工程电磁场

稻叶先生

1. 电磁学的数学物理基础

1.1 电磁场物理模型构成

源 ＋ 场 ＋ 媒质

场有哪些？　　电场、磁场

电场：电荷，变化的磁场　　磁场：电流，变化的电场

媒质：场存在于其中的物质　空气、水、木头、橡胶、陶瓷等等

<u>真空可视为一种特殊的媒质，真空中的媒质特性参数可视为与空气中相近。</u>

电磁场关注的是：场、源、媒质的**空间特性**和**时间特性**。

1. 电磁学的数学物理基础

1.1.1 基本物理量-源量和场量

电荷(q、Q)　　单位：库仑（C）

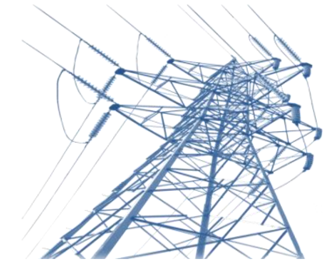
电荷是物质的基本属性之一，电荷量是量子化的，不连续的，基本电荷量为电子的带电量。在考察宏观意义下的电磁效应时，可以认为电荷分布式连续的，可以采用平滑的平均密度函数的方法确定带电体电荷量及带电特性。

单个电子带电：$e=1.6022*10^{-19}$ C

电荷的宏观分布形态有哪些具体形式？

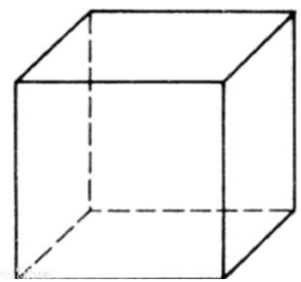
某个有一定空间的体中；　某个面上；　某条线上；　某点上

1. 电磁学的数学物理基础

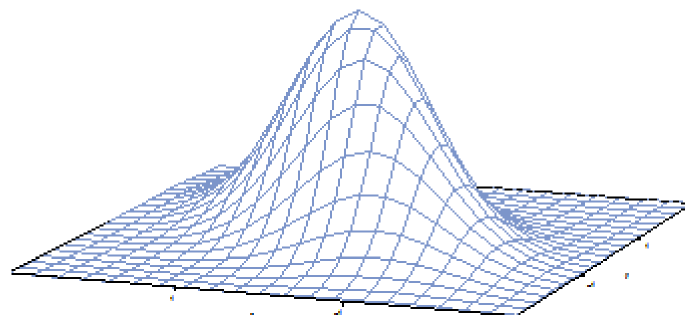


1.1.1 基本物理量-源量和场量

电荷分布在体中：



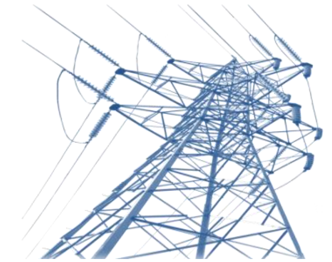
电荷分布在面上：



电荷分布在线上：

电荷分布在点上：

• q



1. 电磁学的数学物理基础

1.1.1 基本物理量–源量和场量

电荷体密度：

$$\rho\left(x',y',z',t\right) \quad (C/m^3)$$

$$\rho\left(x',y',z',t\right)=\lim_{\Delta V'\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V'}=\frac{dq}{dV'}$$

电荷面密度：

$$\sigma\left(x',y',z',t\right) \quad (C/m^2)$$

$$\sigma\left(x',y',z',t\right)=\lim_{\Delta S'\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S'}=\frac{dq}{dS'}$$

1. 电磁学的数学物理基础

1.1.1 基本物理量-源量和场量

电荷线密度：

$$\tau(x', y', z', t) \quad (C/m)$$

$$\tau(x', y', z', t) = \lim_{\Delta l' \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l'} = \frac{dq}{dl'}$$

点电荷：

$$q(x', y', z', t) \quad (C)$$

带点尺寸可忽略不计时的集中电荷

1. 电磁学的数学物理基础

1.1.1 基本物理量-源量和场量

电流(I, i)　　单位：安培（A）

定义：**单位时间通过某一截面的电荷量。**

$$i=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{di}{dt}$$

电流本身也不能描述源在某点的分布特性，也需要引入“密度”的概念。

体电流密度：

$$\boldsymbol{J}\left(x',y',z',t\right)\quad\left(A/m^2\right)$$

$$\left|\boldsymbol{J}\left(x',y',z',t\right)\right|=\lim_{\Delta S'\to 0}\frac{\Delta i}{\Delta S'}=\frac{di}{dS'}$$

方向：该点处正电荷运动的方向

1. 电磁学的数学物理基础

1.1.1 基本物理量-源量和场量

面电流密度： $\boldsymbol{K}\left(x',y',z',t\right) \quad (A/m)$

$$\left|\boldsymbol{K}\left(x',y',z',t\right)\right| = \lim_{\Delta l'\to 0}\frac{\Delta i}{\Delta l'} = \frac{di}{dl'}$$

方向：该点处正电荷运动的方向

线电流： $I \quad (A)$

方向：该点处正电荷运动的方向

线电流的方向一般借助于线矢量的方向来表示。

1. 电磁学的数学物理基础

1.1.1 基本物理量-源量和场量

电场　　电场强度：***E***，　电位移矢量：***D***

磁场　　磁场强度：***H***，　磁感应强度：***B***

$$\boldsymbol{E}\left(x',y',z',t\right)\quad (V/m,\ N/C)$$

1. 电磁学的数学物理基础

1.1.2 媒质及其电磁性能参数

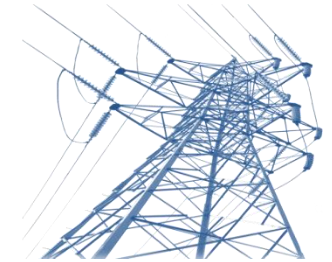
电路参数	电磁场参数	
电阻R (Ω) [电导G (S)]	电导率γ (S/m)	$\boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E}$
电容C (F)	介电常数ε (F/m)	$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$
电感L (H)	磁导率μ (H/m)	$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$

$$\varepsilon(x,y,z)$$

$$\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\approx8.854\times10^{-12}$$

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3\times10^{8}m/s$$



1. 电磁学的数学物理基础

1.2 矢量分析

标量：仅具有大小特征的量（温度、湿度、高度、电位）

矢量：既有大小又有方向的量　（力、速度、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$）

<u>用矢量表示物理量之间的关系，更加简单，直观；</u>

<u>矢量运算具有一些特定的性质，基于矢量的表达更有利于揭示场的规律。</u>

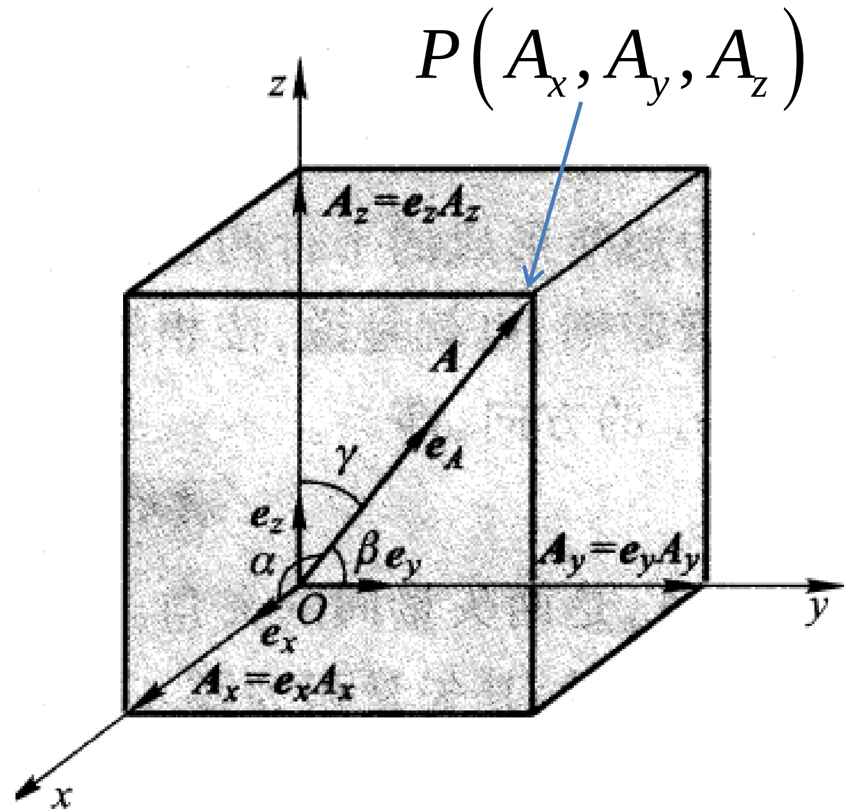
磁矢量位 $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}')}{R}dV'$$

磁矢量位（场）与电流密度（源）方向一致

1. 电磁学的数学物理基础

1.2.1 矢量代数

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_A$$
$$= \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y + \boldsymbol{A}_z$$
$$= A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$$



单位矢量：大小为1的矢量

$\boldsymbol{e}_A, \boxed{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z}$

大小为1，方向沿坐标轴上坐标增大的方向

1. 电磁学的数学物理基础

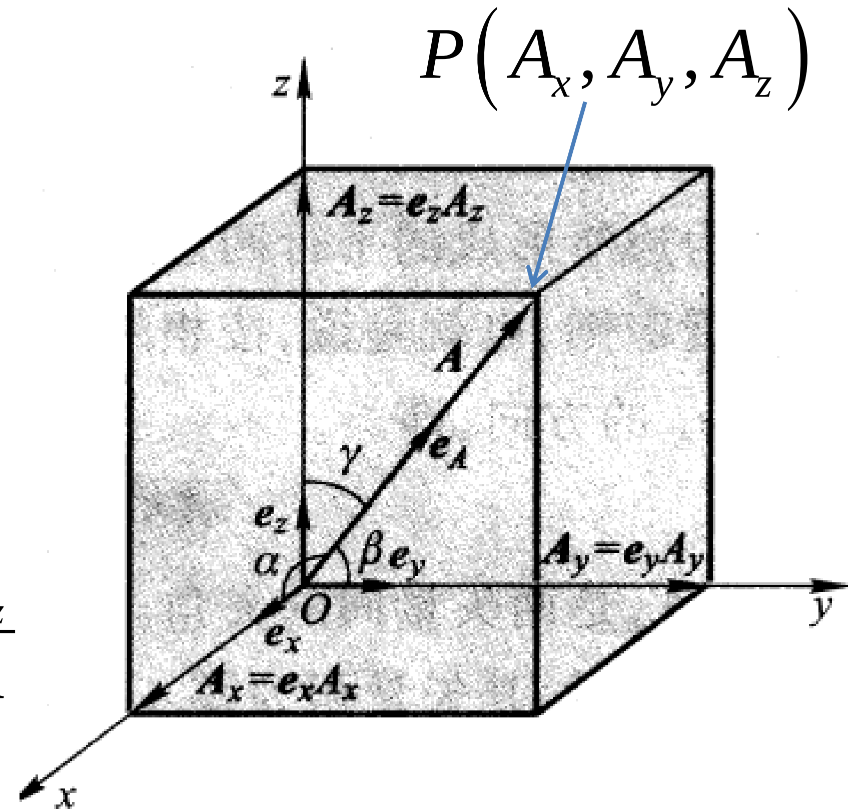
1.2.1 矢量代数

矢 量 $\boldsymbol{A}$ 的 大 小：

$$A=\left|\boldsymbol{A}\right|=\sqrt{\left(A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2\right)}$$

矢 量 $\boldsymbol{A}$ 的 方 向：

$$\boldsymbol{e}_A=\frac{\boldsymbol{A}}{A}=\frac{\boldsymbol{A}}{\left|\boldsymbol{A}\right|}=\boldsymbol{e}_x\frac{A_x}{A}+\boldsymbol{e}_y\frac{A_y}{A}+\boldsymbol{e}_z\frac{A_z}{A}$$

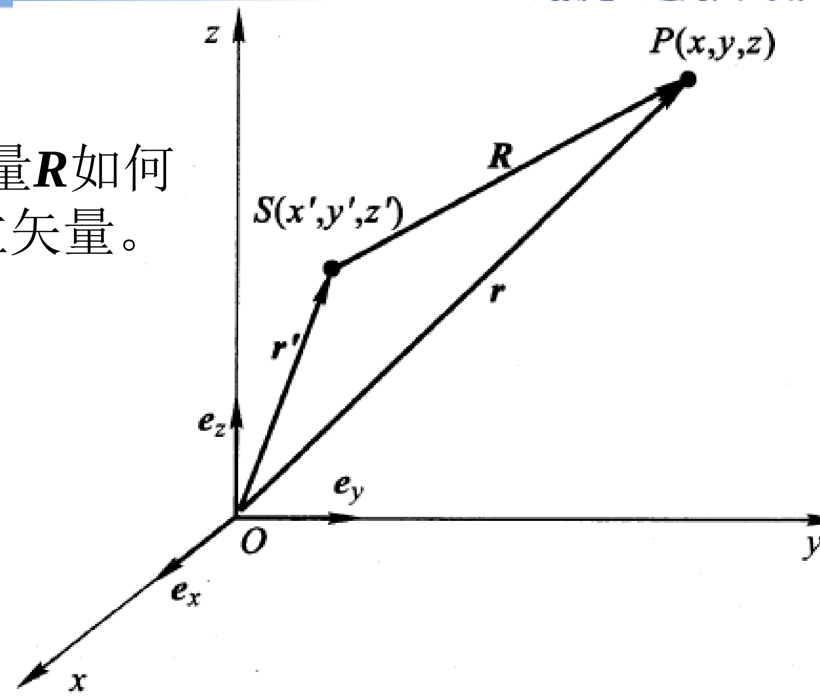


规 定 ： 两点间的距离矢量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$

1. 电磁学的数学物理基础

1.2.1 矢量代数

例1-1：试说明从源点*S*指向场点*P*的距离矢量***R***如何在右图所示的直流坐标中表示；给出其单位矢量。



$$\mathbf{r}'=x'\boldsymbol{e}_x+y'\boldsymbol{e}_y+z'\boldsymbol{e}_z$$

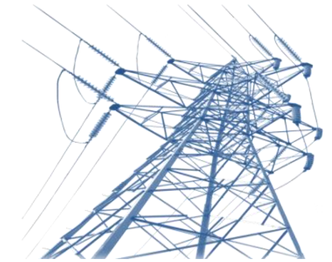
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\\&=(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{e}_R=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\frac{\boldsymbol{R}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=\frac{(x-x')}{R}\boldsymbol{e}_x+\frac{(y-y')}{R}\boldsymbol{e}_y+\frac{(z-z')}{R}\boldsymbol{e}_z$$

$$\rho(x',y',z',t)\longrightarrow\rho(\mathbf{r}',t)\qquad \boldsymbol{J}(x',y',z',t)\longrightarrow\boldsymbol{J}(\mathbf{r}',t)$$

1. 电磁学的数学物理基础



1.2.1 矢量代数

矢量基本运算：和、**积**

标量积： $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta_{AB}$

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=A_x\boldsymbol{e}_x\cdot B_x\boldsymbol{e}_x+A_x\boldsymbol{e}_x\cdot B_y\boldsymbol{e}_y+A_x\boldsymbol{e}_x\cdot B_z\boldsymbol{e}_z+\dots\\&=A_x\boldsymbol{e}_x\cdot B_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y\cdot B_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z\cdot B_z\boldsymbol{e}_z\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned}$$

1.2.1 矢量代数

矢量基本运算：和、**积**

矢量积： $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=AB\sin\theta_{AB}\boldsymbol{e}_C$ ⟵ 右手螺旋

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$$

⇩

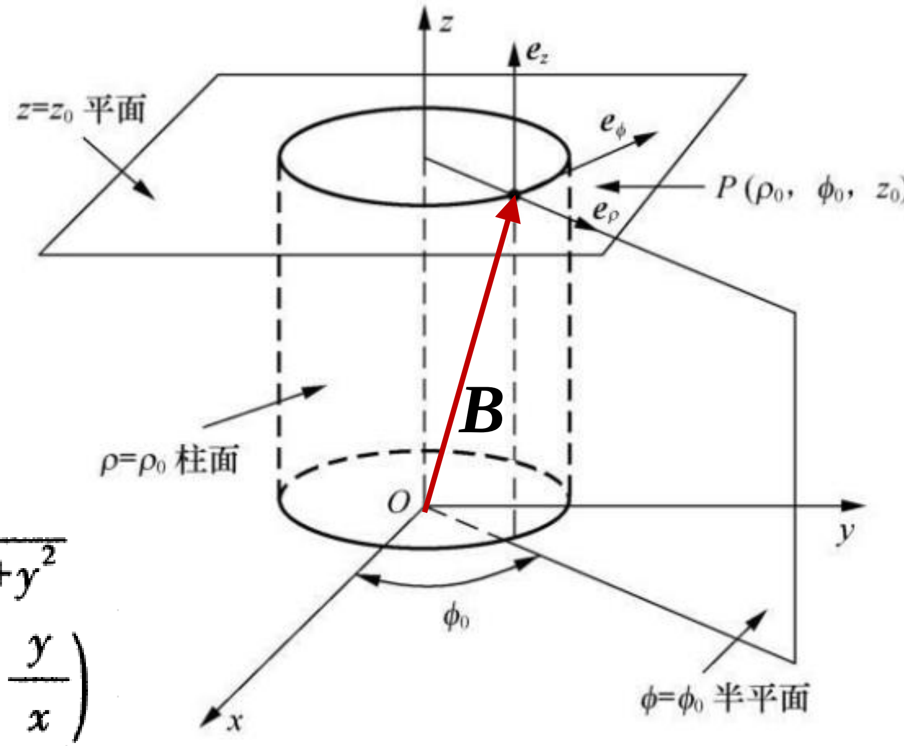
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=A_x\boldsymbol{e}_x\times B_x\boldsymbol{e}_x+A_x\boldsymbol{e}_x\times B_y\boldsymbol{e}_y+A_x\boldsymbol{e}_x\times B_z\boldsymbol{e}_z+\ldots$$

$$=A_xB_y\boldsymbol{e}_z+A_xB_z(-\boldsymbol{e}_y)+\ldots$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

1. 电磁学的数学物理基础

1.2.2 坐标系统



例1-S1：已知 $\boldsymbol{B}=y\boldsymbol{e}_x-x\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 如右图所示。将距离矢量**B**在直角坐标系中的表达式转换为圆柱坐标系下的表达式。

解1：基于坐标转换

标量：
$$x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi,\quad z=z \iff \rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right),\quad z=z$$

单位矢量：
$$\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_x\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\phi,\quad \boldsymbol{e}_\phi=-\boldsymbol{e}_x\sin\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\phi,\quad \boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z$$
$$\iff$$
$$\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_\rho\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi,\quad \boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_\rho\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi\cos\phi,\quad \boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z$$

1. 电磁学的数学物理基础

1.2.2 坐标系统

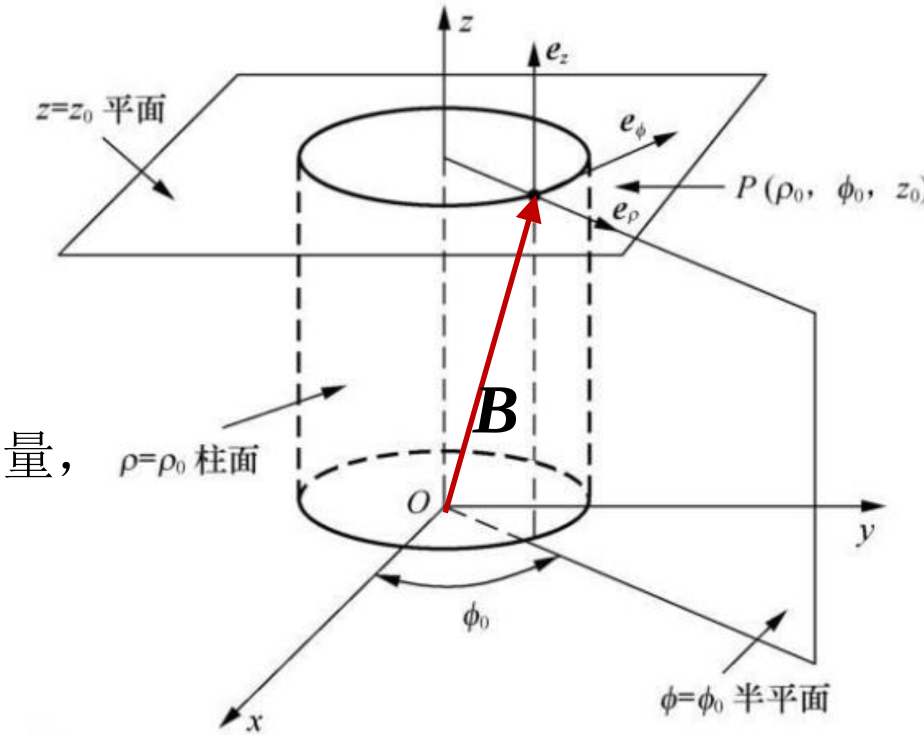
解2：

问题实质是求矢量**B**的如下形式，

$$\boldsymbol{B} = B_\rho \boldsymbol{e}_\rho + B_\phi \boldsymbol{e}_\phi + B_z \boldsymbol{e}_z$$

即关键在于求出矢量沿各坐标轴的分量，可以将矢量沿各坐标轴投影，

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_\rho = B_\rho = \left(y\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\boldsymbol{e}_\rho$$
$$= y\cos\phi - x\sin\phi + 0$$



$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_\phi = B_\phi = \left(y\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\boldsymbol{e}_\phi$$
$$= y\cos(\phi+\pi/2) - x\cos\phi + 0$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_z = B_z = \left(y\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\boldsymbol{e}_z$$
$$= z$$

1. 电磁学的数学物理基础

1.2.2 坐标系统

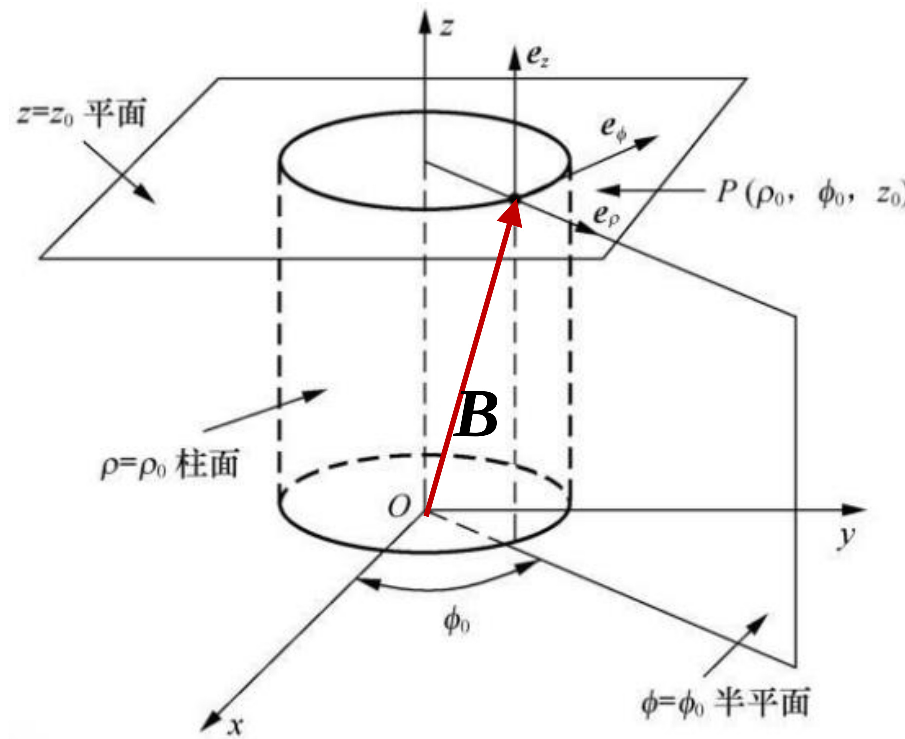
$$\boldsymbol{B} = B_\rho \boldsymbol{e}_\rho + B_\phi \boldsymbol{e}_\phi + B_z \boldsymbol{e}_z$$
$$= (y\cos\phi - x\sin\phi)\boldsymbol{e}_\rho$$
$$+[y(-\sin\phi) - x\cos\phi]\boldsymbol{e}_\phi + z\boldsymbol{e}_z$$

由标量的坐标转换关系

$$x=\rho\cos\phi$$
$$y=\rho\sin\phi$$
$$z=z$$

可得，

$$\boldsymbol{B} = -\rho\boldsymbol{e}_\phi + z\boldsymbol{e}_z$$



直角坐标系和圆柱坐标系下单位矢量点乘：

	$\boldsymbol{e}_\rho$	$\boldsymbol{e}_\phi$	$\boldsymbol{e}_z$
$\boldsymbol{e}_x$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
$\boldsymbol{e}_y$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\boldsymbol{e}_z$	0	0	1

1. 电磁学的数学物理基础

1.2.3 矢量积分

线积分： → 力作功 $W = \int_l \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$

面积分： → 磁通的计算 $\Phi = \int_s \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$

在矢量分析中线、面都是有方向的

线元：$d\boldsymbol{l} = dx\boldsymbol{e}_x + dy\boldsymbol{e}_y + dz\boldsymbol{e}_z$ 体元：$dV = dxdydz$

面元：$d\boldsymbol{S} = dydz\boldsymbol{e}_x + dzdx\boldsymbol{e}_y + dxdy\boldsymbol{e}_z$

$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_\rho d\rho + \boldsymbol{e}_\phi \rho d\phi + \boldsymbol{e}_z dz$$

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_\rho \rho d\phi dz + \boldsymbol{e}_\phi d\rho dz + \boldsymbol{e}_z \rho d\rho d\phi$$

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

圆柱坐标系

$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_r dr + \boldsymbol{e}_\theta r d\theta + \boldsymbol{e}_\phi r\sin\theta d\phi$$

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi + \boldsymbol{e}_\theta r\sin\theta dr d\phi + \boldsymbol{e}_\phi r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

球坐标系

1. 电磁学的数学物理基础

思考题1：

试用如下直角坐标下的线元、面元、体元表达式，推导出圆柱坐标下的线元、面元、体元表达式：

线元：$d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$

体元：$dV = dxdydz$

面元：$d\mathbf{S} = dydz\mathbf{e}_x + dzdx\mathbf{e}_y + dxdy\mathbf{e}_z$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_\rho \mathrm{d}\rho + \boldsymbol{e}_\phi \rho \mathrm{d}\phi + \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_\rho \rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z + \boldsymbol{e}_\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z + \boldsymbol{e}_z \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

?

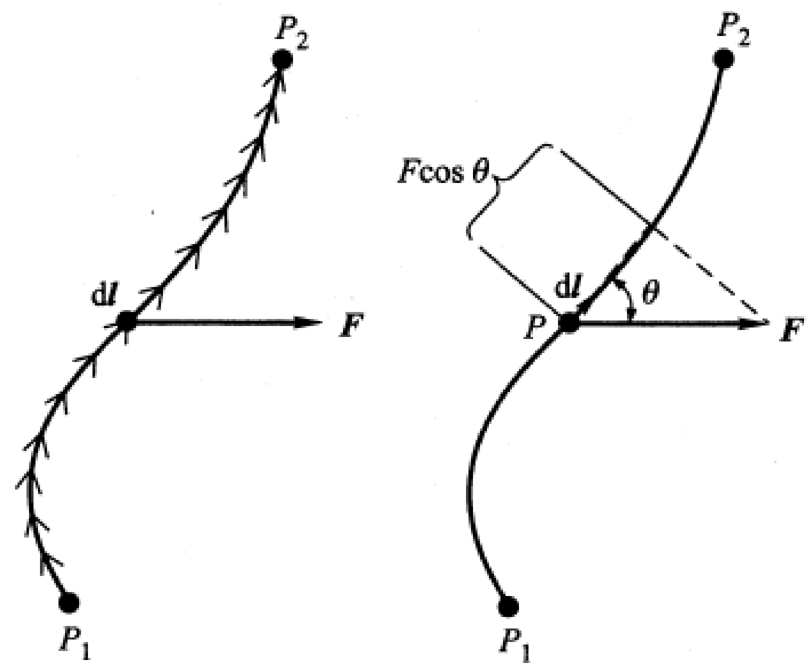
1. 电磁学的数学物理基础

1.2.3 矢量积分

线积分

$$W = \int_l \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

质点在力$\boldsymbol{F}$的作用下由P_1到P_2的过程中，$\boldsymbol{F}$所作的功W:



分段，每段上， $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$

所有段相累加， $\int_l dW = \int_l \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = W$

直角坐标系下： $W = \int_l \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$

$$= \int_l \left(F_x \boldsymbol{e}_x + F_y \boldsymbol{e}_y + F_z \boldsymbol{e}_z\right) \cdot \left(dx\boldsymbol{e}_x + dy\boldsymbol{e}_y + dz\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$= \int_l F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

环量：闭合线积分 $\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum I$

1. 电磁学的数学物理基础

1.2.3 矢量积分

面积分

$$\psi = \int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

设流场中流速为v，求单位时间内流体向正侧方向（$\boldsymbol{e}_n$）穿过曲面$\boldsymbol{S}$的流量。

在$\boldsymbol{S}$上取面元$d\boldsymbol{S}= dS\,\boldsymbol{e}_n$，设流体的密度为1
间内穿过面元的流量，

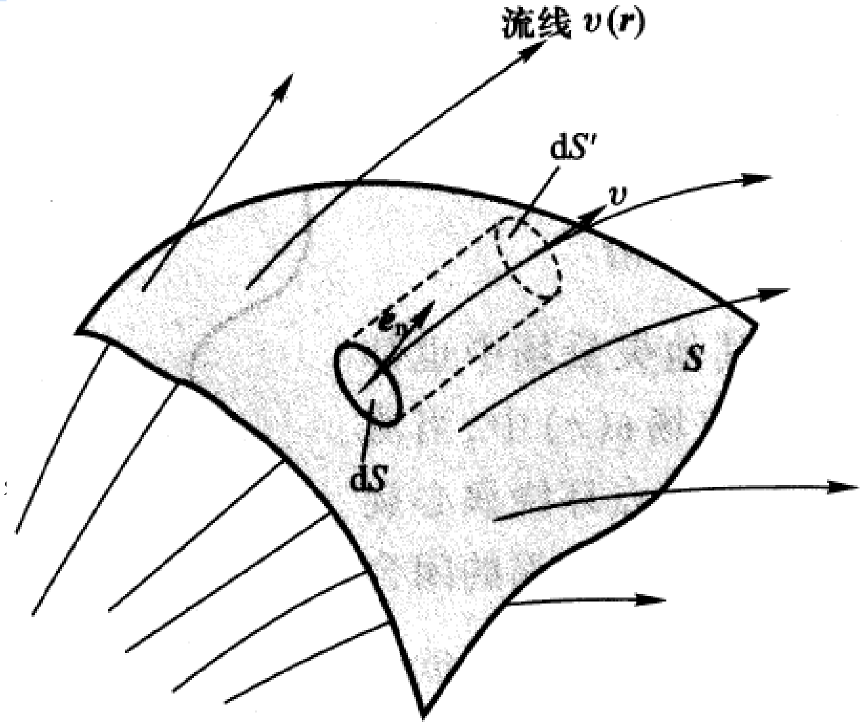
$$\Delta M = \rho \Delta V = 1(d\boldsymbol{l} \cdot d\boldsymbol{S})$$

$$= \boldsymbol{v}\Delta t \cdot d\boldsymbol{S}$$

$d\boldsymbol{S}$上单位时间流量 $d\psi = \Delta M / \Delta t = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$

$\boldsymbol{S}$上单位时间流量 $\psi = \int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$ ⇒ <u>通量：矢量面积分</u>

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$



1. 电磁学的数学物理基础

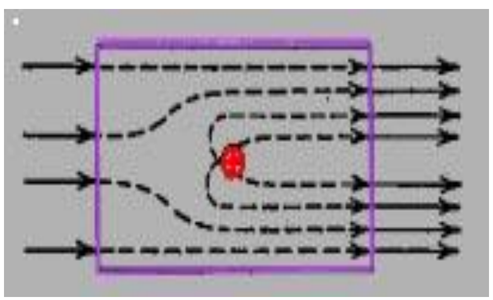
1.2.3 矢量积分

直角坐标下： $\psi = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S F_x dydz + F_y dxdz + F_z dxdy$

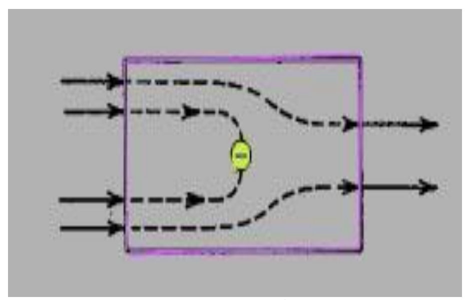
<u>净通量：矢量的闭合面积分</u> $\psi = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \dfrac{q}{\varepsilon_0} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

<u>如果曲面 **S** 是闭合的，则规定曲面法向矢量由闭合曲面内指向外</u>。

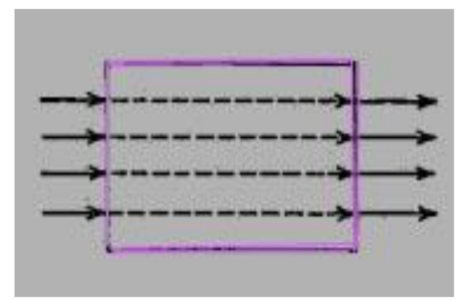
净通量的物理意义：矢量场通过闭合曲面通量的三种可能结果



$\psi > 0$



$\psi < 0$



$\psi = 0$

闭合曲面的通量从宏观上建立了矢量场通过闭合曲面的通量与曲面内产生矢量场的源的关系。

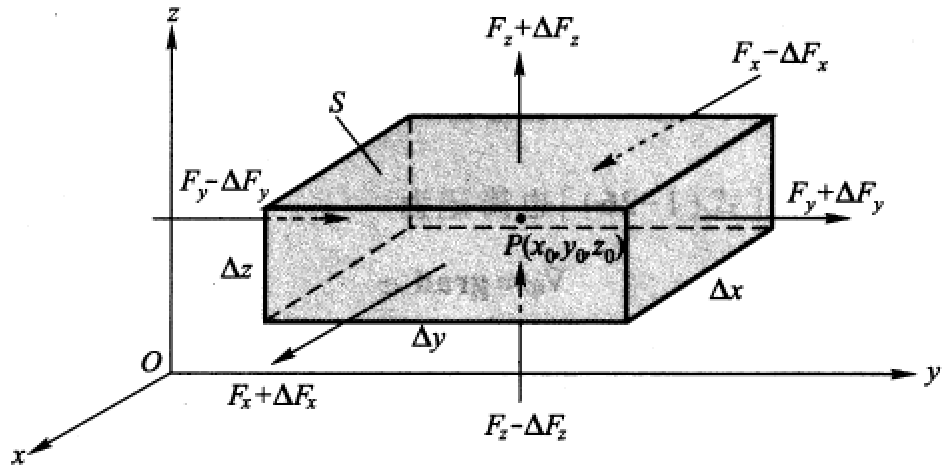
1. 电磁学的数学物理基础

1.2.4 散度

为了定量研究场与源之间的关系，需建立场空间任意点（小体积元）的通量源与矢量场（构成小体积元的闭合曲面内的通量）的关系。利用极限方法得到这一关系：

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}{\Delta V}$$

$$= \operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}$$



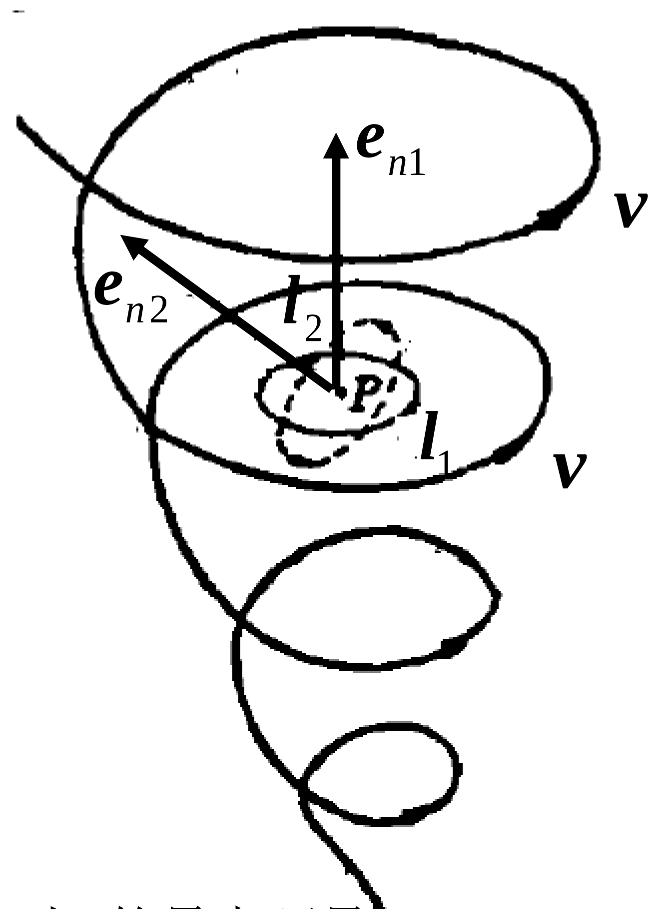
直角坐标系下： $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$ —— nabla算子

1. 电磁学的数学物理基础

1.2.5 旋度

<u>不是所有的矢量场都由通量源激发。存在另一</u>
<u>不同于通量源的矢量源，它所激发的矢量场的</u>
<u>线是闭合的，它对于任何闭合曲面的通量为零</u>
<u>但在场所定义的空间中闭合路径的积分不为零</u>



为了定量研究场与源之间的关系，需建立场空间任意点（某一小面元上）的环量源与矢量场（小面元对应的闭合曲线上的环量）的关系。利用极限方法得到这一关系：

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\left|\oint_l \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right|_{\max}}{\Delta S}\cdot \boldsymbol{e}_n$$

每单位面积上$\boldsymbol{v}$的最大环量

1.2.5 旋度

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v}$$

$$= \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\mathrm{x} & \boldsymbol{e}_\mathrm{y} & \boldsymbol{e}_\mathrm{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

总结　　矢量运算

- 积分
  - 线积分　　环量　　矢量源
  - 面积分　　(净)通量　　标量源
- 微分
  - 旋度　　环量密度　　矢量源密度
  - 散度　　净通量密度　　标量源密度

1. 电磁学的数学物理基础

1.2.6 梯度

思考：标量场要研究什么？（如何寻求标量场的空间变化率及其最大值、方向）

设标量场$\varphi(x,y,z)$在P点处沿$d\boldsymbol{l}$方向的变化率，即方向导数为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$$

注意到：

$$d\boldsymbol{l}=dx\boldsymbol{e}_x+dy\boldsymbol{e}_y+dz\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{e}_l=\frac{d\boldsymbol{l}}{dl}=\frac{dx}{dl}\boldsymbol{e}_x+\frac{dy}{dl}\boldsymbol{e}_y+\frac{dz}{dl}\boldsymbol{e}_z$$

定义：

$$\boldsymbol{G}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

1.2.6 梯度

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{e}_l = |\boldsymbol{G}| \cos(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{e}_l)$$

显然当$\boldsymbol{e}_l$取与$\boldsymbol{G}$一致的方向时，方向导数可取最大值。

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right|_{\max} = |\boldsymbol{G}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$$

定义： $\boldsymbol{G}$为标量场$\varphi(x,y,z)$的梯度，记作

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla \varphi = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

<u>$\boldsymbol{G}$的方向即为$\varphi(x,y,z)$的变化率最大的方向，也叫梯度方向，指向φ增加的方向。</u>

1. 电磁学的数学物理基础

思考题2：

已知某一质点，在力$\boldsymbol{F}$的作用下沿直线$\boldsymbol{l}$从P_1 (0,0,0)点移动至P_2 (1,1,-2)点，

$$\boldsymbol{F} = 2y\boldsymbol{e}_x + 2x\boldsymbol{e}_y + 3z\boldsymbol{e}_z$$

直线$\boldsymbol{l}$：$\begin{cases} 4x-2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

求力$\boldsymbol{F}$所作的功。

1. 电磁学的数学物理基础

总结：

1.矢量的运算：积分、微分

2.电磁场中的矢量场有两种形式的源：

旋度源（矢量）： 体电流密度$\boldsymbol{J}$ ➡ 磁场 ➡ 有“旋”的特性

散度源（标量）： 电荷体密度$\boldsymbol{\rho}$ ➡ 电场 ➡ 有“散”的特性

3.梯度：研究标量函数的空间变化率的最大值及其方向

1. 电磁学的数学物理基础

1.3 场论基础

1.3.1 散度定理

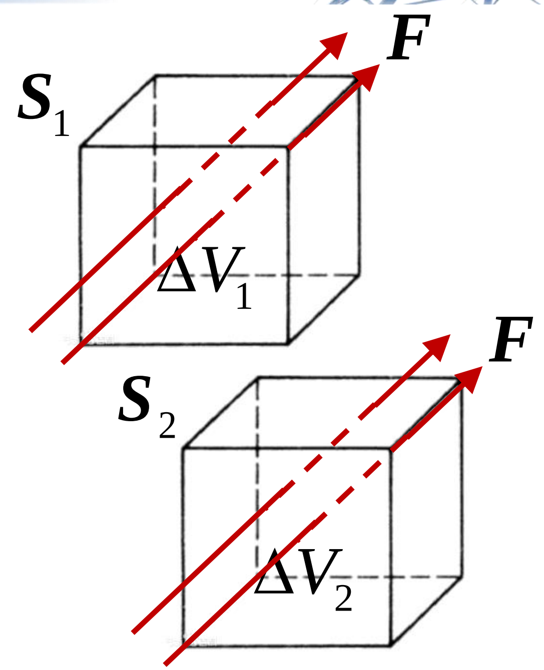
$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V_1\to 0}\frac{\oint_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V_1}$$

$$\lim_{\Delta V_1\to 0}(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_1\,\Delta V_1=\oint_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\lim_{\Delta V_2\to 0}(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_2\,\Delta V_2=\oint_{S_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\vdots$$

$$V=\Delta V_1+\Delta V_2+\ldots$$



将上面各式相加：

$$\lim_{\Delta V_j\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_j\,\Delta V_j=\sum_{j=1}^{\infty}\oint_{S_j}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

散度定理

$$\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{F})dV=\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1. 电磁学的数学物理基础

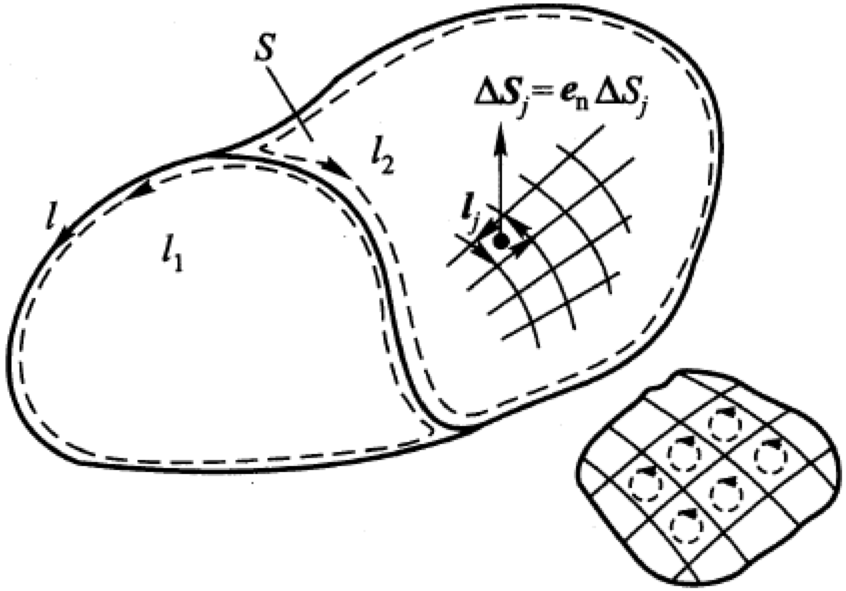
1.3 .2 斯托克斯定理

同前面可知，

$$\lim_{\Delta S_j \to 0} (\nabla \times \boldsymbol{F})_j \Delta S_j = \oint_{l_j} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\lim_{\Delta S_j \to 0} \sum_{j=1}^{\infty} (\nabla \times \boldsymbol{F})_j \Delta S_j = \sum_{j=1}^{\infty} \oint_{l_j} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\int_s (\nabla \times \boldsymbol{F}) dS = \oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$



斯托克斯定理

1. 电磁学的数学物理基础

1.3 .3 无散场、无旋场

无旋场：旋度恒为零的场 $\nabla\times\boldsymbol{F}\equiv 0$

任一梯度场必为无旋场 $\nabla\times(\nabla\varphi)\equiv 0$

任一无旋场必可表示为一个标量场的梯度 $\boldsymbol{F}=\pm\nabla\varphi$

无散场：散度恒为零的场 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$

任一梯度场必为无散场 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\equiv 0$

任一无散场必可表示为一个矢量场的旋度 $\boldsymbol{F}=\pm\nabla\times\boldsymbol{A}$

建议动手

推导证明

1.3 .4 亥姆霍兹定理

赫姆霍兹：德国物理学、生理学、心理学、数学家

若矢量场$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$在无界空间中处处单值，且其导数连续有界，源分布在有限区域V'中，则该矢量场$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$唯一地尤其散度和旋度所确定，且可以表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) + \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

其中，

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}$$

源点$S(\boldsymbol{r}')$ 到场点$P(\boldsymbol{r})$的距离矢量

1. 电磁学的数学物理基础

1.4 麦克斯韦方程组

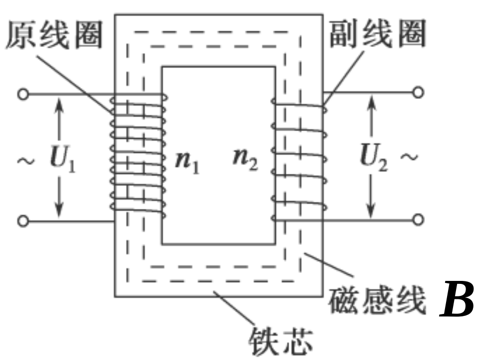
1.4.1 电磁感应定律

法拉第电磁感应定律： 导体回路中的感应电动势的大小，与穿过回路的磁通对时间的变化率成正比，即

$$e=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=-\left[\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}+\int_S \boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\left(d\boldsymbol{S}\right)}{\partial t}\right]$$

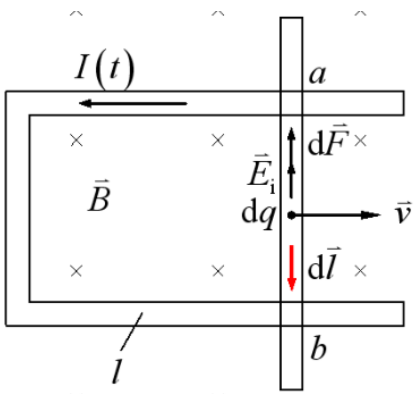
B变化，导电回路***l***不变

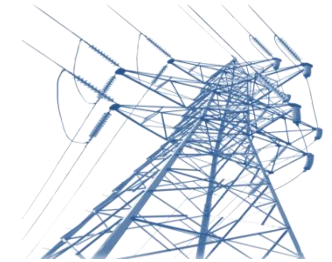
B不变，导电回路***l***与磁场有相对运动



变压器电动势

发电机电动势





1. 电磁学的数学物理基础

1.4 .1 电磁感应定律

一般地，电场有两种基本形式，感应电场和库仑电场：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_q$$

感应电场与感应电动势相关，

$$e = \oint_l \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

若对电场***E***，沿闭合以上闭合回路***l***作线积分，

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_l \left(\boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_q\right) \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= \oint_l \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} + \boxed{\oint_l \boldsymbol{E}_q \cdot d\boldsymbol{l}} = 0$$

库仑电场是无旋场

$$= \oint_l \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

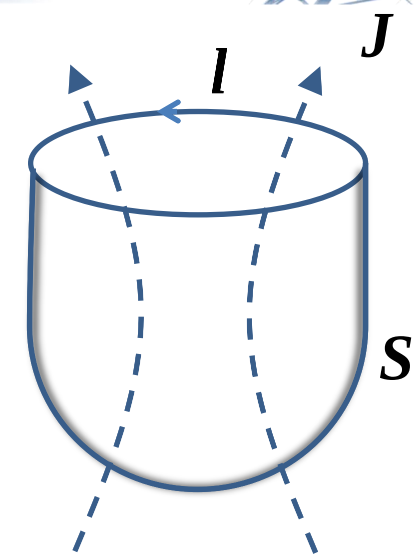
不考虑导体运动

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}$$

麦克斯韦方程组第二方程

1. 电磁学的数学物理基础

1.4 .2 全电流定律



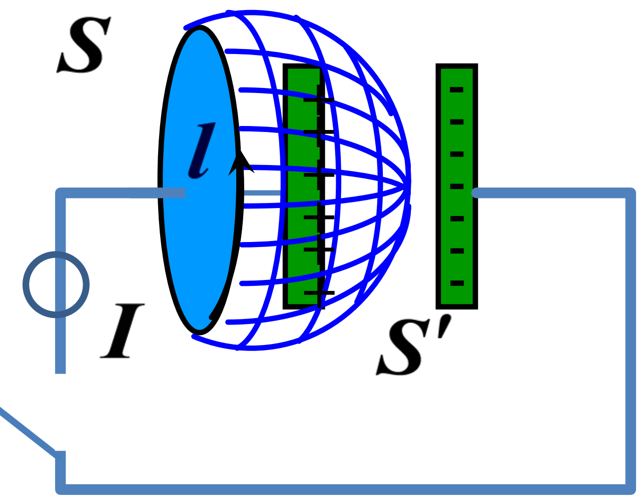
以前我们学习了安培环路定理，

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \sum I = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$$

当$\boldsymbol{l}$无限缩小，$\boldsymbol{S}$趋于闭合曲面，则左端积分为零，即

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$ 电流连续性 ➡ KCL

开关闭合瞬间，



$\boldsymbol{S}$ $\quad \oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = I = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$

$\boldsymbol{S'}$ $\quad \oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = 0\ (\boldsymbol{J}=0)$

矛盾？？

电容器极板间电场的变化？？

1. 电磁学的数学物理基础

1.4 .2 全电流定律

问题在于：在动态条件下，随时间变化的因素-电场被忽略掉了

电荷守恒定律：
$$\oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{dq}{dt}$$

意义：闭合曲面**S**内，单位时间电流的净流出量等于其中电荷的减少量

进而可得，
$$\oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

由高斯定理，
$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = q = \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\oint_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}_c \right) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

时变下的电流连续性

1. 电磁学的数学物理基础

1.4 .2 全电流定律

$\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 位移电流密度（位移电流）

安培环路只在静态条件下成立，而时变条件下要考虑位移电流，即

全电流定律： $\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S}$ 麦克斯韦方程组第一方程

由斯托克斯定理， $\oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_s (\nabla \times \boldsymbol{H}) dS = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S}$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

1. 电磁学的数学物理基础

1.4 .3 麦克斯韦方程组

积分方程 微分方程

全电流定律： $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$ $\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

电磁感应定律： $\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$ $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

磁通连续性： $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$

高斯定理： $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV$ $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$

本构关系： $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$

1. 电磁学的数学物理基础

1.4 .3 麦克斯韦方程组

时变场中： 电场有旋有散，磁场有旋无散：

电场
- 散度源 电荷
- 旋度源 变化磁场

磁场
- 散度源 无
- 旋度源 传导电流+位移电流（变化电场）

1. 电磁学的数学物理基础

第一章作业：

1-1、1-2、1-3、1-4