工程电磁场

稻叶先生

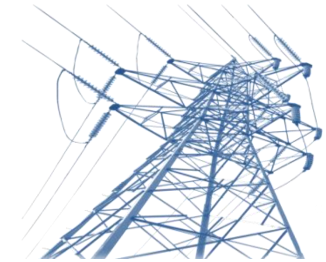
4. 动态电磁场 基本理论与准静态电磁场

4.1 动态电磁场基本方程与边界条件

4.1.1 动态电磁场的基本方程

	积分方程	微分方程
全电流定律：	$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
电磁感应定律：	$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_S\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
磁通连续性：	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$
高斯定理：	$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \rho dV$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$

本构关系： $\boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 参数与频率也有关系



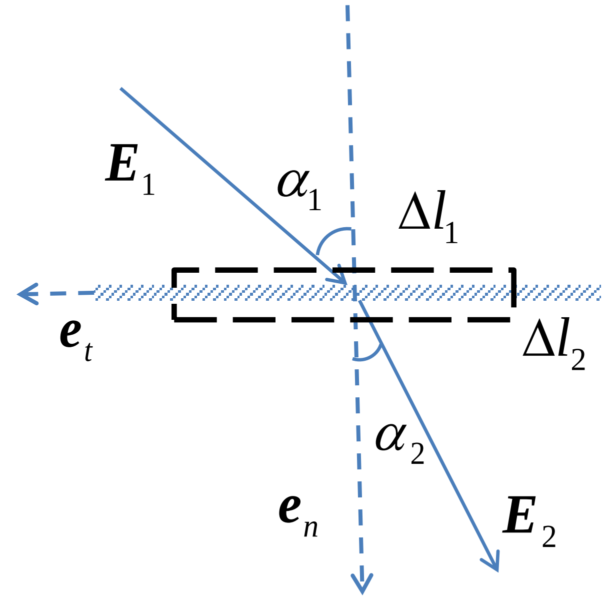
4.1.2 动态电磁场的边界条件

（1）不同媒质分界面

由 $$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\Rightarrow\quad E_{1t}\Delta l_1 - E_{2t}\Delta l_1 = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\bigg|_{\tau}\Delta l_1\Delta l_2$$

$$\Rightarrow\quad E_{1t} - E_{2t} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\bigg|_{\tau}\Delta l_2 \quad\Rightarrow\quad E_{1t} - E_{2t} = 0$$



$$\boldsymbol{e}_\tau = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{e}_t$$

同理由 $$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \quad\Rightarrow\quad H_{1t} - H_{2t} = K$$

对于**B**，**D**的边界条件，同理可得 $B_{1n} = B_{2n}$ $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$

4.1.2 动态电磁场的边界条件

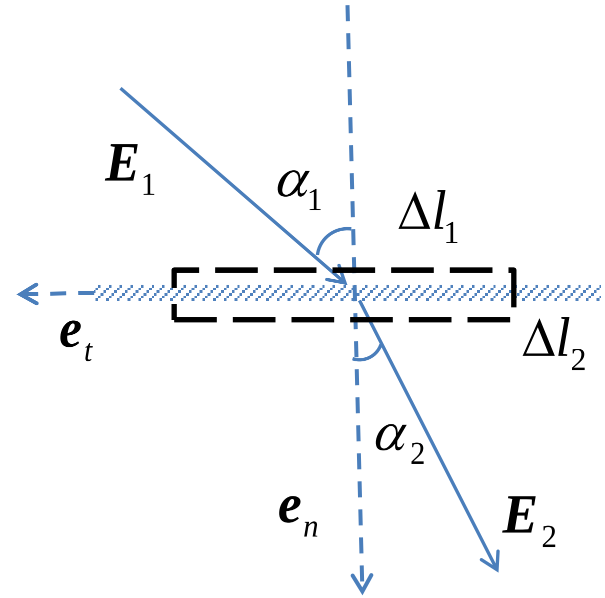
矢量形式：

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{K}$$

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

$$\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0$$

$$\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma$$



$$\boldsymbol{e}_\tau = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{e}_t$$

（2）理想导体与介质

理想导体内：$\gamma_1 \to \infty$ $\quad J_{c1} = C < \infty \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_1 = 0$

由 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = 0$ 或者 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ 静态场不考虑

4.1.2 动态电磁场的边界条件

由此可得 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{H}_1=0$ $\quad$ $\boldsymbol{D}_1=\varepsilon\boldsymbol{E}_1=0$

结合一般条件下（两种不同介质）的边界条件适量形式，

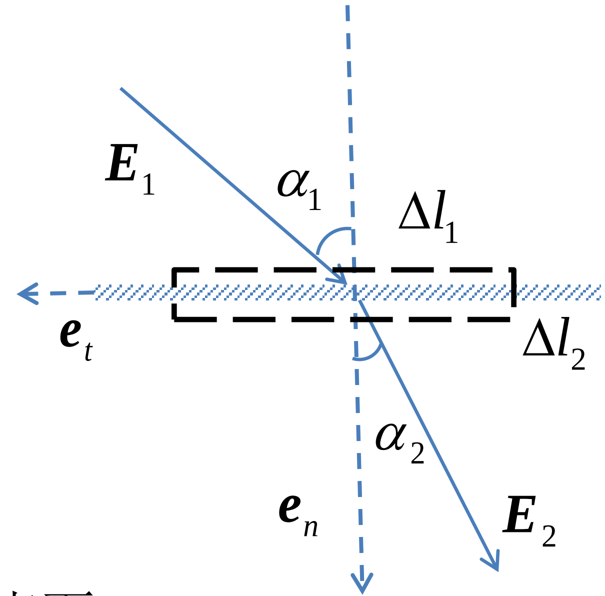
$$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{K}$$

$$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}_1=0$$

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{B}_1=0$$

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}_2=\sigma$$

⇒ 电场线垂直于导体表面，磁场线沿理想导体表面



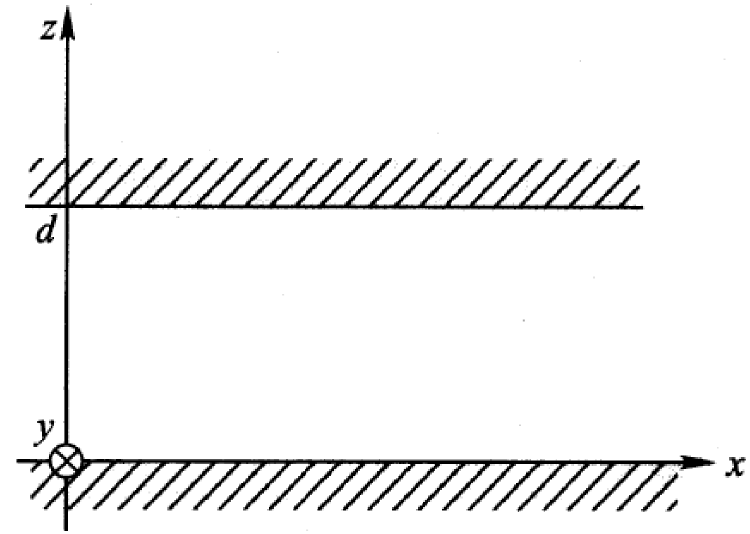
$$\boldsymbol{e}_\tau=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{e}_t$$

例4-1：无限大理想导体平板间的无源自由空间中，动态电磁场的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_y H_0 \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos\left(\omega t - \beta x\right)$$

求：（1）板间时变的电场强度 $\boldsymbol{E}$；

（2）两导体表面上时变的面电流密度 K 和电荷面密度 σ。



解（1）：

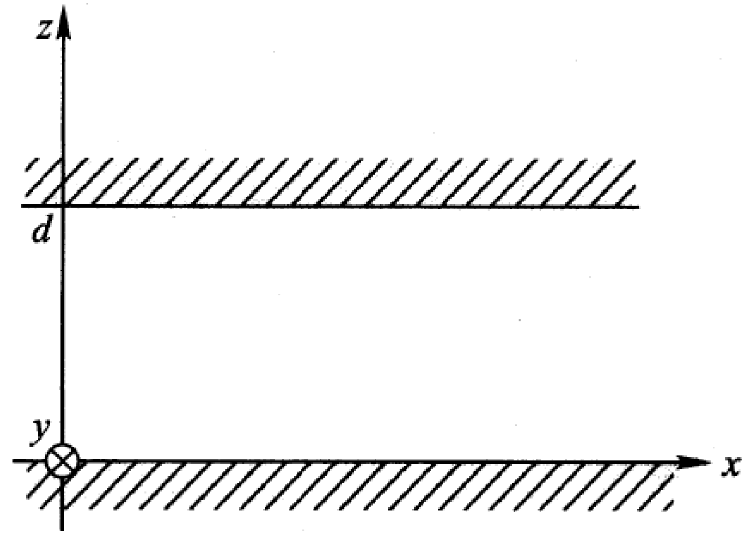
由无源空间以及 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\varepsilon}\left(-\boldsymbol{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial H_y}{\partial x}\right)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon}\int\left(-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial H_y}{\partial z}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)dt$$

$$=\frac{H_0}{\omega\varepsilon}\left[\frac{\pi}{d}\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)\sin(\omega t-\beta x)\boldsymbol{e}_x\right.$$

$$\left.-\beta\cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)\cos(\omega t-\beta x)\boldsymbol{e}_z\right]$$



（2）

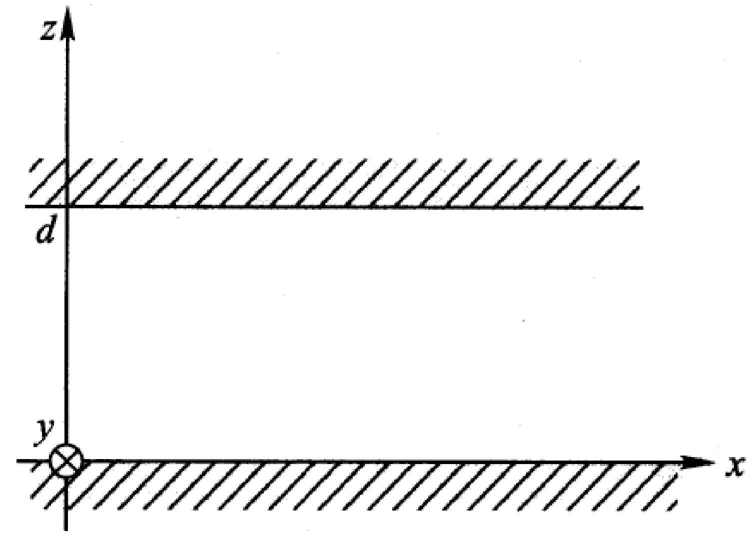
两个导体表面，即导体真空交界面，分别讨论。当z=0时

交界面的法向： $\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_z$

由理想导体与介质交界面连续性条件，$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{K}$ ，可得

$$\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}_2=\left(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y\right)H_0\cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)\cos(\omega t-\beta x)\Big|_{z=0}=-\boldsymbol{e}_xH_0\cos(\omega t-\beta x)$$

4. 动态电磁场　基本理论与准静态电磁场



$$\sigma' = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{e}_n \cdot \left(\varepsilon \boldsymbol{E}_2\right)$$

$$= \boldsymbol{e}_z \cdot \varepsilon \frac{H_0}{\omega\varepsilon}\left[\frac{\pi}{d}\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)\sin\left(\omega t-\beta x\right)\boldsymbol{e}_x \right.$$

$$\left. -\beta\cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)\cos\left(\omega t-\beta x\right)\boldsymbol{e}_z\right]_{z=0}$$

$$= -\frac{\varepsilon H_0}{\omega\varepsilon}\beta\cos\left(\frac{\pi}{d}z\right)\cos\left(\omega t-\beta x\right)\Big|_{z=0} = -\frac{\beta H_0}{\omega}\cos\left(\omega t-\beta x\right)$$

当$z=d$时　　交界面的法向：　$\boldsymbol{e}_n = -\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{K}'' = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{H}_2 = -\boldsymbol{e}_x H_0 \cos\left(\omega t-\beta x\right) \qquad \sigma'' = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{D}_2 = -\frac{\beta H_0}{\omega}\cos\left(\omega t-\beta x\right)$$

4.2 时谐电磁场

4.2.1 时谐场的复数表示

背景： 工程中，场源及其所产生的电场、磁场都随时间作正弦变化，非正弦变化也可以分解为基波及高次谐波分量的叠加。

时谐电磁场： 随时间作正弦变化的时变电磁场

瞬时矢量：
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_x E_{xm}(\boldsymbol{r})\left[\cos\omega t+\phi_x(\boldsymbol{r})\right]+\boldsymbol{e}_y E_{ym}(\boldsymbol{r})\left[\cos\omega t+\phi_y(\boldsymbol{r})\right]$$
$$+\boldsymbol{e}_z E_{zm}(\boldsymbol{r})\left[\cos\omega t+\phi_z(\boldsymbol{r})\right] \qquad (1)$$

$E_{xm}(\boldsymbol{r})$ 振幅 $\qquad$ $\phi_x(\boldsymbol{r})$ 初相位

采用正弦量的相量表示法，上式可以表示为如下复矢量（相量）：

4. 动态电磁场 基本理论与准静态电磁场

4.2.1 时谐场的复数表示

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_x\dot{E}_{xm}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{e}_y\dot{E}_{ym}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{e}_y\dot{E}_{ym}(\boldsymbol{r}) \qquad (2)$$

其中 $\dot{E}_{xm}(\boldsymbol{r})=E_{xm}e^{j\phi_x}$ $\quad \dot{E}_{ym}(\boldsymbol{r})=E_{ym}e^{j\phi_y}$ $\quad \dot{E}_{zm}(\boldsymbol{r})=E_{zm}e^{j\phi_z}$

考虑（1）与（2）的关系，

$(1)\rightarrow(2)$:

a. 将（1）式中各方向的分量加上虚部，

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_xE_{xm}(\boldsymbol{r})\left\{\cos\omega t+\phi_x(\boldsymbol{r})+j\left[\sin\omega t+\phi_x(\boldsymbol{r})\right]\right\}$$
$$+\boldsymbol{e}_yE_{ym}(\boldsymbol{r})\left\{\cos\omega t+\phi_y(\boldsymbol{r})+j\left[\sin\omega t+\phi_y(\boldsymbol{r})\right]\right\}+\ldots$$

4.2.1 时谐场的复数表示

$$\boldsymbol{E}'_m(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_x E_{xm}(\boldsymbol{r})e^{j\omega t}e^{j\phi_x}+\boldsymbol{e}_y E_{ym}(\boldsymbol{r})e^{j\omega t}e^{j\phi_y}+\boldsymbol{e}_z E_{zm}(\boldsymbol{r})e^{j\omega t}e^{j\phi_z}$$

b. 去掉与时间相关的指数项，记作，

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_x E_{xm}(\boldsymbol{r})e^{j\phi_x}+\boldsymbol{e}_y E_{ym}(\boldsymbol{r})e^{j\phi_y}+\boldsymbol{e}_z E_{zm}(\boldsymbol{r})e^{j\phi_z}$$

$$=\boldsymbol{e}_x \dot{E}_{xm}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{e}_y \dot{E}_{ym}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{e}_z \dot{E}_{zm}(\boldsymbol{r})$$

$(2)\rightarrow(1)$:

$$\boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})e^{j\omega t}\right]$$

基于峰值的表示　基于有效值的表示

4.2.1 时谐场的复数表示

例4-2：写出下列与时谐电磁场对应的复矢量（有效值）或瞬时矢量

（1） $\dot{H}_x = jH_0 \sin\theta \cos(\beta x \cos\theta) e^{-j\beta z \sin\theta}$

（2） $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y E_{ym} \cos(\omega t - \beta x + \alpha) + \boldsymbol{e}_z E_{zm} \sin(\omega t - \beta x + \alpha)$

解：

（1）$H_x = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\dot{H}_x e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,jH_0 \sin\theta \cos(\beta x \cos\theta) e^{j\omega t - j\beta z \sin\theta}\right]$

$$= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,jH_0 \sin\theta \cos(\beta x \cos\theta)\left[\cos(\omega t - \beta z \sin\theta) + j\sin(\omega t - \beta z \sin\theta)\right]\right\}$$

$$= -\sqrt{2}H_0 \sin\theta \cos(\beta x \cos\theta) \sin(\omega t - \beta z \sin\theta)$$

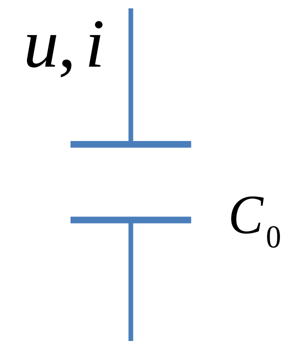
4.2.1 时谐场的复数表示

（2）
$$\boldsymbol{E}'_m(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_y E_{ym}\left[\cos(\omega t-\beta x+\alpha)+j\sin(\omega t-\beta x+\alpha)\right]$$
$$+\boldsymbol{e}_z E_{zm}\left[\cos\left(\omega t-\beta x+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(\omega t-\beta x+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$=\boldsymbol{e}_y E_{ym} e^{j[\omega t+(\alpha-\beta x)]}+\boldsymbol{e}_z E_{zm} e^{j[\omega t+(\alpha-\beta x)-\frac{\pi}{2}]}$$
$$=\boldsymbol{e}_y E_{ym} e^{j[\omega t+(\alpha-\beta x)]}+\boldsymbol{e}_z E_{zm} e^{j[\omega t+(\alpha-\beta x)]} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_y \frac{E_{ym}}{\sqrt{2}} e^{-j(\beta x-\alpha)}-\boldsymbol{e}_z j\frac{E_{zm}}{\sqrt{2}} e^{-j(\beta x-\alpha)}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_y E_y e^{-j(\beta x-\alpha)}-\boldsymbol{e}_z jE_z e^{-j(\beta x-\alpha)}$$

4.2.2 有损媒质的复数表示



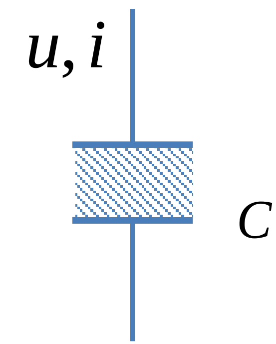
复介电常数：

右图所示为理想无损电容器（板间为真空），设其电容为 C_0，当其两极板上加有角频率为ω的正弦电压u时，有

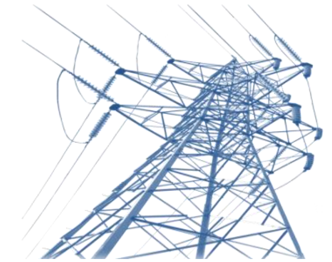
$$\dot{I} = j\omega C_0 \dot{U} \qquad \left(i = C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

若将极板间充满相对介电常数为ε_r的电介质，则电容器电容 $C = \varepsilon_r C_0$

$$\dot{I} = j\omega C \dot{U} = j\omega \varepsilon_r C_0 \dot{U} \qquad ※$$



理论上，※式中电压、电流应相差90度，但测量发现小于90度，导致该问题的应该是相对介电常数。

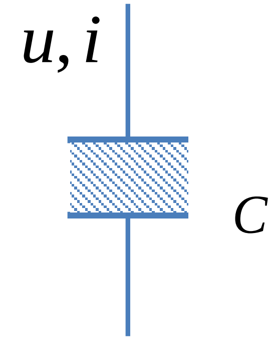


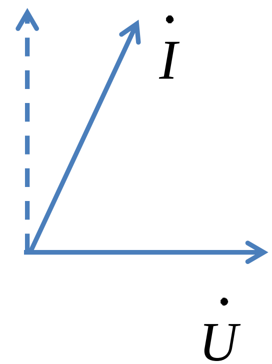
4. 动态电磁场 基本理论与准静态电磁场

4.2.2 有损媒质的复数表示

$$\dot{I} = \omega\varepsilon_r'' C_0 \dot{U} + j\omega\varepsilon_r' C_0 \dot{U}$$

$$= j\omega\left(\varepsilon_r' - j\varepsilon_r''\right) C_0 \dot{U} \qquad ※※$$



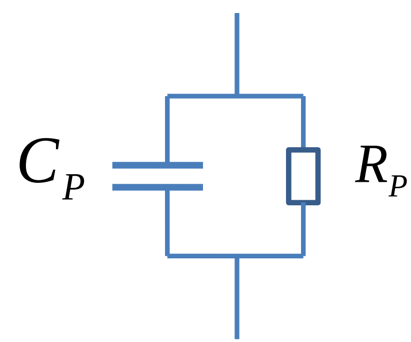


将※式与※※式比较，可得 $\varepsilon_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r''$ ➡ 复相对介电常数

➡ $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = \varepsilon' - j\varepsilon''$ 复介电常数

由以上分析，可得

$$C_P = \varepsilon_r' C_0 \qquad R_P = \frac{1}{\omega\varepsilon_r'' C_0}$$



介质有损耗，是极化时产生，但这种损耗不是欧姆损耗，称之为**极化损耗**

4.2.2 有损媒质的复数表示

从场的角度来看，
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_c + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

对于时谐场，有
$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}} = \gamma \dot{\boldsymbol{E}} + j\omega\varepsilon \dot{\boldsymbol{E}}$$
$$= j\omega\varepsilon \dot{\boldsymbol{E}} + j\omega\left(-j\frac{\gamma}{\omega}\right)\dot{\boldsymbol{E}}$$
$$= j\omega\left(\varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\dot{\boldsymbol{E}}$$

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

$$\Rightarrow \quad = j\omega\left[\varepsilon' - j\left(\varepsilon'' + \frac{\gamma}{\omega}\right)\right]\dot{\boldsymbol{E}} = j\omega\varepsilon_e \dot{\boldsymbol{E}}$$

$$\varepsilon_e = \varepsilon' - j\left(\varepsilon'' + \frac{\gamma}{\omega}\right)$$ 等效复介电常数

4.2.2 有损媒质的复数表示

等效复介电常数的虚部与损耗相关，工程中引入介质损耗角表征损耗的特性，

$$\tan\delta = \frac{\varepsilon'' + \dfrac{\gamma}{\omega}}{\varepsilon'}$$ 表征电介质特性的重要参数

工程上希望该值越小越好，即意味着绝缘特性越好。

（1）微波炉加热面食，菜，肉： $\tan\delta = 0.073$

聚苯乙烯泡沫： $\tan\delta = 3\times10^{-5}$

（2）导电媒质： $\varepsilon'' = 0$ $\tan\delta = \dfrac{\gamma}{\varepsilon'\omega} = \dfrac{\gamma E}{\varepsilon'\omega E} = \dfrac{|\boldsymbol{J}|}{|j\omega\dot{\boldsymbol{D}}|}$

显然导体中传导电流远大于位移电流 ⇒ $\tan\delta \gg 1$

4.2.2 有损媒质的复数表示

工频50赫兹条件下， $\tan\delta = 2.085\times10^{16}$ 铜

$\tan\delta = 1.366\times10^{16}$ 铝

类似地，当媒质处于磁场中时，有

$$\mu = \mu' - j\mu''$$

4.3 电磁场能量 坡印廷定理

回顾：静态场 $W_e=\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV$ $W_m=\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}dV$ $P=\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}dV$

思考：动态场 能量变化 能量流动（转化） 能量守恒

单位体积内，动态电磁场在导电媒质中消耗的电功率为：

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}=\boldsymbol{E}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow\quad -\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$$

坡印廷定理微分形式

由散度定理 $$-\oint_S\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{d}{dt}\int_V\left(w_e+w_m\right)dV+\int_V\left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\right)dV$$

$$=\frac{d}{dt}\left(W_e+W_m\right)+P$$

坡印廷定理积分形式

4.3 电磁场能量 坡印廷定理

$$-\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{d}{dt}\int_V (w_e+w_m)dV+\int_V (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J})dV$$

$\boldsymbol{S}_P=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ **坡印廷矢量：**单位时间内穿过单位面积的电磁能量

坡印廷定理：单位时间内穿过闭合面**S**流入体积*V*的电磁能量，等于该体积内电磁能量*W*的增加率和电磁能量的消耗率。

对于时谐场，有

$$-\oint_S \left(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right)\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \left[\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{J}}^*+j\omega\left(\dot{\boldsymbol{B}}\cdot\dot{\boldsymbol{H}}^*-\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}^*\right)\right]dV$$

对于有损媒质，上式可进一步写为

$$-\oint_S \left(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right)\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \Big[\underbrace{\gamma E^2+\omega\varepsilon'' E^2+\omega\mu'' H^2}_{\text{有功}}+\underbrace{j\omega\left(\mu' H^2-\varepsilon' E^2\right)}_{\text{无功}}\Big]dV$$

4.3 电磁场能量　坡印廷定理

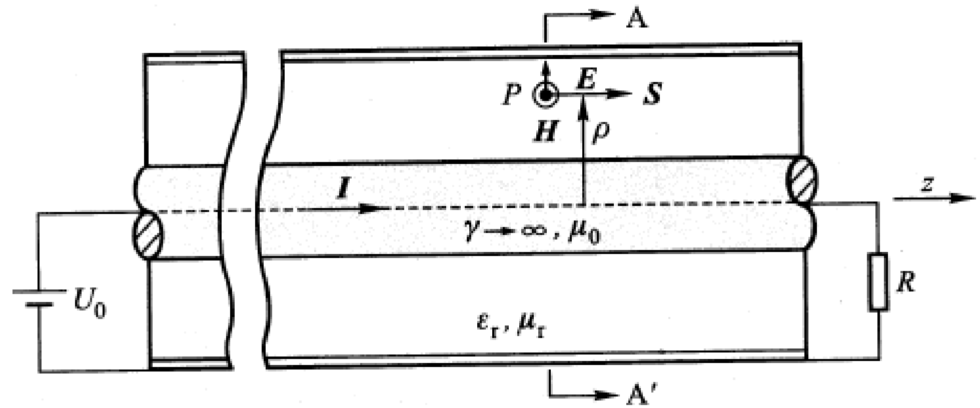
$$-\oint_S \left(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right)\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V\left[\gamma E^2+\omega\varepsilon'' E^2+\omega\mu'' H^2+j\omega\left(\mu' H^2-\varepsilon' E^2\right)\right]dV$$

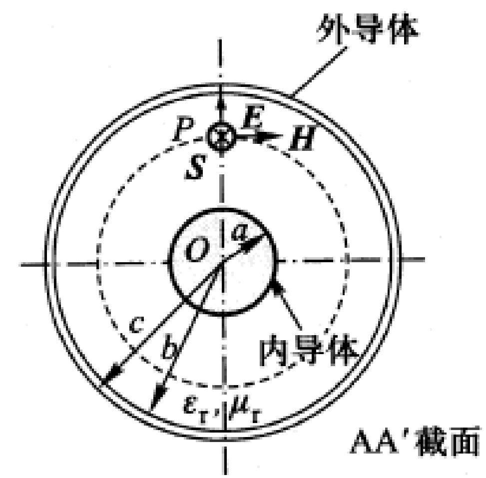
$\tilde{\boldsymbol{S}}_P=\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*$　复坡印廷矢量：实部对应于媒质吸收的有功功率，等于电磁功率面密度矢量的平均值，即下式

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{r},t\right)dt=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right]$$

4.3 电磁场能量 坡印廷定理

例4-3：直流电压源U_0经下图所示同轴电缆，向负载R供电，求同轴电缆传输功率P_R，内导体半径a，外导体内外半径分别为b、c。基于坡印廷定理分析其能量传输过程。





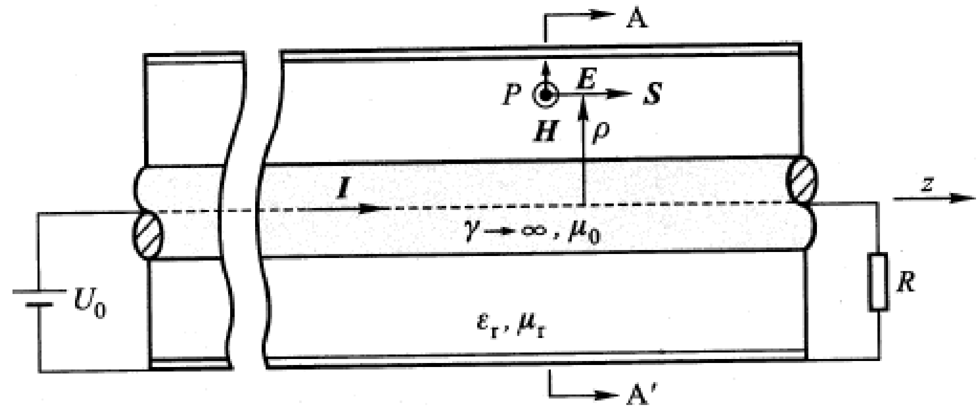
分析：由动态下的坡印廷矢量定理，

$$-\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{d}{dt}(W_e+W_m)+\int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J})dV$$

静态下： $-\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J})dV=P$

解：

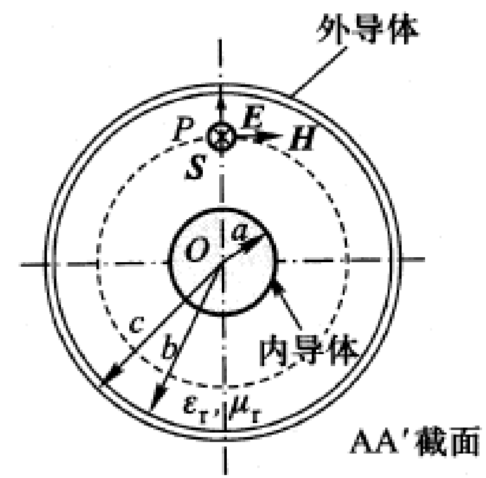
内导体电位为U_0，外导体电位为零，电流$I= U_0 /R$。



电场：

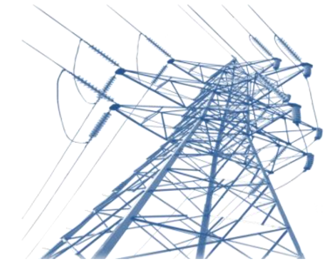
导体：

对于内导体（$0\le\rho<a$）和外导体（$b<\rho\le c$），可认为$\gamma\to\infty$，而J_c有限，故$\boldsymbol{E}=0$。



媒质：

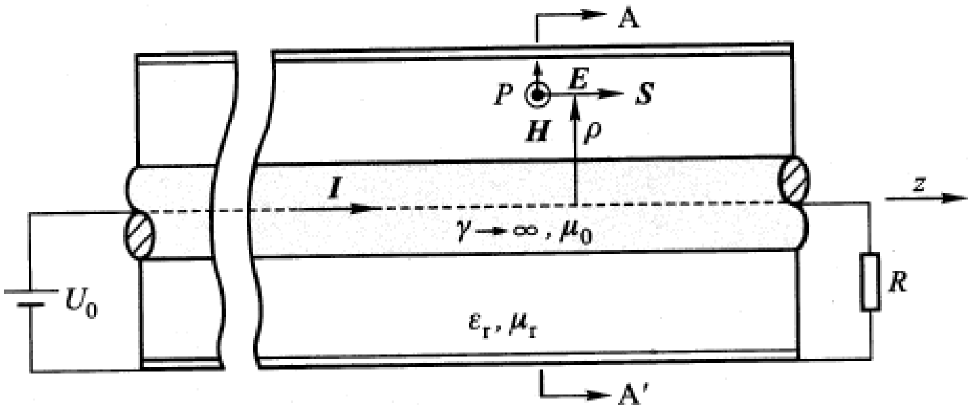
$$\boldsymbol{E}=\frac{U_0}{\rho\ln\dfrac{b}{a}}\boldsymbol{e}_\rho \quad (a\le\rho\le b)$$



磁场：

内导体：

$$\boldsymbol{H}=\frac{I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\phi=\frac{U_0\rho}{R2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\phi \quad (0\le\rho<a)$$

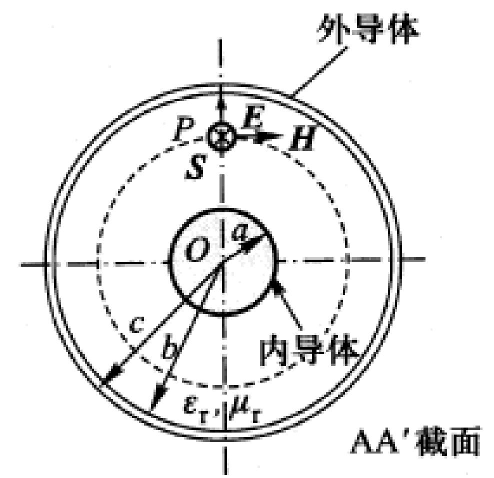


媒质：

$$\boldsymbol{H}=\frac{U_0}{R2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi \quad (a\le\rho\le b)$$

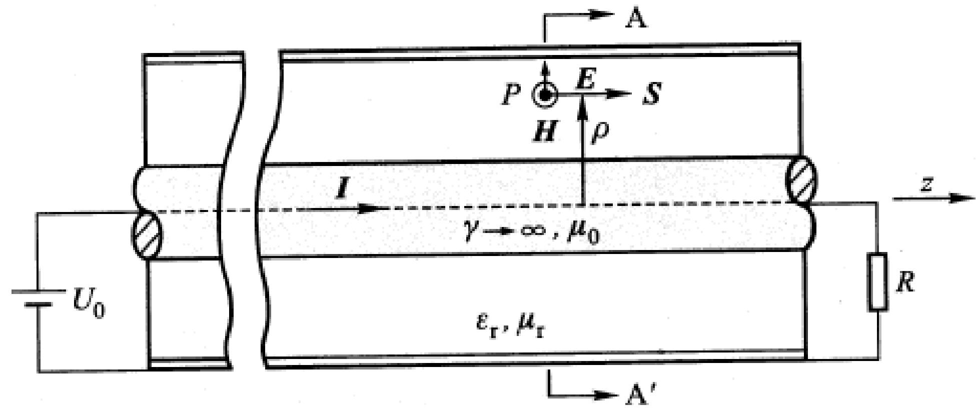
外导体：

$$\boldsymbol{H}=\frac{U_0}{R2\pi\rho}\left(1-\frac{\rho^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\boldsymbol{e}_\phi \quad (b<\rho<c)$$



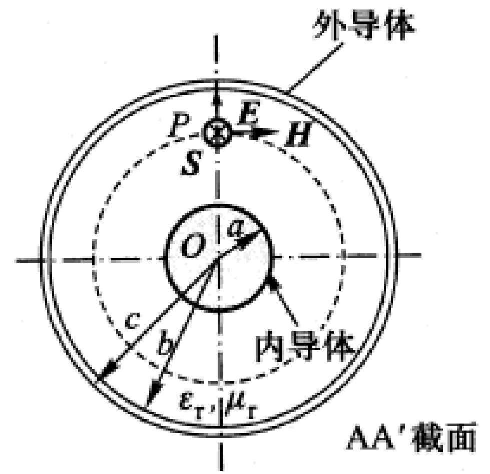
$$-\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}=P$$

空间电磁场分布：



$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}0 & 0\leqslant\rho<a\\ \dfrac{U_0}{\rho\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}\boldsymbol{e}_\rho & a\leqslant\rho\leqslant b\\ 0 & b<\rho<c\\ 0 & \rho>c\end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{cases}\dfrac{U_0}{2\pi a^2 R}\rho\boldsymbol{e}_\phi & 0\leqslant\rho<a\\ \dfrac{U_0}{2\pi R\rho}\boldsymbol{e}_\phi & a\leqslant\rho\leqslant b\\ \dfrac{U_0}{2\pi R\rho}\left(1-\dfrac{\rho^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\boldsymbol{e}_\phi & b<\rho<c\\ 0 & \rho\geqslant c\end{cases}$$



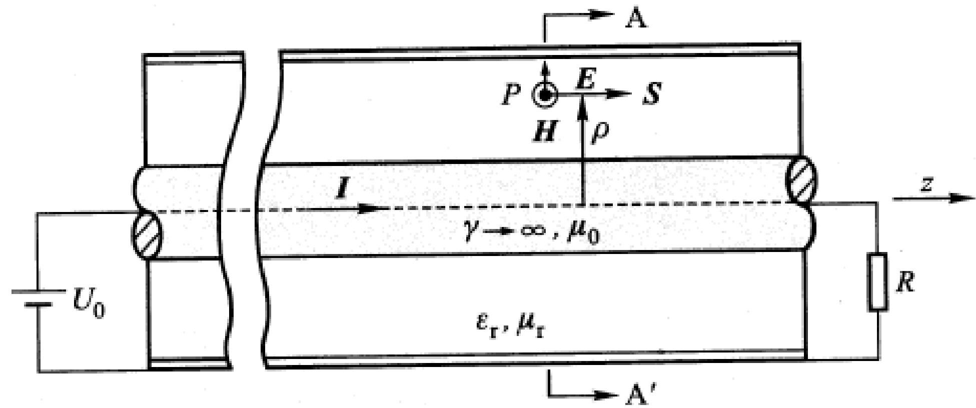
代入上式，可得

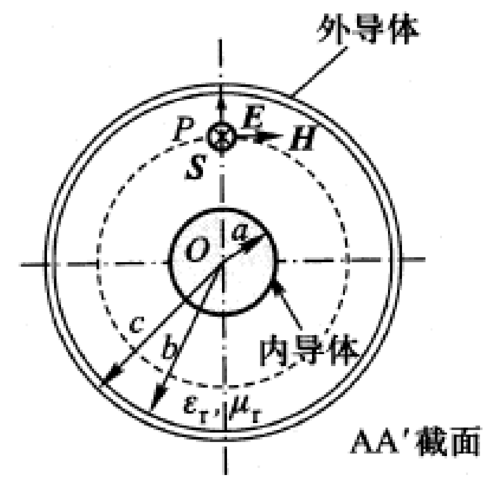
4. 动态电磁场 基本理论与准静态电磁场

$$\boldsymbol{S}_P = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

$$= \frac{U_0}{\rho \ln \frac{b}{a}} \boldsymbol{e}_\rho \times \frac{U_0}{R 2\pi\rho} \boldsymbol{e}_\phi$$

$$= \frac{U_0^{\ 2}}{2\pi R \ln \frac{b}{a}} \frac{1}{\rho^2} \boldsymbol{e}_z \qquad (a \le \rho \le b)$$





S：选择半径为$\rho=c$的电缆最外层圆柱面

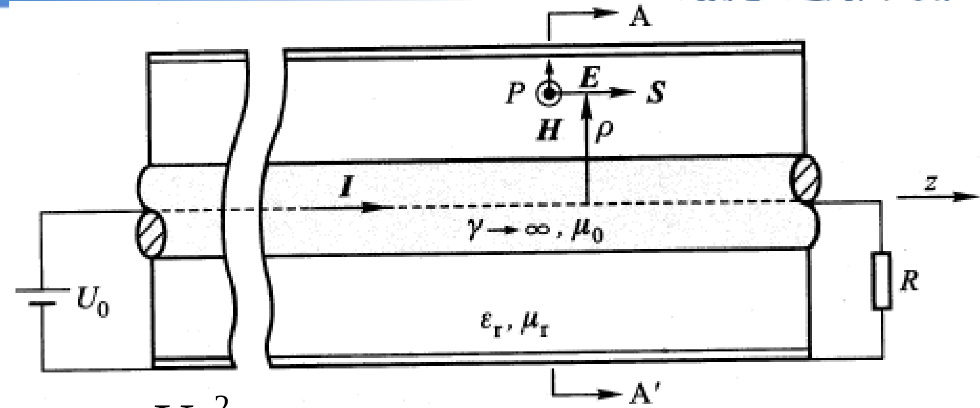
$$-\oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\left[\int_{S_l} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S_r} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S_c} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot d\boldsymbol{S} \right]$$

$$= -\int_{S_l} \boldsymbol{S}_P \cdot d\boldsymbol{S} - \int_{S_r} \boldsymbol{S}_P \cdot d\boldsymbol{S}$$

4. 动态电磁场 基本理论与准静态电磁场

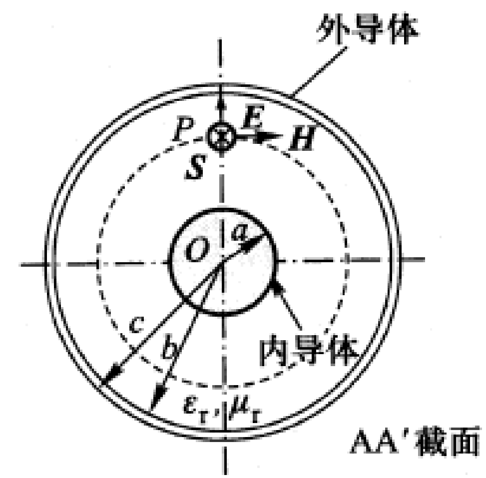
$$-\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=-\int_{S_l}\boldsymbol{S}_P\cdot d\boldsymbol{S}-\int_{S_r}\boldsymbol{S}_P\cdot d\boldsymbol{S}$$



$$-\int_{S_l}\boldsymbol{S}_P\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=-\int_a^b \frac{U_0^{\,2}}{2\pi R\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{e}_z\cdot(-\boldsymbol{e}_z)2\pi\rho d\rho \;=\frac{U_0^{\,2}}{R}$$



$$-\int_{S_r}\boldsymbol{S}_P\cdot d\boldsymbol{S}\;=-\int_a^b \frac{U_0^{\,2}}{2\pi R\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{e}_z\cdot(\boldsymbol{e}_z)2\pi\rho d\rho=-\frac{U_0^{\,2}}{R}$$

➡ $-\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}=P=0$ 电缆中电功率损耗为零

➡ $P_R=\int_{S_r}\boldsymbol{S}_P\cdot d\boldsymbol{S}\;=\frac{U_0^{\,2}}{R}$ 电缆提供给电阻的功率

4.4 电磁位

4.4.1 电磁位 洛伦兹规范

由 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ （1）

又由 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$

由无旋场的特性可知 $\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ （2）

即可基于位函数组$\boldsymbol{A}$-φ描述动态电磁场，将（1）（2）及媒质构成方程代入如下麦克斯韦方程，

$$
\begin{cases}
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu\varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \boldsymbol{J} & (3) \\
\nabla^2 \varphi + \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} & (4)
\end{cases}
$$

4.4.1 电磁位 洛伦兹规范

思考：

（1）要求解$\boldsymbol{A}$，需要确保$\boldsymbol{A}$的唯一性，即要规定$\boldsymbol{A}$的散度和旋度；

（2）要求解$\boldsymbol{A}$、φ，需要对方程进行解耦；

只有令： $$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$ 洛伦兹规范

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}\qquad(5)\\&\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}\qquad(6)\end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow$ 电磁位非齐次波动方程

4.4.2 非齐次波动方程

对于时谐场，非齐次波动方程的复数形式为

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{\boldsymbol{A}} + k^2 \dot{\boldsymbol{A}} = -\mu \dot{\boldsymbol{J}} \\ \nabla^2 \dot{\varphi} + k^2 \dot{\varphi} = -\dfrac{\dot{\rho}}{\varepsilon} \end{cases}$$

非齐次的亥姆霍兹方程

$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ (rad/m) 波数、相位系数

4. 4. 3 电磁位积分解

令　$v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$　称之为电磁波在媒质空间的传播速度

自由空间中：$v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3.0\times10^8\ (m/s)$

将波速表达式代入前面（6）式，有　$\nabla^2\varphi - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

分析：上式为线性方程，且$\varphi= \varphi(\mathbf{r}, t)$，与$\rho$有关。

求解思路：可以先求一个处于坐标原点的时变元电荷$dq=\rho dV$在空间产生的动态标量电位，再基于叠加原理，推导出任意分布的时变体电荷对于的空间动态标量位。

4.4.3 电磁位积分解

假设坐标原点处有一时变元电荷dq，场分布具有对称性，即

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\varphi(r,t)$$

除坐标原点以外，空间中有

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \quad 0<r<\infty$$ 关于$r\varphi$一维齐次波动方程

通解为：$$r\varphi(r,t)=\underline{f_1\left(t-\frac{r}{v}\right)}+\underline{f_2\left(t+\frac{r}{v}\right)}$$

位滞后于源　　位超前于源

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{f_1(t-r/v)}{r}$$

显然 f_1与媒质特性、元电荷量dq等参数相关。

4.4.3 电磁位积分解

当dq与时间无关时，即为静电场中电位表达式 $d\varphi(r)=\dfrac{\rho dV}{4\pi r\varepsilon}$

将其与前式比较， $\varphi(\mathbf{r},t)=\dfrac{f_1(t-r/v)}{r}$

$$\Rightarrow d\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{\rho(t-r/v)}{4\pi r\varepsilon}dV$$ 区别应该只在时间延迟效应方面

若dq不在原点，而是位于$\mathbf{r}'$处，则令 $\boldsymbol{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$

$$\Rightarrow d\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV=\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\dfrac{R}{v}\right)}{4\pi\varepsilon R}dV$$

由此可知，场域V'中，任意分布的体电荷$\rho(\mathbf{r}',t)$，在场点$\mathbf{r}$处产生的标量位可由上式积分求得

4.4.3 电磁位积分解

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{v}\right)}{R}dV \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{v}\right)}{R}dV'$$

动态标量位、动态矢量位（除时间上延迟以外，与静态规律一致）

对于时谐场，为简化分析，时间延迟项仍以坐标原点为基点，记作*t-r/v*，则有

$$\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)=\omega t-\frac{\omega}{v}r=\omega t-\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)r=\omega t-kr$$

➡ 时间上的延迟，对应于相位上的滞后，因此可知复数形式的电磁位

4.4.3 电磁位积分解

$$\dot{\varphi}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\dot{\rho}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\dot{\rho}(\boldsymbol{r}')}{R}e^{-jkR}dV$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')}{R}e^{-jkR}dV'$$

非齐次亥姆霍兹方程的解

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\qquad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\qquad \lambda=\frac{2\pi}{k}$$

4.5 准静态电磁场

4.5.1 电准静态场与磁准静态场

（1）电准静态场

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

对于低频电磁场，感应电场$\boldsymbol{E}_i$远小于库仑电场$\boldsymbol{E}_q$，可以忽略时间导数项，可见课本中例4-4。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0\qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$ 电准静态场（变压器、输电线路等）

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_c+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$ 与电准静态场共存的磁场

4. 5. 1电准静态场与磁准静态场

（2）磁准静态场

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_c+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

对于低频电磁场，当位移电流$\boldsymbol{J}_D$远小于传导电流$\boldsymbol{J}_c$时，可以忽略时间导数项。

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_c\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$ 磁准静态场（电机、变压器）

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$ 与磁准静态场共存的电场

例4-4，例4-5一定要好好自学，重要。

4.5.2 导电媒质中的自由电荷驰豫过程

电荷驰豫过程：自由电荷体密度随时间衰减的过程

（1）均匀导电媒质中的电荷驰豫过程：

$$\oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV \Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

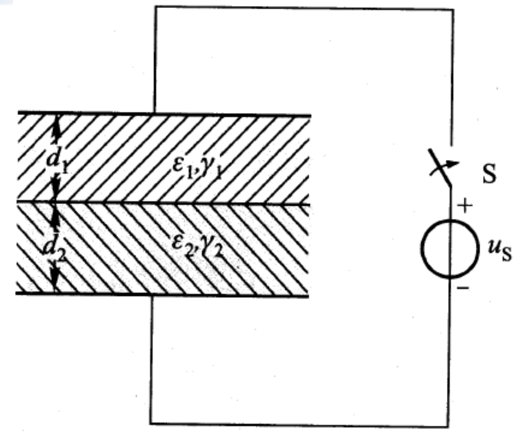
$$\Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\gamma}{\varepsilon}\nabla \cdot \boldsymbol{D} \Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\gamma}{\varepsilon}\rho$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\rho = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-(t/\tau_e)} \qquad \tau_e = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$ 驰豫时间

对于良导体，驰豫时间很小，很快衰减为零，该过程为自由电荷驰豫过程。

4.5.2 导电媒质中的自由电荷驰豫过程

（2）分块均匀导电媒质分界面处电荷驰豫：



$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma$$

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \Leftarrow \left(\oint_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right)$$

$$\Rightarrow \gamma_2 E_{2n} - \gamma_1 E_{1n} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n}\right) = 0 \qquad \tau_e = \frac{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2}{d_2 \gamma_1 + d_1 \gamma_2}$$

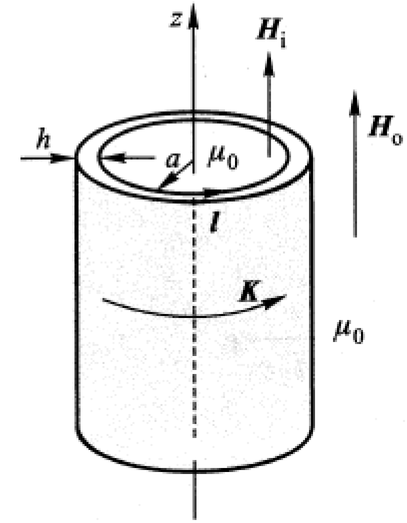
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\gamma_2 E_2 - \gamma_1 E_1 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1\right) = 0 \\ &E_1 d_1 + E_2 d_2 = u_s \end{aligned}\right\} \quad \sigma = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2}{d_2 \gamma_1 - d_1 \gamma_2} u_s \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}} \right)$$

刚充电时=0，随着时间t增加，面电荷逐渐积累，至电路达到稳态时为常数。

4. 动态电磁场　基本理论与准静态电磁场

4.5.3 导电媒质中的磁扩散与磁屏蔽

磁扩散：恒定外磁场突然施加在导电媒质中，由于电磁感应，必然在导电媒质中产生感应电流，其去磁效应将使得导电媒质中磁场不会突变。随时间增加，感应电流逐渐衰减为零。最终去磁效应消失，形成恒定磁场。该过程称之为磁扩散（驰豫）过程。



（1）轴向磁场向导体内的磁扩散

圆柱形导体壳受轴向外磁场激励，为$\boldsymbol{H}_o(t)$。令t=0时，突然建立恒定磁场$\boldsymbol{H}_o$

$\boldsymbol{e}_n$： 导体(1)指向空气(2)　$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_\rho$

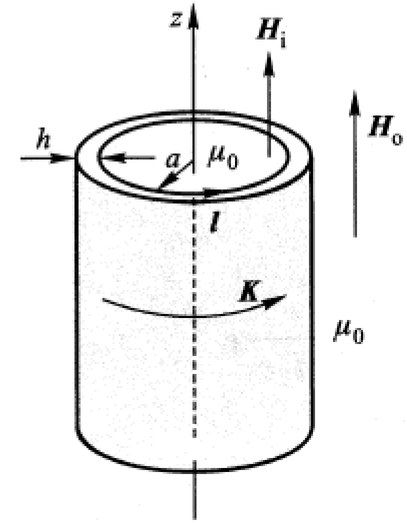
由： $\boldsymbol{e}_n \times \left(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1\right) = \boldsymbol{K}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_n \times \left(\boldsymbol{H}_o - \boldsymbol{H}_i\right) = \boldsymbol{K}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{e}_\rho \times \left(H_o - H_i\right)\boldsymbol{e}_z = K\boldsymbol{e}_\phi$ $\Rightarrow$ $H_i - H_o = K$

4.5.3 导电媒质中的磁扩散与磁屏蔽

由于： $K = hJ = h\gamma E$ 导体壳很薄→**E**，**J**，**K**均匀

由电磁感应定律，在导体壳中取回路



$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}_i}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \Rightarrow \oint_l \frac{K}{h\gamma} dl = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}_i}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h\gamma}(H_i - H_o)2\pi a = -\mu_0 \pi a^2 \frac{dH_i}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dH_i}{dt} + \frac{2}{ah\mu_0\gamma}H_i = \frac{2H_o}{ah\mu_0\gamma} \Rightarrow K = -H_o e^{-\frac{t}{\tau_m}}$$

$$\tau_m = \frac{1}{2}ah\mu_0\gamma$$

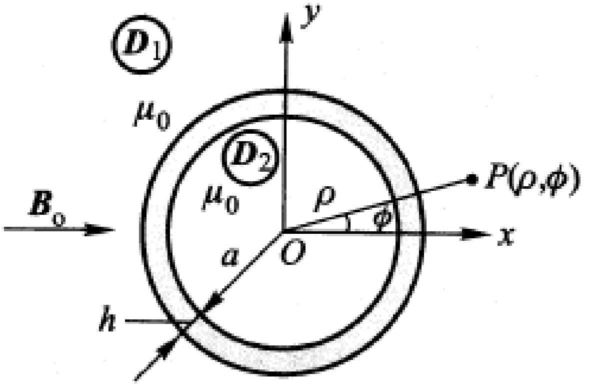
磁扩散（驰豫）时间

$$\Rightarrow H_i = H_o\left(1 - e^{-t/\tau_m}\right) \Rightarrow K: -H_o \to 0$$

$$H_i: 0 \to H_o$$

4. 动态电磁场 基本理论与准静态电磁场

4.5.3 导电媒质中的磁扩散与磁屏蔽



（2）横向磁场向导体壳内的磁扩散（自学）

（3）磁屏蔽

将用作磁屏蔽的圆柱形导磁腔体，突然移入横向恒定磁场$\boldsymbol{B}_0$中。将在磁体外表面的薄层中产生感应电流。磁扩散逐渐延伸至导磁体内及其空腔中。最后磁扩散趋近稳态，感应电流则趋于零。具体分析如下：对各区域列写基于磁矢量位$\boldsymbol{A}$的边值问题，

$$A_{z1} = B_0\rho\sin\phi + \frac{F_1}{\rho}\sin\phi \ (\rho \ge b)$$

$$A_{z2} = F_2\rho\sin\phi + \frac{F_3}{\rho}\sin\phi \ (b < \rho \le a)$$

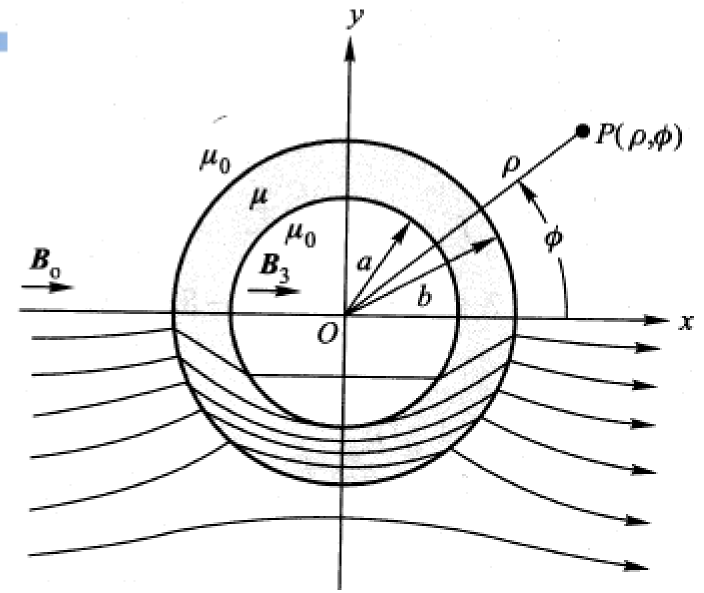
$$A_{z3} = F_4\rho\sin\phi \quad (0 < \rho \le a)$$

结合分界面边界条件，由计算推导可得到各个系数。

4. 动态电磁场　基本理论与准静态电磁场

4.5.3 导电媒质中的磁扩散与磁屏蔽

（3）磁屏蔽

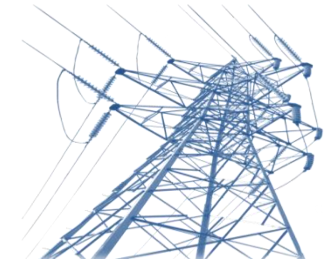


可得空腔内磁场

$$\boldsymbol{B}_3=\nabla\times A_3=\nabla\times\left(A_{z3}\boldsymbol{e}_z\right)$$

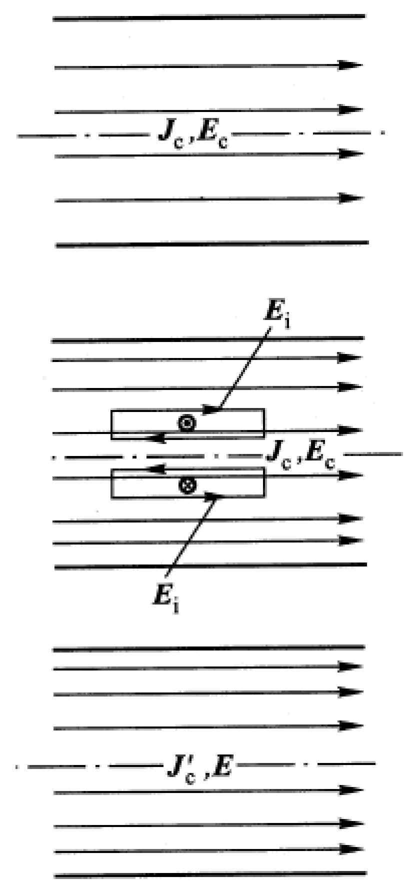
$$=\frac{4B_0\mu_r}{\left(1+\mu_r^{\ 2}\right)-\frac{a^2}{b^2}\left(1-\mu_r\right)^2}\left(1-e^{-t/\tau_m}\right)\boldsymbol{e}_x \Rightarrow \boldsymbol{B}_3=\frac{4B_0\mu_r}{\left(1+\mu_r^{\ 2}\right)-\frac{a^2}{b^2}\left(1-\mu_r\right)^2}\boldsymbol{e}_x$$

当　$\mu_r\gg 1$　　$\boldsymbol{B}_3=\dfrac{4B_0}{\mu_r\left(1-a^2/b^2\right)}\boldsymbol{e}_x$　导磁腔体具有明显的磁屏蔽作用



4.5.4 集肤效应 涡流

（1）集肤效应：导电媒质中通以正弦电流后，变化磁场在导电媒质中产生于磁场交链的感应电磁场和感应电流，称之为涡流。涡流使导电媒质中场量（电流密度）趋于表面分布，且沿着纵深方向衰减，称之为集肤效应。



磁准静态场

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\gamma\boldsymbol{E}\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$$

⇨ $$\nabla^2\boldsymbol{E}=\mu\gamma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\qquad \nabla^2\boldsymbol{H}=\mu\gamma\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

⇨ $$\nabla^2\dot{\boldsymbol{E}}=j\omega\mu\gamma\dot{\boldsymbol{E}}=p^2\dot{\boldsymbol{E}}\qquad \nabla^2\dot{\boldsymbol{H}}=j\omega\mu\gamma\dot{\boldsymbol{H}}=p^2\dot{\boldsymbol{H}}$$

4.5.4 集肤效应 涡流

$$p=\sqrt{j\mu\omega\gamma}=\sqrt{\frac{\mu\omega\gamma}{2}}(1+j)=\frac{1}{d}(1+j)$$

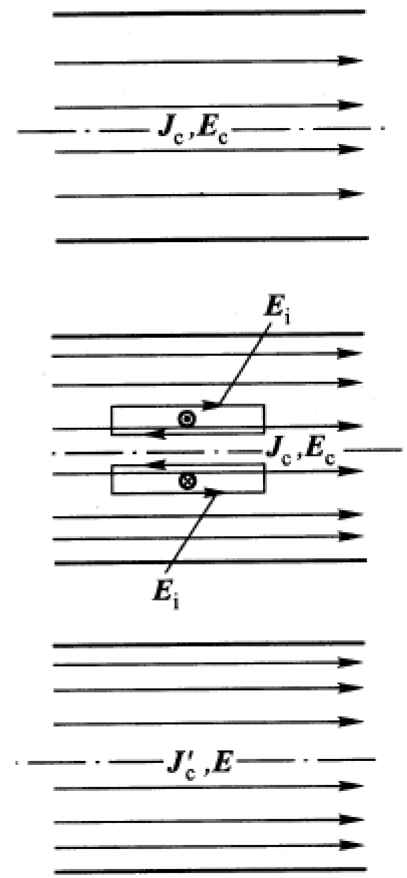
对于上述时谐场方程，假定有半无限大平面导体(x>0)，电流沿y方向流动，则此一维场有，

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\dot{E}_y(x)\boldsymbol{e}_y$$ 代入前式可解

$$\dot{E}_y=Ae^{-px}+Be^{px}$$ 当x趋于无穷时，电场为有限值，故B=0

设在x=0处，$\dot{E}_y=\dot{E}_y(0)=A$ 则有

$$\dot{E}_y=Ae^{-px}=\dot{E}_y(0)e^{-\frac{1}{d}(1+j)x}=\dot{E}_y(0)e^{-\frac{x}{d}}e^{-j\frac{x}{d}}$$



4. 动态电磁场　基本理论与准静态电磁场

4.5.4 集肤效应　涡流

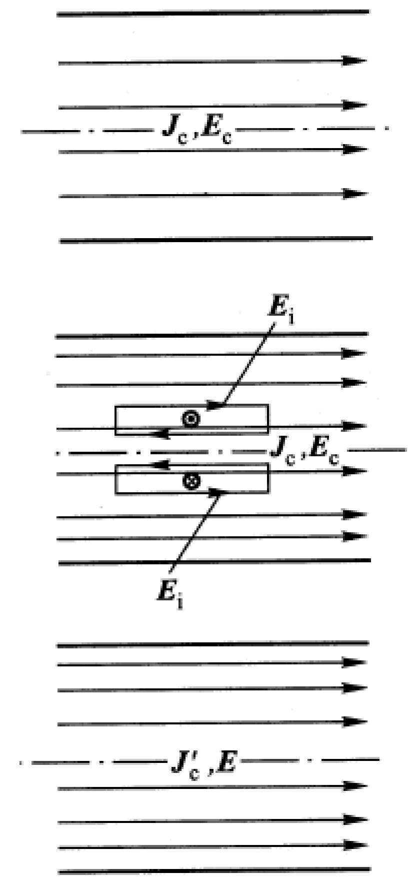
当x=d时，有 $\left|\dot{E}_y\right| = \left|\dot{E}_y(0)\right| / e$

即距离表面x=d处，场强值相比x=0处，减小e倍。

则距离d称之为该导体的集肤深度，即为

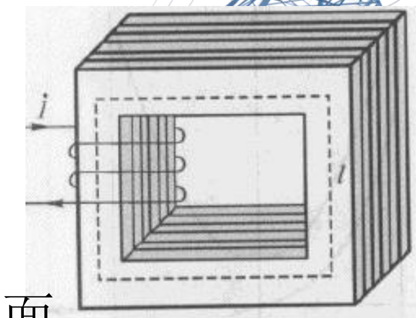
$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\gamma}}$$

频率/Hz	铝/mm	铜/mm	碳钢/mm
50	11.546	9.346	0.919
10^3	2.582	2.090	0.205
10^6	0.082	0.066	0.006

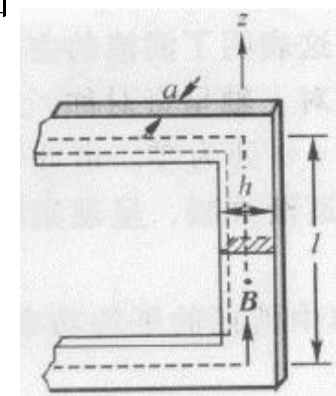


4.5.4 集肤效应 涡流

（2）铁心叠片中的涡流



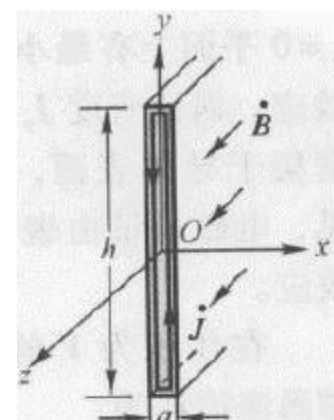
由于 $h \gg a,\ l \gg a$ ⇨ $\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{B}_z(x)\boldsymbol{e}_z$ 即涡流分布位于xoy平面



对于时谐磁场，应满足以下方程

$$\frac{d^2\dot{B}_z(x)}{dx^2} = j\omega\mu\gamma\dot{B}_z = p^2\dot{B}_z$$

⇨ $\dot{B}_z = \dot{B}_0\cosh(px)$　　　$\dot{B}_0$：　x=0处的磁感应强度



进一步可得　$\dot{E}_y = -\dfrac{\dot{B}_0 p}{\mu\gamma}\sinh(px) = \dot{E}_{y0}\sinh(px)$

$$\dot{J}_y = -\frac{\dot{B}_0 p}{\mu}\sinh(px) = \dot{J}_{y0}\sinh(px)$$

4.5.4 集肤效应 涡流

$$\left|\dot{B}_z\right| = B_z = \left|\dot{B}_0\right|\sqrt{\frac{1}{2}\left[\cosh(2Kx)+\cos(2Kx)\right]}$$

$$\left|\dot{J}_z\right| = J_z = \left|\dot{J}_{y0}\right|\sqrt{\frac{1}{2}\left[\cosh(2Kx)-\cos(2Kx)\right]}$$

进一步可得 $K = \sqrt{\frac{\mu\omega\gamma}{2}}$

$$P = \int_V \frac{J_y^2}{\gamma} dV = \frac{1}{12}\gamma\omega^2 a^2 V B_{zav}^2$$

B_{zav} [-a/2, a/2]区间有效值的平均值