C 题-曼哈顿距离最小生成树

黄秉焜

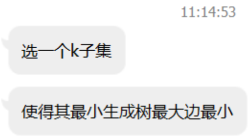
匡亚明学院 171240513

2018 年 10 月 25 日

目录

目录

出了点问题



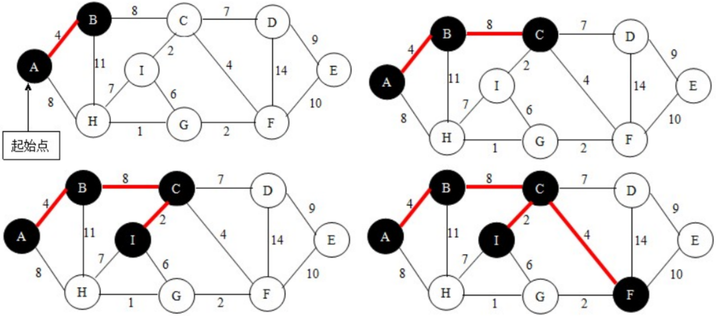
- 本意是把题面改一下，这样搜不到，就可以自己先想想看怎么做，最后再给原题，但貌似魔改地擦枪走火了。。。

完全图的曼哈顿距离最小生成树

1. 实际上就是寻找, 由这 n 个点构成的完全图的最小生成树中，权重第 k 小的边。求其权重。
2. 这里的权重定义为曼哈顿距离 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

目录

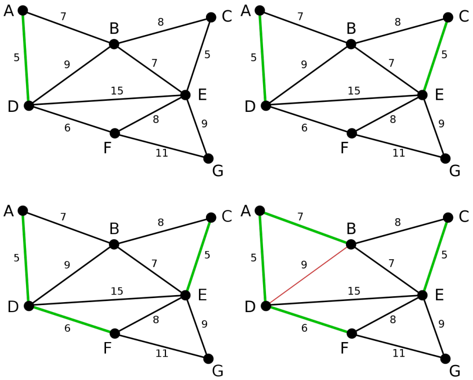
优：从已连结的点出发选择下一条边，与堆配合，时间复杂度为 $O(E + V \lg V)$，在完全图上较优



劣：需要得到整个生成树才能得到第 k 小的边；代码难写

kruskal 算法

劣：基于并查集的贪心算法，从全局出发，寻找满足条件的最小权值边，时间复杂度为 $O(E \lg V)$



优：选择边的权值递增，找到第 k 条边就可以停止

目录

遇到的问题

- 原题的数据规模是这道题的一百倍，如果用 Kruskal 算法，时间复杂度就是 $O(n^2 \lg n)$，会 **TLE**。

遇到的问题

- 原题的数据规模是这道题的一百倍，如果用 Kruskal 算法，时间复杂度就是 $O(n^2 \lg n)$，会 **TLE**。
- 这 n^2 条边只需要用 n 条就够了

定理

在二维平面上，以每个点 i 为中心，划分出 8 个 45° 区域。Kruskal 的下一步只需要考虑每个区域中只有与 i 点曼哈顿距离最小的点与 i 连成的边，可能在最小生成树上。

Cycle Property

For any cycle C in the graph, if the weight of an edge e of C is larger than the individual weights of all other edges of C, then this edge cannot belong to an MST.

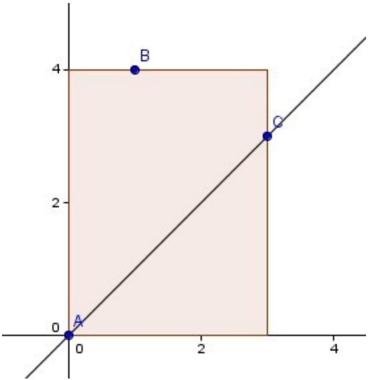
Cycle Property

For any cycle C in the graph, if the weight of an edge e of C is larger than the individual weights of all other edges of C, then this edge cannot belong to an MST.

根据 Cycle Property，对于原点 O 和处于同一个区域的 A 和 B，$|OA| \leqslant |OB|$，如果我们能证明 $|AB| \leqslant |OB|$，那就能证明 $|OB|$ 是不用考虑的。
至于为什么要求在同一个区域，因为我们下面用的证明方法在一个区域里才能奏效。

证明

令 $|AB| = x_1 + y_1, |AC| = x_2 + y_2, |BC| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$，考虑，北偏东 0 至 45° 范围。在此范围内，有 $0 < x_1 \leqslant y_1$ 以及 $0 < x_2 \leqslant y_2$



证明

- $x_1 > x_2, y_1 > y_2$：这与 $|AB| = x_1 + y_1 \leqslant |AC| = x_2 + y_2$ 矛盾；

证明

- $x_1 > x_2, y_1 > y_2$：这与 $|AB| = x_1 + y_1 \leqslant |AC| = x_2 + y_2$ 矛盾；
- $x_1 \leqslant x_2, y_1 > y_2$：由此可得 $|BC|$ 的值，于是有 $|AC| - |BC| = x_1 - y_1 + 2 \times y_2$，由所选区域及各种假设，有 $y_1 > y_2 > x_2 \geqslant x_1$。假设 $x_1 - y_1 + 2 \times y_2 < 0$，那么 $|AB| = x_1 + y_1 > 2 \times x_1 + 2 \times y_2, |AC| = x_2 + y_2 < 2 \times y_2 < |AB|$。矛盾，故 $|AC| \geqslant |BC|$；

证明

- $x_1 > x_2, y_1 > y_2$：这与 $|AB| = x_1 + y_1 \leqslant |AC| = x_2 + y_2$ 矛盾；
- $x_1 \leqslant x_2, y_1 > y_2$：由此可得 $|BC|$ 的值，于是有 $|AC| - |BC| = x_1 - y_1 + 2 \times y_2$，由所选区域及各种假设，有 $y_1 > y_2 > x_2 \geqslant x_1$。假设 $x_1 - y_1 + 2 \times y_2 < 0$，那么 $|AB| = x_1 + y_1 > 2 \times x_1 + 2 \times y_2, |AC| = x_2 + y_2 < 2 \times y_2 < |AB|$。矛盾，故 $|AC| \geqslant |BC|$；
- $x_1 > x_2, y_1 \leqslant y_2$：与上面同理；

证明

- $x_1 > x_2, y_1 > y_2$：这与 $|AB| = x_1 + y_1 \leqslant |AC| = x_2 + y_2$ 矛盾；
- $x_1 \leqslant x_2, y_1 > y_2$：由此可得 $|BC|$ 的值，于是有 $|AC| - |BC| = x_1 - y_1 + 2 \times y_2$，由所选区域及各种假设，有 $y_1 > y_2 > x_2 \geqslant x_1$。假设 $x_1 - y_1 + 2 \times y_2 < 0$，那么 $|AB| = x_1 + y_1 > 2 \times x_1 + 2 \times y_2, |AC| = x_2 + y_2 < 2 \times y_2 < |AB|$。矛盾，故 $|AC| \geqslant |BC|$；
- $x_1 > x_2, y_1 \leqslant y_2$：与上面同理；
- $x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2$：$|BC| = x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = |AC| - |AB|$，即 $|AC| > |AB|$

目录

以北偏东 0 到 45° 范围为例

- 所有点按横坐标大小排序
- i 为原点，若 j 在区域内，有 $y_j - y_i \geqslant x_j - x_i$ 即 $y_j - x_j \geqslant y_i - x_i$;
- $dis(i,j) = (x_j + y_j) - (x_i + y_i)$
- 把 $(y - x) \geqslant (y_i - x_i)$ 的点挑选出来，寻找这些点里面 $x + y$ 最小的点。

其他的细节

- 按照上面的方法，推导出其他区域中离散、选择的条件

其他的细节

- 按照上面的方法，推导出其他区域中离散、选择的条件
- 由于每条边被两个点所共有，所以在考虑区域的时候，我们只需要考虑四个区域，因为另外四个区域，可由其他点考虑到

其他的细节

- 按照上面的方法，推导出其他区域中离散、选择的条件
- 由于每条边被两个点所共有，所以在考虑区域的时候，我们只需要考虑四个区域，因为另外四个区域，可由其他点考虑到
- 处理完后使用 Kruskal 算法，时间复杂度为 $O(n \lg n)$

其他的细节

- 按照上面的方法，推导出其他区域中离散、选择的条件
- 由于每条边被两个点所共有，所以在考虑区域的时候，我们只需要考虑四个区域，因为另外四个区域，可由其他点考虑到
- 处理完后使用 Kruskal 算法，时间复杂度为 $O(n \lg n)$
- POJ 3241