

Reducción de ruido en imágenes y la ecuación de Perona-Malik

César Aaron Flores Villa

Licenciatura en Computación Matemática

Universidad de Guanajuato

cesar.flores@cimat.mx

Itzel Berenice Martínez Palacios

Licenciatura en Computación Matemática

Universidad de Guanajuato

itzel.palacios@cimat.mx

Tadeo Rivelino López Yáñez

Licenciatura en Matemáticas

Universidad Autónoma de Sinaloa

tadeogamy@gmail.com

Resumen—This project investigates the Perona-Malik equation, a fundamental tool in image processing. It analyzes the motivations and background of the model, followed by its definition and detailed formulation. Finally, the project presents numerical results applied to diverse images.

Index Terms—Perona-Malik equation, Image processing, Anisotropic diffusion, Denoising.

I. INTRODUCCIÓN

Durante el proceso de adquisición y transmisión, las imágenes digitales son susceptibles a diversas fuentes de degradación, manifestándose comúnmente como *ruido gaussiano* (inherente a sensores electrónicos), *ruido impulsivo* (tipo “sal y pimienta”) o *ruido speckle*.

Uno de los desafíos fundamentales en el procesamiento de imágenes habita en encontrar un equilibrio entre la eliminación del ruido y la conservación de los bordes. Tradicionalmente, el punto de partida para la reducción de ruido ha sido la difusión isotrópica, modelada por la ecuación del calor lineal. Sin embargo, este enfoque presenta una limitación crítica: su naturaleza homogénea suaviza la imagen de manera arbitraria, provocando la degradación de los bordes y la pérdida de información relevante.

Para solucionar esta limitación, Perona y Malik propusieron en 1987 [1] un modelo de difusión anisotrópica. Esta ecuación basada en derivadas parciales no lineales introduce un coeficiente de difusividad que depende del gradiente local de la imagen. Este mecanismo permite que la difusión sea intensa en regiones homogéneas, pero disminuya significativamente en zonas de alto gradiente, preservando así los bordes. Este proyecto tiene como objetivo analizar la ecuación de Perona-Malik, estudiando la existencia y estabilidad de sus soluciones y presentando resultados numéricos que validen su desempeño en diversas imágenes.

II. DIFUSIÓN ISÓTROPICA

El enfoque tradicional en el suavizado de imágenes se basa en la difusión isotrópica. La ecuación de difusión es una ecuación diferencial parcial que suele surgir de fenómenos físicos. Suele presentarse de forma general:

$$\partial_t u(x, t) = \nabla(C(u, x, t) \nabla u(x, t))$$

siendo C el coeficiente de difusividad [1].

Dicha ecuación es no lineal si el coeficiente de difusividad depende de la solución u . Si C en cambio es una constante, obtenemos el modelo lineal simple de la ecuación del calor.

II-A. Aplicación en imágenes

Sea $u(x, y, t)$ una imagen representada como una función escalar definida sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ [2]. El proceso de suavizado mediante difusión isotrópica se modela por la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

donde Δ es el operador Laplaciano,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

La condición inicial corresponde a la imagen original,

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y),$$

y es usual imponer condiciones de contorno de Neumann homogéneas,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

las cuales garantizan que no exista flujo de intensidad a través de los bordes del dominio.

II-B. Interpretación física y geométrica

La ecuación del calor describe la difusión de intensidad desde regiones de alta concentración hacia regiones vecinas de menor concentración. El Laplaciano actúa como un operador de curvatura: si u es mayor que la media local, entonces

$$\Delta u < 0,$$

y la evolución disminuye el valor del píxel; si es menor, entonces

$$\Delta u > 0,$$

y aumenta su valor. El resultado es un proceso de suavizado progresivo que elimina variaciones rápidas como el ruido.

II-C. Solución mediante la función fundamental

La ecuación del calor es lineal e invariante por traslación. Bajo estas propiedades, la solución puede escribirse como una convolución con la solución fundamental del operador de difusión. En dos dimensiones, la función fundamental es el núcleo de calor

$$G(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right),$$

que coincide con la densidad de una distribución normal bidimensional con varianza $2t$.

Por tanto, la solución del problema de difusión isotrópica viene dada por

$$u(\cdot, t) = G(\cdot, t) * u_0,$$

lo cual muestra que la difusión isotrópica es equivalente a aplicar un filtro gaussiano cuyo parámetro de suavizado depende directamente del tiempo t .

II-D. Limitaciones

Si bien el modelo es simple, presenta una desventaja importante: la difusión ocurre de manera uniforme en todas las direcciones y regiones de la imagen. En consecuencia, la ecuación del calor no distingue entre ruido y bordes, por lo que suaviza también las discontinuidades de intensidad, degradando los contornos.

Lo cual motiva la introducción de modelos de difusión no lineales, como la difusión anisotrópica de Perona-Malik, capaces de reducir el ruido preservando estructuras importantes.

III. PERONA-MALIK

El Método de Perona-Malik se define como una ecuación de difusión parcial no lineal que emplea un coeficiente de difusividad no homogéneo. Introduce una dinámica dependiente del gradiente, de forma que la difusión es reducida cerca de discontinuidades de intensidad.

La formulación precisa del problema de Perona-Malik generalmente con una condición de contorno de Neumann, se define como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) \text{ en } \Omega \times (0, \pm\infty),$$

donde

- u es la imagen suavizada en el tiempo t .
- Ω es el dominio de la imagen.
- $c(|\nabla u|^2)$ es la función de difusividad [3].

Las propuestas originales de Perona y Malik son

$$c(s) = \exp\left(-\left(\frac{s}{K}\right)^2\right), \quad c(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{K}\right)^2},$$

con un parámetro $K > 0$ que regula la sensibilidad a los bordes, y es usual que este se determine experimentalmente

dependiendo de la imagen [4].

Así el modelo es capaz distinguir entre dos regímenes:

- **Regiones suaves:** si $\|\nabla u\| \ll K$, entonces $c(\|\nabla u\|) \approx 1$ y la ecuación se comporta como la ecuación del calor. Esto produce difusión que elimina ruido.
- **Bordes:** si $\|\nabla u\| \gg K$, entonces $c(\|\nabla u\|) \approx 0$ y la difusión se atenúa o se detiene. Esto preserva las discontinuidades de intensidad.

A diferencia de la ecuación del calor, cuya solución es una convolución lineal con un núcleo fijo, la ecuación de Perona-Malik actúa como una difusión no lineal localmente adaptativa: en zonas suaves se comporta como un filtrado gaussiano, mientras que en los bordes reduce la difusión normal e incluso puede inducir ligeros efectos de difusión inversa que realzan la nitidez del borde. Este último efecto es el origen del carácter mal planteado del modelo en sentido de Hadamard, aunque en implementaciones discretas suele actuar como una regularización efectiva.

IV. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE PERONA-MALIK E IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

El propósito de esta sección será proponer una discretización de la ecuación diferencial de Perona-Malik presentada en secciones anteriores. Discretizaremos respecto a las coordenadas x y y de la imagen, mientras que el tiempo t se mantendrá continuo (esto habitualmente se llama semidiscretización). Se pueden elegir rangos

$$x_i = i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$y_i = i, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

$$t_i = i \cdot \Delta t, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Aquí se supone que la imagen a procesar tiene dimensiones $N \times M$, y estamos eligiendo rangos del tamaño de un píxel. Además, n es alguna cantidad máxima de iteraciones deseadas, mientras que Δt es un incremento en el tiempo. Denotamos por $u_{i,j}^k$ el píxel (i, j) de la imagen en la k -ésima iteración, con $k = 0$ correspondiendo a la imagen original [3].

Para una implementación numérica, tomaremos las siguientes aproximaciones. Para la longitud del gradiente $\|\nabla u_{i,j}^k\|$ usamos diferencias finitas centrales:

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{i,j}^k\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial u_{i,j}^k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{i,j}^k}{\partial y}\right)^2} \\ &\approx \sqrt{\left(\frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Sea además

$$c_{i,j}^k := c(\|\nabla u_{i,j}^k\|).$$

Aproximamos el lado izquierdo de la ecuación de Perona-Malik usando diferencias hacia adelante,

$$\frac{\partial u_{i,j}^k}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t}.$$

El lado derecho de la ecuación de Perona-Malik se reescribe como

$$\frac{\partial}{\partial x} [c(|\nabla u|) u_x] + \frac{\partial}{\partial y} [c(|\nabla u|) u_y],$$

que se aproxima por

$$\begin{aligned} RHS_k &:= c_{i+\frac{1}{2},j}^k (u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k) - c_{i-\frac{1}{2},j}^k (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) \\ &\quad + c_{i,j+\frac{1}{2}}^k (u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k) - c_{i,j-\frac{1}{2}}^k (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) \\ &= c_{i+\frac{1}{2},j}^k u_{i+1,j}^k + c_{i-\frac{1}{2},j}^k u_{i-1,j}^k \\ &\quad + c_{i,j+\frac{1}{2}}^k u_{i,j+1}^k + c_{i,j-\frac{1}{2}}^k u_{i,j-1}^k \\ &\quad - u_{i,j}^k (c_{i+\frac{1}{2},j}^k + c_{i-\frac{1}{2},j}^k + c_{i,j+\frac{1}{2}}^k + c_{i,j-\frac{1}{2}}^k). \end{aligned}$$

Observe cómo este esquema de aproximación requiere el valor de c en el punto medio de píxeles. Esto puede estimarse tomándolo como la media de las evaluaciones de c en sus vecinos:

$$c_{i\pm\frac{1}{2},j} = \frac{c_{i\pm 1,j} + c_{i,j}}{2}, \quad c_{i,j\pm\frac{1}{2}} = \frac{c_{i,j\pm 1} + c_{i,j}}{2}.$$

Igualando estas dos aproximaciones, tenemos

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = RHS_k.$$

Despejando $u_{i,j}^{k+1}$, resulta

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Delta t \cdot RHS_k.$$

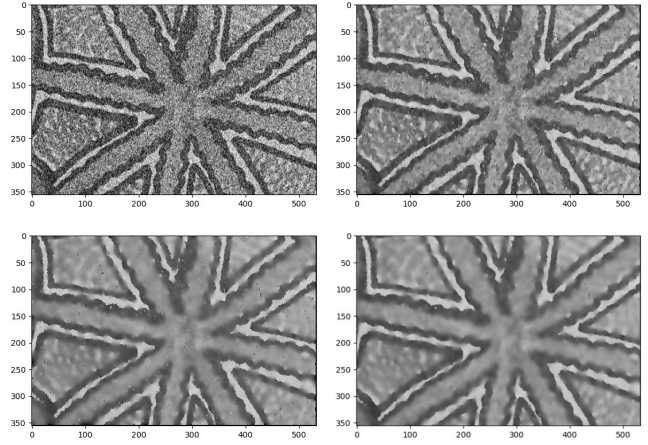
Esto nos da un esquema iterativo, con tamaño de paso Δt , que utilizamos en nuestra implementación para procesar una imagen dada. Para la difusión de Perona-Malik se recomienda $\Delta t \leq 0,25$ para mayor estabilidad.

V. EXPERIMENTOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación mostramos algunos ejemplos de aplicación de la ecuación de Perona Malik variando los parámetros. Utilizamos también el filtro de mediana para eliminar el ruido de sal y pimienta que se generaba después de algunas iteraciones. Al aplicar solo una iteración de dicho filtro, los bordes no se ven afectados radicalmente:

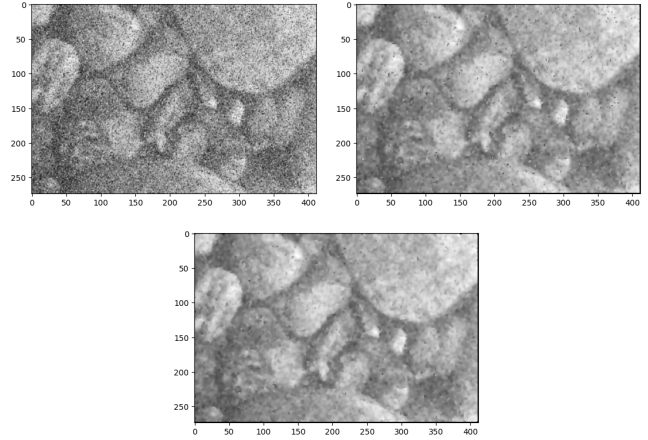
En el primer ejemplo, utilizamos los parámetros siguientes:

- 1^{era} Foto (Original).
- 2^{da} Foto ($\lambda = 0,15$; $K = 0,15$) con 30 iteraciones.
- 3^{era} Foto ($\lambda = 0,15$; $K = 0,15$) con 70 iteraciones.
- 4^{ta} Foto (Median Denoising).



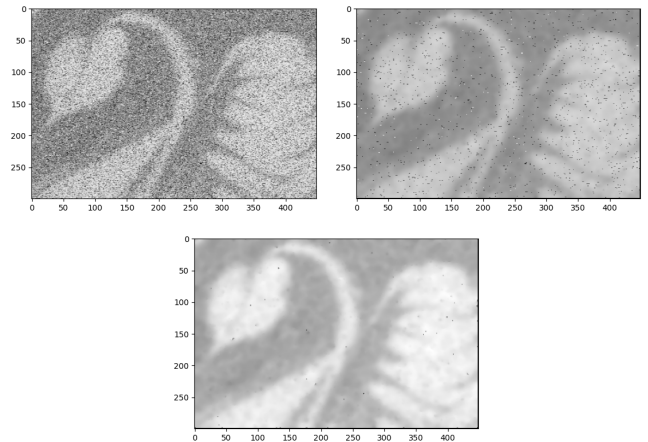
En el segundo ejemplo, utilizamos los parámetros siguientes:

- 1^{era} Foto (Original).
- 2^{da} Foto ($\lambda = 0,15$; $K = 0,15$) con 10 iteraciones.
- 3^{era} Foto (Median Denoising).



Finalmente en el tercer ejemplo utilizamos los parámetros siguientes:

- 1^{era} Foto (Original).
- 2^{da} Foto ($\lambda = 0,13$; $K = 0,13$) con 85 iteraciones.
- 3^{era} Foto (Median Denoising).



Observamos que el algoritmo de Perona Malik realiza un excelente trabajo reduciendo el ruido en las imágenes sin perder información ni detalle sobre los contornos y fronteras de las figuras. Además el uso del filtro de la mediana nos ayuda a quitar el residuo de tipo sal y pimienta en las imágenes resultantes de la aplicación del Perona Malik, notando así el gran aporte que tiene esta ecuación en el procesamiento de imágenes.

VI. CONCLUSIONES

El método de Perona-Malik constituye una manera efectiva para remover ruido en imágenes preservando su estructura, empleando una ecuación de difusión parcial no lineal que depende de una función $c(||\nabla u||)$. Dicha función es decreciente sobre la norma del gradiente de u , generando menor difusividad en regiones de la imagen con cambios más drásticos, y mayor difusividad en vecindades más similares.

Por otro lado, hemos visto cómo el modelo de difusión isotrópica genera una difusión homogénea sobre cualquier región de la imagen, aplicando un filtro gaussiano. En los experimentos realizados en la sección V, se puede apreciar estas propiedades de ambos métodos de reducción de ruido.

En la actualidad, el método de Perona-Malik es ampliamente usado en el procesamiento de imágenes. Su propuesta, así como la de otros métodos de difusión, nos permite reducir el ruido en imágenes preservando sobremanera su resolución.

REFERENCIAS

- [1] Wielgus, Maciej. (2010). Perona-Malik equation and its numerical properties [La ecuación de Perona-Malik y sus propiedades numéricas]. Tesis de Licenciatura. Uniwersytet Warszawski.
- [2] Conway, Cian; Stapleton, Patrick; McCaffrey, Ivan. (2015). Perona-Malik Anisotropic Filtering [Filtrado Anisótropo de Perona-Malik]. University of Limerick.
- [3] Yildirim, Ahmet; Karaca, İsmet. (2021). A PDE-based Mathematical Method in Image Processing: Digital-Discrete Method for Perona-Malik Equation [Un Método Matemático basado en EDPs en el Procesamiento de Imágenes: Método Digital-Discreto para la Ecuación de Perona-Malik]. American Academic Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences (ASRJETS), Volume 84, No 1, pp. 118-129.
- [4] Gallego, Guillermo. (Sin fecha). Introducción a la difusión en el tratamiento de imágenes. (Notas de clase/Artículo introductorio).
- [5] Perona, Pietro; Malik, Jitendra. (1990). Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion [Espacio-Escala y Detección de Bordes Usando Difusión Anisótropa]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 12, no. 7, pp. 629-639.