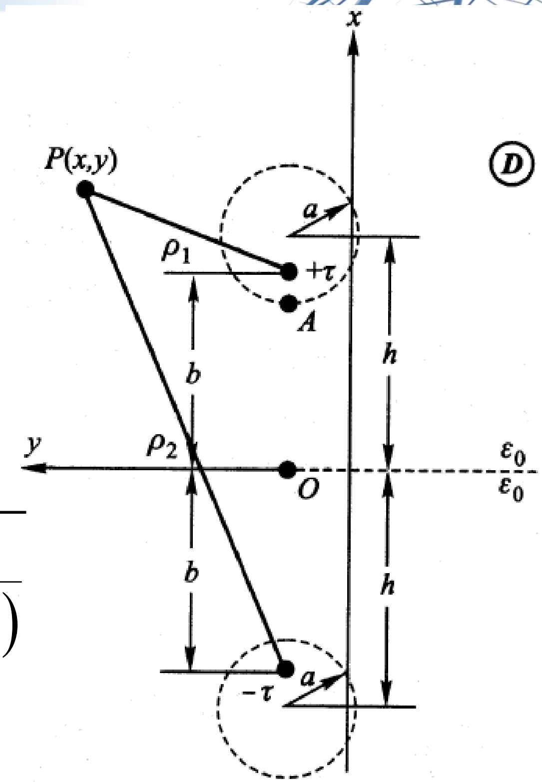




2. 静态电磁场　静电场

解：

（1） $\varphi=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\dfrac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}\right]^{1/2}$



$$\Rightarrow\ \varphi_A\big|_{x=h-a,y=0}=U_0=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(h-a+b)^2}{(h-a-b)^2}\right]^{1/2}$$

$$\varphi_A\big|_{x=h-a,y=0}=U_0=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h-a+b}{b-(h-a)}\ \Rightarrow\ \tau=\frac{2\pi\varepsilon_0U_0}{\ln\dfrac{h-a+b}{b-(h-a)}}$$

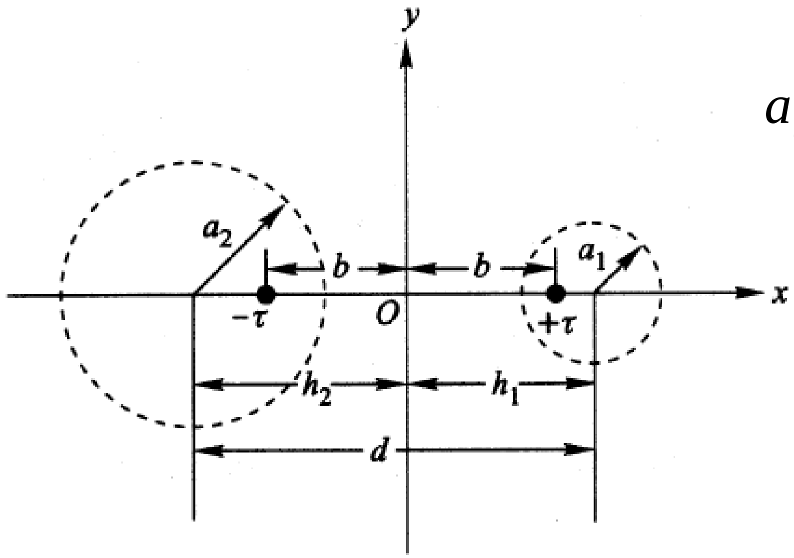
$$\Rightarrow\ \varphi==\frac{U_0}{\ln\dfrac{h-a+b}{b-(h-a)}}\ln\left[\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}\right]^{1/2}$$

（2）

$$E_{\max}=|\boldsymbol{E}_A|=\left|\frac{-\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{e}_n\right|_{x=h-a,y=0}=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=h-a,y=0}=\frac{2U_0b}{\left[b^2-(h-a)^2\right]\ln\dfrac{h-a+b}{b-(h-a)}}$$

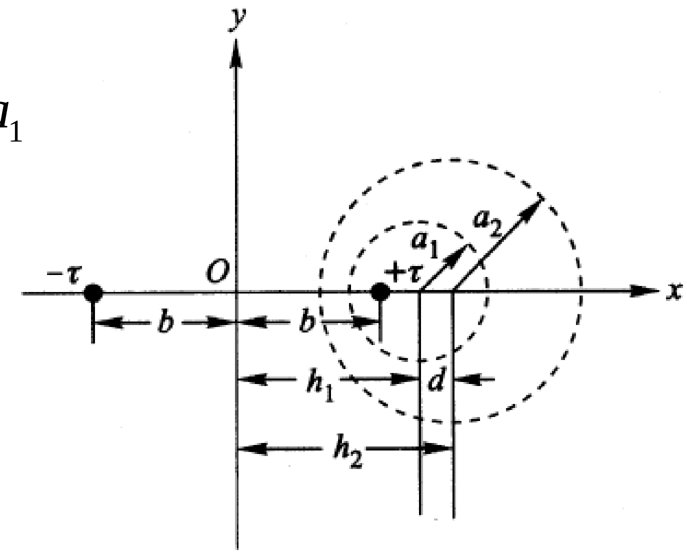
2.6.3 电轴法

假设有两个不同半径a_1，a_2，带等量异号电荷的长直圆柱导体，其空间电场，



$$d = h_1 + h_2$$

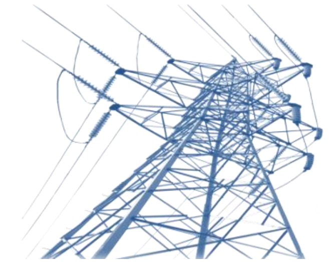
$$a_2 > a_1$$



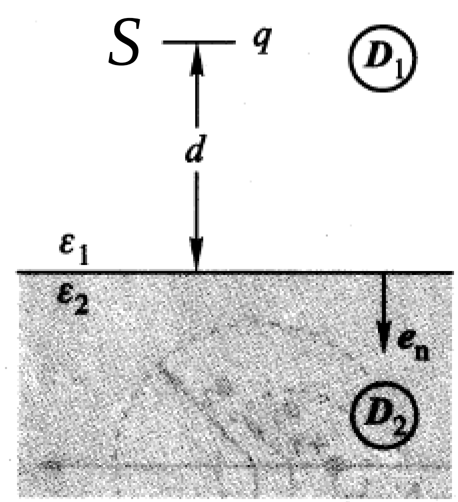
$$d = h_2 - h_1$$

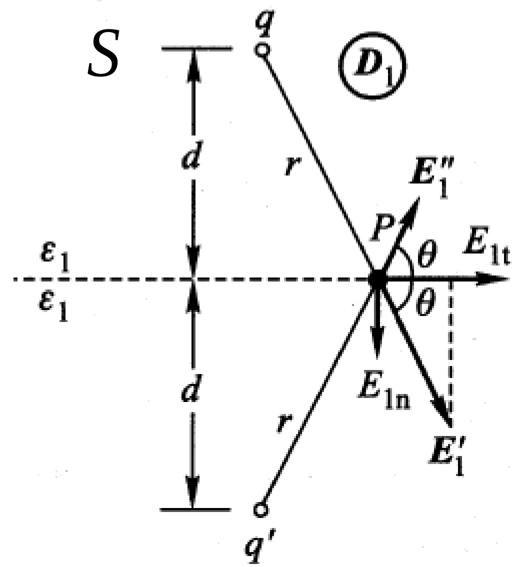
$$b^2 = h_1^2 - a_1^2 = h_2^2 - a_2^2 \Rightarrow h_2 = \frac{d^2 + a_2^2 - a_1^2}{2d} \qquad h_1 = \left|\frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d}\right|$$

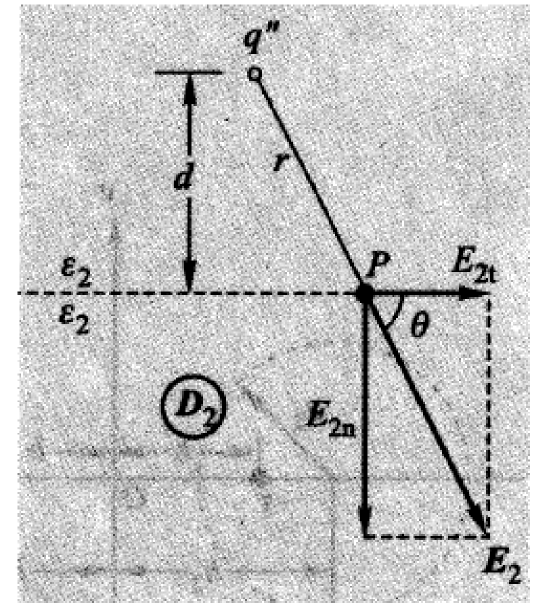
2. 静态电磁场　静电场



2.6.4 点电荷与无限大介质平面







$$
\mathrm{BVP}:\begin{cases}
\nabla^2\varphi_1 = 0\ (z>0\ \ Exp\,S) \\
\nabla^2\varphi_2 = 0\ (z<0) \\
\varphi_1\big|_S = \varphi_2\big|_S\ (E_{1t}=E_{2t}) \\
\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\ (D_{1n}=D_{2n})
\end{cases}
$$

a. 求解区域和源不变；

b. 空间介质均匀化；

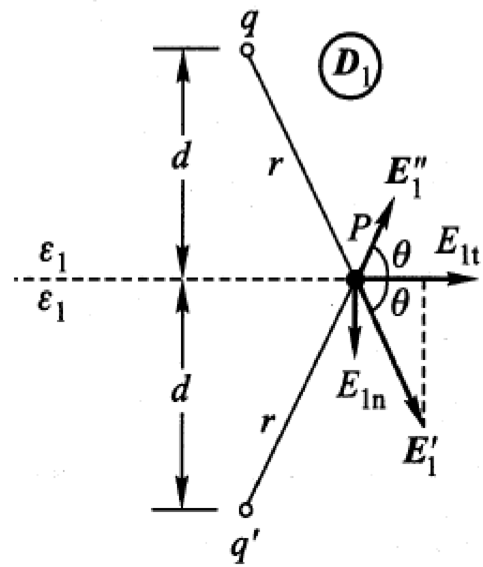
c. 镜像电荷（求解区外）

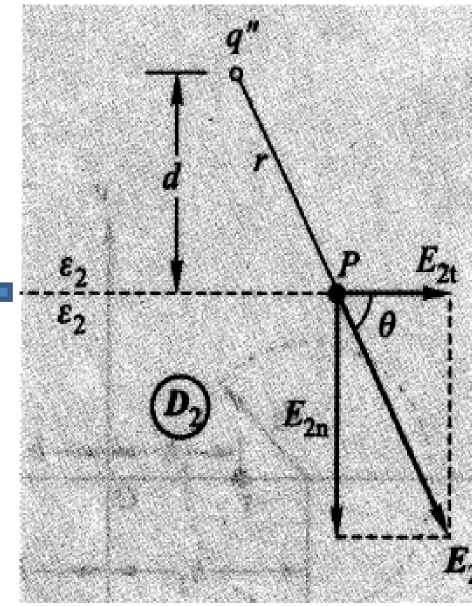
$$
\mathrm{BVP}:\begin{cases}
\nabla^2\varphi_1 = 0\ (z>0\ \ Exp\,S) \\
\nabla^2\varphi_2 = 0\ (z<0) \\
E_{1t} = E_{2t} \\
D_{1n} = D_{2n}
\end{cases}
$$

2.6.4 点电荷与无限大介质平面

由 $\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{1n} = D_{2n} \end{cases}$ ➡

$$\begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta + \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta = \dfrac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\cos\theta \\ \dfrac{q}{4\pi r^2}\sin\theta - \dfrac{q'}{4\pi r^2}\sin\theta = \dfrac{q''}{4\pi r^2}\sin\theta \end{cases}$$



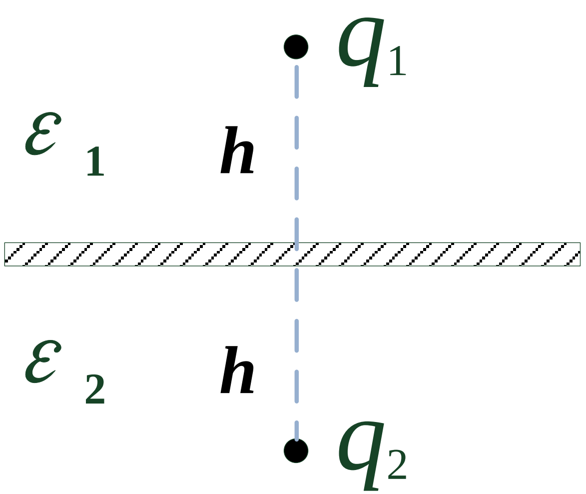


$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_1} + \dfrac{q'}{\varepsilon_1} = \dfrac{q''}{\varepsilon_2} \\ q - q' = q'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q' = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \\ q'' = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \end{cases}$$

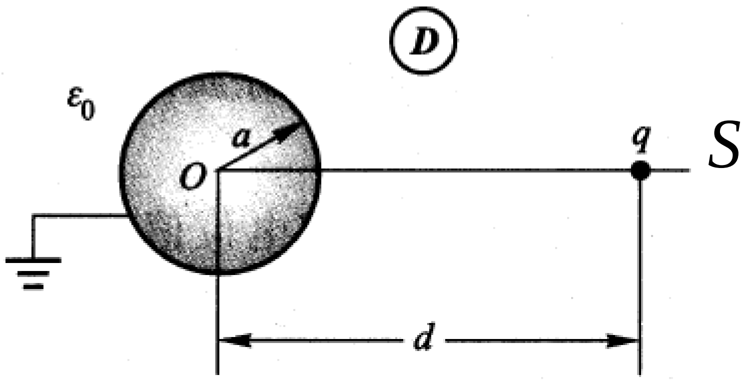
q' 的极性取决于ε_1和ε_2的大小， q'' 的极性取决与q相同。

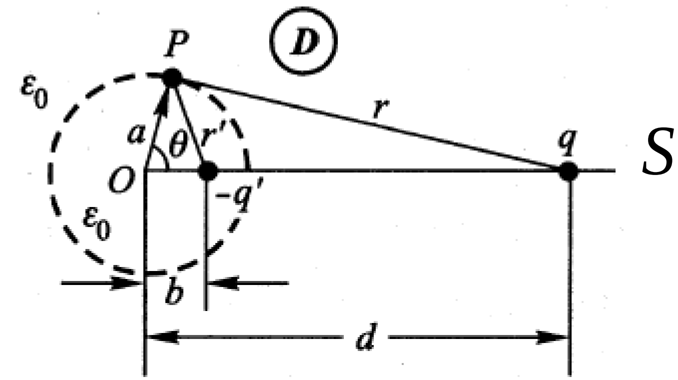
2. 静态电磁场　静电场

思考题：



2.6.5 点电荷与导体球 （自学）





BVP： $\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 & \text{球外除}S\text{点} \\ \varphi|_S = 0 & \text{球面} \end{cases}$

BVP： $\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 & \text{球外除}S\text{点} \\ \varphi|_S = 0 & \text{球面} \end{cases}$ ？ √

在球面上取任一点P，求其电位，

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'} = 0$$

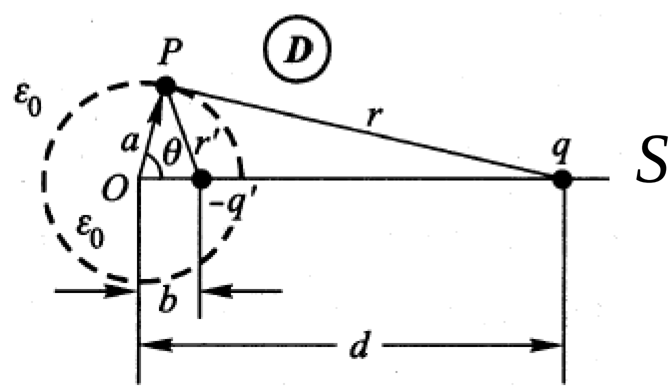
$$\Rightarrow \frac{q^2}{q'^2} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{a^2+d^2-2ad\cos\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta} \Rightarrow [q^2(a^2+b^2)-q'^2(a^2+d^2)]+2a(q'^2d-q^2b)\cos\theta = 0$$

2.6.5 点电荷与导体球 （自学）

上式在球面上恒成立，则必有

$$\left.\begin{aligned} & q^2(a^2+b^2)-q'^2(a^2+d^2)=0 \\ & q'^2 d-q^2 b=0 \end{aligned}\right\}$$

由此可解得，
$$\begin{cases} a^2 = bd \\ q' = \sqrt{\dfrac{b}{d}}q = \dfrac{a}{d}q \end{cases}$$



2. 静态电磁场　静电场

2.8 电容、部分电容

2.8.1 两导体电容系统

电容：$C=\dfrac{q}{U}$　反映两个导体间的电耦合关系

例如：

a. 平行板电容器　$C=\dfrac{q}{U}=\sigma S/Ed\quad=\varepsilon ES/Ed=\varepsilon S/d$

b. 孤立导体球　$C=\dfrac{q}{U}=q/\left(\varphi_a-\varphi_\infty\right)=q/\left(q/4\pi\varepsilon a\right)=4\pi\varepsilon a$

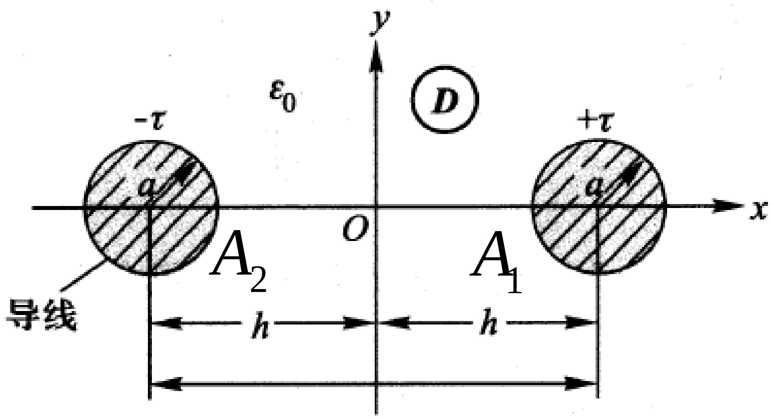
c. 两传输线（等半径平行圆柱导体）单位长度电容

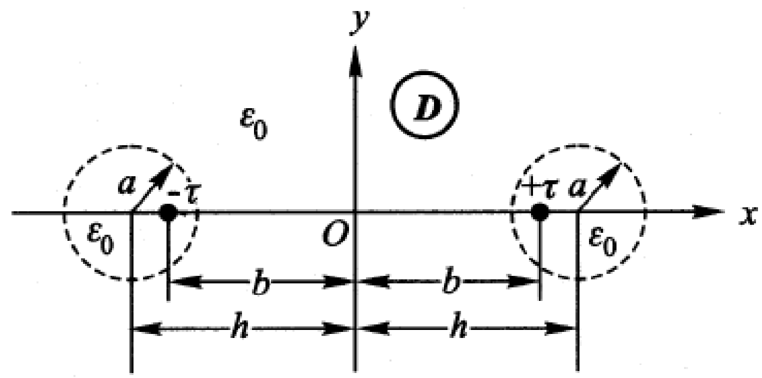
重要结论：电容只与导体的几何形状，尺寸，位置有关，与其带电量、电位无关

2. 静态电磁场　静电场

$$\varphi=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2}\right]^{1/2}$$

2.8.1 两导体电容系统





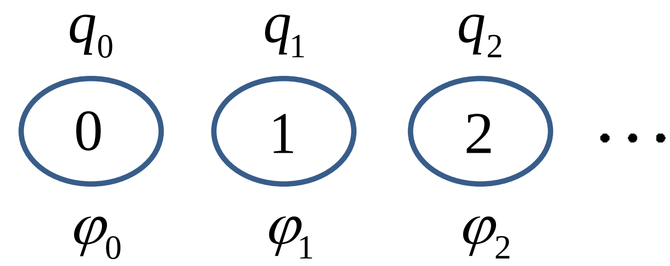
$$\varphi_{A_1}\Big|_{x=h-a,y=0}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b+h-a}{b-(h-a)}\qquad \varphi_{A_2}\Big|_{x=-(h-a),y=0}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-(h-a)}{b+h-a}$$

$$\Rightarrow\quad C=\frac{\tau}{U_{A_1A_2}}=\frac{\tau}{\varphi_{A_1}-\varphi_{A_2}}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{b+h-a}{b-(h-a)}}$$

2. 静态电磁场 静电场

2.8.2 部分电容

分析： 各导体电位不仅与自身电荷有关，也与其他导体电荷相关；选择0号导体为参考导体，即 $\varphi_0 = 0$



N+1导体系统

$$\varphi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \cdots + \alpha_{1k}q_k + \cdots + \alpha_{1n}q_n$$

$$\vdots$$

$$\varphi_k = \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \cdots + \alpha_{kk}q_k + \cdots + \alpha_{kn}q_n$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n = \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \cdots + \alpha_{nk}q_k + \cdots + \alpha_{nn}q_n$$

$$\{\varphi\} = [\alpha]\{q\}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\varphi_i}{q_j}\bigg|_{q_j \neq 0，\text{其余导体}q_i\text{为零}}$$

α_{ii} 自有电位系数

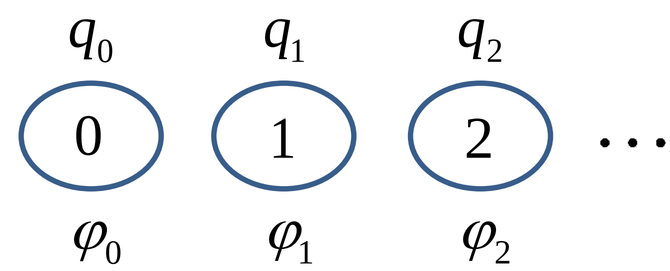
α_{ij} 互有电位系数($i \neq j$)

2. 静态电磁场　静电场

2.8.2 部分电容

分析：　工程中电位比电荷量易知，上式可改写为，

$$\{q\}=[\alpha]^{-1}\{\varphi\}=[\beta]\{\varphi\}$$



N+1导体系统

$$\beta_{ij}=\frac{A_{ji}}{\Delta}=\frac{q_i}{\varphi_j}\bigg|_{\varphi_j\neq 0,\ \varphi_i=0\ (i=1,2,\ldots,i\neq j)}$$　互有感应系数($i\neq j$)

β_{ii}　自有感应系数　A_{ji}　代数余子式　Δ　α行列式

$$\begin{aligned}
q_1&=\beta_{11}\varphi_1+\beta_{12}\varphi_2+\cdots+\beta_{1k}\varphi_k+\cdots+\beta_{1n}\varphi_n\\
&\vdots\\
q_k&=\beta_{k1}\varphi_1+\beta_{k2}\varphi_2+\cdots+\beta_{kk}\varphi_k+\cdots+\beta_{kn}\varphi_n\\
&\vdots\\
q_n&=\beta_{n1}\varphi_1+\beta_{n2}\varphi_2+\cdots+\beta_{nk}\varphi_k+\cdots+\beta_{nn}\varphi_n,
\end{aligned}$$

由于电容与电位差有关，且工程中电位差获得更加方便，故

2. 静态电磁场　静电场

2.8.2 部分电容

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \ldots + \beta_{1n}\varphi_n \\
&= \left(\beta_{11} + \beta_{12} + \ldots + \beta_{1n}\right)\varphi_1 + \beta_{12}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) + \ldots + \beta_{1n}\left(\varphi_n - \varphi_1\right) \\
&= C_{10}\left(\varphi_1 - \varphi_0\right) + C_{12}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \ldots + C_{1n}\left(\varphi_1 - \varphi_n\right)
\end{aligned}
$$

$$
q_n = C_{n1}\left(\varphi_n - \varphi_1\right) + C_{n2}\left(\varphi_n - \varphi_2\right) + \ldots + C_{n0}\left(\varphi_n - \varphi_0\right)
$$

$C_{i0} = \beta_{i1} + \beta_{i2} + \ldots + \beta_{in}$　　自有部分电容

$C_{ij} = -\beta_{ij}$　$(i$或$j=1,2,\ldots,n,\ i\neq j)$　　互有部分电容　　　$C_{ij} = C_{ji}$　**对称性**

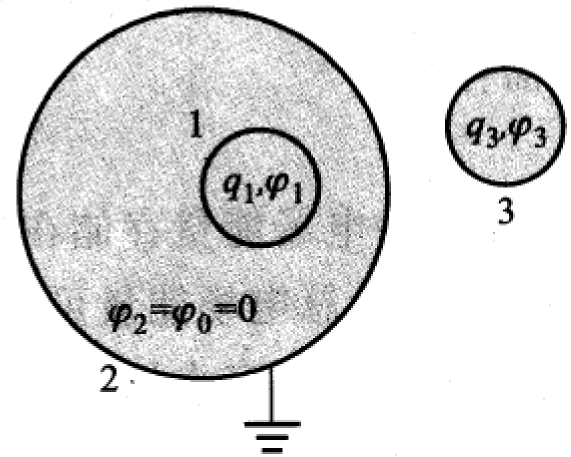
重要结论：部分电容（电容）只与导体的几何形状，尺寸，位置有关，与其带电量、电位无关

2.8.3 静电屏蔽

设导体1带电量为q_1，置于接地的导体壳2中，邻近有导体q_3，

试问：导体3对导体1有无电场的影响？

分析：研究导体间有无电场的影响，可以通过求部分电容的值来判断。



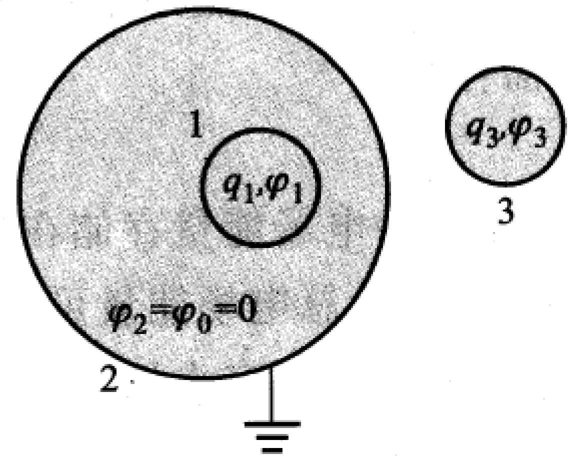
$$q_1 = C_{10}\left(\varphi_1-\varphi_0\right)+C_{12}\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+C_{13}\left(\varphi_1-\varphi_3\right)$$

$$q_2 = C_{21}\left(\varphi_2-\varphi_1\right)+C_{20}\left(\varphi_2-\varphi_0\right)+C_{23}\left(\varphi_2-\varphi_3\right)$$

$$q_3 = C_{31}\left(\varphi_3-\varphi_1\right)+C_{32}\left(\varphi_3-\varphi_2\right)+C_{30}\left(\varphi_3-\varphi_0\right)$$

由 $\varphi_2=\varphi_0=0$ ⇒

2.8.3 静电屏蔽



$$q_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}\varphi_1 + C_{13}\left(\varphi_1 - \varphi_3\right)$$

$$q_2 = C_{21}\left(-\varphi_1\right) + C_{23}\left(-\varphi_3\right)$$

$$q_3 = C_{31}\left(\varphi_3 - \varphi_1\right) + C_{32}\varphi_3 + C_{30}\varphi_3$$

上式在任何情况下均成立，则可选一特殊情况分析

令 $q_1 = 0$ 由于导体2接地且为等电位，

➡ $\varphi_2 = \varphi_1 = 0$ （导体内$\boldsymbol{E}$=0）

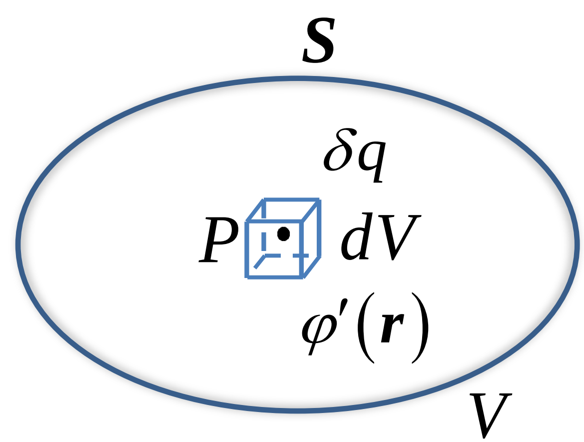
则由（1）式可知 ➡ $C_{13}\varphi_3 = 0$

由于不一定为零， ➡ $C_{13} = 0 = C_{31}$ ➡ 导体1和导体3无电耦合

2. 静态电磁场　静电场

2.9 静电场能量

2.9.1 带电系统的能量



假设：带电系统的建立有一个过程，该过程的某个瞬时时刻，P点处的电位 $\varphi'(\boldsymbol{r})$，对该点引入增量电荷 δq（由外力从无穷远引入到P点），则外力必然克服电场力作功，并转化为系统能量的增量，即二者相等，

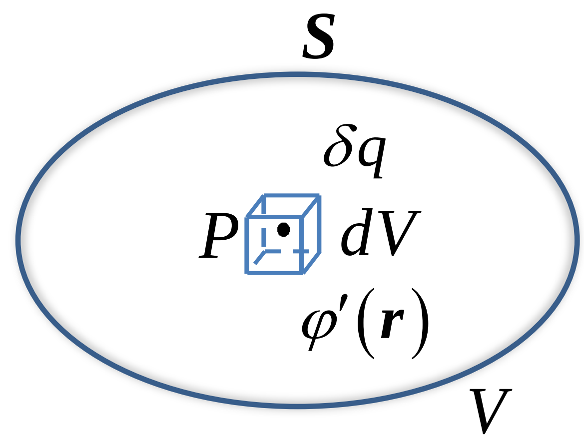
$$\delta W=\int_{\infty}^{P}-\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\delta q\left[\varphi_{\infty}-\varphi'(\boldsymbol{r})\right]=\varphi'(\boldsymbol{r})\delta q=\varphi'(\boldsymbol{r})\underline{\delta\left[\rho'(\boldsymbol{r})dV\right]}$$

静电场是保守力场，能量仅取决于电荷最终分布状态，与中间过程无关。
故假定：任意瞬间所有带电体电荷密度都按照同一比例系数 $m(0\le m\le 1)$ 增长，

$$\rho':0\rightarrow\rho'=m\rho(\boldsymbol{r})\rightarrow\rho(\boldsymbol{r}) \quad\Rightarrow\quad \delta\rho'(\boldsymbol{r})=\delta\left[m\rho(\boldsymbol{r})\right]=\rho(\boldsymbol{r})\delta m$$

$$\sigma':0\rightarrow\sigma'=m\sigma(\boldsymbol{r})\rightarrow\sigma(\boldsymbol{r}) \quad\quad \delta\sigma'(\boldsymbol{r})=\delta\left[m\sigma(\boldsymbol{r})\right]=\sigma(\boldsymbol{r})\delta m$$

2.9.1 带电系统的能量



电荷按照同一个比例增大，则电位也应该按照同一个比例增长，

$$\varphi'(\mathbf{r}) = m\varphi(\mathbf{r})$$

将上述电位和电荷密度代入到前面第一个式子

$$\delta W = \varphi'(\mathbf{r})\delta\left[\rho'(\mathbf{r})dV\right] = m\varphi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})(\delta m)dV$$

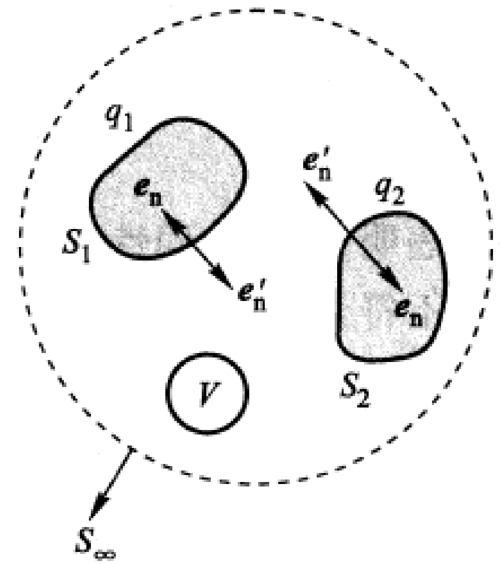
$$\Rightarrow \quad W_e = \int_0^1 m\delta m\int_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dV + \int_0^1 m\delta m\int_S \sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dS$$

只有导体系统+电介质：$W_e = \frac{1}{2}\varphi\int_S \sigma(\mathbf{r})dS = \frac{1}{2}\varphi q$

对于多导体系统：　$W_e = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\varphi_k q_k$

2. 静态电磁场　静电场

2.9.2 带电能量分布及其密度



由于场的存在，静电场具有能量。同场一样，能量也具有分布特征。

对于含有导体的静电系统： $W_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS$

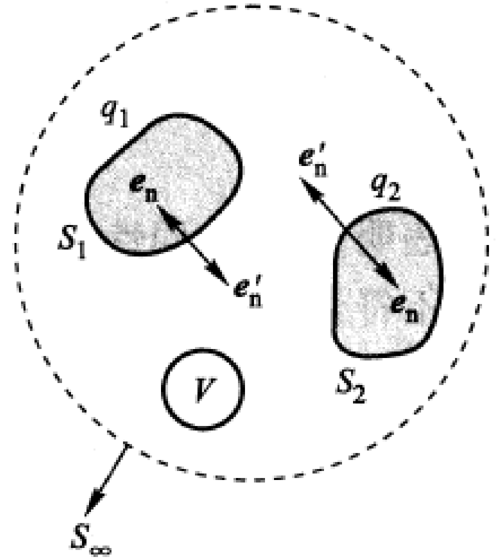
可推出， $W_e = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV$

由此可定义静电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$

当介质具有线性且各项同性的特性时，

$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ ⇒ $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$

2.9.2 带电能量分布及其密度



总结：含导体的静电场能量，

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\int_{S'} \sigma\varphi dS = \frac{1}{2}\int_{V'} \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\varphi q$$

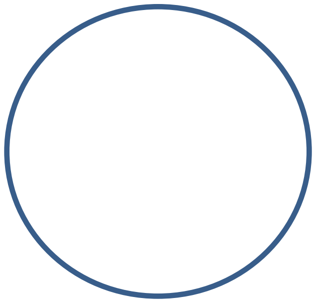
或：

$$W_e = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV$$

$$\left.\begin{array}{ll} V' \quad S' & \text{电荷分布区域-源区} \\ V & \text{场分布区域-场区} \end{array}\right\} \quad V' \quad V \qquad \text{注意二者的关系}$$

2. 静态电磁场 静电场

例2-21：.半径为a，带电量为q的孤立导体球系统的静电能量。（周围介质的介电常数为ε）



解1：

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{S'} \sigma\varphi dS = \frac{1}{2}\varphi q = \frac{1}{2}q\frac{q}{4\pi\varepsilon a} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon a}$$

解2：

$$W_e = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV = \frac{1}{2\varepsilon}\int_V D^2 dV$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\int_a^\infty \left(\frac{q}{4\pi r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon a}$$

解3：

$$W_e = \frac{1}{2}\varphi q = \frac{1}{2}q\left(\varphi_a - \varphi_\infty\right) = \frac{1}{2}qU$$

$$= \frac{1}{2}CU^2 = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\left(4\pi\varepsilon a\right)} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon a}$$

2. 静态电磁场　静电场

2.10 电场力

电场力（库仑力）：$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}q$　　点电荷受力

非点电荷的复杂带电体受力？　　虚位移法

广义坐标：　确定系统中带电体形状、尺寸、位置的独立几何量

广义力：　企图改变某一广义坐标的力，称对应于该广义坐标的广义力。

广义坐标：	广义力：	乘积：
长度　L（m）	F　（N）	$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}=dW\ (N\cdot\mathrm{m})$
面积　S（m²）	表面张力（N/m）	$\boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{S}=dW\ (N\cdot\mathrm{m})$
体积　V（m³）	压强（N/ m²）	$P\cdot dV=dW\ (N\cdot\mathrm{m})$

2. 静态电磁场　静电场

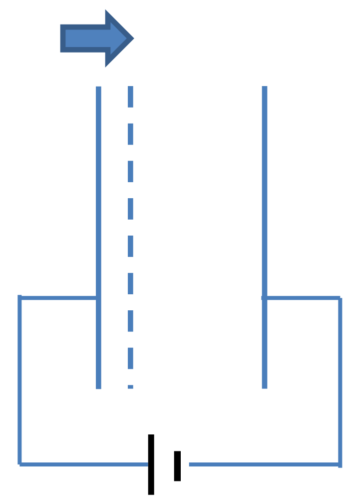
2.10 电场力

功能转换关系：

$(n+1)$多导体系统，其中一个导体发生位移dg，其余不动，此过程中

导体移动 ⇒ 系统能量变化dW_e

电场力作功 Fdg



需要分两种情况进行讨论：

（1）常电位系统

设导体与电源相连接，若导体（极板）移动，则有

极板上电荷变化，源于电源提供能量

$$dW = \sum \varphi_k dq_k \qquad （\ \delta W = \varphi'(\boldsymbol{r})\delta q\ ）$$

2.10 电场力

由能量守恒，电源提供的能量，供给电场力作功及电场能量的改变：

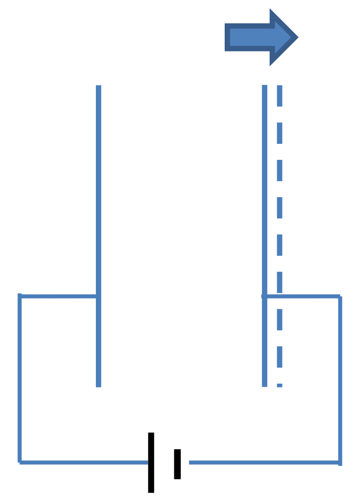
$$dW = dW_e + Fdg$$

$$\Rightarrow \quad \sum \varphi_k dq_k = dW_e + Fdg$$

$$\Rightarrow \quad \sum \varphi_k dq_k = \frac{1}{2}\sum \varphi_k dq_k + Fdg$$

$$\Rightarrow \quad 2dW_e - dW_e = Fdg$$

$$\Rightarrow \quad F = \left.\frac{dW_e}{dg}\right|_{\varphi_k = c_k} = \left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{\varphi_k = c_k}$$



2. 静态电磁场 静电场

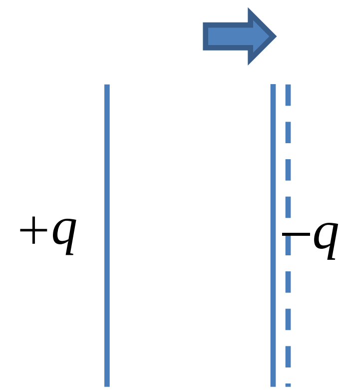
2.10 电场力

（2）常电荷系统

此时电源不再向系统提供能量，即有

$$dW = 0 = dW_e + Fdg$$

$$F = -\left.\frac{dW_e}{dg}\right|_{q_k = c_k'} = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{q_k = c_k'}$$



虚位移法： a. 找到电场能量与广义坐标之间关系，求导可得到**电场力的大小**；

b. 广义坐标g增加的方向，即为**电场力的正方向**；

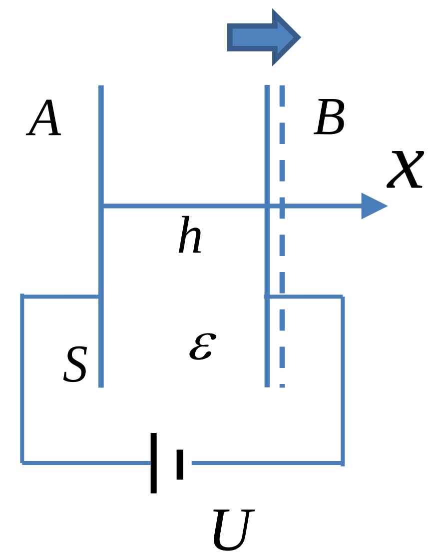
注意：基于常电位系统和基于常电荷系统的结果应该一致。

2. 静态电磁场　静电场

例2-22 平板电容器，极板面积S，间距h，介质的介电常数ε，利用虚位移法，求两极板间作用力$\boldsymbol{F}$（可求任意板受力，比如B板受力，另一个即A板受力与之相反）

分析：利用虚位移法，原则上既可以假设常电位，也可以假设常电荷

解1：常电位系统（极板电位是定的）



广义坐标：　$h \quad dh$

广义力的方向：　$\boldsymbol{e}_x$　　（h增加的方向）

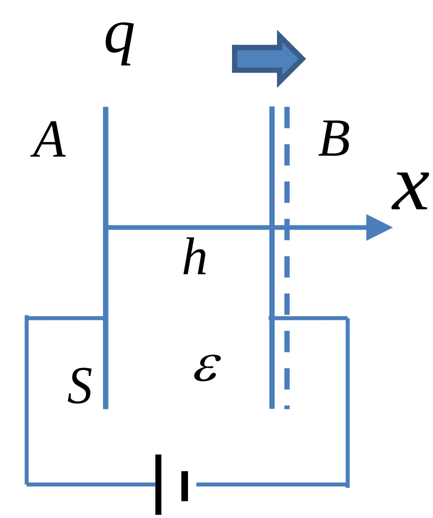
两导体系统的能量：　$W_e = \frac{1}{2}Uq = \frac{1}{2}CU^2$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{Eh} = \frac{\varepsilon ES}{Eh} = \frac{\varepsilon S}{h} \quad \Rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{h}U^2$$

2. 静态电磁场　静电场

$$F=\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{\varphi=c}=\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial h}=\frac{U^2}{2}\frac{\partial\left(\varepsilon S/h\right)}{\partial h}=-\frac{\varepsilon SU^2}{2h^2}$$

$$\boldsymbol{F}_B=-\frac{\varepsilon SU^2}{2h^2}\boldsymbol{e}_x$$



解2：常电荷系统（极板上的电荷不变）

广义坐标：　$h \quad dh$

广义力的方向：　$\boldsymbol{e}_x$　　（h增加的方向）

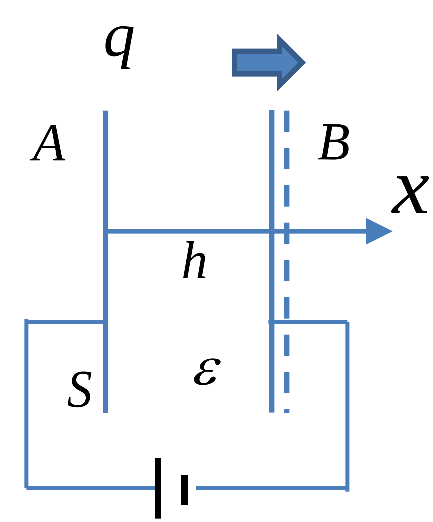
两导体系统的能量：　$W_e=\frac{1}{2}Uq=\frac{q^2}{2C}$

$$C=\frac{q}{U}=\frac{\sigma S}{Eh}=\frac{\varepsilon ES}{Eh}=\frac{\varepsilon S}{h} \quad \Rightarrow \quad W_e=\frac{1}{2}\frac{q^2h}{\varepsilon S}$$

2. 静态电磁场　静电场

$$F = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{q=c} = -\frac{q^2}{2}\frac{\partial C}{\partial h} = -\frac{q^2}{2}\frac{\partial(h/\varepsilon S)}{\partial h} = -\frac{q^2}{2\varepsilon S}$$

$$\boldsymbol{F}_B = -\frac{q^2}{2\varepsilon S}\boldsymbol{e}_x$$



讨论：事实上，二者的结果是一致的，一个用U表示，一个用q表示。

$$-\frac{q^2}{2\varepsilon S} = -\frac{(CU)^2}{2\varepsilon S} = -\frac{(U\varepsilon S/h)^2}{2\varepsilon S} = -\frac{\varepsilon S U^2}{2h^2}$$

注意：实际问题中，看给定哪个条件，就用哪种方法。