1 布朗运动

1.1 基本性质

定义 1.1. *称一个 0 初值的实值随机过程 $B=\{B_t, t\geq 0\}$ 是一维标准布朗运动 (SBM), 若*

(1) 它有独立增量性: 对任意的有限正数 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, 随机变量

$$B_0, B_{t_1}-B_{t_0}, \cdots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}} \text{ 相互独立.}$$

(2) 对任意的 $t>s$, 增量 $B_t-B_s\sim N(0,t-s)$.

(3) 它的轨道连续, i.e.,

$$\mathbb{P}\{\omega: t\longmapsto B_t(\omega)\text{连续}\}=1.$$

设 B^i 是 d 个标准的布朗运动, 则称 $B=(B^1,\cdots,B^d)$ 是 d-维标准布朗运动.

一般地, 称满足上面条件 (1)-(2) 的随机过程为一维布朗运动. 对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 称 $B^x=x+B_t$ 为初值为 x 的布朗运动.

定义 1.2. *概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的随机过程 $X=\{X_t,t\in\}$ 称为 Gauss 过程, 若对任意的 $n\geq 1, t_1,t_2,\cdots,t_n\in$, $(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})$ 服从 Gauss 分布 (可以是退化的).*

定理 1.3. *设 $B=\{B_t,t\geq 0\}$ 是零初值的实值随机过程. 则它是布朗运动的充要条件是它是一个 Gauss 过程, 并且 $\mathbb{E}B_t=0, \mathbb{E}B_tB_s=t\wedge s$.*

证明: 必要性. 首先证明: 对任意的 $t_1<t_2<\cdots<t_n$, $(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})$ 服从正态分布. 由独立增量性 $(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ 服从正态分布. 又因为

$$\begin{pmatrix} B_{t_1}\\ B_{t_2}\\ \vdots\\ B_{t_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{t_1}\\ B_{t_2}-B_{t_1}\\ \vdots\\ B_{t_n}-B_{t_{n-1}}\end{pmatrix}.$$

因此, $(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})$ 服从正态分布. 显然, $\mathbb{E}B_t=0$, 对任意的 $t\geq s\geq 0$,

$$\mathbb{E}B_tB_s=\mathbb{E}(B_t-B_s)B_s+\mathbb{E}B_s^2=s.$$

充分性: 先证独立增量性, 即: 对任意的 $t_1<t_2<\cdots<t_n$, $(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ 相互独立. 由于它们服从正态分布, 所以只需要证明不相关性. 事实上, 对任意的 $i<j$,

$$\mathbb{E}(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})=\mathbb{E}B_{t_i}B_{t_j}-\mathbb{E}B_{t_i}B_{t_{j-1}}-\mathbb{E}B_{t_{i-1}}B_{t_j}+\mathbb{E}B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}=t_i-t_i-t_{i-1}+t_{i-1}=0.$$

显然, 对任意的 $t > s$, $B_t - B_s$ 服从正态分布, 均值为 0, 方差为

$$\mathbb{E}(B_t - B_s)^2 = \mathbb{E}B_t^2 - 2\mathbb{E}B_tB_s + \mathbb{E}B_s^2 = t - s.$$

证明完毕. □

由布朗运动的定义和上定理可以直接验证下面的性质.

定理 1.4. *设 B 是一维标准布朗运动.则*

(1) 对任意的 $s > 0$, 过程 $\{B_{t+s} - B_s, t \geq 0\}$ 是与 $\sigma\{B_u, 0 \leq u \leq s\}$ 独立的布朗运动.

(2) 对任意的 $c \neq 0$, $\{cB_{t/c^2}\}$ 是布朗运动. 特别地, $\{-B_t, t \geq 0\}$ 是布朗运动.

(3) $\{tB_{1/t}, t \geq 0\}$ 是布朗运动.

1.2 Gauss 过程

定理 1.5. *$X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ 称为 Gauss 过程, 当且仅当 对任意的 $n \geq 1, t_1, \cdots, t_n \geq 0, \alpha_i \in \mathbb{R}$, 随机变量 $\sum_k \alpha_k X_{t_k}$ 服从一维的 Gauss 分布 (可以是退化的).*

证明: 设 $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ 是 Gauss 过程, 则

$$\mathbb{E}e^{i\sum_k \lambda_k X_{t_k}} = e^{i\sum_k \lambda_k \mu_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \lambda_i \sigma_{ij} \lambda_j},$$

其中 $\mu_k = \mathbb{E}X_{t_k}, \sigma_{ij} = Cov(X_{t_i}, X_{t_j})$. 特别地, 取 $\lambda_k = \lambda\alpha_k$, 得: $Y = \sum_k \alpha_k X_{t_k}$ 的特征函数为

$$\mathbb{E}e^{i\lambda Y} = e^{i\lambda \sum_k \alpha_k \mu_k - \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{j,k=1}^n \alpha_i \sigma_{ij} \alpha_j} = e^{i\lambda \mathbb{E}Y - \frac{1}{2}\lambda^2 Cov(Y,Y)}.$$

故 Y 服从一维 Gauss 分布.

反正, 若对任意的 $t_1, \cdots, t_n \in$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\sum_k \alpha_k X_{t_k}$ 服从一维 Gauss 分布, 其均值 $\mathbb{E}\sum_k \alpha_k X_{t_k} = \sum_k \alpha_k \mu_k$, 方差

$$Cov\left(\sum_k \alpha_k X_{t_k}, \sum_k \alpha_k X_{t_k}\right) = \sum_{j,k=1}^n \alpha_i \sigma_{ij} \alpha_j,$$

其中 $\mu_k = \mathbb{E}X_{t_k}, \sigma_{ij} = Cov(X_{t_i}, X_{t_j})$. 则 $\sum_k \alpha_k X_{t_k}$ 的特征函数为:

$$\mathbb{E}e^{i\lambda \sum_k \alpha_k X_{t_k}} = e^{i\lambda \sum_k \alpha_k \mu_k - \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{j,k=1}^n \alpha_i \sigma_{ij} \alpha_j}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

取 $\lambda = 1$ 得,

$$\mathbb{E}e^{i\sum_k \alpha_k X_{t_k}} = e^{i\sum_k \alpha_k \mu_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \alpha_i \sigma_{ij} \alpha_j}.$$

因此, $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ 服从 n-维正态分布.

□

定义 1.6. *设* $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ *是一个 Gauss 过程, 分别称*

$$\mu(t) = \mathbb{E}X_t, \quad \sigma(s,t) = Cov(X_s, X_t).$$

为 X *的均值函数和协方差函数.*

例子 1.7. *一维布朗运动是高斯过程, 其* $\mu(t) = 0, \sigma(s,t) = s \wedge t$.

定理 1.8. *设* $\{X_n, n \geq 1\}$ *是一列 Gauss 分布. 若* X_n *依分布收敛到某个随机变量* X*, 则* $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X, \mathbb{E}X_n^2 \to \mathbb{E}X^2$*, 并且* X *也服从 Gauss 分布.*

证明: 记 $\mu_n = \mathbb{E}X_n, \sigma_n^2 = Cov(X_n, X_n)$. 则由 X_n 依分布收敛到某个随机变量 X, 可知 X_n 的特征函数收敛到 X 的特征函数, 即

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left\{i\mu_n t - \frac{\sigma_n^2 t^2}{2}\right\} = \mathbb{E}e^{itX}.$$

由于 $\mathbb{E}e^{itX}$ 是 t 的连续函数, 所以 $\{\sigma_n^2, n \geq 1\}$ 是有界的. 否则, 对任意的 $t \neq 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\exp\left\{i\mu_n t - \frac{\sigma_n^2 t^2}{2}\right\}\right| = 0,$$

于是, 对任意的 $t \neq 0$, $\mathbb{E}e^{itX} = 0$, 这与 $\mathbb{E}e^{itX}$ 在 $t = 0$ 处的连续矛盾.

由于 $\{\sigma_n^2, n \geq 1\}$ 有界, 不妨假设 $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \in (0, \infty)$ (否则抽取子列). 设 F 是 X 的分布函数, x 是它的一个连续点. 由于标准正态分布函数的分布函数 Φ 严格单调增, 所以

$$\frac{x - \mu_n}{\sigma_n} = \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{x-\mu_n}{\sigma_n}\right)\right) = \Phi^{-1}\left(\mathbb{P}\left(X_n \leq x\right)\right) \to \Phi^{-1}(F(x)).$$

故 $\mu_n \to \mu \in \mathbb{R}$, 进而 $\mathbb{E}e^{itX} = \exp\left\{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$, X 服从正态分布. □

1.3 布朗运动的构造

如果不考虑样本的连续性, 利用 Kolmogorov 延拓定理可以证明布朗运动的存在性. 下面我们利用 Fourier 级数直接构造布朗运动.

假设 B 是一个标准布朗运动. 定义过程 $W_t = B_t - tB_1, t \in [0,1]$. 称它为 $[0,1]$ 上的布朗桥. 注意到 $W(0) = W(1) = 0$. 将 W 在 $[0,1]$ 上的 Fourier 展开

$$W_t = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\pi t), \qquad (L^2 \text{ 意义下})$$

其中系数 X_n 是随机变量, 表达式为

$$X_n = 2\int_0^t W_t \sin(n\pi t)dt.$$

则 X_n 服从 Gauss 分布, 可以计算

$$\mathbb{E}X_n = 0, \mathbb{E}[X_n X_m] = \frac{2}{\pi^2 n^2}\delta_{mn}.$$

令 $Z_0 = B_1$, $Z_n = n\pi X_n/\sqrt{2}, n \geq 1$. 则 $\{Z_n\}$ i.i.d. $\sim N(0,1)$. 我们可以将布朗运动写成

$$B_t = tZ_0 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Z_n}{n}\sin(n\pi t), t \in [0,1].$$

将上面的过程反过来, 就可以把布朗运动可以用上面的随机级数表示.

1.4 轨道性质

1.4.1 二次变差

定义 1.9. *设 $X = \{X_t, t \geq 0\}$ 是一个实值随机过程, 对任意的 $t > 0$, 任何 $[0,t]$ 的一个分划 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdot < t_n = t$, 记*

$$T_t^{\Delta} = \sum_{i \in \Delta}|X_i - X_{i-1}|^2, \quad |\Delta| = \sup_{i \in \Delta}|t_i - t_{i-1}|.$$

若存在实值随机过程 $[X,X]_t$, 对任意 $[0,t]$ 的一列分划 (Δ_n) 满足

$$\lim_{|\Delta_n| \to 0}\mathbb{P}(|T_t^{\delta} - [X,X]_t| \geq \delta) = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

则称 X 具有有限的二次变差, $[X,X]_t$ 为它的二次变差过程.

定义布朗运动的二次变差为

$$\langle B, B\rangle_t = \lim_{|\delta| \to 0}\sum_{i \in \delta}|B(t_i - B(t_{i-1}))|^2,$$

定理 1.10. *设 B 是一个标准布朗运动, 则*

$$\langle B, B\rangle_t = t.$$

证明: 设 $\Delta_n : 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k_n}^{(n)} = t$, 则

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k_n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - t\right)^2 \\
=&\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k_n-1}\left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)\right]\right)^2 \\
=&\left(\sum_{i=1}^{k_n-1}\mathbb{E}\left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)\right]\right)^2 \\
=&\sum_{i=1}^{k_n-1}\mathbb{E}\left(\left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4 - (t_{i+1} - t_i)^2\right]\right) \\
=&\sum_{i=1}^{k_n-1}\left[3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2\right] \\
=&\sum_{i=1}^{k_n-1}(t_{i+1} - t_i)^2 \\
\leq&2t\sup_{0\leq i\leq t_{k_n-1}}|t_{i+1} - t_i| \to 0, \quad \text{as } |\Delta_n| \to 0.
\end{aligned}
$$

□

设 $f : [0,\infty] \to \mathbb{R}$, $V_f[a,b]$ 表示 f 在 $[a,b]$ 上的全变差, i.e.,

$$V_f[a,b] = \sup_{\Delta}\sum_{i\in\Delta}|f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

其中 Δ 是 $[a,b]$ 的任意有限划分.

若存在常数 $M > 0, \alpha > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha, \quad \forall x,y \in [a,b],$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 α-Hölder 连续.

推论 1.11. *对 a.e. ω, $B_\cdot(\omega)$ 在任意有限区间上的全变差为 ∞.*

证明: 由于布朗运动的二次变差为 t, 存在 $\Omega_0 \subset \Omega$ 满足: $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, 且对任意的有理数 $p < q$, 存在 $[p,q]$ 的一列分划 Δ_n, 使得: $|\Delta| \to 0$ 且对任意的 $\omega \in \Omega_0$,

$$\lim_{n\to 0}\sum_{i\in\Delta_n}|B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)|^2 = q - p.$$

设 $V(\omega)$ 是 $B(\omega)$ 在 $[p,q]$ 上的全变差, 则

$$\sum_{i\in\Delta_n}|B_{t_i}(\omega)-B_{t_{i-1}}(\omega)|^2\le\left(\sup_{i\in\Delta_n}|B_{t_i}(\omega)-B_{t_{i-1}}(\omega)|\right)V(\omega)$$

令 $n\to\infty$. 由布朗运动的连续性知: 它在有限区间上一致连续, 所以 $\sup_{i\in\Delta_n}|B_{t_i}(\omega)-B_{t_{i-1}}(\omega)|\to 0$. 若 $V(\omega)<\infty$, 则右侧趋于 0, 而左侧趋于 $q-p$, 矛盾.

□

推论 1.12. *对任意的 $\alpha>1/2$, 对 a.e. ω, $B_\cdot(\omega)$ 无处局部 α-Hölder 连续. 特别地, 对 a.e. ω, $B_\cdot(\omega)$ 无处连续可微.*

证明: 设 Ω_0 如前所述, $\alpha>1/2$. 若存在有理数 $p<q$, 使得对任意的 $p<s<t<q$,

$$|B_t(\omega)-B_s(\omega)|\le C|t-s|^\alpha$$

则对 $[p,q]$ 的任意划分 Δ_n

$$q-p\longleftarrow\sum_{i\in\Delta_n}|B_{t_i}(\omega)-B_{t_{i-1}}(\omega)|^2\le C^2(q-p)\sup_i|t_{i+1}-t_i|^{2\alpha-1}\longrightarrow 0.$$

矛盾.

□

Kolmogorov 连续修正定理

定义 1.13. 设 X_t 和 Y_t 是定义在同一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ 上的随机过程. 称 Y_t 是 X_t 的一个修正, 若对任意的 $t\in T$, $\mathbf{P}(X_t=Y_t)=1$.

显然, 若 Y_t 是 X_t 的一个修正, 则 X_t 和 Y_t 有相同的有限维分布.

定义 1.14. 设 X_t 和 Y_t 是定义在同一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ 上的随机过程. 称 Y_t 和 X_t 是无区别的, 若存在全测度集 Ω' 使得

$$X_t(\omega)=Y_t(\omega),\qquad t\in T,\ \omega\in\Omega'. \tag{1}$$

若指标集 T 是可数的, 则两个过程是无区别的当且仅当它们互为修正. 若 T 不可数的, 则存在互为修正但不是无区别的两个随机过程.

定理 1.15. *设 $X_t, t\in[0,1]^d$ 是一个实值随机场. 假设存在常数 $\gamma,c,\epsilon>0$ 满足*

$$\mathbb{E}[|X_t-X_s|^\gamma]\le c|t-s|^{d+\epsilon}.$$

则存在 X 的一个修正 $\tilde{X}$ 满足

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\neq t}\frac{|\tilde{X}_t-\tilde{X}_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma\right]<+\infty,$$

其中 $\alpha\in(0,\epsilon/\gamma)$. 特别地, $\tilde{X}$ 是 α-Hölder 连续的.

对于布朗运动 B, 由于

$$\mathbb{E}|B_t - B_s|^{2n} = (2n-1)!!|t-s|^n,$$

应用上面的定理可以得到

定理 1.16. *对任意的 $\alpha \in (0, 1/2)$, 布朗运动是局部 α-Hölder 连续的.*

证明: 由上面的结果知道: 布朗运动是局部 α-Hölder 连续的, 其中 $\alpha \in (0, \frac{n-1}{2n}), \forall n \geq 1$. 令 $n \to \infty$, 得证. $\square$

下面的定理表面, 布朗运动的轨道不是 $\frac{1}{2}$-Hölder 连续的.

定理 1.17 (Lévy 连续模定理)**.**

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \left(\frac{\sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1, t_2 - t_1 < \epsilon} |B_{t_2} - B_{t_1}|}{\sqrt{2t \log \frac{1}{t}}} \right) = 1, \quad a.s.$$

证明: 见 Theorem 2.1 in Chapter 2 of [Revuz-Yor]. $\square$

1.5 马氏性和强马氏性

设 E 是一个局部紧可分度量空间, $\mathcal{E}$ 是它的所有开集生成的 Borel σ-代数. 随机过程 $X = \{X_t, t \geq 0\}$ 是 $(\mathcal{F}_t)$-适应过程.

定义 1.18. *称 X 是一个马氏过程, 若对任意的 $t \geq s, f \in b\mathcal{E}$ (等价地, $f \in C_c(E)$),*

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)|X_s]$$

定义 1.19. *称 $\{P_{s,t}(\cdot, \cdot), 0 \leq s < t < \infty\}$ 为 $(E, \mathcal{E})$ 上的马氏转移函数(马氏半群), 若满足,*

(1) 对任意的 $x \in E$, $A \to P_{s,t}(x, A)$ 是 $\mathcal{E}$ 上的概率测度;

(2) 对任意的 $A \in \mathcal{E}$, $x \to P_{s,t}(x, A)$ 是 $\mathcal{E}$ 可测的;

(3) (Chapman-Kolmogorov 方程) 对任意的 $x \in E, A \in \mathcal{E}, s < t < u$,

$$P_{s,u}(x, A) = \int_E P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, A).$$

称它是时齐的, 若 $P_{s,t}(x, A) = P_{t-s}(x, A)$.

对任意的 $f \in B\mathcal{E}$, 记

$$P_t f(x) = \int_E P_t(x, dy) f(y).$$

定义 1.20. *称 $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ 为转移函数为 P_t 的马氏过程, 若对若对任意的 $t \geq s, f \in b\mathcal{E}$*

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = P_s f(X_t).$$

给定初始分布 μ, 它的有限维分布为

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \cdots, X_{t_n} \in A_n)\\ =&\int_{A_0} \mu(dx_0) \int_{A_1} P_t(x_0, dx_1) \cdots \int_{A_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n).\end{aligned}$$

例如: 布朗运动的 转移密度函数为

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}}.$$

定义 1.21. *称 X 是一个强马氏过程, 若对任意的停时 $\tau, t \geq 0, f \in b\mathcal{E}$,*

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t})|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[f(X_{\tau+t})|X_\tau]$$

下面, 我们介绍布朗运动的强马氏性. 设 B 关于 $\mathcal{F}_*$ 是一个布朗运动, i.e. $B_t \in \mathcal{F}_t$, $B_{t+s} - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立, 并且 $B_{t+s} - B_s \sim N(0,t), \forall t, s \geq 0$.

定理 1.22. *对任意的有限停时 τ, 过程 ${}^\tau B = \{B_{t+\tau} - B_\tau\}$ 是一个与 $\mathcal{F}_\tau$ 独立的布朗运动.*

证明: 首先证明对任意的$\tau \in \mathcal{F}_\tau$, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 下式成立

$$\mathbb{E}[f({}^\tau B_{t_1}, \cdots, {}^\tau B_{t_n}); C] = \mathbb{P}(C)\mathbb{E}[f({}^\tau B_{t_1}, \cdots, {}^\tau B_{t_n}] \tag{2}$$

eq stron

我们首先证明上式对离散停时成立, 然后通过逼近证明对一般的停时成立.

假设 τ 的取值 $\{s_i, i = 1, 2, \cdots\}$. 由布朗运动的马氏性, 我们知 ${}^s B = \{B_{t+s} - B_s, t \geq 0\}$ 是与 $\mathcal{F}_s$ 独立的布朗运动. 由于 $C \in \mathcal{F}_\tau$, 则 $C_i := C \cap \{\tau = s_i\} \in \mathcal{F}_{s_i}$. 所以

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[f({}^\tau B_{t_1}, \cdots, {}^\tau B_{t_n}); C]\\ =&\sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}[f(B_{t_1+s_i} - B_{s_i}, \cdots, B_{t_n+s_i} - B_{s_n}); C_i]\\ =&\sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(C_i)\mathbb{E}[f(B_{t_1+s_i} - B_{s_i}, \cdots, B_{t_n+s_i} - B_{s_i})]\\ =&\sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(C_i)\mathbb{E}[f(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})]\\ =&\mathbb{P}(C)\mathbb{E}[f(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})].\end{aligned}$$

对于一般的停时 τ, 取

$$\tau_n = \frac{[2^n\tau]+1}{2^n}.$$

则强马氏性对 τ_n 成立. 设 $C \in \mathcal{F}_\tau$. 因为 $\tau \le \tau_n, \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau_m}$, 所以 $C \in \mathcal{F}_{\tau_m}$, 进而下式成立

$$\mathbb{E}[f({}^{\tau}_{m}B_{t_1}, \cdots, {}^{\tau}_{m}B_{t_n}); C] = \mathbb{P}(C)\mathbb{E}[f({}^{\tau}B_{t_1}, \cdots, {}^{\tau}B_{t_n}].$$

由布朗运动轨道的连续性, ${}^{\tau}_{m}B_t \to {}^{\tau}B_t$. 由控制收敛定理, 上式左端收敛, (2) 得证.

由于所有 $\{f({}^{\tau}B_{t_1}, \cdots, {}^{\tau}B_{t_n})\}$ 构成的空间在 $\sigma\{{}^{\tau}B_t, t \ge 0\}$ 中稠密, 所以 ${}^{\tau}B$ 与 $\mathcal{F}_\tau$ 独立. 取 $C = \Omega$ 可得, ${}^{\tau}B$ 与 B 同分布.

□

1.6 强马氏性的应用

在这一节, 我们利用布朗运动的强马氏性, 证明布朗运动的一些性质. 回忆, 对任意的有限停时 τ, 过程 ${}^{\tau}B = \{B_{t+\tau} - B_\tau\}$ 是一个与 $\mathcal{F}_\tau$ 独立的布朗运动. 设随机变量 $X \in \sigma\{{}^{\tau}B\}, Y \in \mathcal{F}_\tau$, 则 X, Y 独立, 它们的联合分布一定是边缘分布的乘积测度. 由 Fubini 定理, 可以计算

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X,Y) = &\int f(x,y)\mathbb{P}(X \in dx)\mathbb{P}(Y \in dy) \\ =&\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(x,Y]|_{x=X}] \\ =&\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X,y]|_{y=Y}].\end{aligned}$$

性质 1.23. 令 $M_t = \max_{0\le s\le t} B_s$ *是布朗运动的最大值过程. 则* M_t *与* $|B_t|$ *同分布.*

证明: 设 $b > 0$,

$$\tau_b = \inf\{t > 0 : B_t = b\}$$

是布朗运动首次到达 b 的时间. 利用 Kolmogorov 0-1 律可以证明 $\limsup_{t\to\infty} B_t = \infty$ a.s.. 因此 $\tau_b < \infty$, a.s., 它是有限停时. 下面我们利用强马氏性计算

$$\mathbb{P}(B_t \ge b, \tau_b \le t).$$

注意到 $\{B_t \ge b\}$ 可以推出 $\tau_b \le t$, 因此上面的概率为 $\mathbb{P}(B_t \ge b)$. 定义转移过程 $W_t = B_{t+\tau_b} - B_{\tau_b} = B_{t+\tau_b} - b$.

上面的概率可以重新表示成

$$\mathbb{P}(W_{t-\tau_b} \ge 0, \tau_b \le t).$$

上面的概率可以看成某个随机变量 W 和 τ 的函数的期望. 因为 $W \in \sigma\{{}^{\tau}B\}, \tau_b \in \mathcal{F}_\tau$, 所以由强马氏性知道这两个随机变量独立. 因此, 由 Fubini 定理, 取期望时, 可以首先固定一个变量, 然后取条件期望. 这里, 我们先把 τ 看成常数, 因为 W 是布朗运动, $\mathbb{P}(W_{t-s} \geq 0) = \frac{1}{2}, \forall s$. 这推出了

$$\mathbb{P}(B_t \geq b) = \mathbb{P}(B_t \geq b, \tau_b \leq t) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_b \leq t).$$

另一方面, 由于 $\{\tau_b \leq t\} = \{M_t \geq b\}$,

$$\mathbb{P}(M_t \geq b) = 2\mathbb{P}(B_t \geq b) = \mathbb{P}(|B_t| \geq b).$$

这表明了 M_t 与 $|B_t|$ 同分布.

□

下面计算首中时 τ_b 的密度函数. 从上面的定理知

$$\mathbb{P}(\tau_b \leq t) = \frac{2}{2\pi t}\int_b^\infty e^{-x^2/2t}dx.$$

关于 t 求导数, 利用分部积分可得密度函数为

$$p_{\tau_b}(t) = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-b^2/2t}.$$

定理 1.24. *设 B 是标准布朗运动, τ 是一个停时. 设 W 是另外一个从 0 出发的, 与 $\mathcal{F}_\tau$ 独立的布朗运动. 定义过程 Z:*

$$Z_t = \begin{cases} B_t & \text{if } t \leq \tau; \\ W_{t-\tau} + B_\tau & \text{if } t > \tau. \end{cases}$$

则 Z 是一个布朗运动.

证明: 由强马氏性知 ${}^{\tau}B$ 是一个与 (B^τ, τ) 独立的布朗运动, 其中 $B^\tau = \{B_{t\wedge\tau}, t \geq 0\}$. 由假设知: 三元组 (W, B^τ, τ) 与 $({}^{\tau}B, B^\tau, \tau)$ 同分布. 过程 Z, B 是由这两个三元组用相同的方法构造的. 精确到讲, 存在可测函数 F 满足 $Z = F(W, B^\tau, \tau), B = F({}^{\tau}B, B^\tau, \tau)$. 这证明了 Z, B 由相同的分布, 所以 Z 是布朗运动.

□

推论 1.25. *(André 反射布朗运动) 设 τ 是一个布朗运动的有限停时. 在时刻 τ 后, 对 B_τ 做反射, 定义过程 Z:*

$$Z_t = \begin{cases} B_t & \text{if } t \leq \tau; \\ 2B_\tau - B_t & \text{if } t > \tau. \end{cases}$$

则 Z 是一个布朗运动.

证明: 和 ${}^{\tau}B$ 一样, $-{}^{\tau}B$ 也是与 $\mathcal{F}_\tau$ 独立的布朗运动, 在上定理中取 $W_t = -{}^{\tau}B$, 得证结论.

□

利用反射原理, 可以得到 B_t 与 $M_t = \max_{0\le s\le t} B_s$ 的联合分布.

性质 1.26. *B_t 与 $M_t = \max_{0\le s\le t} B_s$ 的联合分布为*

$$\mathbb{P}(B_t \in da, M_t \in db) = \left(\frac{2}{\pi t^3}\right)(2b-a)e^{-(2b-a)^2/2t}dadb,$$

其中 $b>0, a<b$.

证明: 设 Z 是布朗运动 B 在 τ_b 后经过反射得到的布朗运动. 为了方便, 我们记 τ_b^B 和 τ_b^Z 表示 B 和 Z 首次到达 b 的时刻. 显然, 这两个时刻相同. 对 $b>0, a<b$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_t \le a, M_t \ge b) =& \mathbb{P}(B_t \le a, \tau_b^B \le t)\\ =& \mathbb{P}(Z_t \le a, \tau_b^Z \le t)\\ =& \mathbb{P}(B_t \ge 2b-a, \tau_b^B \le t)\\ =& \mathbb{P}(B_t \ge 2b-a)\\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{2b-a}^{\infty} e^{-x^2/2t}dx.\end{aligned}$$

关于 a, b 求导, 就可以得到密度函数.

□

推论 1.27. *对固定的 $t>0$, $M_t - B_t$ 和 $|B_t|$ 同分布.*

证明: 把密度函数 p_{M_t,B_t} 在区域 $b-a\ge c$ 上积分, 可以发现它们的分布函数相同. □

注记 1.28. *观察到 $M_t - B_t$ 与 M_t 同分布, 因为它们都与 $|B_t|$ 同分布. 过程 $|B_t|$ 称为反射布朗运动. 我们在后面会详细介绍反射布朗运动. 实际上, 有更强的结果成立: 过程 $\{M_t - B_t, t\ge 0\}$ 与 $\{|B_t|, t\ge 0\}$ 同分布.*

下面的例子表面布朗运动在任意的区间 $(0,\epsilon)$ 内都会变号, 不论 ϵ 多小.

ex 1 **例子 1.29.** *计算 $\mathbb{P}(B(t)\le 0, \forall t\in[0,\epsilon])$. 由于*

$$\mathbb{P}(B(t)\le 0, \forall t\in[0,\epsilon]) = \mathbb{P}(\sup_{0\le t\le\epsilon} B(t)\le 0) = 1-\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le\epsilon} B(t) > 0).$$

而 $\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le\epsilon} B(t)>0) = 2\mathbb{P}(B(t)>0) = 1$. 所以 $\mathbb{P}(B(t)\le 0, \forall t\in[0,\epsilon]) = 0$.

定理 1.30. *布朗运动的零点集 L_0 是个随机不可数闭集, 它没有孤立点, Lebesgue 测度为 0.*

证明: 根据上面的定理, 我们知道布朗运动在任何一个小区间 $[0,t]$ 上变号, 因此, 在这个区间里面总是存在零点. 这推出了, 零点集是无限集, $t=0$ 可以是它右侧的一列零点的极限.

另外, 由于 $B(t)$ 的轨道是连续的, 零点集是闭集, 即若 $B(\tau_n)=0, \tau_n \to \tau$, 则 $B(\tau)=0$.

下证零点集是不可数的. 由强马氏性知: 若 τ 是一个停时, $B(\tau)=0$, 则 ${}^\tau B(t) := B(\tau+t) - B(\tau) = B(\tau+t)$ 也是一个布朗运动. 因此, $t=0$ 是新的布朗运动 ${}^\tau B$ 零点的极限. 注意到 $B(\tau+t)$ 的零点是 $B(t)$ 的零点. 因此, 如果一个零点是停时, 则它一定是它右侧一列零点的极限, 它是聚点. 但是并不是所有的零点都是停时, 比如说对于固定的 t, t 之前的最后的一个零点不是停时. 下面用更复杂的方法证明每个零点都是聚点. 对任意的 $t \geq 0$, t 之后的首个零点 $\tau(t)$ 是停时. 则

$$\mathbb{P}(\gamma : \tau(t) \text{ 是它右侧一列零点的极限}) = 1.$$

关于所有的有理数 t 取交集, 上面的集合仍然概率为 1. 因此, 每个有理数之后的第一个零点都是聚点. 这推出了 L_0 的每个点都是它的聚点, 即 L_0 是 perfect 集. 由集合论的知识, 我们知道 L_0 是不可数的.

尽管 L_0 是不可数的, 它的 Lebesgue 测度为 0. 这是因为 L_0 的 Lebesgue 测度 $|L_0| = \int_0^1 I(B(t)=0)dt$, 它是非负随机变量. 由 Fubini 定理知

$$\mathbb{E}|L_0| = \mathbb{E}\int_0^1 I(B(t)=0)dt = \int_0^1 \mathbb{P}(B(t)=0)dt = 0.$$

这推出 $\mathbb{P}(|L_0|=0)=1$. □

1.7 布朗运动的零点. Arcsin 律

若 $B(\tau)=0$, 则称时刻 τ 为布朗运动的零点. 由布朗运动极大值分布可以推出布朗运动零点的信息. 记 $\{B^x(t)\}$ 为从 x 点出发的布朗运动.

定理 1.31. *对任意的 $x \neq 0$, $\{B^x(t)\}$ 在区间 $(0,t)$ 上至少一个零点的概率是*

$$\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2u}} du.$$

证明: 由对称性, 我们仅对 $x<0$ 证明. 由布朗运动的连续性,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B^x \text{ 在 } (0,t) \text{ 区间存在零点 }) =& \mathbb{P}(\max_{0\leq s\leq t} B^x(t) \geq 0) \\ =& \mathbb{P}_0(\max_{0\leq s\leq t} B(t) + x \geq 0) = \mathbb{P}_0(\max_{0\leq s\leq t} B(t) \geq -x) \\ =& 2\mathbb{P}_0(B(t) \geq -x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2t}} du = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t v^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2v}} dv.\end{aligned}$$

上式最后一步用到了变量替换 $u = -x\sqrt{t/v}$. □

利用上面的结果可以证明

定理 1.32. *布朗运动 B 在区间 (a,b) 中至少存在一个零点的概率为*

$$\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

证明: 记

$$h(x)=\mathbb{P}(B \text{ 在区间 } (a,b) \text{ 中至少存在一个零点}|B_a=x).$$

由马氏性知

$$h(x)=\mathbb{P}(B^x \text{ 在区间 } (a,b) \text{ 中至少存在一个零点}).$$

利用条件期望, 得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(B^x \text{ 在 } (a,b) \text{ 区间存在零点 })\\ =&\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(B \text{ 在区间 } (a,b) \text{ 中至少存在一个零点}|B_a=x)\mathbb{P}(B_a\in dx)\\ =&\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\mathbb{P}(B_a\in dx)=\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\int_0^{\infty}h(x)e^{-\frac{x^2}{2a}}dx.\end{aligned}$$

将上面定理中的 $h(x)$ 代入上式, 可得结论.

□

定理 1.33. *布朗运动 B 在区间 (a,b) 中不存在一个零点的概率为* $\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{a}{b}}$.

下面的结果给出了 t 之前最后一个零点, 和 t 之后第一个零点的分布. 令

$$\gamma_t=\sup\{s\le t:B(s)=0\}=t \text{ 之前最后一个零点},$$

$$\beta_t=\inf\{s\ge t:B(s)=0\}=t \text{ 之后第一个零点}.$$

注意到 β_t 是停时, γ_t 不是.

定理 1.34.

$$\mathbb{P}(\gamma_t\le x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{t}}.$$

$$\mathbb{P}(\beta_t\ge y)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t}{y}}.$$

$$\mathbb{P}(\gamma_t\le x,\beta_t\ge y)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

证明: 应用上面的定理可得结论. 比如最后一个事件表示 B 在 (x,y) 之间没有零点. □

1.8 布朗运动的极限行为

下面考虑长时间的渐近行为. 证明见 Karatzas-Shreve.

定理 1.35 (大数定律)**.**

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B_t}{t}=0 \qquad a.s.$$

更精确地, 有下面的重对数律.

定理 1.36 (重对数律)**.**

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}=1 \qquad a.s.$$

引理 1.37. *对任意的* $a>0$,

$$\frac{a}{a^2+1}\exp\left\{-\frac{a^2}{2}\right\}\leq\int_a^\infty\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx<\frac{1}{a}\exp\left\{-\frac{a^2}{2}\right\}.$$

证明: 求导验算. □

证明: [重对数律]

(1) 上界. 首先对固定的 $\theta>1$, 上界对子列 B_{θ^k} 成立. 由上引理得

$$\mathbb{P}(B_{\theta^k}\geq\sqrt{2\theta^k\log\log\theta^k}(1+\varepsilon))\leq\exp\{-(1+\varepsilon)^2\log\log\theta^k\}=\frac{1}{(k\log\theta)^{(1+\varepsilon)^2}}.$$

所以

$$\sum_{k\geq1}\mathbb{P}(B_{\theta^k}\geq\sqrt{2\theta^k\log\log\theta^k}(1+\varepsilon))<+\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理知

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{B_{\theta^k}}{\sqrt{2\theta^k\log\log\theta^k}}\leq1+\varepsilon, \quad a.s.$$

再由 ε 的任意性, 可以选一列 $\varepsilon_n\downarrow0$, 得

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{B_{\theta^k}}{\sqrt{2\theta^k\log\log\theta^k}}\leq1, \quad a.s.$$

再证上界. 对任意的 $t>\theta$, 存在 $k=k(t)$, 使得 $\theta^k\leq t<\theta^{k+1}$. 则有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sup_{\theta^k\leq s<\theta^{k+1}}|B_s-B_{\theta^k}|>\sqrt{(\theta-1)\theta}\sqrt{2\theta^k\log\log\theta^k}\right)\\=&\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s<\theta^{k+1}-\theta^k}|B_s-B_{\theta^k}|>\sqrt{(\theta-1)\theta}\sqrt{2\theta^k\log\log\theta^k}\right)\\=&2\mathbb{P}\left(|B_{\theta^{k+1}}-B_{\theta^k}|>\sqrt{(\theta-1)\theta}\sqrt{2\theta^k\log\log\theta^k}\right)\\\leq&2\exp\{-\theta\log\log\theta^k\}=\frac{2}{(k\log\theta)^\theta}.\end{aligned}$$

由 Borel-Cantelli 引理知

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\sup_{\theta^k\le s<\theta^{k+1}}|B_s-B_{\theta^k}|}{\sqrt{2\theta^k\log\log\theta^k}}\le\sqrt{(\theta-1)\theta},\quad a.s.$$

再由 $B_t\le B_{\theta^k}+\sup_{\theta^k\le s<\theta^{k+1}}|B_s-B_{\theta^k}|$, 得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}\le 1+\sqrt{(\theta-1)\theta}\quad a.s.$$

选 $\theta_n\downarrow 1$, 得上界成立.

(2) 下界. 对固定的 $\theta>1$, 由上界和布朗运动的对称性, 有

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{|B_{\theta^k}|}{\sqrt{2\theta^k\log\log\theta^k}}\le 1,\quad a.s.$$

对任意的 $\delta>0$, 对很大的 $k>1$,

$$\mathbb{P}(B_{\theta^{k+1}}-B_{\theta^k}\ge(1-\delta)\sqrt{2\theta^k(\theta-1)\log\log\theta^k})\ge\frac{1}{(k\log\theta)^{(1-\delta/2)^2}}.$$

由 Borel-Cantelli 引理和 δ 的任意性, 我们有

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{B_{\theta^{k+1}}-B_{\theta^k}}{\sqrt{2\theta^k(\theta-1)\log\log\theta^k}}\ge 1,\quad a.s.$$

再由 $B_{\theta^{k+1}}\ge B_{\theta^{k+1}}-B_{\theta^k}-|B_{\theta^k}|$, 得:

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{B_{\theta^{k+1}}}{\sqrt{2\theta^k(\theta-1)\log\log\theta^k}}\ge\ge\sqrt{\frac{\theta-1}{\theta}}-\sqrt{\frac{1}{\theta}},\quad a.s.$$

所以

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}\ge\sqrt{\frac{\theta-1}{\theta}}-\sqrt{\frac{1}{\theta}}\quad a.s.$$

选 $\theta_n\to\infty$, 得下界成立.

$\square$