电路理论
Principles of Electric Circuits

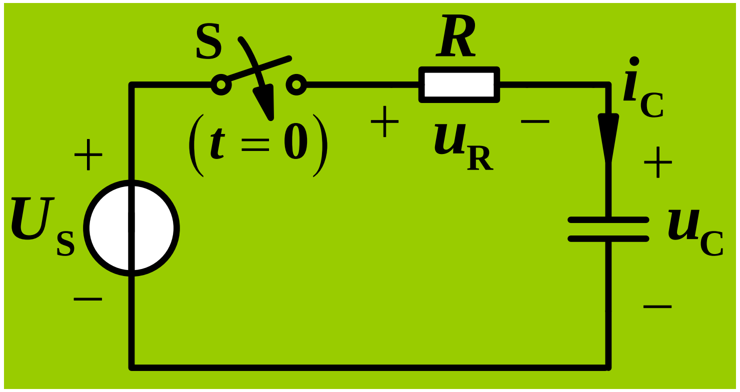
第七章 线性动态电路的时域分析

§ 7.3 线性动态电路的经典分析法

§ 7.3 线性动态电路的经典分析法

【引例】 已知：$u_C(0_-)=U_0$，

求：电容电压$u_C(t)$。



$$\begin{cases} u_R + u_C = U_S \\ i_C = C\dfrac{du_C}{dt} \\ u_R = i_C R \end{cases} \rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$ 非齐次微分方程

↓ 对应

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$ 齐次微分方程

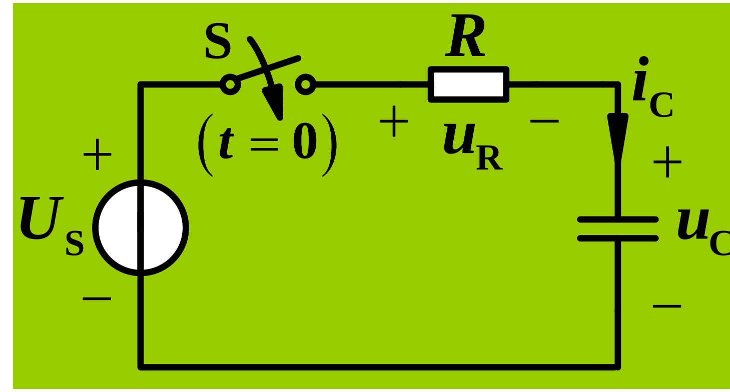
↓ 对应

$$RC\lambda + 1 = 0$$ 特征方程

$$\lambda = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

特征根

§ 7.3 线性动态电路的经典分析法



【引例】 已知：$u_C(0_-)=U_0$，

求：电容电压$u_C(t)$。

全解： $u_C(t)=$ 特解 $+$ 通解

$$=u_{Cp}(t)+u_{Ch}(t)$$

$$=U_S+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(0_+)=U_S+A$$

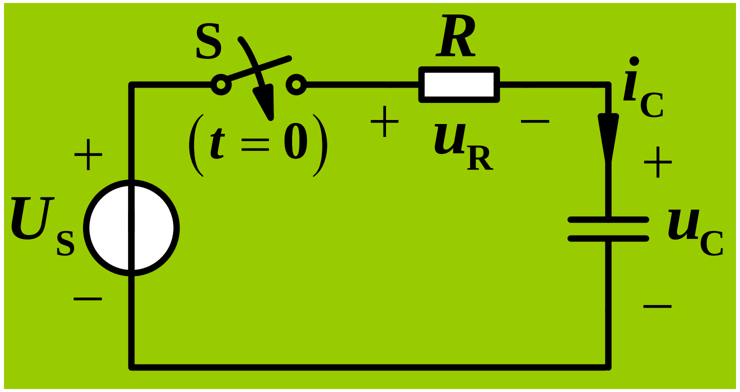
$$A=U_0-U_S$$

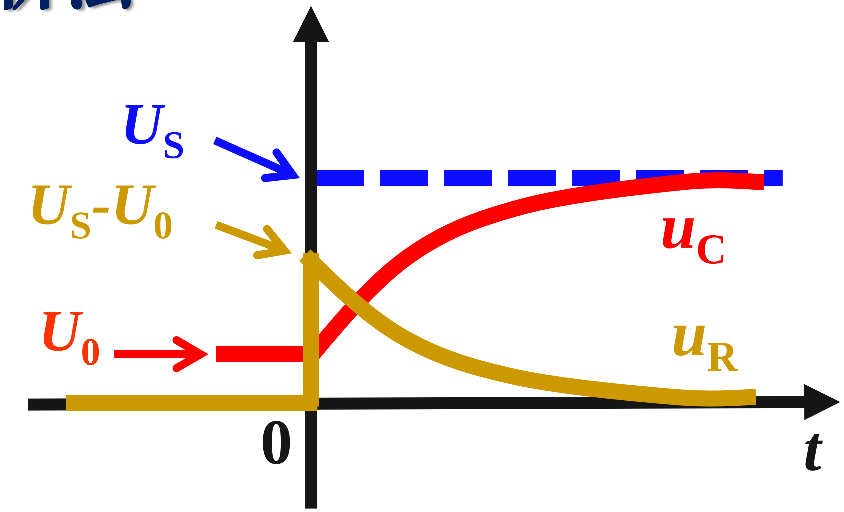
$$\lambda=-\frac{1}{RC}=-\frac{1}{\tau}$$

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-t/RC} \quad t\geq 0$$

$$u_R(t)=R\cdot i_C(t)=RC\frac{du_C}{dt}=(U_S-U_0)e^{-t/RC} \quad t\geq 0_+$$

§ 7.3 线性动态电路的经典分析法





$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S \longrightarrow \lambda=-\frac{1}{RC} \longrightarrow u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-t/RC} \quad t\ge 0$$

$$i_C=C\frac{du_C}{dt}=\frac{(-U_0+U_S)e^{-t/RC}}{R} \quad t\ge 0 \longrightarrow u_R=(U_S-U_0)e^{-t/RC} \quad t\ge 0_+$$

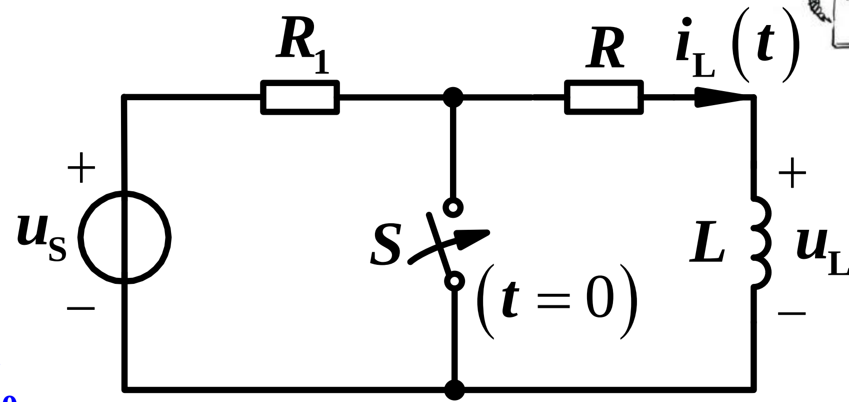
RC一阶电路的时间常数: $\tau=RC$

$$[\tau]=[RC]=[欧][法]=[欧]\left[\frac{库}{伏}\right]=[欧]\left[\frac{安秒}{伏}\right]=[秒]$$

§ 7.3 线性动态电路的经典分析法

【例】求图示电路中电流$i_L(t)$。

物理意义为何? 弹幕



$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+i=0$$

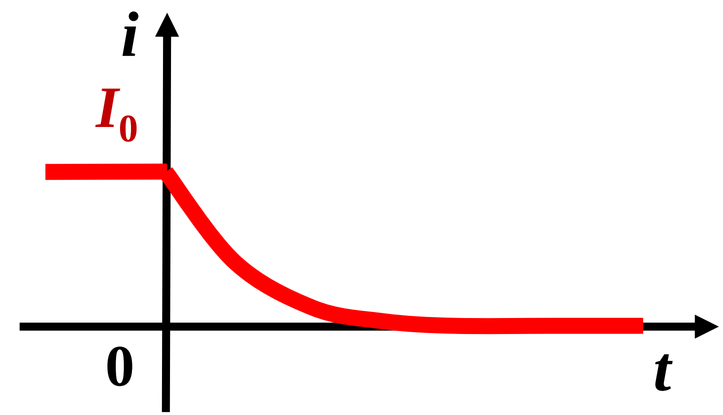
$$i_L(0_-)=\frac{U_S}{R_1+R}$$

由 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=\dfrac{U_S}{R_1+R}=I_0$

$$i_L(t)=I_0e^{-\frac{t}{L/R}}\qquad t\ge 0$$

特征方程 $\dfrac{L}{R}\lambda+1=0$

特征根 $\lambda=-\dfrac{R}{L}=-\dfrac{1}{\tau}$

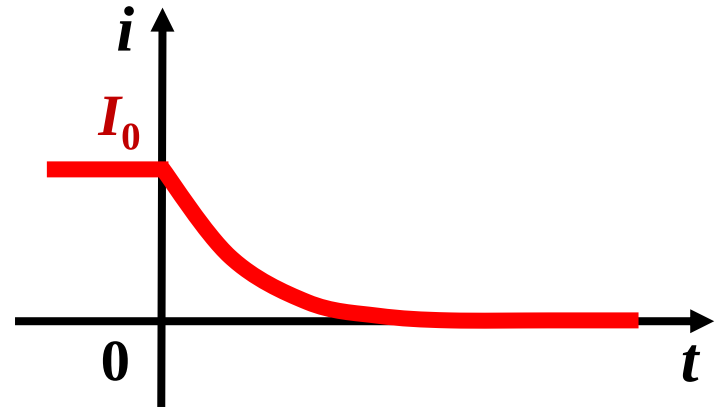


$$i_L(t)=0+Ae^{-t/\tau}$$

则 $i_L(0_+)=Ae^{-t/0_+}=A=I_0$

§ 7.3 线性动态电路的经典分析法

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0$$



时间常数的意义：

t	0	τ	2τ	3τ	5τ	…	∞
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}	e^{-5}		$e^{-\infty}=0$
$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	I_0	$0.368\ I_0$	$0.135\ I_0$	$0.05\ I_0$	$0.007 I_0$		0

工程上通常认为 $3\tau \sim 5\tau$ 后过渡过程结束。

★ 时间常数 τ **越小**，电压/电流变化**越快**。

§ 7.3 线性动态电路的经典分析法

线性动态电路的经典分析法步骤:

1. 列（有关待求支路量的）输入输出方程;

2. 由 0_- 时刻电路求 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 的值;

3. 作 0_+ 时刻电路，求待求支路量的 0_+ 时刻值;

4. 由输入输出方程对应的特征方程，得**通解**;

5. 求非齐次微分方程的一个**特解**，得到非齐次微分方程的**全响应**;

全响应＝通解＋特解

6. 由 0_+ 时刻的初始值确定全响应中的**待定系数**。

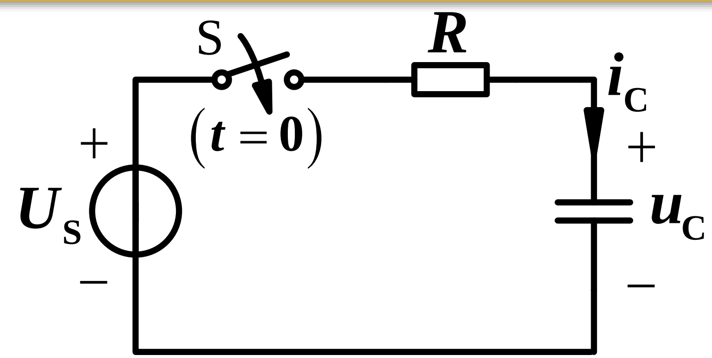
电路理论
Principles of Electric Circuits

第七章 线性动态电路的时域分析

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法

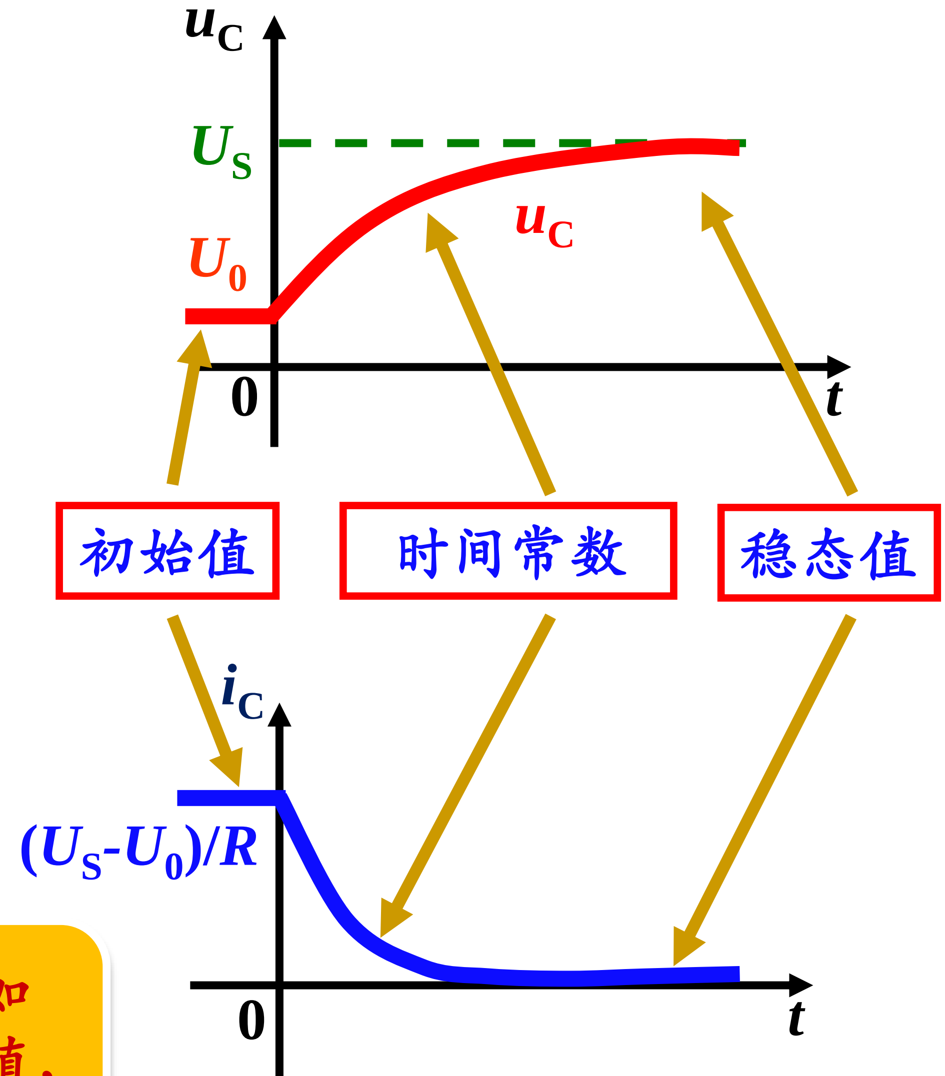
§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法

直流激励下的三要素法



$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-t/RC} \quad t \ge 0$$

$$i_C = \frac{1}{R}(U_S - U_0)e^{-t/RC} \quad t \ge 0_+$$



解微分方程太麻烦，如果能直接求得这三个值，是不是就省事儿了？？

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法

一阶电路输入输出方程的一般形式:

$$\tau\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=f$$

待定

$$y(t)=\text{特解}+Ae^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{直流激励}} \text{特解}=y(\infty)$$

$$y(t)=y(\infty)+Ae^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{y(0_+)=y(\infty)+A} A=y(0_+)-y(\infty)$$

★

$$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}\quad\left(t\geq 0_+\right)$$

直流一阶电路的三要素公式

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法

$$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0_+)$$

直流一阶电路的三要素公式

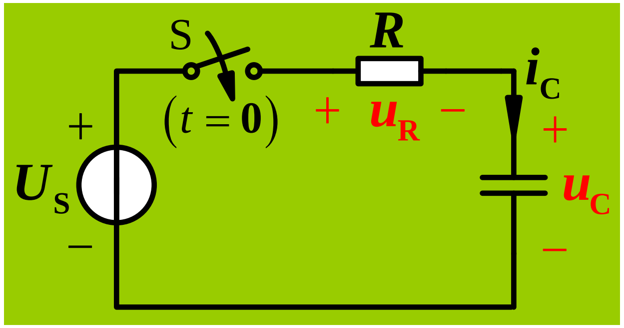
三要素

- $y(\infty)$　由$t\to\infty$的稳态电路求**稳态解**
- $y(0_+)$　由0_+时刻的稳态电路求**初始值**
- τ　**时间常数**　$\tau=R_{eq}C=\dfrac{L}{R_{eq}}$

分析直流一阶线性电路的问题转变为求解电路的三要素问题。

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法

【引例】已知：$u_C(0_-)=U_0$，
用三要素法求电容电压$u_C(t)$，$u_R(t)$。



三要素公式

$$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0_+)$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$$
$$u_C(\infty)=U_S$$
$$\tau=RC$$

电阻电路

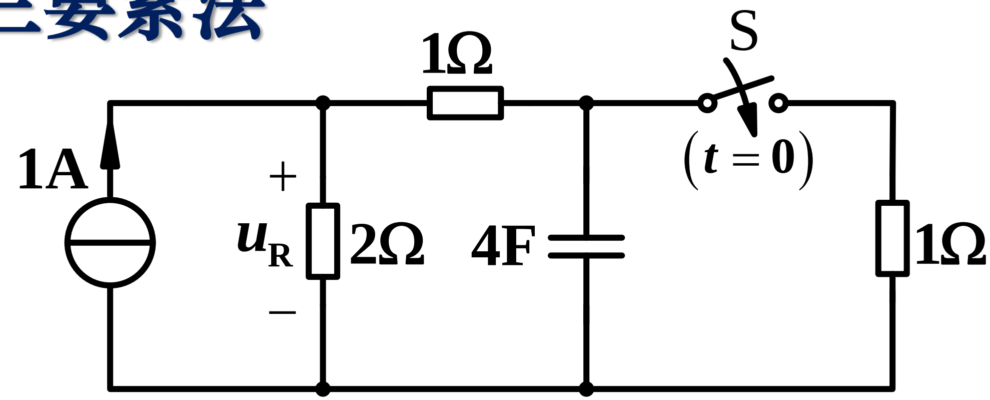
$$u_R(0_+)=U_S-U_0$$
$$u_R(\infty)=0$$
$$\tau=RC$$

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq 0)$$

$$u_R(t)=(U_S-U_0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t>0_+)$$

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法

【例】 开关动作前电路已达稳态，求$u_R(t)$。



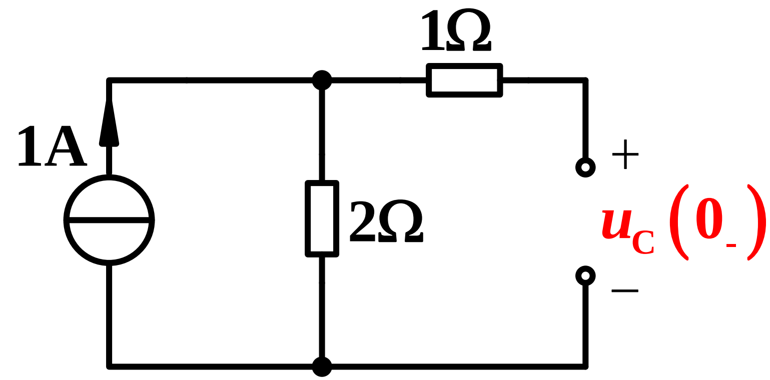
解：

1） 求初始值

作0_-时刻电路

$$u_C(0_-) = 2\,\text{V}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\,\text{V}$$

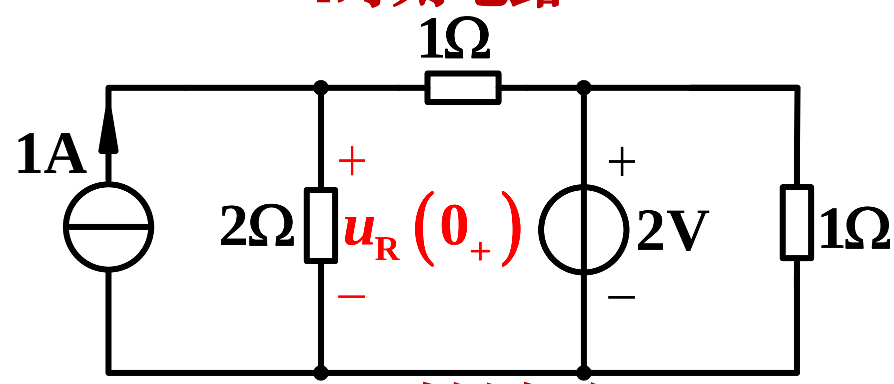


0_-时刻电路

作0_+时刻电路

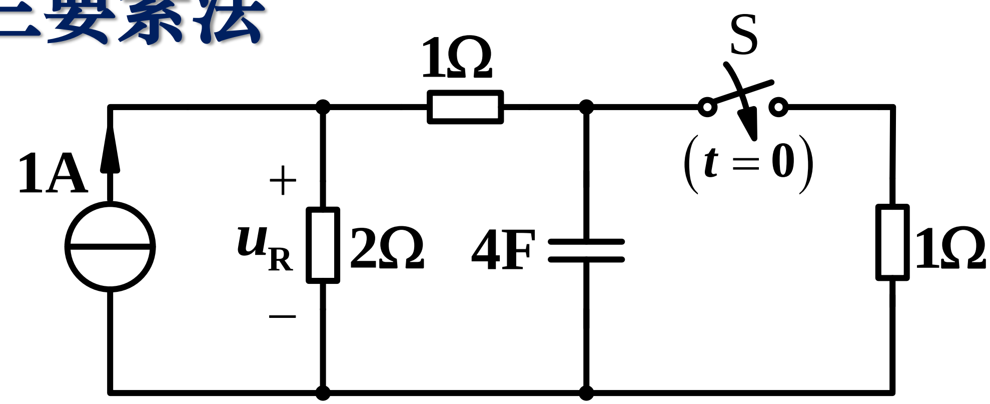
$$\frac{u_R(0_+) - 2}{1} + \frac{u_R(0_+)}{2} = 1$$

$$u_R(0_+) = 2\text{V}$$



0_+时刻电路

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法



【例】开关动作前电路已达稳态，求$u_R(t)$。

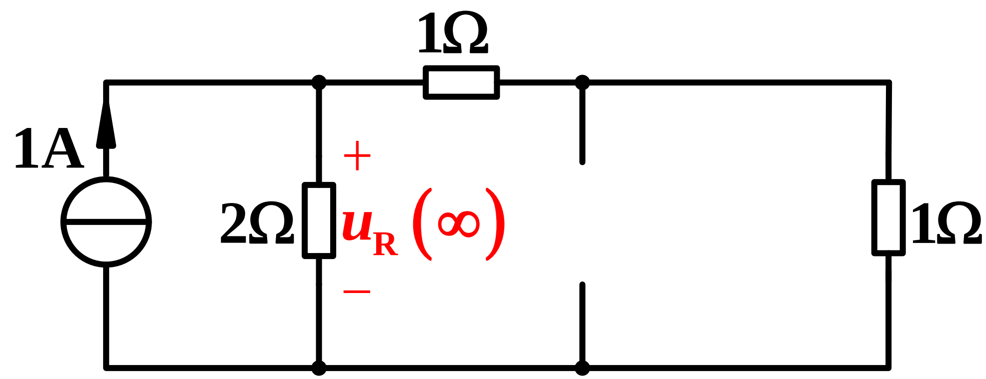
解：

1）求初值

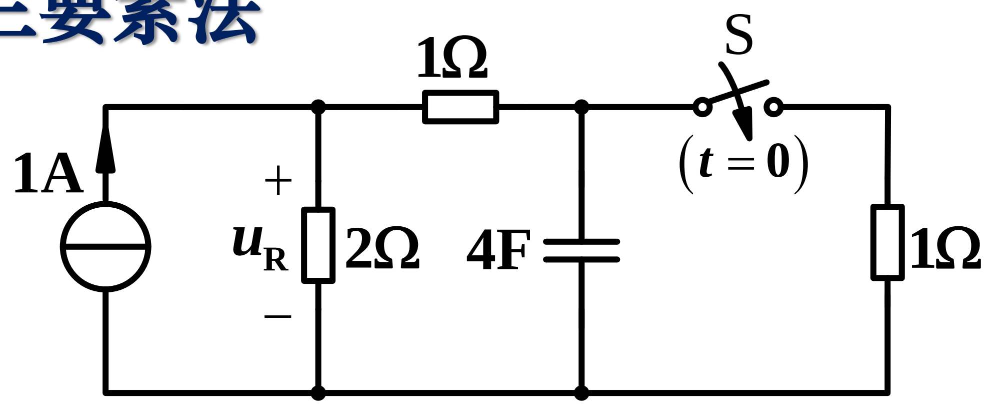
$$u_R(0_+) = 2\text{V}$$

2）求稳态值

$$u_R(\infty) = 1\text{V}$$



∞时刻电路

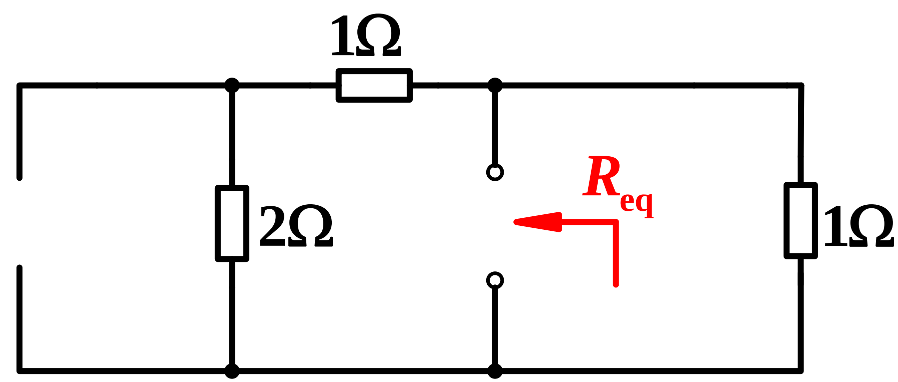


【例】开关动作前电路已达稳态，求$u_R(t)$。

解：

1）求初值

$$u_R(0_+)=2V$$



2）求稳态值

$$u_R(\infty)=1V$$

3）求时间常数

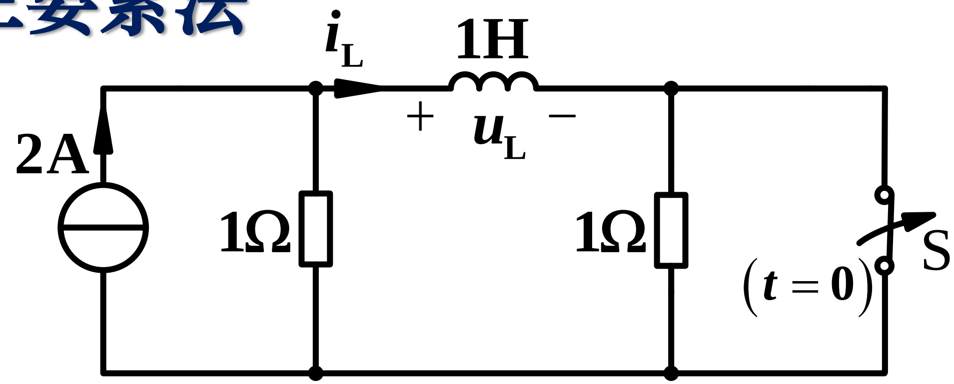
$$\tau=R_{eq}C=\frac{3}{4}\times4=3s$$

4）三要素公式

$$u_R(t)=u_R(\infty)+\left[u_R(0_+)-u_R(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\geq0_+)$$

$$=1+\left[2-1\right]e^{-\frac{t}{3}}=1+e^{-\frac{t}{3}}\quad(t\geq0_+)$$

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法



【例】开关动作前电路已达稳态，求$i_L(t)$和$u_L(t)$。

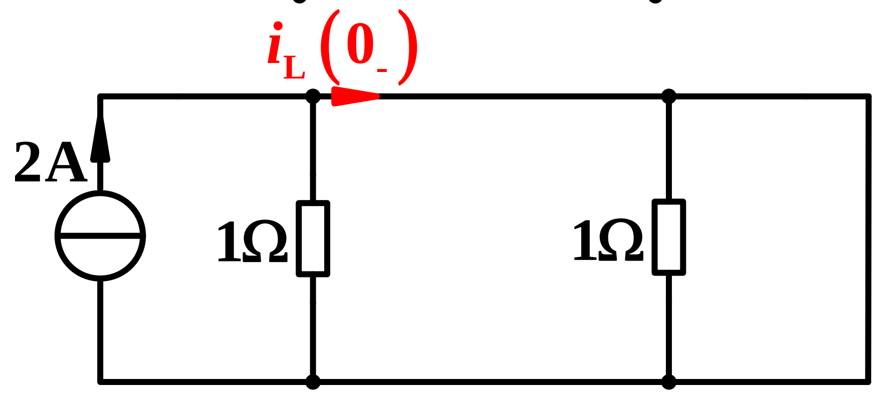
解：

1）求初值

作0_时刻电路

$$i_L(0_-)=2\text{ A}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\text{ A}$$

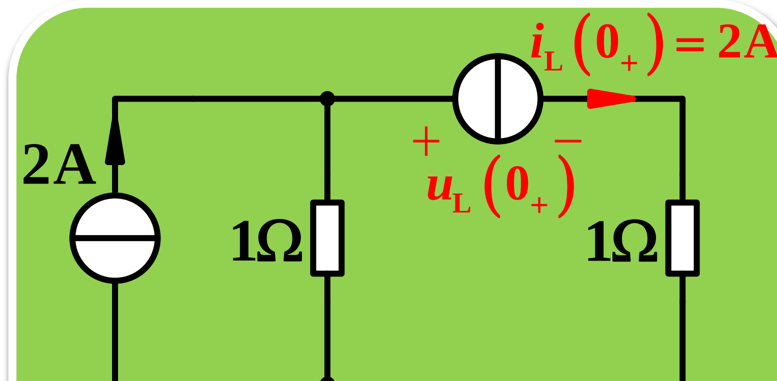


0_时刻电路

作0+时刻电路

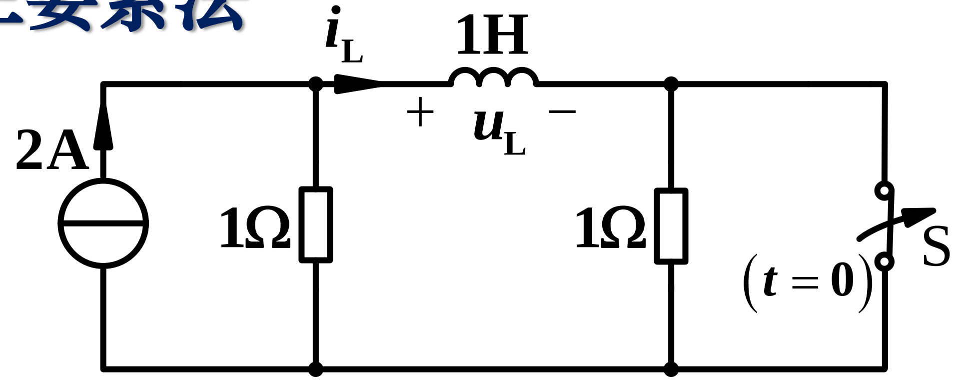
$$u_L(0_+)=\left[2-i_L(0_+)\right]\times 1-i_L(0_+)\times 1$$

$$=-2\text{V}$$



0_+时刻电路

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法



【例】开关动作前电路已达稳态，求$i_L(t)$和$u_L(t)$。

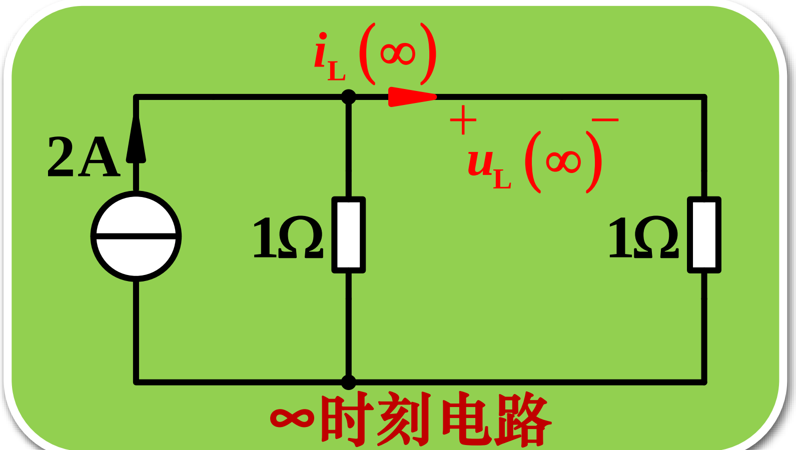
1）求初始值

$$i_L(0_+) = 2\,\text{A} \quad u_L(0_+) = -2\,\text{V}$$

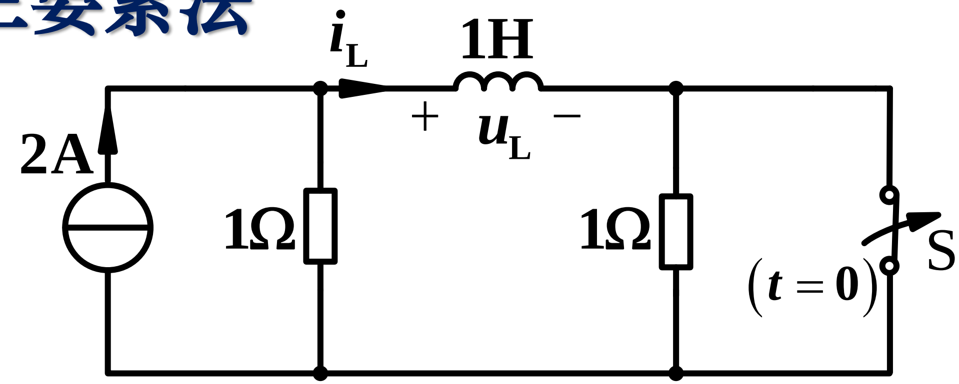
2）求稳态值

$$u_L(\infty) = 0\text{V}$$

$$i_L(\infty) = \frac{1}{2} \times 2 = 1\text{A}$$



§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法



【例】开关动作前电路已达稳态，求$i_L(t)$和$u_L(t)$。

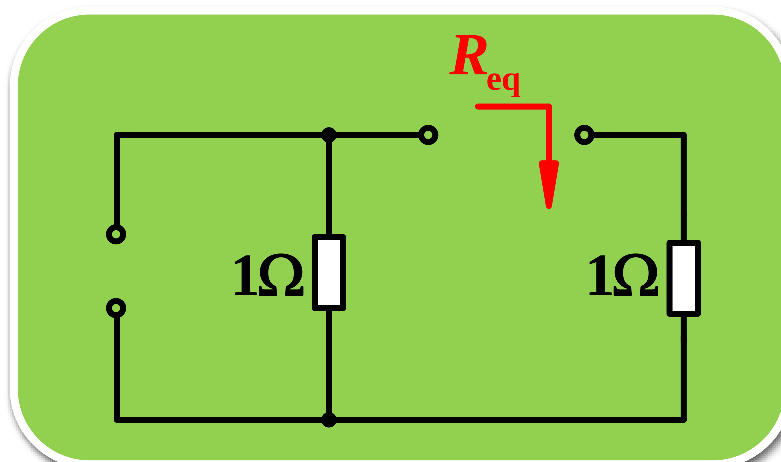
1）求初始值

$$i_L(0_+)=2\,\text{A}\qquad u_L(0_+)=-2\,\text{V}$$

2）求稳态值

$$u_L(\infty)=0\text{V}$$

$$i_L(\infty)=\frac{1}{2}\times 2=1\text{A}$$



3）求时间常数

$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{1}{2}=0.5\text{s}$$

4）

$$u_L(t)=u_L(\infty)+[u_L(0_+)-u_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

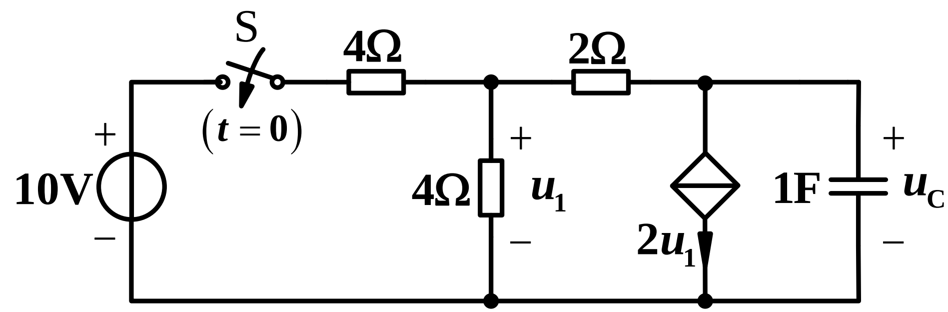
$$=-2e^{-2t}\ \text{V}\qquad (t\geq 0_+)$$

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=1+e^{-2t}\ \text{A}\qquad (t\geq 0)$$

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法

【例】电容原未被充电，$t=0$时刻开关闭合，求开关闭合后的$u_C(t)$。



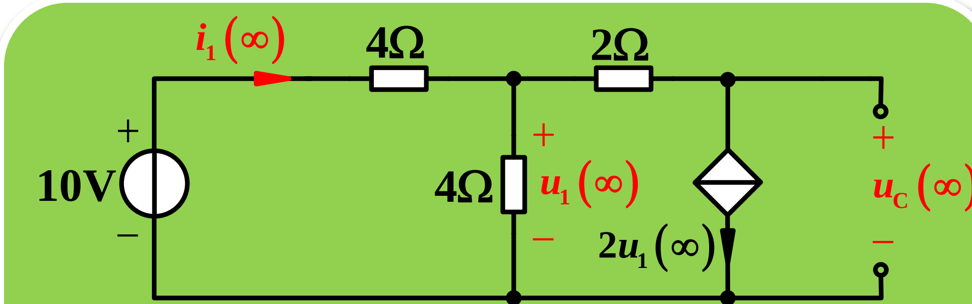
解：

1）求初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\ \text{V}$$

2）求稳态值

$$\begin{cases} i_1(\infty) = \dfrac{u_1(\infty)}{4} + 2u_1(\infty) \\ 10 = 4i_1(\infty) + u_1(\infty) \end{cases}$$



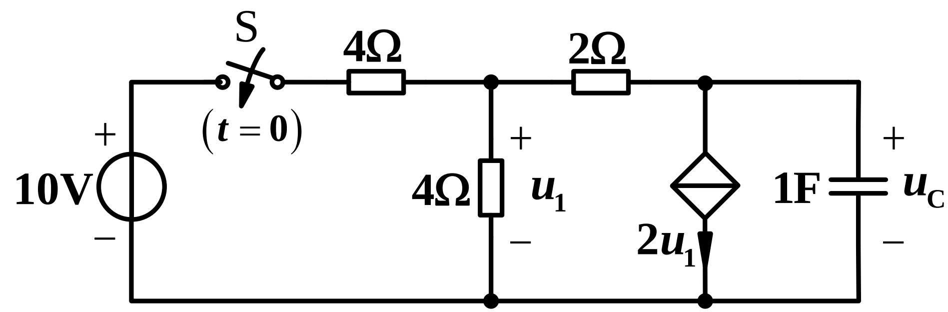
∞时刻电路

联立可得

$$u_1(\infty) = 1\text{V}$$

则 $U_C(\infty) = -2\times 2u_1(\infty) + u_1(\infty) = -2\times 2 + 1 = -3\text{V}$

【例】电容原未被充电，t =0时刻开关闭合，求开关闭合后的$u_C(t)$。



解:

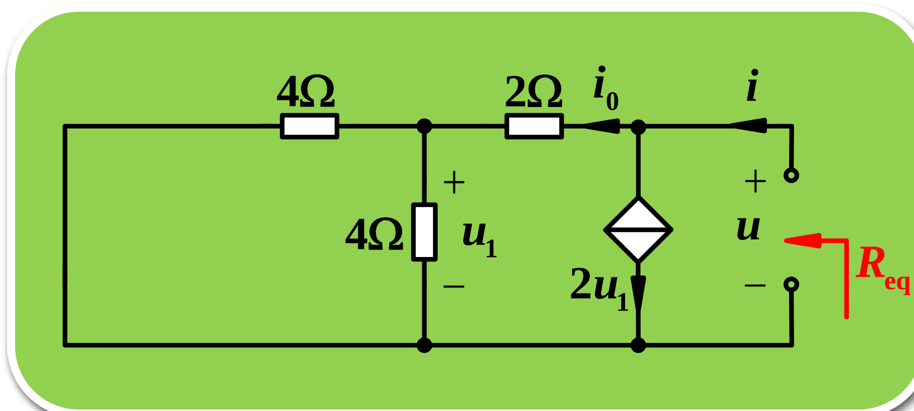
1）求初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{ V}$$

2）求稳态值

$$U_C(\infty) = -3\text{V}$$

3）求时间常数



$$i_0 = \frac{u}{2+4//4} = \frac{u}{4}$$

$$u_1 = (4//4)i_0 = 2i_0 = \frac{u}{2}$$

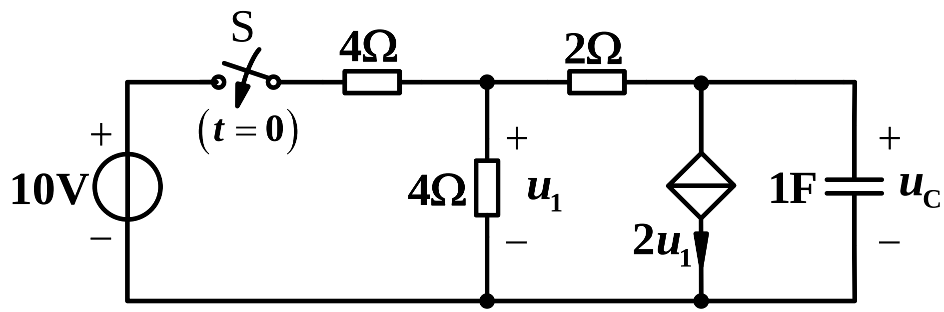
则 $i = i_0 + 2u_1 = \frac{u}{4} + 2\times\frac{u}{2} = \frac{5}{4}u$

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = 0.8\Omega$$

$$\tau = R_{eq}C = 0.8\text{s}$$

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法

【例】电容原未被充电，t =0时刻开关闭合，求开关闭合后的$u_C(t)$ 。



解：

1）求初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{ V}$$

2）求稳态值

$$U_C(\infty) = -3\text{V}$$

3）求时间常数

$$\tau = R_{eq}C = 0.8\text{s}$$

4）由三要素公式求响应

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= -3 + [0 - (-3)]\mathrm{e}^{-1.25t}$$

$$= -3 + 3\mathrm{e}^{-1.25t}\ \text{V} \qquad (t \geq 0)$$

§ 7.4 直流一阶线性电路的三要素法

三要素公式

$$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad\left(t\geq 0_+\right)$$

说明：

（1）适用于**直流激励下**的任何线性动态电路；

（2）仅适用于**一阶**动态电路；

（3）适用于一阶**初始值、稳态值、时间常数**容易求得的动态电路；

（4）可用于求直流一阶电路中**任意支路**的**电压**或**电流**。

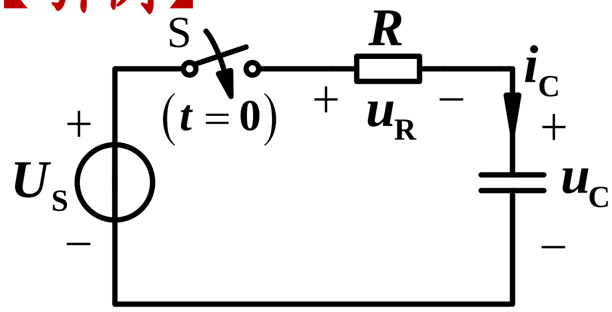
正弦激励下的动态电路如何分析？？

电路理论
Principles of Electric Circuits

第七章 线性动态电路的时域分析

§7.5 线性特性和时不变特性

【引例】



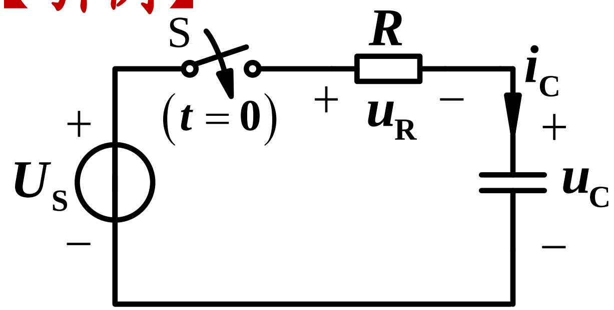
已知 $u_C(0_-)=U_0$，求开关闭合后的$u_C(t)$。

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(0_+)=U_0 \qquad u_C(\infty)=U_S \qquad \tau=RC$$

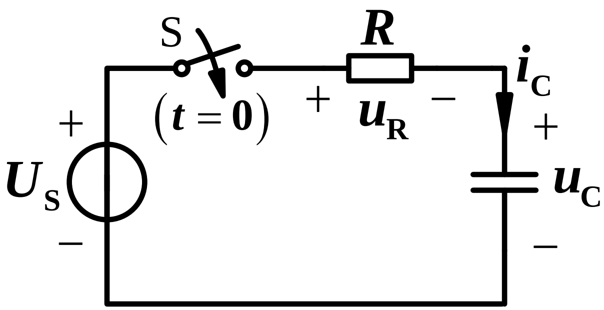
§ 7.5 线性特性和时不变特性——线性特性

【引例】



已知 $u_C(0_-)=U_0$，求开关闭合后的$u_C(t)$。

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq0)$$

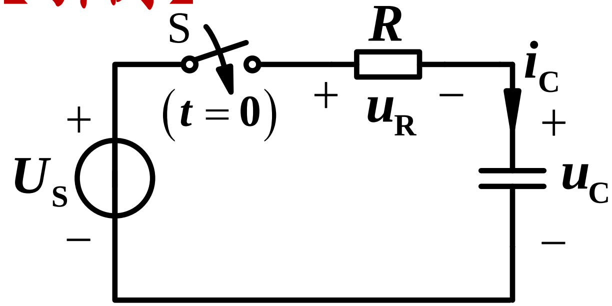


已知 $u_C(0_-)=0\text{V}$

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

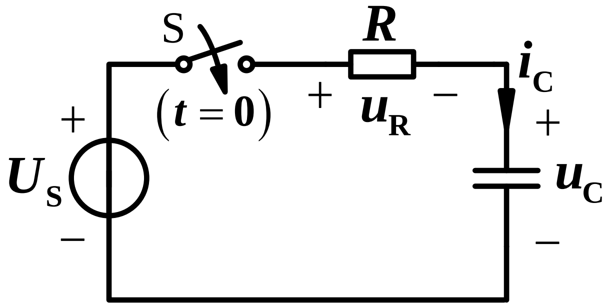
$u_C(0_+)=0$ $u_C(\infty)=U_S$ $\tau=RC$

【引例】



已知 $u_C(0_-)=U_0$，求开关闭合后的$u_C(t)$。

$$u_C(t)=U_S+\left(U_0-U_S\right)e^{-\frac{t}{RC}}\quad\left(t\geq 0\right)$$



已知 $u_C(0_-)=0V$

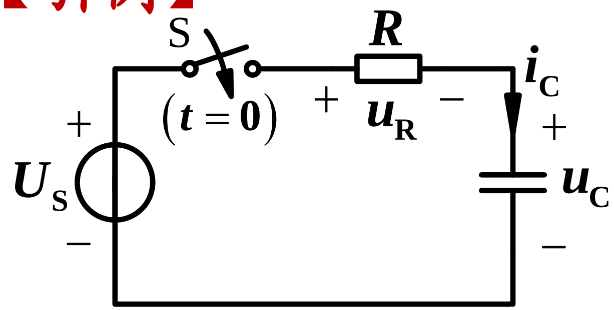
零状态响应

（储能元件无初始储能）

$$u_C(t)=U_S+\left(0-U_S\right)e^{-\frac{t}{RC}}\quad\left(t\geq 0\right)$$

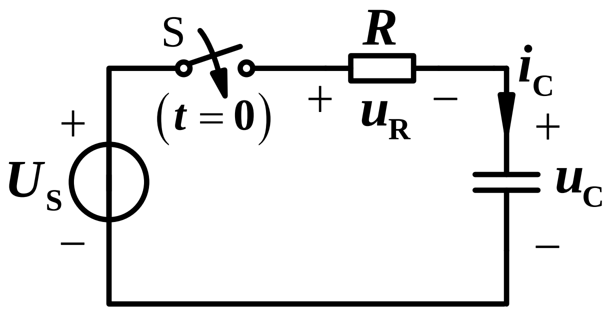
§ 7.5 线性特性和时不变特性——线性特性

【引例】



已知 $u_C(0_-)=U_0$，求开关闭合后的$u_C(t)$。

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$

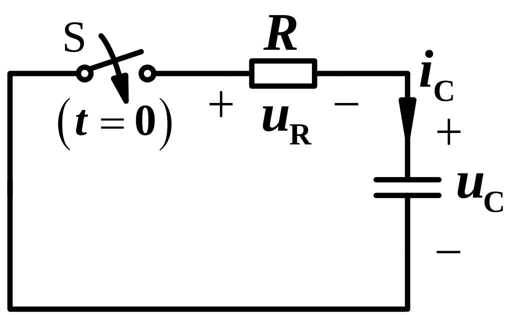


已知 $u_C(0_-)=0\text{V}$

零状态响应

（储能元件无初始储能）

$$u_C(t)=U_S+(0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$



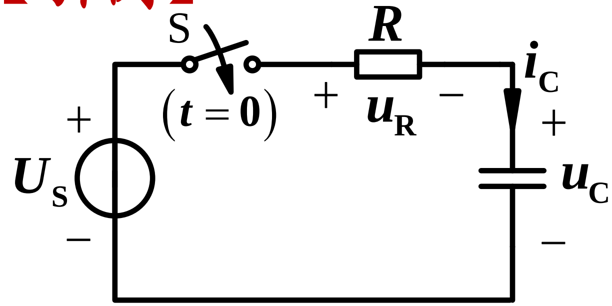
已知 $u_C(0_-)=U_0$

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(0_+)=U_0\qquad u_C(\infty)=0\qquad \tau=RC$$

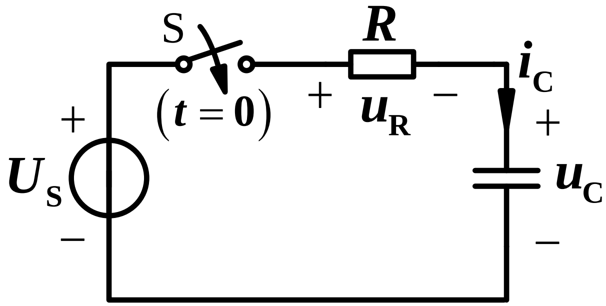
§ 7.5 线性特性和时不变特性——线性特性

【引例】



已知 $u_C(0_-)=U_0$，求开关闭合后的$u_C(t)$。

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$

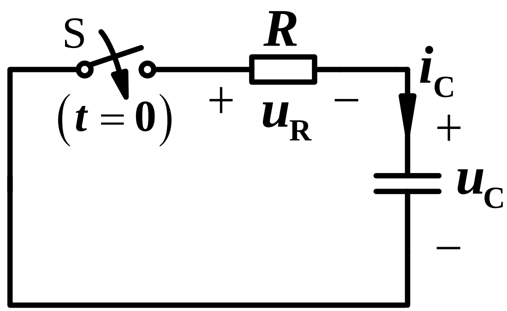


已知 $u_C(0_-)=0\text{V}$

零状态响应

（储能元件无初始储能）

$$u_C(t)=U_S+(0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$



已知 $u_C(0_-)=U_0$

零输入响应

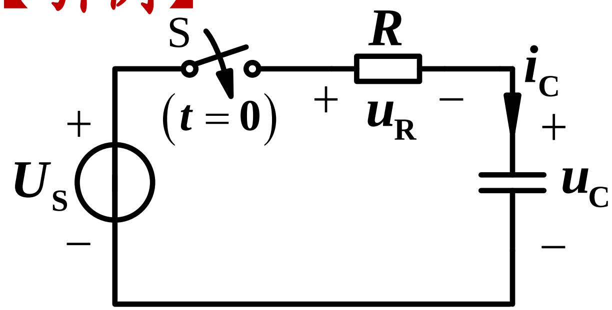
（无外加电源）

$$u_C(t)=U_0e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$

§ 7.5 线性特性和时不变特性

发现了什么？
弹幕

【引例】

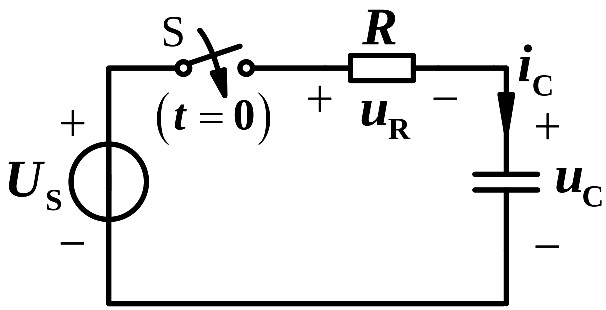


已知 $u_C(0_-)=U_0$，求开关闭合后的$u_C(t)$。

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$

全响应

=



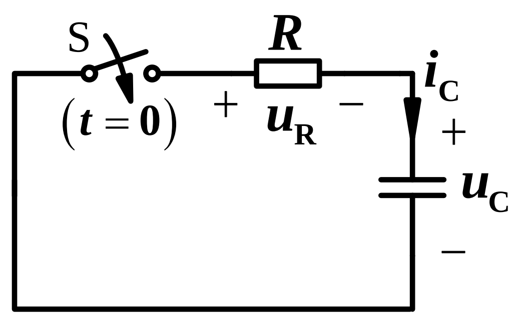
已知 $u_C(0_-)=0\text{V}$

零状态响应

（储能元件无初始储能）

$$u_C(t)=U_S+(0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$

+



已知 $u_C(0_-)=U_0$

零输入响应

（无外加电源）

$$u_C(t)=U_0e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$

★ 叠加

§ 7.5 线性特性和时不变特性——线性特性

零输入响应：无外加激励，仅由*L*、*C*初始储能引起的响应。

(zero-input response) (ZIR)

零状态响应：L、C无初始储能，仅由外加激励引起的响应。

(zero-state response) (ZSR)

全响应

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$

$$=\underbrace{U_0e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{U_S\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}_{\text{零状态响应}}\quad(t\geq 0)$$