工程电磁场

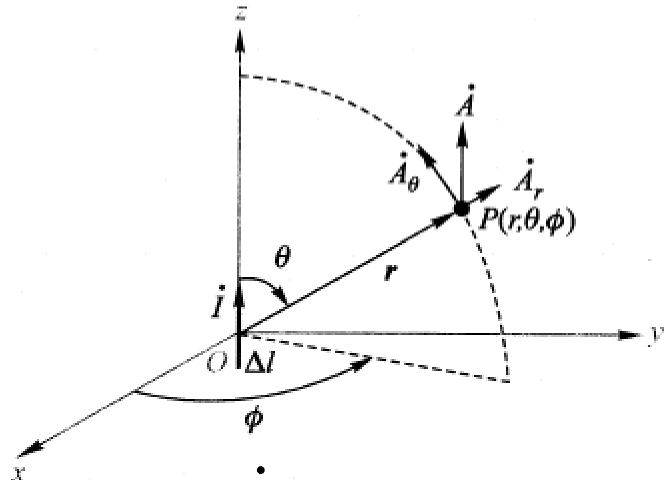
稻叶先生

5. 电磁场辐射与电磁波

5.1 电磁辐射

5.1.1 电偶极子的电磁场

场源ρ或$\boldsymbol{J}$随着时间迅速变化，其产生的动态电磁场将以波的形式在空间传播，称之为场源的**电磁辐射**。



由于工程中多为某一频率的正弦波为载频，且时谐场分析简单。

由第四章中，时谐场电磁位的积分解形式：
$$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')}{R}e^{-jkR}dV'$$

P点 ⇨
$$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\dot{I}\,d\boldsymbol{l}'}{R}e^{-jkR}$$

设 $\Delta l \ll r$ ⇨
$$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0\dot{I}\Delta l}{4\pi r}e^{-jkr}\boldsymbol{e}_z$$

直角坐标→球坐标

$$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0\dot{I}\Delta l}{4\pi r}e^{-jkr}\left(\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right)$$

5. 电磁场辐射与电磁波

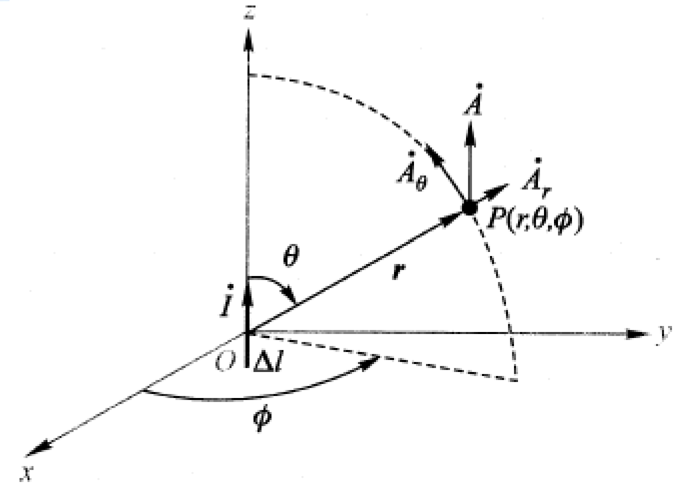
5.1.1 电偶极子的电磁场

$$\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\dot{I}\,\Delta l}{4\pi r^{2}}e^{-jkr}\left(1+jkr\right)\sin\theta\,\boldsymbol{e}_{\phi}\quad(1)$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}$$

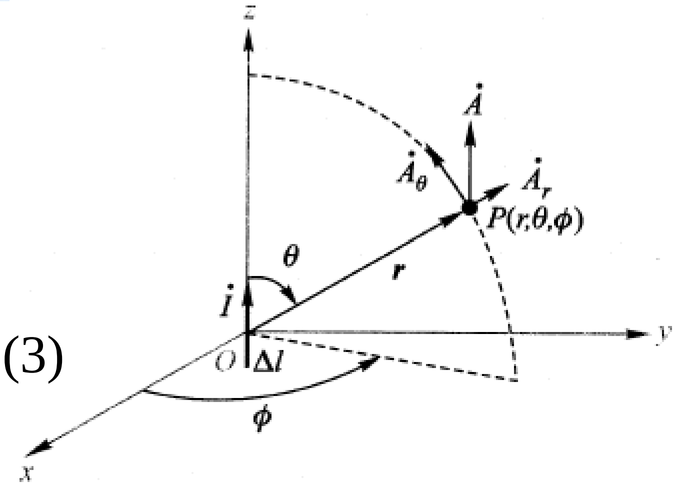
$$=-j\frac{\dot{I}\,\Delta l}{2\pi\omega\varepsilon_{0}}\frac{e^{-jkr}}{r^{3}}\cos\theta\,\boldsymbol{e}_{r}\left(1+jkr\right)$$

$$-j\frac{\dot{I}\,\Delta l}{4\pi\omega\varepsilon_{0}}\frac{e^{-jkr}}{r^{3}}\left(1+jkr-k^{2}r^{2}\right)\sin\theta\,\boldsymbol{e}_{\theta}\quad(2)$$



5. 电磁场辐射与电磁波

5.1.2 近场、远场



<u>近场：</u> $kr \ll 1$

$$\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = -j\frac{\dot{I}\Delta l}{2\pi\omega\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r - j\frac{\dot{I}\Delta l}{4\pi\omega\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta \quad (3)$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\dot{I}\Delta l\sin\theta}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_\phi \quad (4)$$

讨论分析：

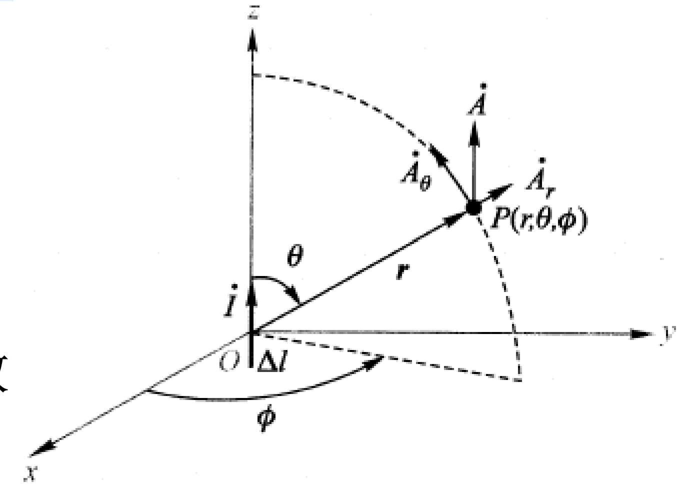
$$\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\dot{q}\Delta l}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\dot{q}\Delta l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta \quad (5)$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta$$

偶极子近场　　　　　　电偶极子静电场

5. 电磁场辐射与电磁波

5.1.2 近场、远场



天线辐射近场与电偶极子静电场分布规律一致；

(a) 无论电场、磁场，场源的相位相同，无滞后效应，故称之为似稳场；

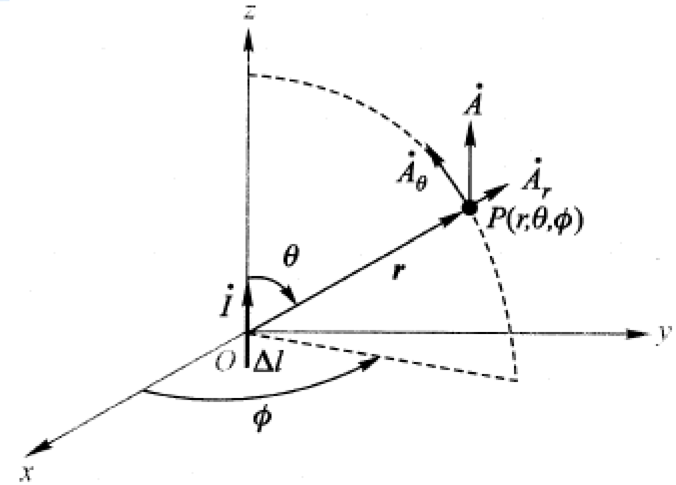
(b) 电场、磁场空间上相互垂直，相位差90º；

(c) $\boldsymbol{S}_{av} = \mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*\right] = 0$

(d) 近场区域中的能量源于辐射源的激励，但并不产生向无限远空间传送的电磁辐射。

5. 电磁场辐射与电磁波

5.1.2 近场、远场



远场：　$kr \gg 1$

$$\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = j\frac{\dot{I}\Delta l k^2}{4\pi\omega\varepsilon_0 r}\sin\theta e^{-jkr}\boldsymbol{e}_\theta \quad (6)$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t) = j\frac{\dot{I}\Delta l k\sin\theta}{4\pi r}e^{-jkr}\boldsymbol{e}_\phi \quad (7)$$

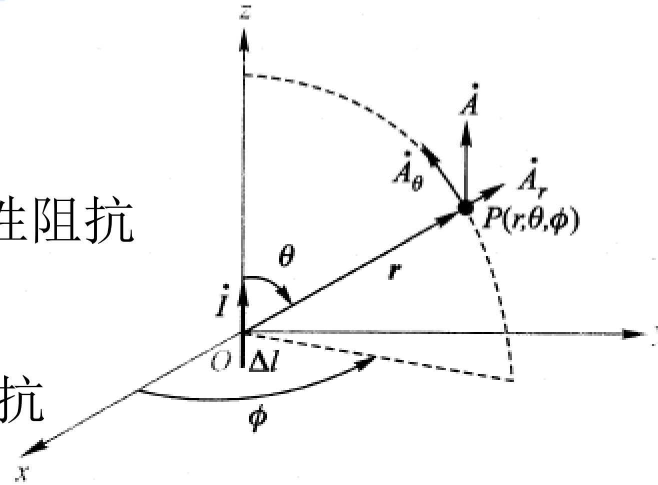
(a) 电场、磁场相互垂直且同相位；

(b) $\boldsymbol{S}_{av} = \mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right]$ 电场$\boldsymbol{E}$、磁场$\boldsymbol{H}$和$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}$相互垂直，且符合右手螺旋；

(c) $\boldsymbol{S}_{av} = \eta\left(\frac{I\Delta l}{2\lambda r}\right)^2\sin^2\theta\boldsymbol{e}_r$ 　(8)　　电磁能量向外辐射

5. 电磁场辐射与电磁波

5.1.2 近场、远场



$$\eta = \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{k}{\omega\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\Omega \quad (9)$$ 介质的特性阻抗

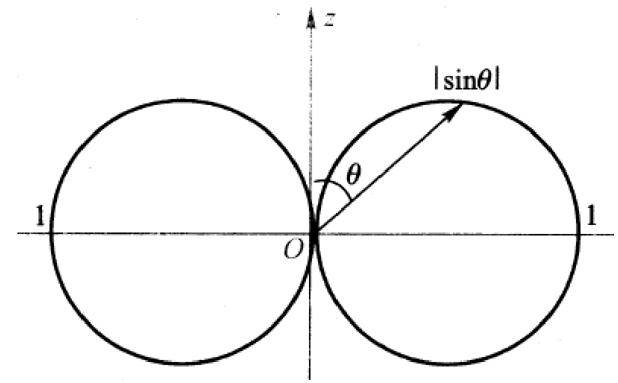
一般地，有 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ (10) 又可称之为介质波阻抗

- 远场的电磁波，无论电场，磁场，其相位在以电偶极子为中心形成的球面上是等相位，称等相位面为球面的电磁波为**球面波**。
- 电磁波传播方向由相位因子$e^{\pm jkr}$决定，$-jkr$：沿$\boldsymbol{e}_r$方向传播， jkr：沿$-\boldsymbol{e}_r$方向传播。
- $\boldsymbol{S}_{av}$的方向$\boldsymbol{e}_k$即为波的传播方向，且$\boldsymbol{e}_E$， $\boldsymbol{e}_H$， $\boldsymbol{e}_k$ 两两垂直，符合右手螺旋。

5. 电磁场辐射与电磁波

5.1.3 方向图

对于无限大空间的电磁场传播问题，电磁场或者磁场有关联，且规律类似。以电场为例，其强度大小随角度变化，设其为函数$f(\theta,\phi)$，称之为天线的方向图。



$$f(\theta,\phi)=\sin\theta$$

电偶极子在半径为r的球面处，向外辐射总功率为

$$P=\oint_S \boldsymbol{S}_{av}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{2\pi}{3}\eta\left(\frac{I\Delta l}{\lambda}\right)^2 \qquad (11)$$

$$P=I^2\left[\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2\eta\right]=I^2R_r \qquad (12)$$

R_r： 辐射电阻,天线辐射能力

$$\boldsymbol{S}_{av}=\eta\left(\frac{I\Delta l}{2\lambda r}\right)^2\sin^2\theta\boldsymbol{e}_r=\frac{3P}{8\pi r^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_r=\frac{3R_rI^2}{8\pi r^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_r \qquad (13)$$

5. 电磁场辐射与电磁波

5.1.3 方向图

例 5-1 个人通信系统频率范围为 800 MHz~3 GHz。GSM 系统双频移动电话天线的发射功率，当 $f = 900$ MHz 时为 0.1~2 W；当 $f = 1.8$ GHz 时为 0.1~1 W。若将该移动电话天线近似看作为电偶极子天线，试分别计算距移动电话 3 cm 处的最大功率面密度。

［**解**］ 由式(5-13)可知，在距离一定的情况下，最大功率面密度出现在 $\theta=90°$ 情况：

当 $f=900$ MHz 时，$S_{avmax}=265.2\ \mathrm{W/m^2}=26.52\ \mathrm{mW/cm^2}$

当 $f=1.8$ GHz 时，$S_{avmax}=132.6\ \mathrm{W/m^2}=13.26\ \mathrm{mW/cm^2}$

国标：GB8702-2014《电磁环境控制限制》

30~3000 MHz频率范围内：0.04mW/cm^2

5.1.4自学

5. 电磁场辐射与电磁波

5.2 理想介质中的均匀平面波

波阵面：波的传播方向上，任意时刻波前到达的各点构成的曲面，又称为等相位面。

平面波：电场、磁场和传播方向满足右手螺旋，且等相位面为平面的电磁波，称为平面波。

均匀平面波：电场和磁场的振幅均为常量的平面电磁波。

横电磁波：电场和磁场均垂直于传播方向，且在传播方向上无电磁场分量的平面电磁场，也称**TEM波**。

5.2.1 波动方程及其解

无源理想介质空间中：

由矢量恒等式：$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}\right)-\nabla^{2}\boldsymbol{E}$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\boldsymbol{E}}{\partial t^{2}}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\nabla^{2}\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\boldsymbol{E}}{\partial t^{2}}=0\\&\nabla^{2}\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\boldsymbol{H}}{\partial t^{2}}=0\end{aligned}\right.$$

齐次波动方程

5.2.1 波动方程及其解

对于时谐场，则有

齐次亥姆霍兹方程 $\begin{cases} \nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}} - k^2 \dot{\boldsymbol{E}} = 0 \\ \nabla^2 \dot{\boldsymbol{H}} - k^2 \dot{\boldsymbol{H}} = 0 \end{cases}$

$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (rad/m)$

波数、相位系数

假设均匀平面波沿着z轴方向传播，电场沿x轴方向 $\boldsymbol{E} = E_x(z,t)\boldsymbol{e}_x$

代入齐次波动方程，有

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

通解形式为： $E_x(z,t) = \underbrace{E_x^{+}(z - vt)}_{\text{入射波}} + \underbrace{E_x^{-}(z + vt)}_{\text{反射波}}$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

5.2.1 波动方程及其解

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mu}\int\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)dt \quad = \boldsymbol{e}_y\left[-\frac{1}{\mu}\int\frac{\partial E_x}{\partial z}dt\right]$$

$$= \boldsymbol{e}_y\frac{1}{\eta}\left[E_x^{+}\left(z-vt\right)-E_x^{-}\left(z+vt\right)\right] \qquad \eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

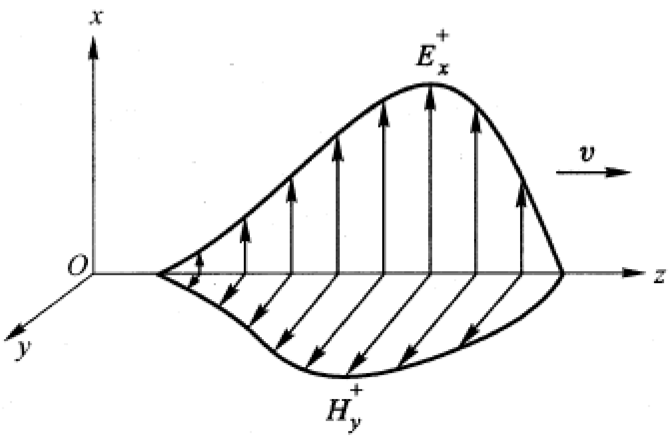
5. 电磁场辐射与电磁波

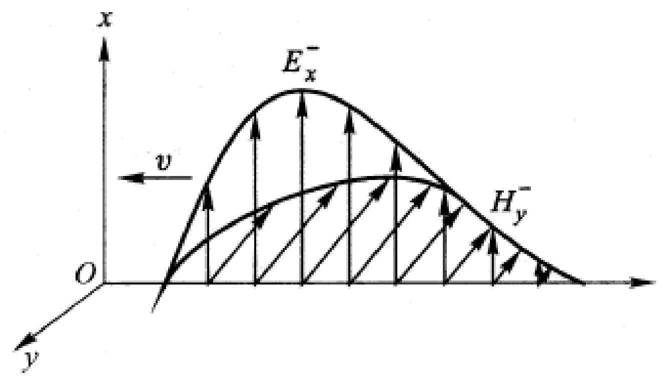
5.2.2 均匀平面电磁波的物理意义

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x \left[E_x^{+}\left(z - vt\right) + E_x^{-}\left(z + vt\right) \right] \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_y \frac{1}{\eta} \left[E_x^{+}\left(z - vt\right) - E_x^{-}\left(z + vt\right) \right]$$

入射波（正向行波） $E_x^{+}\left(z - vt\right)$ $\qquad H_y^{+}\left(z - vt\right) = \dfrac{1}{\eta} E_x^{+}\left(z - vt\right)$

反射波（反向行波） $E_x^{-}\left(z + vt\right)$ $\qquad H_y^{-}\left(z + vt\right) = -\dfrac{1}{\eta} E_x^{-}\left(z + vt\right)$





5. 电磁场辐射与电磁波

5.2.3 波矢量

对于前面分析的电磁波，如果在时谐情况下，则有 $\dot{\boldsymbol{E}}=\dot{E}_x(z)\boldsymbol{e}_x$

代入齐次亥姆霍兹方程，有 $\dfrac{d^2\dot{E}_x}{dz^2}-k^2\dot{E}_x=0$

通解形式为： $\dot{E}_x(z)=\underline{\dot{E}_{x0}^{+}}e^{-jkz}+\underline{\dot{E}_{x0}^{-}}e^{jkz}$ 正向行波 反向行波

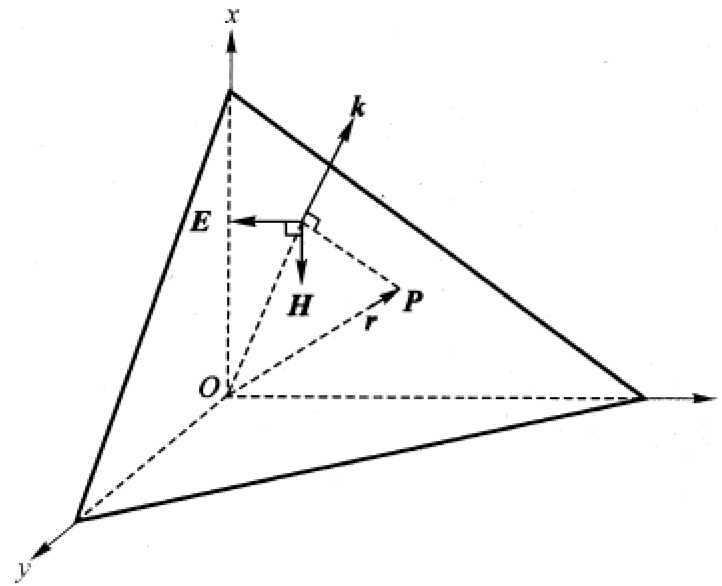
则磁场为： $\dot{\boldsymbol{H}}=-\dfrac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}=-\boldsymbol{e}_y\dfrac{1}{j\omega\mu}\dfrac{d\dot{E}_x}{dz}$

$$=\boldsymbol{e}_y\left(\frac{1}{\eta}\dot{E}_{x0}^{+}e^{-jkz}-\frac{1}{\eta}\dot{E}_{x0}^{-}e^{jkz}\right)$$

e^{-jkz} 电磁波传播时的相位滞后，对应时域中时间的延迟

5.2.3 波矢量

假设作正弦变化的均匀平面波，沿任意方向$\boldsymbol{e}_k$传播，则定义



波矢量：$\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_k \qquad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

相位延迟：$kz \rightarrow \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \left(k_x\boldsymbol{e}_x + k_y\boldsymbol{e}_y + k_z\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$= k_x x + k_y y + k_z z$$

任意点P处：$\dot{\boldsymbol{E}}_P = \dot{\boldsymbol{E}}_0 e^{-jk\cdot\boldsymbol{r}} \quad \dot{\boldsymbol{H}}_P = \dot{\boldsymbol{H}}_0 e^{-jk\cdot\boldsymbol{r}}$

且有：$\dot{\boldsymbol{H}} = \dfrac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_k \times \dot{\boldsymbol{E}} = \dfrac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\dot{\boldsymbol{E}} \qquad \dfrac{1}{\eta} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} = \dfrac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\mu} = \dfrac{k}{\omega\mu}$

5.2.3 波矢量

性质：
- （1）电场、磁场、波矢量两两垂直，符合右手螺旋
- （2）电场幅值为磁场幅值的η倍

例5-2 移动基站发射电磁波的磁场为 $\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{e}_x 50 e^{-j(17.3y-\pi/3)}\ \mu A/m$

（1）频率和波长　（2）电场强度　（3）坡印廷矢量平均值

解：　已知空气中　$v = 3.0\times 10^8\ m/s$　　$\eta_0 = 377\Omega$

（1）$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{kv}{2\pi} = 826\ \mathrm{MHz}$　　$\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 0.363m$

（2）$\boldsymbol{e}_H = \boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_y$ ⟹ $\boldsymbol{e}_E = \boldsymbol{e}_H \times \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$

⟹ $\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{e}_z 50\eta_0 e^{-j(17.3y-\pi/3)}\ \mathrm{\mu V/m} = \boldsymbol{e}_z 18.85 e^{-j(17.3y-\pi/3)}\ \mathrm{mV/m}$

（3）$\boldsymbol{S}_{av} = \mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*\right] = \boldsymbol{e}_y\left(18.85\times10^{-3}\times50\times10^{-6}\right)\mathrm{W}/m^2$

$$= \boldsymbol{e}_y 0.94\ \mu\mathrm{W}/m^2$$

例5-3 已知调频广播电磁波的电场为 $\dot{\boldsymbol{E}} = 0.55\left(\boldsymbol{e}_x + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_y\right)e^{-j0.17\pi\left(3x-\sqrt{3}y+2z\right)}\ \mathrm{V}/m$

（1）频率和波长　（2）磁场强度　（3）坡印廷矢量平均值

解:

（1）由题意可知 $\boldsymbol{k} = 0.17\pi\left(3\boldsymbol{e}_x - \sqrt{3}\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z\right) = \underline{0.68\pi}\left(\dfrac{3\boldsymbol{e}_x - \sqrt{3}\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z}{4}\right)$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kv}{2\pi} = 102\,\mathrm{MHz} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 2.94m$$

（2）$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_k \times \dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{377}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{3}{4} & -\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{2}{4} \\ 0.55 & 0.55\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} e^{-j0.17\pi\left(3x-\sqrt{3}y+2z\right)}$$

5. 电磁场辐射与电磁波

$$=729.4\left(-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_z\right)e^{-j0.17\pi\left(3x-\sqrt{3}y+2z\right)}\ \mu\mathrm{A}/m$$

（3） $$\boldsymbol{S}_{av}=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right]=0.55\times729.4\times10^{-6}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{3}\end{vmatrix}$$

$$=0.00401\left(6\boldsymbol{e}_x-2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$=3.2\boldsymbol{e}_k\,\mathrm{mW}/m^2$$