

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Красноярский государственный технический университет

**В.И.Вепринцев**

## **ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ**

Конспект лекций для студентов радиотехнических  
специальностей дистанционной формы обучения

Красноярск 2003

В.И.Вепринцев. Основы теории цепей.  
Конспект лекций для студентов радиотехнических специальностей. Ч. 1.  
КГТУ,- Красноярск. 2003

## Лекция 1.

### Введение

Среди дисциплин, составляющих основу базовой подготовки специалистов, связанных с разработкой и эксплуатацией современной радиоэлектронной аппаратуры, важное место отводится курсу «Основы теории цепей» (ОТЦ). Содержание этой дисциплины составляют задачи анализа и синтеза электрических цепей, изучение, как с качественной, так и с количественной стороны установившихся и переходных процессов в различных радиоэлектронных устройствах. Курс ОТЦ базируется на курсах физики и высшей математики и содержит инженерные методы расчета и анализа, применимые к широкому классу современных электротехнических и радиоэлектронных цепей.

### Электрическая цепь

*Электрической цепью* называется совокупность устройств, предназначенных для прохождения электрического тока и описываемых с помощью понятий напряжения и тока. Электрическая цепь состоит из *источников (генераторов)* и потребителей электромагнитной энергии - *приемников* или *нагрузок*.

*Источником* называют устройство, создающее (генерирующее) токи и напряжения. В качестве источников могут выступать устройства (аккумуляторы, гальванические элементы, термоэлементы, пьезодатчики, различные генераторы и т. д.), преобразующие различные виды энергии (химической, тепловой, механической, световой, молекулярно-кинетической и др.) в электрическую. К источникам относятся и приемные антенны, в которых не происходит изменение вида энергии.

*Приемником* называют устройство, потребляющее (запасающее) или преобразующее электрическую энергию в другие виды энергии (тепловую, механическую, световую и т. д.). К нагрузкам относятся и передающие антенны, излучающие электромагнитную энергию в пространство.

В основе теории электрических цепей лежит *принцип моделирования*. При этом, реальные электрических цепи заменяются некоторой идеализированной моделью, состоящей из взаимосвязанных *идеализированных элементов*. Под *элементами* подразумеваются идеализированные модели различных устройств, которым приписываются определенные электрические и магнитные свойства так, что они с заданной точностью отображают явления, происходящие в реальных устройствах. Таким образом, каждому элементу цепи соответствуют определенные соотношения между множеством токов и напряжений.

В теории цепей различают *активные* и *пассивные* элементы. *Активными элементами* считаются источники электрической энергии: источники напряжения и источники тока. К *пассивным элементам* относятся сопротивления, индуктивности и ёмкости. Цепи, содержащие активные элементы, называются активными, состоящие только из пассивных элементов – пассивными.

Электрическому току приписывается направление, совпадающее с направлением перемещения положительных зарядов. Количественная характеристика – мгновенное значение тока (значение его в данный момент времени)

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt},$$

где  $dq$  – заряд, прошедший за время  $dt$  через поперечное сечение проводника. В системе СИ ток измеряется в амперах (А).

Для переноса элементарного заряда  $dq$  через какой-либо пассивный участок цепи, необходимо затратить энергию

$$dw = u \cdot dq.$$

Здесь  $u$  – мгновенное значение напряжения (разности потенциалов) на зажимах пассивного участка цепи. Разность потенциалов – скалярная величина, которая определяется работой сил электрического поля при переносе единичного положительного заряда через заданный пассивный участок. В системе СИ напряжение измеряется в вольтах (В).

В общем случае ток и напряжение являются функциями времени и могут иметь разные величины и знак в различные моменты времени.

В теории цепей направление тока характеризуется знаком. Положительный или отрицательный ток имеют смысл только при сравнении направления тока по отношению к *произвольно выбранному положительному направлению*, которое обычно указывается стрелкой (рис.1).

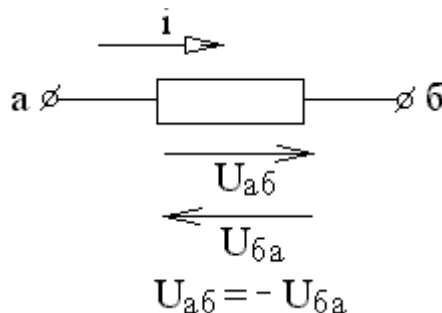


Рис.1

Положительное направление напряжения не связано с положительным направлением тока. Но, выбрав положительное направление напряжения от точки  $a$  к точке  $b$ , условно считаем, что потенциал точки  $a$  выше потенциала точки  $b$ . Обычно в задачах по расчету электрических цепей считают положительное направление тока в ветви совпадающим с положительным направлением напряжения между узлами этой ветви.

Если под воздействием приложенного напряжения  $U$  через участок цепи проходит электрический заряд  $q$ , то совершаемая при этом элементарная работа или поступающая в приемник энергия равна:

$$dw = u \cdot dq = ui \, dt.$$

Энергия, определяемая данной формулой, доставляется источником и расходуется в приемнике, т. е. превращается в другой вид энергии, например в тепло некоторая часть её запасается в электрическом и магнитном полях элементов цепи.

Мгновенное значение скорости изменения энергии, поступающей в цепь,

$$p = \frac{dw}{dt} = u \frac{dq}{dt} = ui,$$

называется мгновенной мощностью.

Энергия, поступившая в приемник за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , выражается интегралом

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt.$$

В системе СИ работа и энергия измеряются в джоулях (дж), мощность в ваттах (вт).

## Элементы электрической цепи

### 1. Пассивные элементы.

#### а. Сопротивление

*Сопротивлением* называется идеализированный элемент цепи, характеризующий преобразование электромагнитной энергии в любой другой вид энергии (тепловую – нагрев, механическую, излучение электромагнитной энергии и др.), т. е. обладающий только свойством необратимого рассеяния энергии. Условное обозначение сопротивления показано на рис.2.

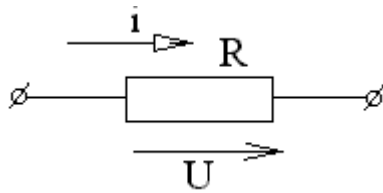


Рис.2

Математическая модель, описывающая свойства сопротивления, определяется *законом Ома*:

$$u = Ri \text{ или } i = Gu.$$

Здесь  $R$  и  $G$  – параметры участка цепи называются соответственно *сопротивлением* и *проводимостью*,  $G = 1/R$ . Сопротивление измеряется в омах (Ом), а проводимость – в сименсах (Сим).

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление

$$P_R = ui = Ri^2 = Gu^2.$$

Электрическая энергия, поступившая в сопротивление и превращенная в тепло за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , равна:

$$W_R = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2 \, dt = \int_{t_1}^{t_2} Gu^2 \, dt.$$

Уравнение, выражающее закон Ома, определяет зависимость напряжения от тока и называется *вольт–амперной характеристикой* (ВАХ) сопротивления. Если  $R$  постоянно, то ВАХ линейна (рис.3, а). Если же  $R$  зависит от протекающего через него тока или приложенного к нему напряжения, то ВАХ становится нелинейной (рис.3, б) и соответствует нелинейному сопротивлению.

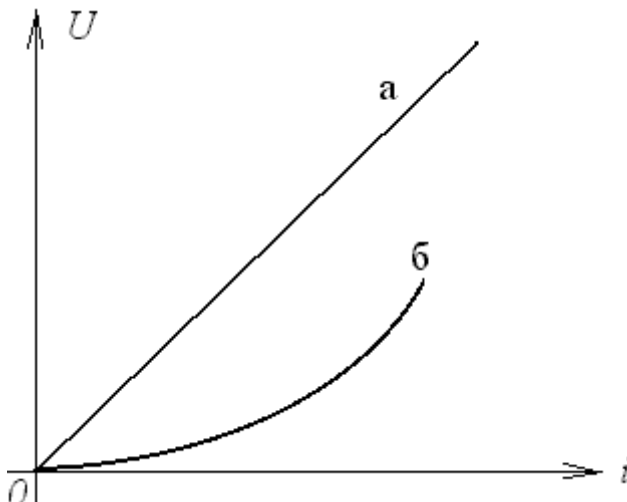


Рис.3

Реальный элемент, приближающийся по своим свойствам к сопротивлению, называется *резистором*.

### б. Индуктивность

*Индуктивностью* называется идеализированный элемент электрической цепи, характеризующий запасаемую в цепи энергию магнитного поля. Условное обозначение индуктивности показано на рис.4.

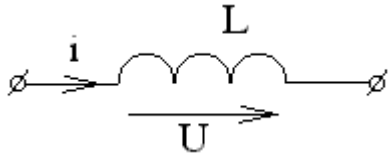


Рис.4

Если рассмотреть участок цепи (рис.5, а), представляющий собой виток, охватывающий площадь  $S$ , через который проходит ток  $i$ , то виток пронизывает магнитный поток

$$\Phi' = \int_S B \, ds.$$

$\Phi'$  – поток вектора магнитной индукции  $B$  через площадь  $S$ . Магнитный поток измеряется в веберах (Вб), а магнитная индукция – в тесла.

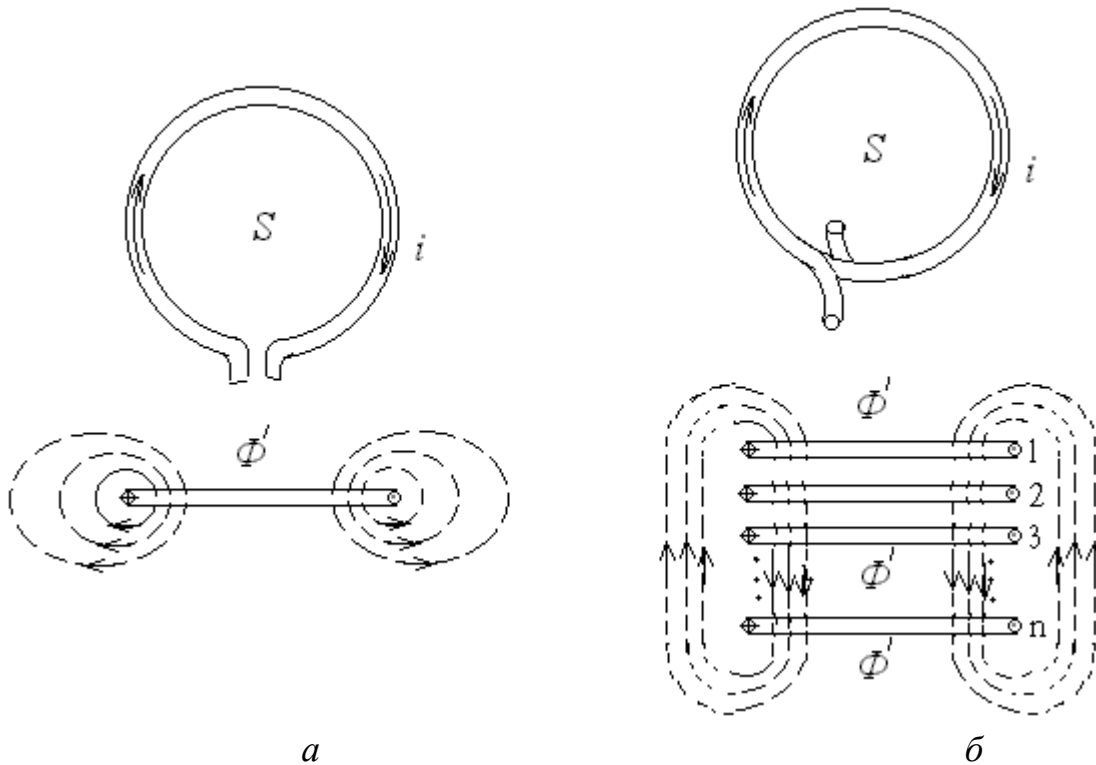


Рис.5

Индуктивностью витка называется отношение магнитного потока к току:

$$L = \frac{\Phi'}{i} = \frac{\int B \, ds}{i},$$

т. е. индуктивность представляет собой магнитный поток, отнесенный к единице связанного с ним тока. В системе СИ индуктивность измеряется в генри (Гн).

Если катушка содержит  $n$  одинаковых витков (рис.5, б), то полный магнитный поток (потокосцепление)

$$\Phi = n\Phi',$$

где  $\Phi'$  – поток, пронизывающий каждый из витков.

Индуктивность катушки в этом случае

$$L = \frac{n\Phi'}{i}.$$

В общем случае зависимость потокосцепления от тока нелинейная (рис.6, а), следовательно, индуктивность также является нелинейной.

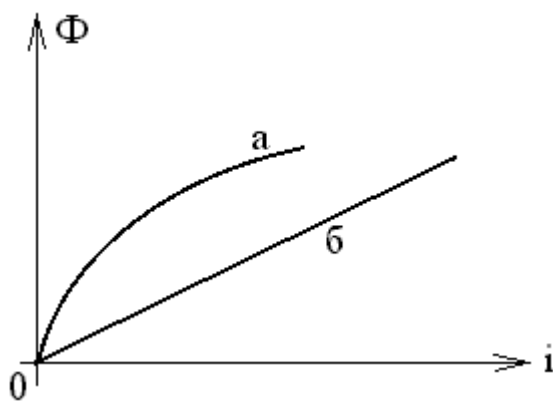


Рис.6

Связь между током и напряжением на индуктивности определяется на основании закона электромагнитной индукции, согласно которому изменение потокосцепления вызывает э.д.с. самоиндукции

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt}$$



численно равную и противоположную по знаку скорости изменения полного магнитного потока.

Если индуктивность не зависит от тока, то величина

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$$

называется напряжением (или падением напряжения) на индуктивности.

Из последнего выражения следует, что ток в индуктивности

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt,$$

т.е. определяется площадью, ограниченной кривой напряжения  $u_L$  (рис.7).

Мгновенная мощность имеет смысл скорости изменения запасенной в магнитном поле энергии:

$$p_L = u_L i = Li \frac{di}{dt}.$$

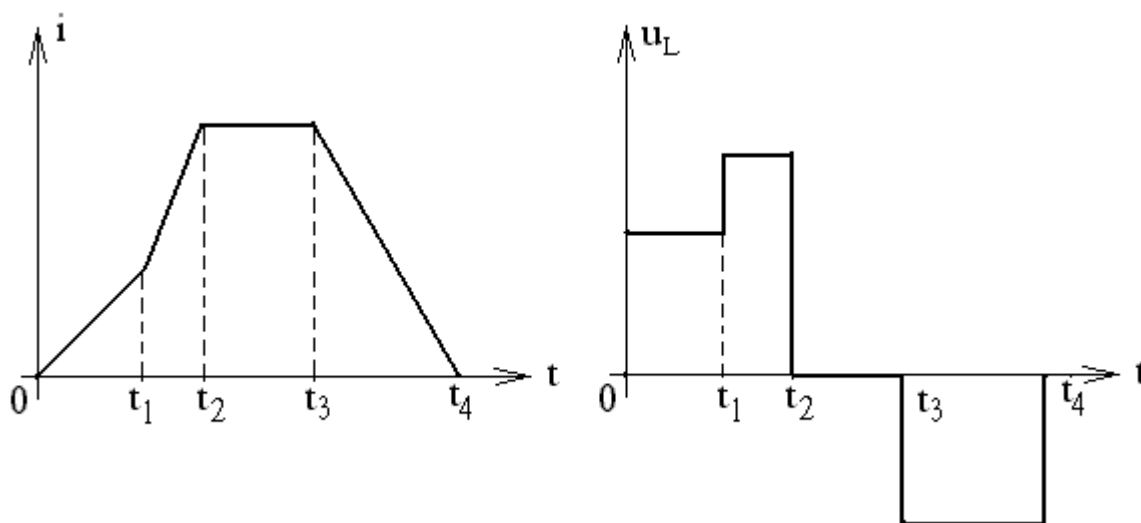


Рис.7

Энергия, запасенная в магнитном поле индуктивности в произвольный момент времени  $t$  определяется по формуле

$$W_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_0^t L i di = \frac{L i^2}{2}.$$

Здесь учтено, что при  $-\infty \leq t \leq 0$  ток в индуктивности был равен нулю.

Если часть магнитного потока, связанного с катушкой  $L_1$ , связана одновременно и с катушкой  $L_2$ , то эти катушки обладают параметром  $M$ , называемым *взаимной индуктивностью*. Взаимная индуктивность определяется как отношение потокосцепления взаимной индукции одной катушки к току в другой

$$M = \frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{\Phi_{21}}{i_1}.$$

В первой и второй катушках наводятся э. д. с. взаимной индукции равные

$$e_{1M} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt};$$

$$e_{2M} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Последние выражения справедливы при условии, что  $M$  не зависит от токов, протекающих в обеих катушках.

Взаимная индуктивность измеряется также в генри (Гн).

### в. Емкость

*Емкостью* называется идеализированный элемент электрической цепи, характеризующий запасаемую в цепи энергию электрического поля. Условное обозначение индуктивности показано на рис.8.

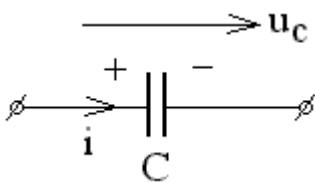


Рис.8

При подведении к двум электродам (рис.9, а) напряжения, на них накапливаются равные по величине и разные по знаку заряды  $\pm q$  и в окружающем пространстве создается электрическое поле.

Согласно теореме Гаусса–Остроградского поток  $\Phi_E$  вектора электрического смещения  $D$

$$\Phi_E = \oint D ds = q.$$

Емкостью между электродами называется отношение потока  $\Phi_E$  вектора электрического смещения к разности потенциалов  $U$  на зажимах.

$$C = \frac{q}{u}.$$

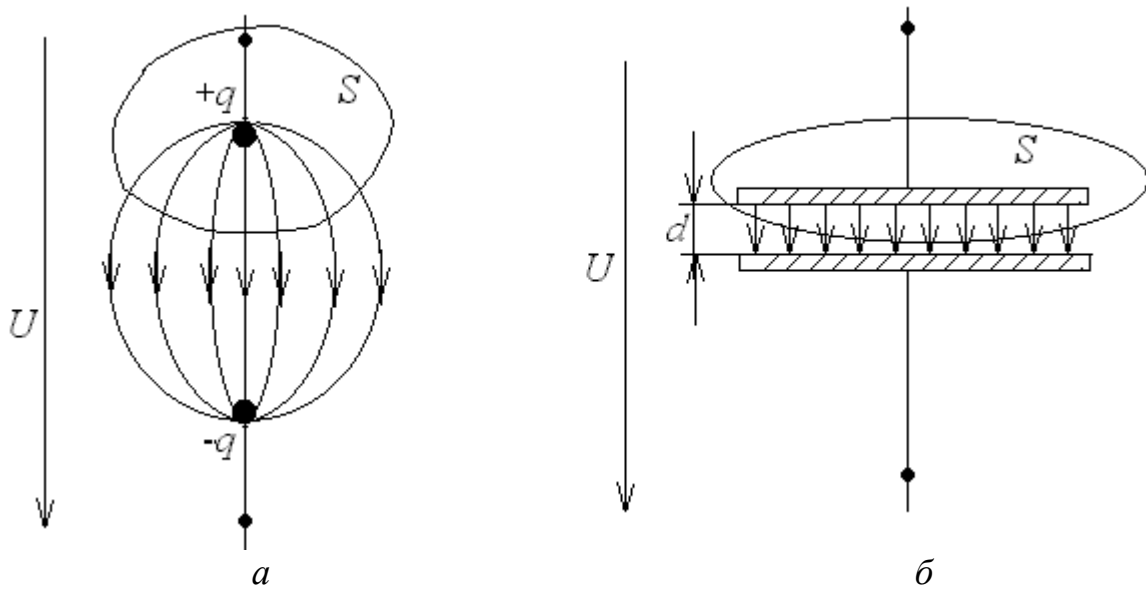


Рис.9

В системе СИ заряд измеряется в кулонах, напряжение в вольтах, емкость в фарадах.

Для увеличения емкости необходимо включить параллельно ряд проводящих «обкладок», т. е. применить *конденсатор* (рис.9, б).

При изменении напряжения на конденсаторе в присоединенной к ней цепи создается ток проводимости, величина которого определяется скоростью изменения заряда на электродах

$$i_{np} = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}.$$

Между электродами конденсатора лежит диэлектрик, в котором не может быть тока проводимости. Но поток  $\Phi_E$  вектора электрического смещения

также изменяется. Величина  $\frac{d\Phi_E}{dt} = i_{CM}$  называется *током смещения*.

Таким образом, ток проводимости во внешней цепи замыкается током смещения через диэлектрик конденсатора  $i_{np} = i_{CM} = i$ .

Из выражения для тока следует, что ток положителен при возрастании заряда и соответственно напряжения на обкладках конденсатора.

Напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt.$$

При  $t=0$  напряжение на емкости

$$u_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt.$$

Следовательно,

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Мгновенная мощность  $p_C$  имеет смысл скорости изменения запасенной в электрическом поле энергии:

$$p_C = u_C i = C u_C \frac{du_C}{dt}.$$

Энергия, запасаемая в электрическом поле емкости в произвольный момент времени  $t$

$$W_C = \int_{-\infty}^t p_C dt = \int_0^{u_C} C u_C du_C = \frac{C u_C^2}{2}.$$

Полученная формула справедлива в случае, что при  $t = -\infty$  напряжение на емкости  $u_C(-\infty) = 0$ .

### ***Электрические схемы замещения физических устройств идеализированными элементами цепи***

Раздельное рассмотрение  $R$ ,  $L$ ,  $C$  как элементов, локализирующих потери, магнитное и электрическое поля является приближенным методом анализа цепи. На практике же потери энергии, магнитное и электрическое поля связаны и сопутствуют друг другу.

Электрическое сопротивление проводника на постоянном токе

$$R = \frac{u}{i} = \rho \frac{\ell}{S},$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление,  $\ell$  – длина,  $S$  – площадь поперечного сечения проводника.

С увеличением частоты плотность тока внутри проводника уменьшается, а к поверхности увеличивается, а значит сопротивление растет. Это явление носит название *поверхностного эффекта*.

Под влиянием тока, проходящего по соседнему проводнику, также происходит перераспределение тока в проводнике, а следовательно, возрастание тепловых потерь. Это явление носит название *эффекта близости*.

Дополнительное увеличение сопротивления вызывает также излучение в пространство электромагнитной энергии на высоких частотах.

Таким образом, реальный *резистор* наряду с сопротивлением имеет некоторую индуктивность и емкость вследствие связанных с ним магнитного и электрического полей.

При постоянном токе напряжение на зажимах *катушки индуктивности*, представляющей некоторое количество витков, определяется величиной падения напряжения на сопротивлении (рис.10, а) и ток во всех витках будет одинаковым.

При переменном токе изменяющееся магнитное поле будет наводить э.д.с. самоиндукции тем большей величины, чем выше частота колебаний. Между витками также будет переменное электрическое поле, т.е. появится ток смещения. При низких частотах током смещения можно пренебречь, тогда схема замещения катушки будет иметь вид, представленный на рис.10, б. На высоких же частотах током смещения пренебречь нельзя, схема замещения содержит также и емкостную составляющую (рис.10, в).

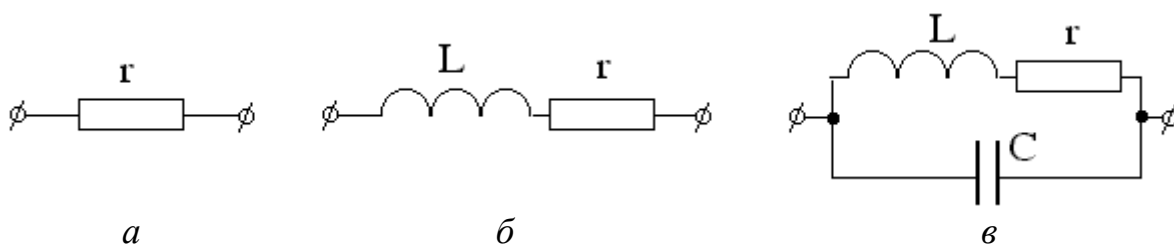


Рис.10

Пусть конденсатор состоит из двух параллельных пластин, разделенных диэлектриком. При постоянном напряжении и идеальном диэлектрике тока в цепи с конденсатором не будет. Если напряжение переменное, то возникает переменный ток, создающий переменное магнитное поле. Кроме того, неидеальность диэлектрика приводит к возникновению тока проводимости, приводящего к тепловым потерям в конденсаторе тем большим, чем выше частота.

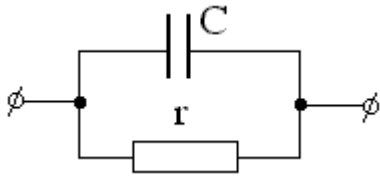


Рис.11

Обычно индуктивная составляющая конденсатора мала и ей можно пренебречь. Тогда схема замещения конденсатора может быть представлена параллельным соединением емкости и сопротивления потерь диэлектрика (рис.11).

## 2. Активные элементы.

### а. Источник э.д.с.

Идеализированным источником напряжения, или генератором э. д. с., называется источник энергии, напряжение, на зажимах которого не зависит от тока, через него проходящего. Условное изображение источника э. д. с. показано на рис.12, а.

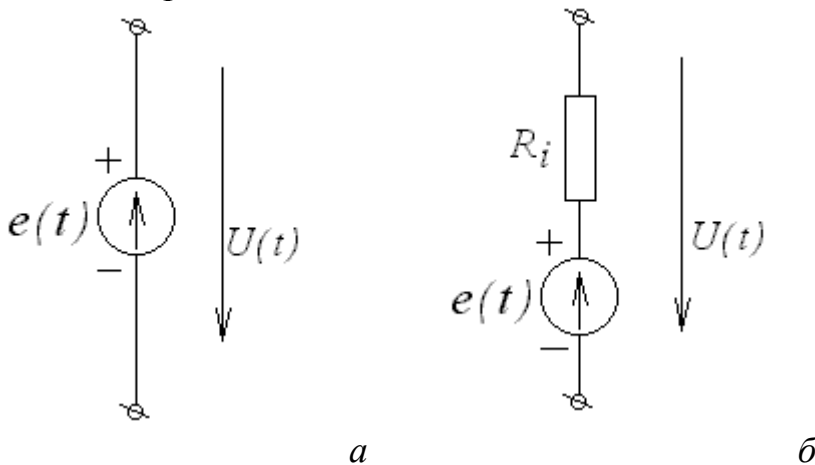


Рис.12

Упорядоченное перемещение положительных зарядов в источнике от зажима «-» к зажиму «+» возможно за счет сторонних сил. Величина работы, затрачиваемой на перемещение единицы положительного заряда (+  $q$ ) от зажима «-» к зажиму «+», называется *электродвижущей силой* (э. д. с.) источника  $e$ .

$$e = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta w_c}{\Delta q},$$

где  $\Delta w_c$  – работа, совершаемая сторонними силами по переносу заряда  $\Delta q$ .

В цепи, подключенной к источнику э. д. с.  $e(t)$  течет ток, зависящий от параметров этой цепи и величины  $e(t)$ . Если зажимы идеального источника э. д. с. замкнуть накоротко, то ток в цепи должен стремиться к бесконечности (т. е. идеальный источник э. д. с. может рассматриваться как источник бесконечной мощности). В действительности при коротком замыкании источника э. д. с. ток может иметь только конечное значение, определяемое падением напряжения на внутреннем сопротивлении источника (рис.12, б). Вольт – амперные характеристики идеального и реального источников э. д. с. приведены на рис.13.

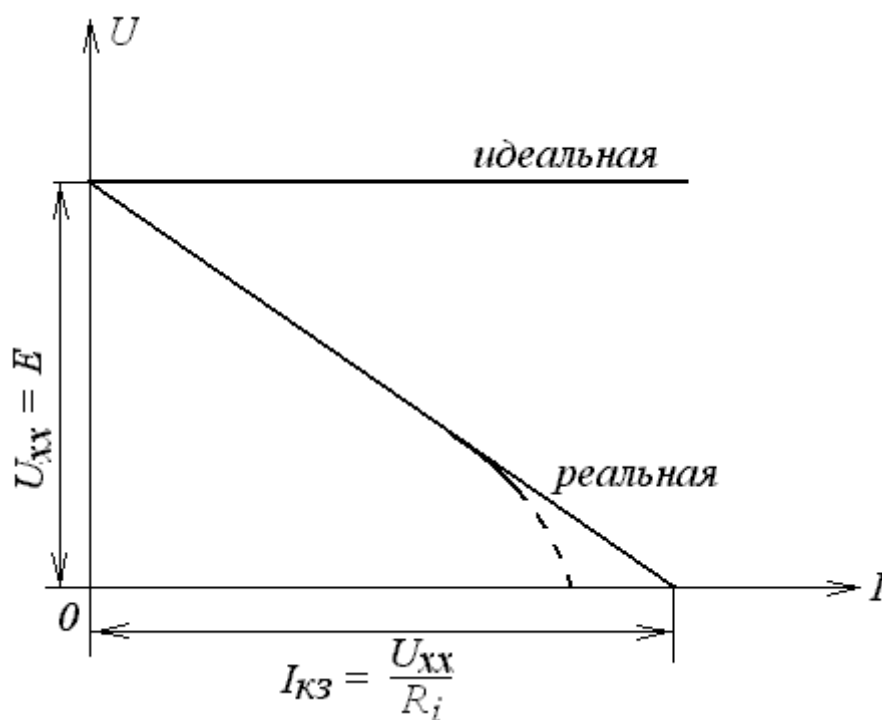


Рис.13

Очевидно, что чем меньше внутреннее сопротивление источника, тем больше ток короткого замыкания и больше мощность источника э. д. с.

### б. Источник тока

Идеализированным источником тока, или генератором тока, называется источник энергии, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах. Условное изображение источника тока показано на рис.14, а.

При неограниченном увеличении сопротивления цепи, подключенной к идеальному источнику тока, напряжение на его зажимах и соответственно мощность, развиваемая им, также неограниченно возрастают. Источник тока конечной мощности изображается в виде идеального источника тока с подключенным параллельно внутренним сопротивлением (рис.14, б).

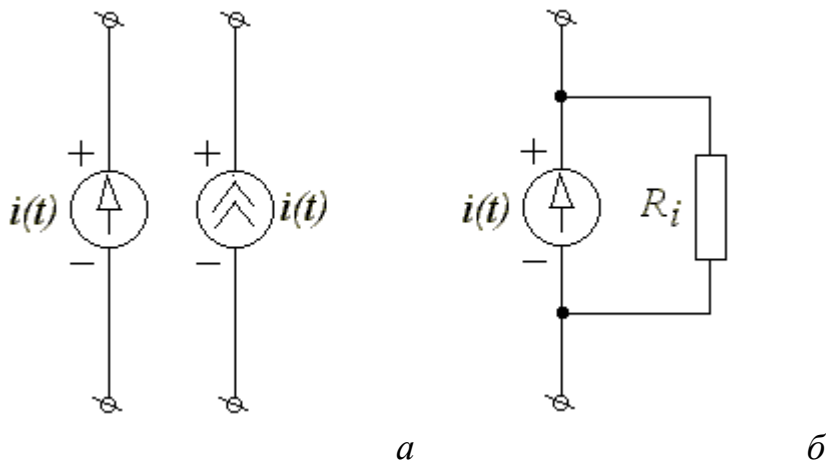


Рис.14

Вольт – амперные характеристики идеального и реального источников тока приведены на рис.15.

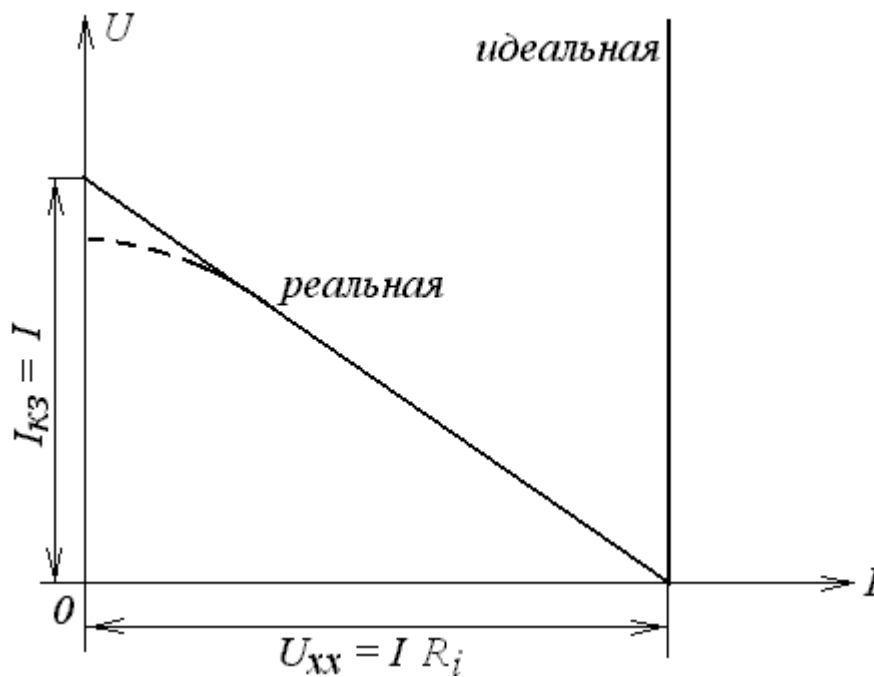


Рис.15

Очевидно, что чем больше внутреннее сопротивление источника, тем больше напряжение на разомкнутых зажимах и тем больше мощность источника тока.

Идеальные источники напряжения и тока являются *независимыми*, поскольку напряжение на их зажимах и задающий ток определяются только



внутренними свойствами источников и не зависят от внешних воздействий. Вместе с тем в радиотехнике и электронике широкое применение находят активные цепи с *зависимыми* (управляемыми) источниками, т. е. цепи, содержащие транзисторы, операционные усилители, электронные лампы и другие активные элементы.

### в. Зависимые источники

*Зависимый источник напряжения* представляет собой идеализированную электрическую цепь с двумя парами зажимов. К входной паре зажимов ( $1 - 1'$ ) подключаются управляющие либо напряжение (рис.16, а) либо ток (рис.16, б). К выходной паре зажимов ( $2 - 2'$ ) источник управляемого напряжения. Аналогично вводится понятие *зависимого источника тока*, только у него к выходным зажимам подключен источник управляемого тока (рис.16, в, г).

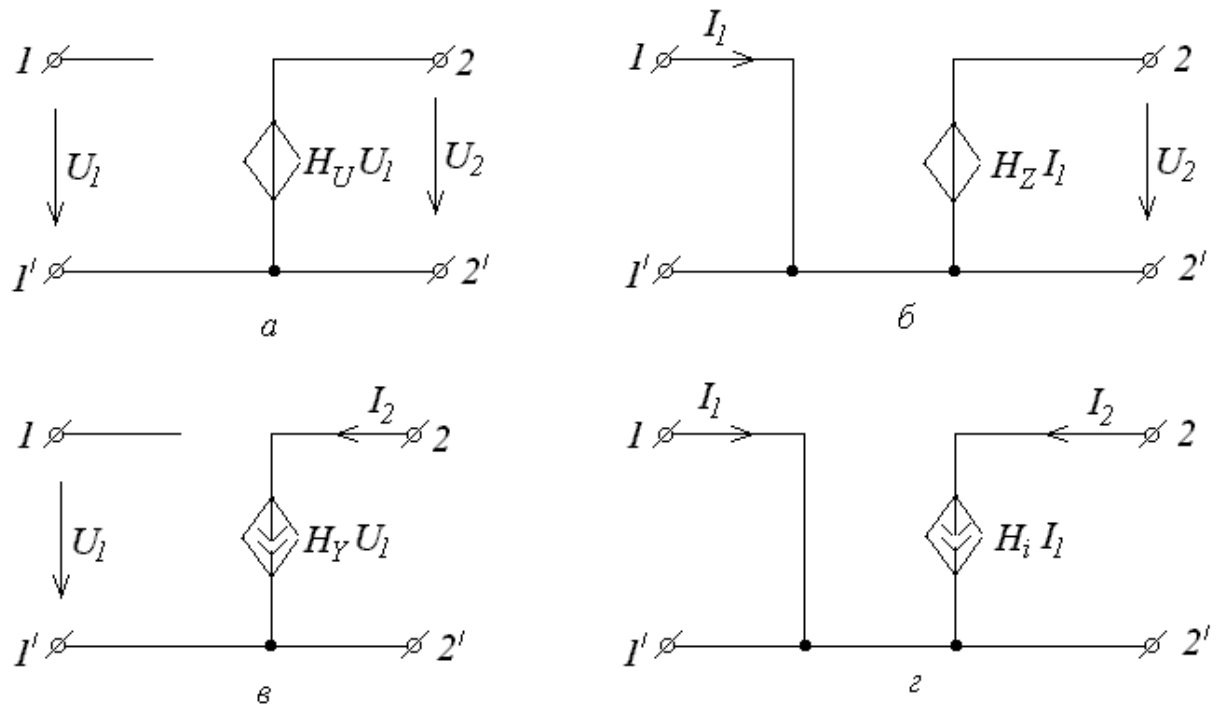


Рис.16

Важно отметить, что входные зажимы источников, управляемых напряжением, разомкнуты, а у источников, управляемых током, соединены накоротко. Различают четыре вида зависимых источников: источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН); источник напряжения, управляемый током (ИНУТ); источник тока, управляемый напряжением (ИТУН); источник тока, управляемый током (ИТУТ).

В ИНУН (рис.16, а) входное сопротивление бесконечно велико, входной ток  $I_1 = 0$ , а выходное напряжение связано с входным равенством

$U_2 = H_U U_1$ , где  $H_U$  – коэффициент передачи по напряжению. ИНУН является идеальным усилителем напряжения.

В ИНУТ (рис.16, б) входным током  $I_1$  управляет выходное напряжение  $U_2$ , входная проводимость бесконечно велика:  $U_1 = 0$ ,  $U_2 = H_Z I_1$ , где  $H_Z$  – передаточное сопротивление.

В ИТУН (рис.16, в) выходной ток  $I_2$  управляется входным напряжением  $U_1$ , причем  $I_1 = 0$  и ток  $I_2$  связан с  $U_1$  равенством  $I_2 = H_Y U_1$ , где  $H_Y$  – передаточная проводимость.

В ИТУТ (рис.16, г) управляющим током является  $I_1$ , а управляемым  $I_2$ .  $U_1 = 0$ ,  $I_2 = H_i I_1$ , где  $H_i$  – коэффициент передачи по току. ИТУТ является идеальным усилителем тока.

## Лекция 2.

### Основные понятия, относящиеся к схеме электрической цепи

*Схемой электрической цепи* называется графически изображенная модель ее (рис.17), составленная из идеализированных пассивных ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) и активных ( $e$ ,  $i$ ) элементов. Основными понятиями, характеризующими геометрическую конфигурацию цепи, являются *ветвь*, *узел*, *контур*.

*Ветвь* – участок цепи, образованный последовательно соединенными элементами. Последовательным соединением элементов цепи называется такое соединение, при котором через них проходит один и тот же ток.

*Узел* – точка соединения трех и более ветвей.

*Контур* – любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям.

Параллельным соединением элементов называется такое соединение, при котором на них действует одно напряжение.

Источники э. д. с. включаются последовательно с ветвью цепи, источники тока – параллельно, потому что: при включении источника э. д. с. параллельно ветви на ней известно напряжение, а при последовательном включении источника тока становится известен ток в ветви. Ветвь с заранее известными токами и напряжениями можно из анализа исключить.

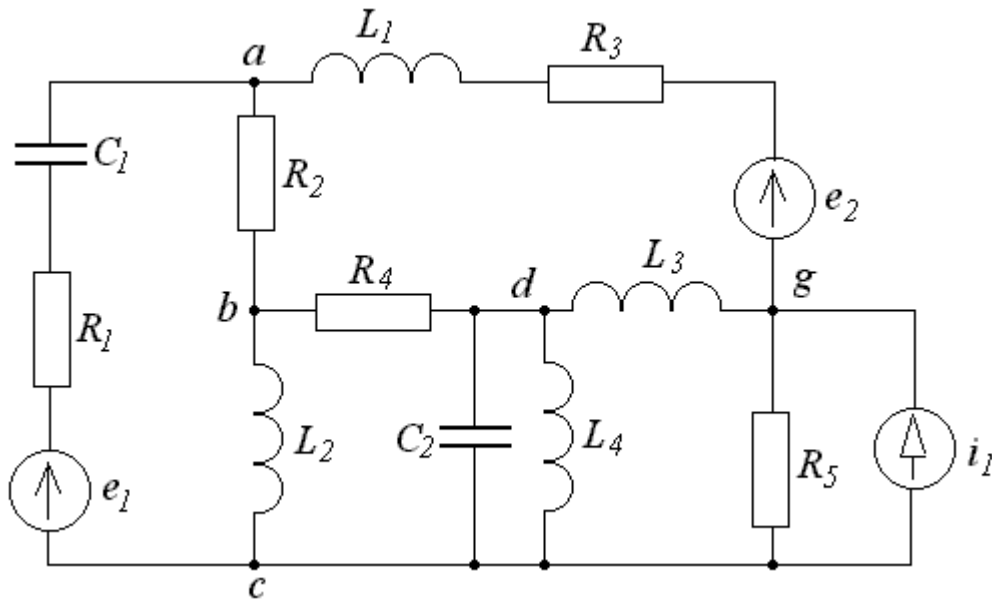


Рис.17

Ветви:  $ac - C_1, R_1, e_1$ ,  $ad - L_1, R_3, e_2$ ,  $ab - R_2$ ,  $bd - R_4$ ,  $dg - L_3$  и т. д.

Узлы:  $a, b, c, d, g$ .

Контуры: 1)  $a-b-c-a$ , 2)  $a-b-d-g-a$ , 3)  $b-d-g-c-b$  и т. д.

При исследовании процессов в сложных цепях существенное значение имеет геометрическая структура (топология), характеризующая совокупностью узлов и ветвей, независимо от конкретных особенностей элементов. В связи с этим наряду с понятием схемы цепи вводится понятие *топологического графа* или просто *графа* (как бы скелета схемы).

*Граф* цепи – графическое представление ее геометрической структуры, состоящее из ветвей – линий (ребер) и узлов (вершин). Обычно источники энергии на графе не указываются; источники э. д. с. заменяются короткозамкнутыми линиями, а источники тока – разрывами. Граф цепи, изображенной на рис.17, приведен на рис.18, а.

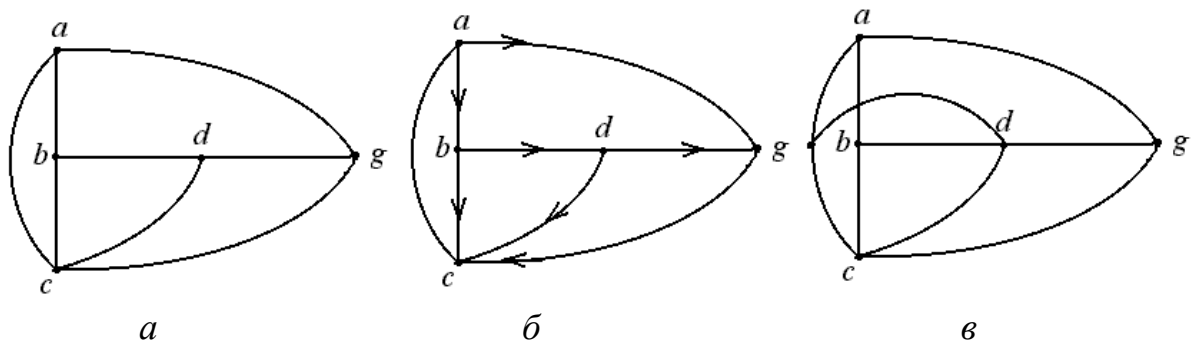


Рис.18

Если на графе указывают направления токов, то граф называют *направленным* (рис.18, б). Если граф не может быть изображен без пересечения ветвей, то он называется *не планарным* (рис.18, в).

Очень важным понятием является так называемое *дерево графа* – любая система из минимального числа ветвей графа, соединяющая все узлы без образования контуров. Протекание тока по ветвям дерева исключается.

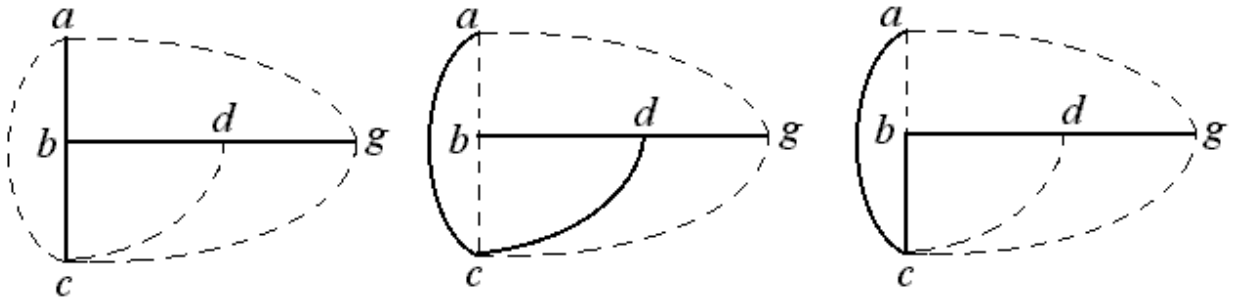


Рис.19

Таким образом, все ветви графа разбиваются на ветви дерева и не вошедшие в дерево – *ветви связи* (*главные ветви* или *хорды*). На рис.19 изображены возможные варианты построения дерева графа для схемы (рис.17).

Сплошные линии – ветви дерева, пунктирные – ветви связи.

Поскольку первая ветвь дерева соединяет два узла, а каждая последующая ветвь добавляет по одному узлу, то число ветвей дерева

$$n_{ВД} = n_Y - 1.$$

Число ветвей, не вошедших в дерево (ветвей связи)

$$n_{ВС} = n_B - n_{ВД} = n_B - n_Y + 1,$$

где  $n_B$  – число ветвей графа,  $n_Y$  – число узлов.

## Основные законы электрических цепей

Основными законами электрических цепей, позволяющими описывать любые режимы их работы, являются *закон Ома* и *законы Кирхгофа*.

1. *Закон Ома*. Если сопротивление проводника  $R$  не зависит от величины и направления, протекающего тока (сопротивление является линейным), то падение напряжения на нем пропорционально току  $i$  и сопротивлению  $R$

$$U = R i.$$

2. *Закон Джоуля–Ленца.* Если образующие цепь проводники неподвижны, а ток постоянен, то работа сторонних сил целиком расходуется на нагревание проводников

$$W_R = U \cdot i \cdot t,$$

соответствующее ей количество теплоты в калориях

$$Q_R = 0,24 \cdot U \cdot i \cdot t.$$

3. *Первый закон Кирхгофа.* Алгебраическая сумма токов в ветвях, связанных общим узлом электрической цепи (рис.20), равна нулю.

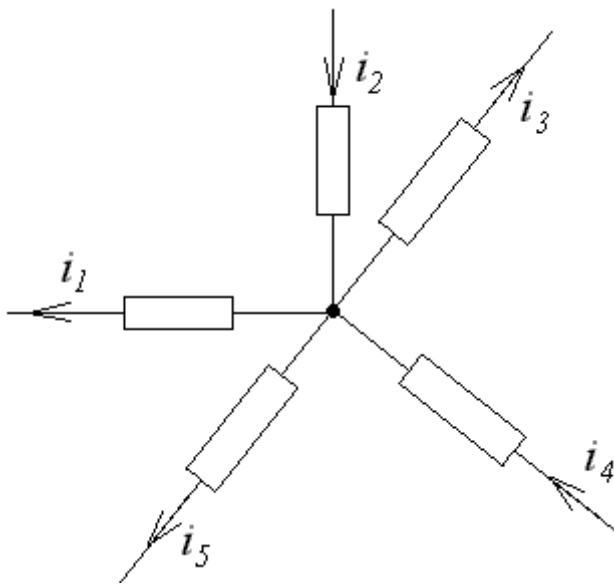


Рис.20

(Сумма токов приходящих к узлу, равна сумме токов, уходящих от узла).

Уходящие токи будем считать отрицательными, приходящие – положительными.

$$-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_5 = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n i_k = 0,$$

где  $k$  – номер ветви, связанной с данным узлом.

Первый закон Кирхгофа вытекает из того, что в узле не могут накапливаться и расходоваться заряды.

Первый закон Кирхгофа применим также к любому контуру или замкнутой поверхности, охватывающей часть электрической цепи, поскольку ни в ка-

ком элементе, ни в каком режиме заряды одного знака накапливаться не могут.

4. *Второй закон Кирхгофа.* В любом контуре электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения на элементах равна алгебраической сумме э. д. с., действующих в этом контуре:

$$\sum_{k=1}^n U_k = \sum_{p=1}^m e_p.$$

Второй закон Кирхгофа устанавливает баланс напряжений в контурах электрической цепи и вытекает из закона сохранения энергии. Действительно, если умножить обе части последнего уравнения на  $dq$ , то в левой части получим элементарную работу переноса заряда  $dq$  вдоль пассивных элементов цепи, а в правой – работу сил стороннего поля.

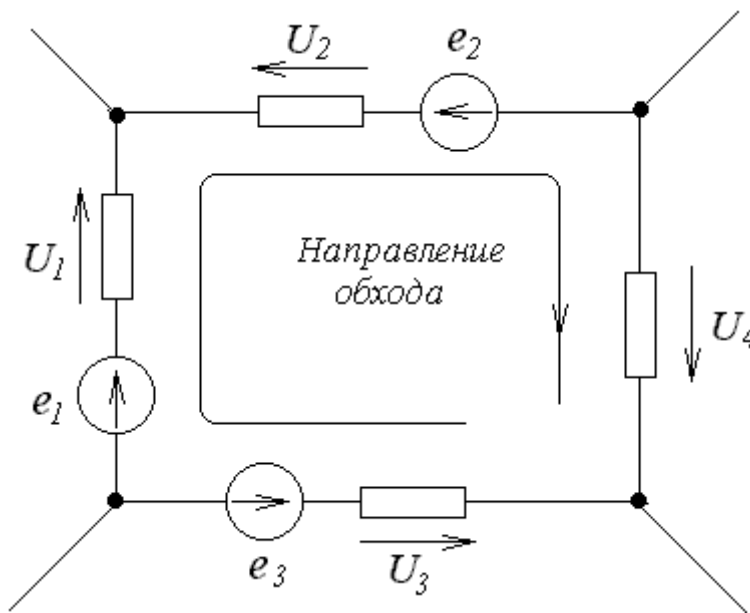


Рис.21

Напряжения и э. д. с. в последнем уравнении берут со знаком (+), если их направление совпадает с направлением обхода контура (выбранным произвольно), и со знаком (–), если не совпадает. Например, для цепи (рис.21)

$$U_1 - U_2 - U_3 + U_4 = e_1 - e_2 - e_3.$$

Если предположить, что все пассивные элементы представляют собой сопротивление, то уравнение можно переписать, воспользовавшись законом Ома:

$$\sum_{k=1}^n R_k i_k = \sum_{p=1}^m e_p.$$

В общем случае, когда контур содержит сопротивления, индуктивности и емкости и питание осуществляется источниками переменного напряжения, уравнение второго закона Кирхгофа имеет вид

$$\sum_{k=1}^n (R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt) = \sum_{p=1}^m e_p.$$

### Лекция 3.

## Основные методы расчета линейных электрических цепей

### 1. Применение законов Кирхгофа для расчета сложных цепей.

В общем случае искомые токи и напряжения в ветвях сложной цепи могут быть найдены в результате совместного решения системы уравнений, выражающих первый и второй законы Кирхгофа для заданной электрической цепи.

Пусть в схеме, содержащей  $p$  ветвей и  $q$  узлов, заданы величины элементов ветвей, э. д. с. и токи источников. Необходимо найти токи во всех ветвях цепи.

По первому закону Кирхгофа записываются  $q-1$  независимое уравнение. Уравнение для  $q$ -го узла является следствием предыдущих, в качестве последнего – *опорного* целесообразно выбрать узел, в котором сходится максимальное число ветвей.

По второму закону Кирхгофа записывается  $p-q+1$  независимых уравнений для независимых контуров (отличающихся один от другого хотя бы одной ветвью).

Таким образом, для расчета электрической цепи с помощью законов Кирхгофа необходимо составить столько уравнений, сколько в цепи ветвей.

При выборе независимых контуров удобно использовать граф цепи (графическое представление геометрической структуры, состоящее из ветвей-линий (ребер) и узлов (вершин)).

*Пример 1.* Дана электрическая цепь (рис.22) с известными параметрами:

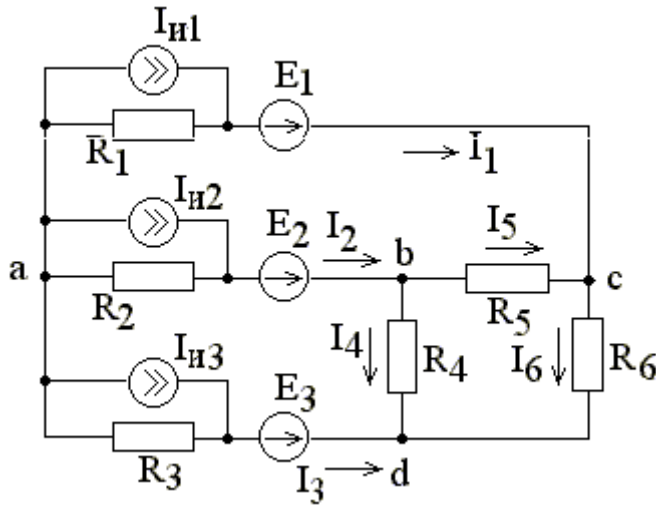


Рис.22

Построим дерево графа – систему из минимального количества ветвей, соединяющих все узлы графа без образования замкнутых контуров (рис.23).

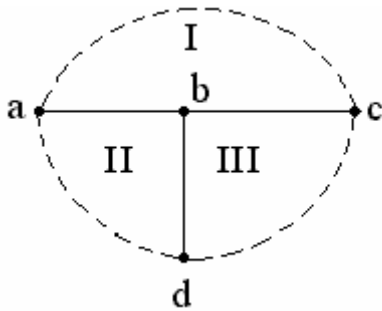


Рис.23

Подключение к дереву графа каждой из *хорд-главных ветвей* (пунктирные линии на рис.23) создает по одному независимому контуру.

Выберем произвольно направления токов в ветвях (рис.22), тогда для узлов и для контуров (при обходе по часовой стрелке):

$$\left\{ \begin{array}{ll} -I_1 - I_2 - I_2 - I_{И1} - I_{И2} - I_{И3} = 0 & \text{для узла } a; \\ I_2 + I_{И2} - I_4 - I_5 = 0 & \text{для узла } b; \\ I_1 + I_{И1} + I_5 - I_6 = 0 & \text{для узла } c; \\ E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_2 I_2 & \text{для контура I;} \\ E_2 - E_3 = R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_3 I_3 & \text{для контура II;} \\ 0 = R_5 I_5 - R_4 I_4 + R_6 I_6 & \text{для контура III.} \end{array} \right.$$



Решая систему уравнений, найдем искомые токи, а зная сопротивления ветвей, можно найти напряжения между узлами. Если ток в ветви получился со знаком (–), то направление его в действительности противоположно выбранному направлению.

## 2. Метод контурных токов

Для сокращения количества уравнений в расчетах токов в цепи часто используется *метод контурных токов*, являющийся модификацией метода Кирхгофа. При расчете токов этим методом вводят понятие *контурного тока*, как тока в главной ветви независимого контура. Уравнения составляются по второму закону Кирхгофа для независимых контуров, т.е. получается система уравнений с меньшим числом переменных, что является преимуществом метода контурных токов. Для схемы (рис.24) имеем:

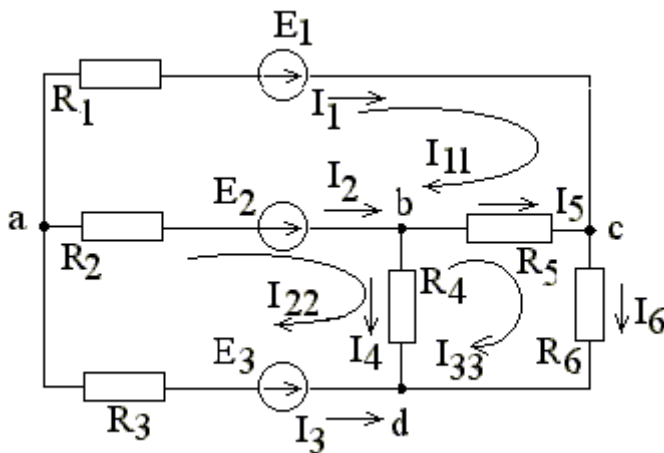


Рис.24

$$\begin{cases} E_1 - E_2 = (R_1 + R_5 + R_2)I_{11} - R_2I_{22} - R_5I_{33} & \text{для контура I;} \\ E_2 - E_3 = -R_2I_{11} + (R_4 + R_2 + R_3)I_{22} - R_4I_{33} & \text{для контура II;} \\ 0 = -R_5I_{11} - R_4I_{22} + (R_6 + R_4 + R_5)I_{33} & \text{для контура III.} \end{cases}$$

Определив контурные токи из полученной системы уравнений, найдем токи в ветвях

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11}, & I_2 &= I_{22} - I_{11}, & I_3 &= -I_{22}, & I_4 &= I_{22} - I_{33}, \\ & & I_5 &= I_{33} - I_{11}, & I_6 &= I_{33}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что при одинаковом направлении контурных токов в системе уравнений суммы сопротивлений, принадлежащих каждому контуру – *собственное сопротивление контуров*, входят со знаком плюс, а *общие сопротивления* двух контуров входят со знаком минус.

В общем случае для  $n$  – контурной схемы получается  $n$  уравнений:

$$\begin{cases} E_{11} = R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + \dots + R_{1n}I_{nn} ; \\ E_{22} = R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + \dots + R_{2n}I_{nn} ; \\ \text{-----} \\ E_{nn} = R_{n1}I_{11} + R_{n2}I_{22} + \dots + R_{nn}I_{nn} . \end{cases}$$

$R_{11}, R_{22}, \dots R_{nn}$  – собственное сопротивление контуров.

$R_{ik}, \dots R_{ki}$  – общие сопротивления  $i$  – го и  $k$  – го контуров.

$E_{11}, E_{22}, \dots E_{nn}$  – контурные э. д. с., алгебраическая сумма э. д. с. в каждом контуре.

Согласно теореме Крамера решение для любого контурного тока может быть найдено как

$$I_{kk} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n E_{ii} \Delta_{ik} ,$$

где  $\Delta$  – определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \text{-----} \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} ,$$

$\Delta_{ik}$  – алгебраическое дополнение элемента  $R_{ik}$ , полученное из определителя  $\Delta$  вычеркиванием  $k$  – го столбца и  $i$  – ой строки и умножением полученного определителя на  $(-1)^{(i+k)}$ .

В развернутом виде:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{\Delta} [E_{11}\Delta_{11} + E_{22}\Delta_{21} + \dots + E_{nn}\Delta_{n1}], \\
I_{22} &= \frac{1}{\Delta} [E_{11}\Delta_{12} + E_{22}\Delta_{22} + \dots + E_{nn}\Delta_{n2}], \\
&\text{-----} \\
I_{nn} &= \frac{1}{\Delta} [E_{11}\Delta_{1n} + E_{22}\Delta_{2n} + \dots + E_{nn}\Delta_{nn}].
\end{aligned}$$

Токи в ветвях находятся как алгебраическая сумма соответствующих контурных токов.

### 3. Метод наложения

Ток в любой  $k$ -ой ветви сложной электрической цепи можно найти, составив уравнения по методу контурных токов, выбрав контуры так, чтобы  $k$ -ая ветвь входила только в один контур. Тогда ток в  $k$ -ой ветви будет равен контурному току, определенному выше:

$$I_{kk} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n E_{ii} \Delta_{ik} = E_{11} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{nk}}{\Delta}.$$

Каждое слагаемое в правой части представляет собой ток, вызванный в  $k$ -ой ветви соответствующей контурной э. д. с. Например,  $E_{11} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta}$  — составляющая тока  $k$ -ой ветви, вызванная контурной э. д. с.  $E_{11}$ . Каждая же из контурных э. д. с. есть алгебраическая сумма э. д. с. ветвей, входящих в соответствующий контур.

Таким образом, ток в  $k$ -ой ветви, создаваемый несколькими источниками э. д. с., включенными в разных участках схемы, равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждой из э. д. с. в отдельности. Это и есть *принцип суперпозиции* или *наложения*.

Этот принцип нашел применение в методе, получившем название *метода наложения*. При расчете токов в ветвях цепи поступают следующим образом: поочередно рассчитывают токи, возникающие от действия каждой э. д. с., мысленно удаляя остальные э. д. с. из схемы, но оставляя в схеме внутренние сопротивления источников. Ток в ветвях находят как алгебраическую сумму частичных токов от каждого источника.

Если в цепи заданы источники тока и э. д. с., то ток в любой ветви находится также как сумма токов от действия тех и других источников.

Принцип суперпозиции справедлив только для линейных цепей и называется *принципом независимости действия*, так как базируется на предположении, что каждое слагаемое сложного воздействия на линейную цепь вызывает свой отклик независимо от того, действуют ли в системе другие слагаемые.

#### 4. Метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений является наиболее общим и широко применяется для расчета электрических цепей, в частности в различных программах автоматизированного проектирования электронных схем.

Ток в любой ветви сложной цепи можно найти, определив разность потенциалов между узлами. Метод расчета, основанный на определении напряжений между узлами сложной цепи, называют *методом узловых напряжений* (*узловых потенциалов*).

Число неизвестных в этом методе определяется числом уравнений, которые необходимо составить по первому закону Кирхгофа, т. е. метод узловых напряжений также есть модификация метода Кирхгофа. Данный метод имеет преимущества по сравнению с методом контурных токов, когда количество узлов меньше числа независимых контуров сложной цепи.

Приняв потенциал одного из узлов (*базисного* или *опорного*) равным нулю, получим некоторые напряжения остальных узлов относительно базисного, называемые *узловыми напряжениями*.

Определим токи во всех ветвях цепи (рис.25), приведенной в примере 1.

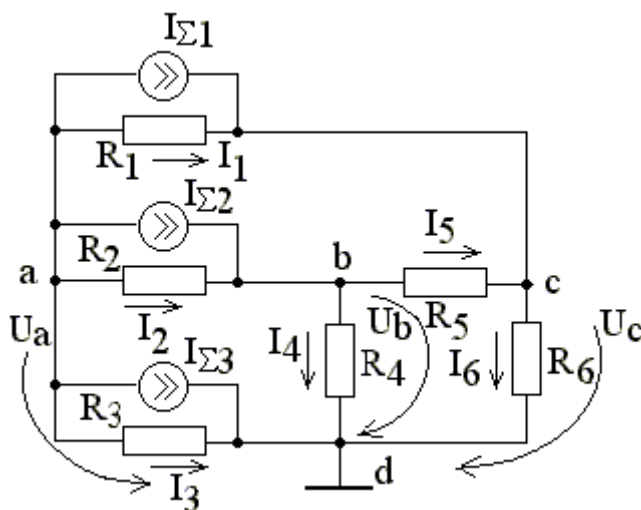


Рис.25

Для узлов *a*, *b* и *c* составим уравнения по первому закону Кирхгофа.

$$\begin{cases} -I_{\Sigma 1} - I_{\Sigma 2} - I_{\Sigma 3} - I_1 - I_2 - I_3 = 0 & \text{для узла } a; \\ I_{\Sigma 2} - I_5 - I_4 + I_2 = 0 & \text{для узла } b; \\ I_{\Sigma 1} + I_1 + I_5 - I_6 = 0 & \text{для узла } c. \end{cases}$$

$I_{\Sigma 1}$ ,  $I_{\Sigma 2}$ ,  $I_{\Sigma 3}$  — токи источников тока.

Токи, протекающие через сопротивления

$$I_1 = \frac{U_a - U_c}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_a - U_b}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U_a}{R_3}, \quad I_4 = \frac{U_b}{R_4},$$

$$I_5 = \frac{U_b - U_c}{R_5}, \quad I_6 = \frac{U_c}{R_6}.$$

Подставив эти значения в последнюю систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} -I_{\Sigma 1} - I_{\Sigma 2} - I_{\Sigma 3} - g_1(U_a - U_c) - g_2(U_a - U_b) - g_3 U_a = 0; \\ I_{\Sigma 2} - g_5(U_b - U_c) - g_4 U_b + g_2(U_a - U_b) = 0; \\ I_{\Sigma 1} + g_1(U_a - U_c) + g_5(U_b - U_c) - g_6 U_c = 0; \end{cases}$$

где  $g_k = 1/R_k$ .

$$\begin{cases} (g_1 + g_2 + g_3)U_a - g_2 U_b - g_1 U_c = -I_{\Sigma 1} - I_{\Sigma 2} - I_{\Sigma 3}; \\ -g_2 U_a + (g_2 + g_4 + g_5)U_b - g_5 U_c = I_{\Sigma 2}; \\ -g_1 U_a - g_5 U_b + (g_1 + g_5 + g_6)U_c = I_{\Sigma 1}. \end{cases}$$

Величины, представляющие собой сумму проводимостей ветвей, сходящихся в данном узле, называются *собственной проводимостью* узла, величина, равная проводимости ветви между узлами, входящая со знаком минус в систему уравнений, называется *общей проводимостью* между узлами.

Решив данную систему уравнений, получим узловые напряжения и далее по закону Ома определим токи в ветвях.

В общем случае для сложной цепи, содержащей  $q$  узлов:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{11} = g_{11}U_1 + g_{12}U_2 + \dots + g_{1,q-1}U_{q-1} ; \\ I_{22} = g_{21}U_1 + g_{22}U_2 + \dots + g_{2,q-1}U_{q-1} ; \\ \dots\dots\dots \\ I_{q-1,q-1} = g_{q-1,1}U_1 + g_{q-1,2}U_2 + \dots + g_{q-1,q-1}U_{q-1}. \end{array} \right.$$

Здесь  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ , ...,  $I_{q-1,q-1}$  — алгебраическая сумма токов источников связанных с узлами,  $g_{ii}$  — собственная проводимость  $i$ -го узла,  $g_{ik}$  — общая проводимость между  $i$ -м и  $k$ -м узлами, входящая со знаком  $(-)$  при выбранном направлении узловых напряжений к базисному узлу.

Решив систему уравнений с помощью определителей, получим:

$$U_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{q-1} I_{ii} \Delta_{ik},$$

где  $\Delta$  — определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1,q-1} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{q-1,1} & g_{q-1,2} & \dots & g_{q-1,q-1} \end{vmatrix},$$

$\Delta_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $g_{ik}$ , полученное из определителя  $\Delta$  вычеркиванием  $k$ -го столбца и  $i$ -ой строки и умножением полученного определителя на  $(-1)^{(i+k)}$ .

В развернутом виде:

$$U_1 = \frac{1}{\Delta} [I_{11}\Delta_{11} + I_{22}\Delta_{21} + \dots + I_{q-1,q-1}\Delta_{q-1,1}],$$

$$U_2 = \frac{1}{\Delta} [I_{11}\Delta_{12} + I_{22}\Delta_{22} + \dots + I_{q-1,q-1}\Delta_{q-1,2}],$$

-----

$$U_{q-1} = \frac{1}{\Delta} [I_{11}\Delta_{1n} + I_{22}\Delta_{2n} + \dots + I_{q-1,q-1}\Delta_{q-1,q-1}].$$

Из последних уравнений следует, что узловые напряжения определяются алгебраической суммой частных узловых напряжений, обусловленных действием каждого источника тока, т. е. как и в методе контурных токов, эти уравнения отражают принцип наложения, характерный для линейных электрических цепей.

Изложенные правила составления узловых уравнений справедливы и для цепей с зависимыми источниками тока, т. е. ИТУН и ИТУТ. В уравнениях появляются дополнительные слагаемые, обусловленные взаимной проводимостью между узлами через зависимые источники.

### 5. Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора используется в случае, когда необходимо найти ток, напряжение или мощность в одной ветви. По отношению к рассматриваемой ветви всю остальную часть цепи независимо от ее структуры можно рассматривать как *двухполюсник* (рис.26). Двухполюсник называют *активным*, если он содержит источники электрической энергии, и *пассивным* – в противном случае.

Различают два варианта метода эквивалентного генератора: метод эквивалентного источника напряжения и метод эквивалентного источника тока.

*Метод эквивалентного источника напряжения.* Этот метод основан на теореме Тевенена, согласно которой *ток в любой ветви линейной электрической цепи не изменится, если активный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником напряжения с э. д. с., равной напряжению холостого хода на зажимах разомкнутой ветви, и внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению пассивного двухполюсника со стороны разомкнутой ветви.*

Пусть в некоторой сложной цепи требуется найти ток в одной из ее ветвей. Такую цепь можно представить в виде активного двухполюсника и подключенной к нему интересующей нас ветвью (рис.26, а).

Режим цепи не будет нарушен, если последовательно с сопротивлением  $R$  включить два одинаковых источника э. д. с.  $E_{\mathcal{E}1}$  и  $E_{\mathcal{E}2}$ , имеющих встречные полярности (рис.26, б) и величину, равную напряжению холостого хода, которое появится на зажимах двухполюсника, если разомкнуть заданную ветвь.

Согласно методу наложения будем считать искомым ток состоящим из двух составляющих:  $I = I_1 + I_2$  (рис.26, в). Ток  $I_1$  вызван действием всех источников активного двухполюсника и источником  $E_{\mathcal{E}1}$ . Очевидно, что  $I_1 = 0$ , т. е. в этом случае в цепи реализован режим холостого хода.

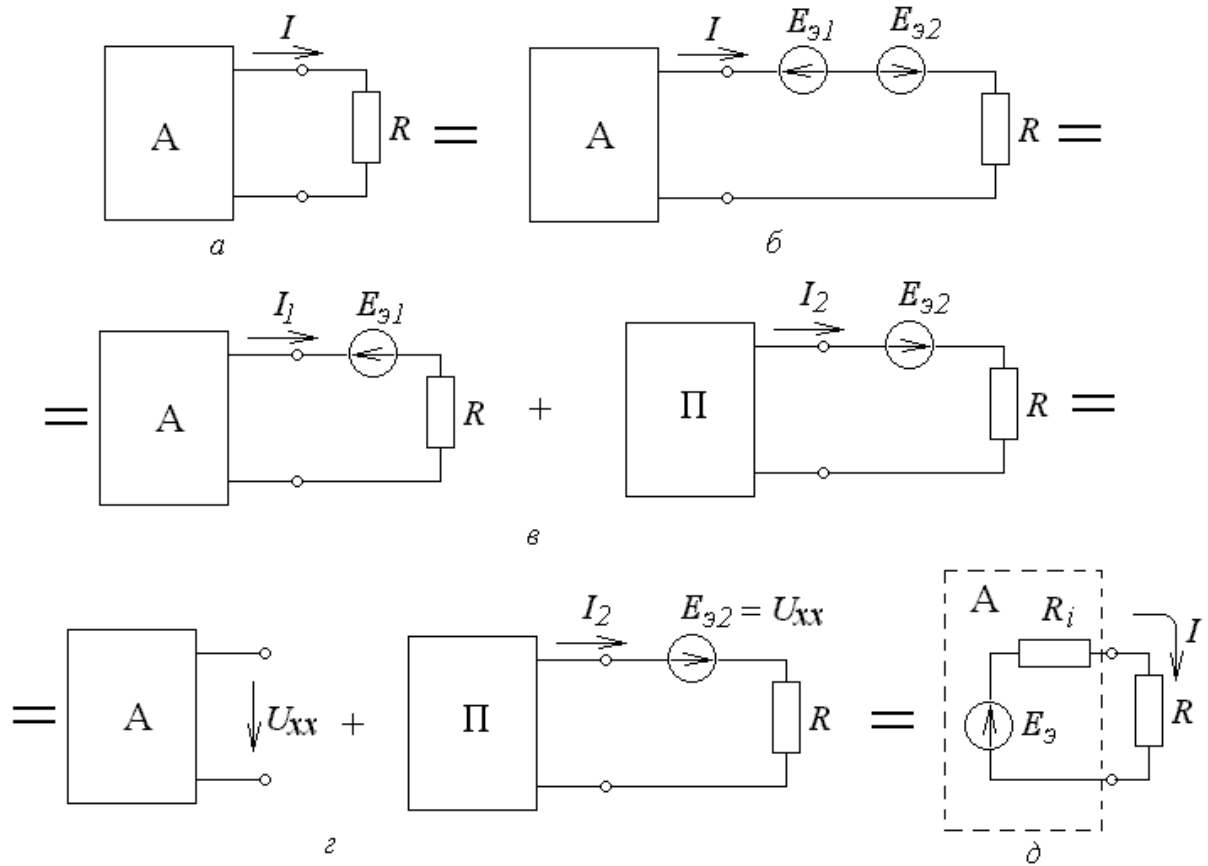


Рис.26

Ток  $I_2$  (рис.26, в) вызванный действием оставшегося источника  $E_{э2}$  при отсутствии всех остальных источников в цепи (короткое замыкание источников э. д. с. и разрыв источников тока активного двухполюсника), представляет собой искомый ток

$$I_2 = I = \frac{E_{э2}}{R_i + R} = \frac{U_{хх}}{R_i + R}.$$

$R_i$  – внутреннее сопротивление эквивалентного источника напряжения, равное входному сопротивлению пассивного двухполюсника со стороны разомкнутой ветви. Из последней формулы следует, что активный двухполюсник может быть заменен последовательной схемой эквивалентного генератора (рис.26, д).

Если сопротивление нагрузки (рис.26, в) замкнуть накоротко, то между зажимами генератора будет проходить ток

$$I_{кз} = \frac{E_{э}}{R_i}.$$



Отсюда следует, что внутреннее сопротивление эквивалентного генератора находится как отношение напряжения холостого хода к току короткого замыкания

$$R_i = \frac{U_{XX}}{I_{KЗ}}.$$

Наряду с заменой активного двухполюсника эквивалентным генератором напряжения, возможна также и замена его эквивалентным источником тока.

Условием эквивалентности источника э. д. с. и источника тока является один и тот же ток и напряжение, вызываемые ими на одной и той же нагрузке (рис.27).

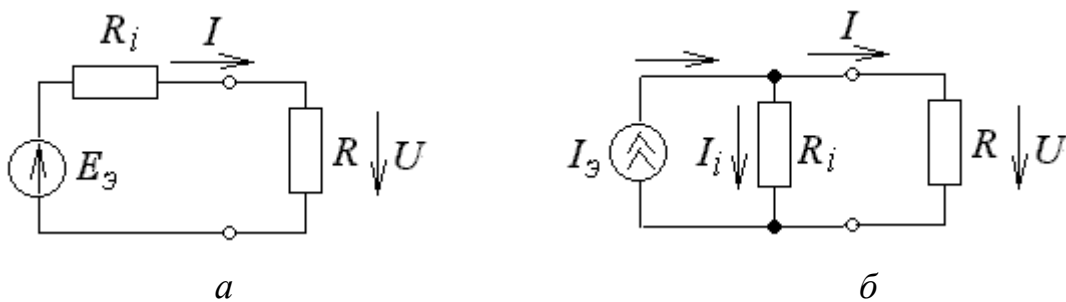


Рис.27

Напряжение эквивалентного генератора (рис.27, а)

$$E_{\text{э}} = RI_i + U \text{ или } U = E_{\text{э}} - R_i I.$$

Напряжение на нагрузке в схеме с генератором тока (рис.27, б)

$$U = RI = R_i I_i = R_i (I_{\text{э}} - I) = R_i I_{\text{э}} - R_i I.$$

$$\text{Таким образом, } E_{\text{э}} - R_i I = R_i I_{\text{э}} - R_i I \text{ или } E_{\text{э}} = R_i I_{\text{э}}.$$

Ток эквивалентного источника тока

$$I_{\text{э}} = \frac{E_{\text{э}}}{R_i},$$

т. е. равен току, возникающему в цепи в режиме короткого замыкания данной ветви.

*Метод эквивалентного источника тока.* В основе метода лежит теорема Нортона, согласно которой ток в любой ветви линейной электрической цепи

не изменится, если активный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником тока с задающим током, равным току короткого замыкания этой ветви, и внутренней проводимостью, равной входной проводимости со стороны разомкнутой ветви.

При переходе от эквивалентного генератора напряжения к эквивалентному источнику тока выше было получено

$$I_{\mathcal{E}} = \frac{E_{\mathcal{E}}}{R_i} = I_{K3} = G_i U_{XX},$$

где  $G_i = 1/R_i$  – внутренняя проводимость эквивалентного источника тока.

После нахождения  $I_{K3}$  и  $R_i$  искомый ток в нагрузке можно найти по формуле

$$I = \frac{U}{R} = I_{K3} \frac{RR_i}{R + R_i} \cdot \frac{1}{R} = I_{K3} \frac{R_i}{R + R_i}.$$

## Лекция 4.

### Линейные электрические цепи при гармоническом воздействии

#### 1. Гармонические колебания

Колебательный процесс называется гармоническим, если мгновенное значение напряжения или тока изменяется во времени по закону

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi)$$

или

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi').$$

Гармоническое колебание является периодической функцией времени. На (рис.28) отмечены *амплитуда*  $U_m$  (максимальное значение) колебания и его *период*  $T = 1/f$ , где  $f$  – частота колебания.

Величина

$$\theta = \omega t + \psi)$$

называется *текущей фазой* колебания и представляет собой некоторый угол, величина которого зависит от времени. Постоянная величина  $\psi$  называется

начальной фазой, определяющей величину смещения гармонической функции относительно начала координат.

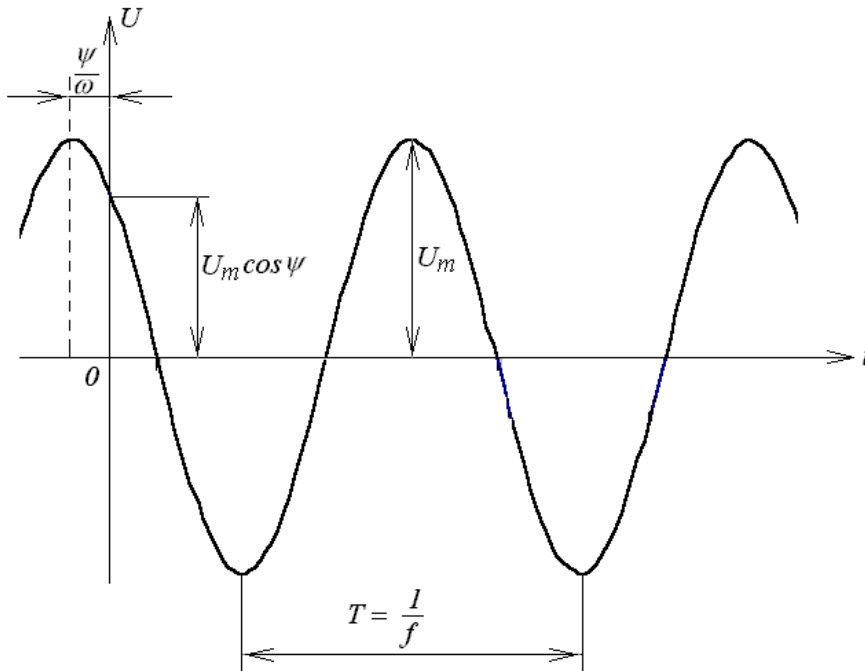


Рис.28

Величина  $\omega$  пропорциональна частоте  $f$ ; она носит название *угловой частоты* и равна

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Угловая частота является скоростью изменения текущей фазы, т. е.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

и измеряется в радианах в секунду (*рад/сек*).

При  $t=0$  значение функции определяется величиной начальной фазы

$$u(0) = U_m \cos \psi.$$

### ***Среднее и действующее (эффективное) значения гармонической функции***

Среднее значение периодической функции за период  $T$  определяется по формуле

$$F_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

В случае гармонического колебания среднее значение за период равно высоте прямоугольника с основанием  $T$ , площадь которого равна площади, ограниченной функцией  $f(t)$  и осью абсцисс и равна нулю, так как площадь положительной полуволны компенсируется площадью отрицательной полуволны. Поэтому под средним значением гармонической функции понимают среднее значение за полпериода.

Для гармонического напряжения  $u = U_m \cos \omega t$

$$U_{CP} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} U_m \cos \omega t dt = \frac{2U_m}{T\omega} \left| \sin \omega t \right|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,637 U_m.$$

Действующее (среднеквадратичное) значение периодической функции вычисляется по формуле

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}.$$

Из этой формулы следует, что величина  $F^2$  представляет собой среднее значение функции  $[f(t)]^2$  за период  $T$ , т. е. равна высоте прямоугольника с основанием  $T$ , площадь которого равна площади, ограниченной функцией  $[f(t)]^2$  и осью абсцисс за один период.

При токе  $i = I_m \cos \omega t$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Количество теплоты, выделенное гармоническим током за время, равное периоду колебаний

$$W = \int_0^T P dt = \int_0^T u i dt = \int_0^T R i^2 dt = R I_m^2 \frac{T}{2}.$$

Выделенная за это же время постоянным током теплота

$$W = RI_{const}^2 T.$$

Из условия равенства количества теплоты, выделяемой гармоническим и постоянным токами ( $RI_m^2 \frac{T}{2} = RI_{const}^2 T$ ) получим  $I = I_{const} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ , т. е. действующее значение периодического тока равно по величине такому постоянному току, который, проходя через неизменное сопротивление  $R$  за период времени  $T$  выделяет то же количество тепла, что и данный ток  $i$ .

## Лекция 5.

### Метод комплексных амплитуд

#### *Представление гармонических функций с помощью комплексных величин*

При гармоническом воздействии на линейную цепь все токи и напряжения имеют форму гармонических колебаний, поэтому задача расчета цепи сводится к нахождению амплитуд и начальных фаз этих колебаний. В связи с этим был разработан *метод комплексных амплитуд*, основанный на представлении гармонических функций в виде проекций вращающихся векторов, которые выражаются аналитически в комплексной форме. Метод удобно сочетает аналитические расчеты с геометрическими представлениями.

Гармонические колебания согласно методу комплексных амплитуд могут быть представлены как проекции вектора  $\dot{U}_m$  на комплексной плоскости вращающегося против часовой стрелки с угловой частотой  $\omega$  (рис.29) на оси координат.

Проекция вектора на вещественную ось представляет собой мгновенное значение, выражаемое косинусоидальной функцией

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \psi),$$

а на мнимую ось - синусоидальной функцией

$$U(t) = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Символический вектор на комплексной плоскости математически

может быть представлен в трех формах:

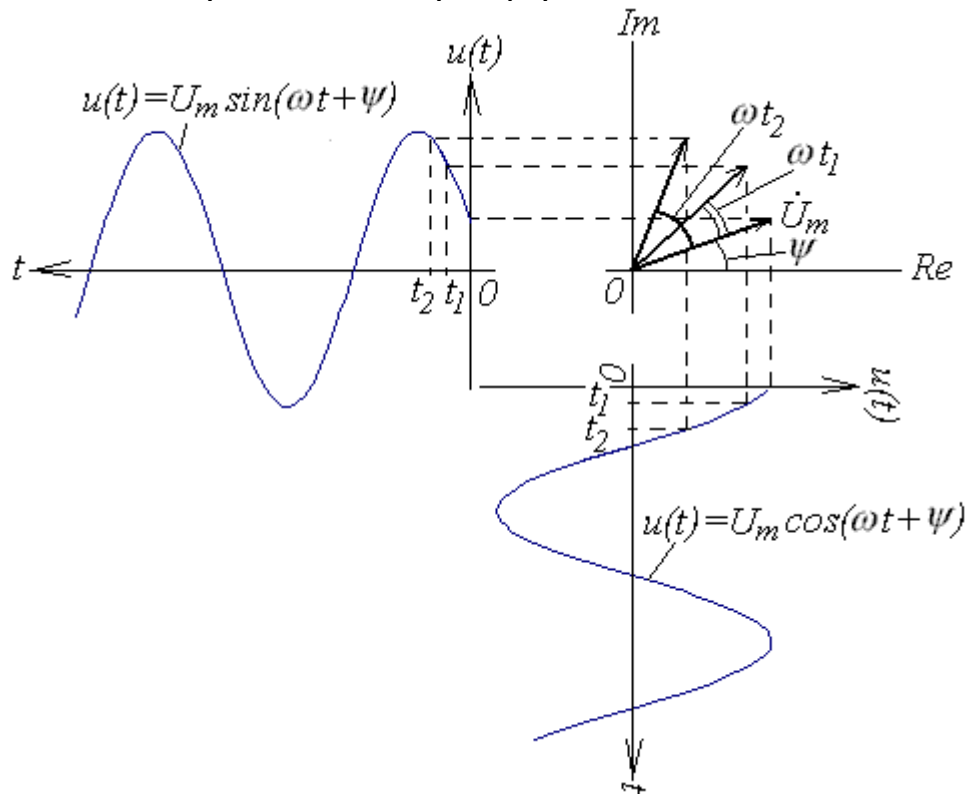


Рис.29

алгебраической  $\dot{U}_m = \text{Re} \dot{U}_m + j \text{Im} \dot{U}_m$ , где  $j = \sqrt{-1}$ ;

показательной,  $\dot{U}_m = |\dot{U}_m| e^{j\psi}$  где,  $|\dot{U}_m|$  - модуль;  $\psi$  - аргумент;

тригонометрической  $\dot{U}_m = |\dot{U}_m| \cos \alpha + j |\dot{U}_m| \sin \alpha$ .

Модуль вектора  $|\dot{U}_m| = \sqrt{(\text{Re} \dot{U}_m)^2 + (\text{Im} \dot{U}_m)^2}$ ,

аргумент  $\alpha = \text{arctg} \frac{\text{Im} \dot{U}_m}{\text{Re} \dot{U}_m}$ .

В случае гармонического колебания аргумент комплексного числа  $\dot{U}_m$  является функцией времени  $\alpha = \omega t + \psi$ .

Поэтому число, символизирующее вращающийся вектор, выражается: в показательной форме  $\dot{U}(t) = |\dot{U}_m| e^{j\psi} e^{j\omega t}$ ;

в тригонометрической форме

$$\dot{U}(t) = |\dot{U}_m| \cos(\omega t + \psi) + j |\dot{U}_m| \sin(\omega t + \psi).$$

Кроме рассмотренного выше, возможен и несколько иной способ представления гармонических колебаний в виде двух вращающихся навстречу векторов (рис.30).

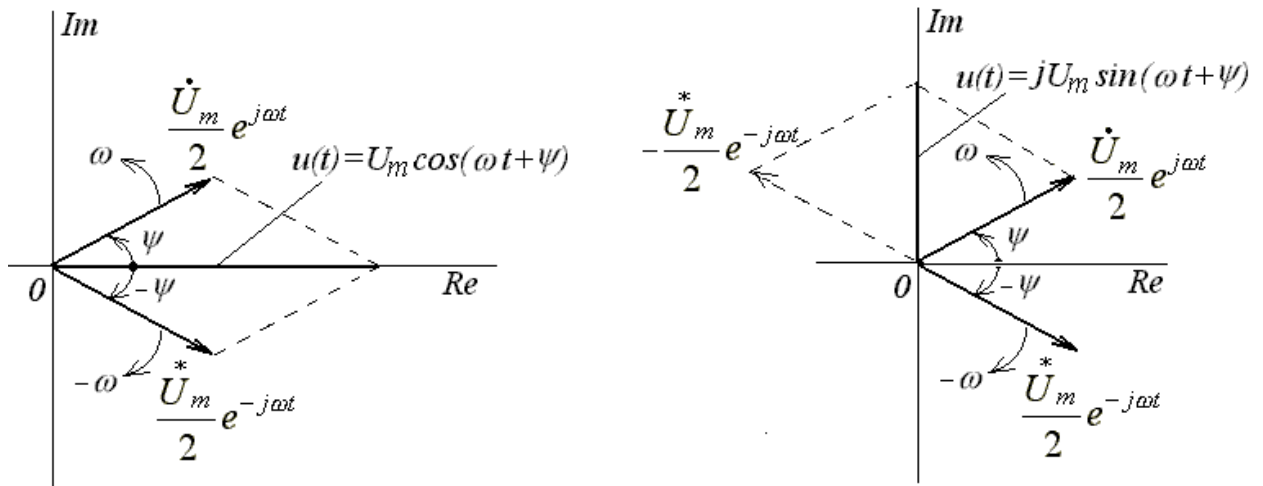


Рис.30

На основании формулы Эйлера

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = U_m \frac{e^{j(\omega t + \psi)} + e^{-j(\omega t + \psi)}}{2}$$

или

$$u(t) = \frac{\dot{U}_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{U_m^*}{2} e^{-j\omega t},$$

где  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}$ , а  $U_m^* = U_m e^{-j\psi}$  – комплексно сопряженное число.

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) = U_m \frac{e^{j(\omega t + \psi)} - e^{-j(\omega t + \psi)}}{2j}$$

или

$$u(t) = \frac{1}{j} \left( \frac{\dot{U}_m}{2} e^{j\omega t} - \frac{U_m^*}{2} e^{-j\omega t} \right).$$

Вращение векторов в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки (рис.30)) связано с понятием отрицательной частоты, что, конечно, лишено физического смысла, однако позволяет упростить решение многих задачах радиотехники и электроники.

Таким образом, при рассмотрении напряжений и токов в цепи при гармоническом воздействии может быть построена векторная диаграмма, представляющая собой совокупность радиус-векторов, отображающих комплексные амплитуды колебаний и вращающихся на комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ .

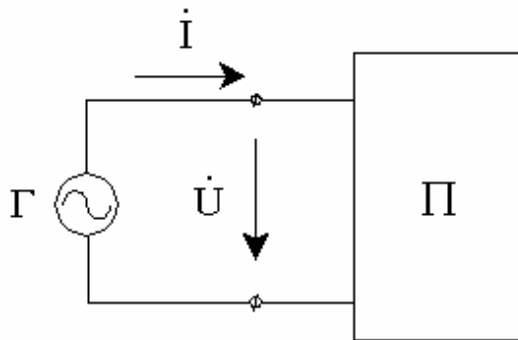


Рис.31

Поскольку взаимное расположение векторов на диаграмме не изменяется, то удобно рассматривать комплексные амплитуды напряжений и токов в момент времени  $t = 0$ .

На рис.31 приведено схематическое изображение цепи переменного тока.

Генератор гармонических колебаний питает пассивный двухполюсник, состоящий из сопротивлений, индуктивностей и емкостей.

Отношение комплексных амплитуд напряжения  $\dot{U}$  и тока  $\dot{I}$  на входе двухполюсника называется его комплексным входным сопротивлением:

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}.$$

Величина, обратная комплексному сопротивлению называется его комплексной проводимостью:

$$\dot{Y}_{BX} = \frac{1}{\dot{Z}_{BX}} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}}.$$

Учитывая, что

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_U} \text{ и } \dot{I}_m = I_m e^{j\psi_I}$$



получаем

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_U - \psi_i)},$$

Отношение  $\frac{U_m}{I_m}$  – полное входное сопротивление (модуль);

$\psi_U - \psi_i$  – сдвиг фаз между напряжением и током.

Как всякое комплексное число, комплексное сопротивление и комплексная проводимость могут быть представлены в показательной, алгебраической и тригонометрической формах:

$$\dot{Z}_{BX} = |\dot{Z}_{BX}| e^{j\varphi},$$

$$\dot{Z}_{BX} = R_{BX} + jX_{BX},$$

$R_{BX}$  – вещественная, активная составляющая;

$X_{BX}$  – мнимая, реактивная составляющая комплексного сопротивления;

$$\dot{Z}_{BX} = |\dot{Z}_{BX}| \cos \varphi + j |\dot{Z}_{BX}| \sin \varphi.$$

Очевидно,

$$|\dot{Z}_{BX}| = \sqrt{R_{BX}^2 + X_{BX}^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_{BX}}{R_{BX}}.$$

## Гармонический ток в элементах электрической цепи

### 1. Гармонический ток в сопротивлении

Если пассивный двухполюсник представляет собой активное сопротивление  $R$ , то на основании закона Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}, \quad \dot{I} = I_m e^{j\psi_i} = \frac{U_m}{R} e^{j\psi_U},$$

т. е. амплитуда тока  $I_m = \frac{U_m}{R},$

а разность фаз между током и напряжением

$$\varphi = \psi_U - \psi_i.$$

На векторной диаграмме (рис.32) напряжение и ток совпадают по фазе;

$$\dot{Z}_{BX} = R_{BX} = R, \quad X_{BX} = 0,$$

проводимость  $Y_{BX} = 1/R.$

Если к сопротивлению подведено напряжение

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_U),$$

то через него потечет ток

$$i = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \psi_U).$$

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление

$$P_R = ui = U_m I_m \cos^2(\omega t + \psi) = UI[1 + \cos 2(\omega t + \psi)],$$

т. е.  $P_R$  изменяется с удвоенной частотой (рис.33).

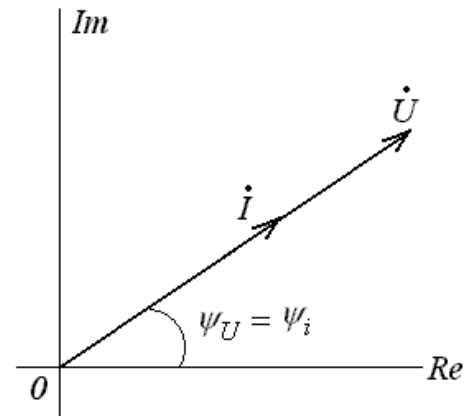


Рис.32

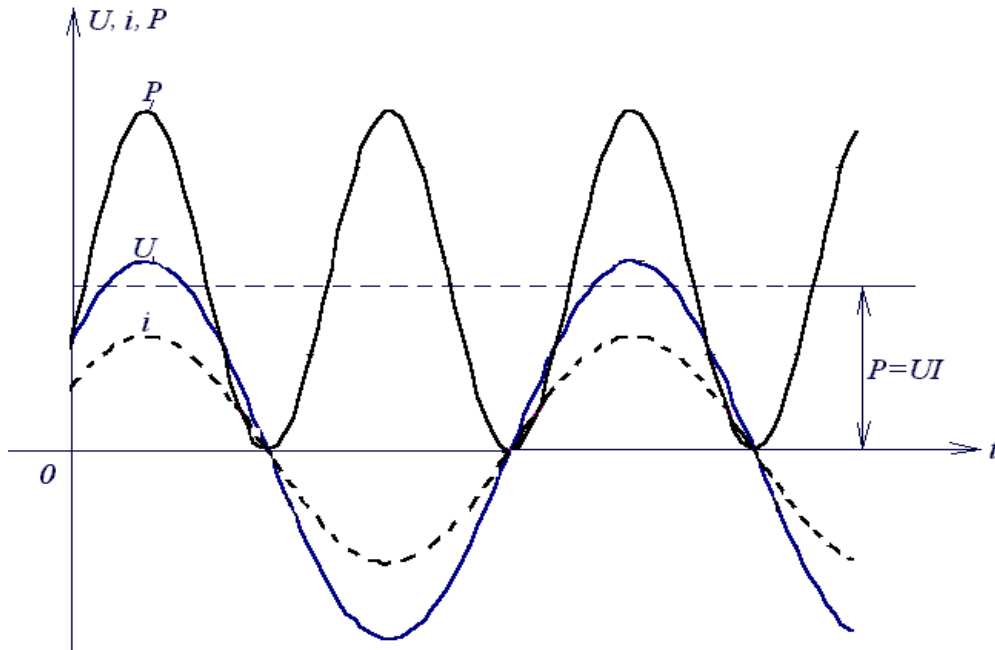


Рис.33

Среднее значение мощности за период

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T P_R dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi)] dt = UI = RI^2.$$

Среднее значение расходуемой мощности называют *активной мощностью*.

$$(U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \text{ и } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} - \text{действующие значения напряжения и тока}).$$

## 2. Гармонический ток в индуктивности

Если пассивный двухполюсник представляет собой индуктивность, то

$$U_L = L \frac{di}{dt}.$$

Используя метод комплексных амплитуд, получим

$$\dot{U}_L = L \frac{d(I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = U_m e^{j\psi_U} e^{j\omega t}.$$

$$\dot{U}_{Lm} = j\omega L I_m e^{j\psi_i} = \omega L I_m e^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})}, \quad (j = e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}).$$

Отсюда следует, что амплитуда напряжения

$$U_{Lm} = \omega L I_m = X_L I_m,$$

где  $X_L = \omega L$  – индуктивное сопротивление, обратная величина

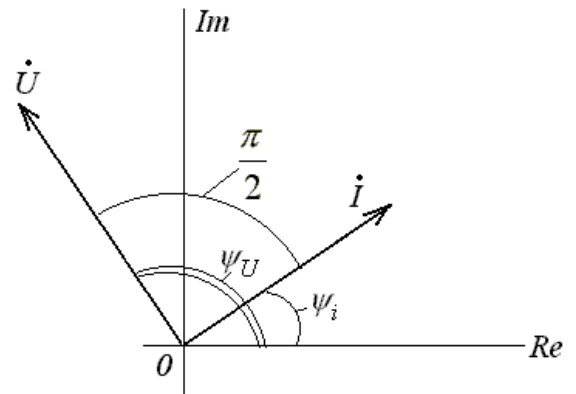
$$b_L = \frac{1}{\omega L} \text{ называется индуктивной проводимостью.}$$

Угол сдвига фаз между напряжением и током, т.е.

$$\varphi = \psi_U - \psi_i = \frac{\pi}{2} - \text{ток отстает по фазе от напряжения на } \frac{\pi}{2} \text{ (рис.34).}$$

Очевидно, что входное сопротивление индуктивности – чисто мнимая величина:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{BX} &= \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j\omega L \frac{I_m e^{j\psi_i}}{I_m e^{j\psi_i}} = j\omega L = \\ &= \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L, \end{aligned}$$



линейно изменяющаяся с частотой.

Рис.34

Пусть через индуктивность протекает ток  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$ . Тогда напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \psi) = U_m \cos(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}).$$

Мгновенная мощность, поступающая в индуктивность, будет равна:

$$P_L = ui = -U_m I_m \sin(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi) =$$

$$= -\frac{U_m I_m}{2} 2 \sin(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi) = -UI \sin 2(\omega t + \psi).$$

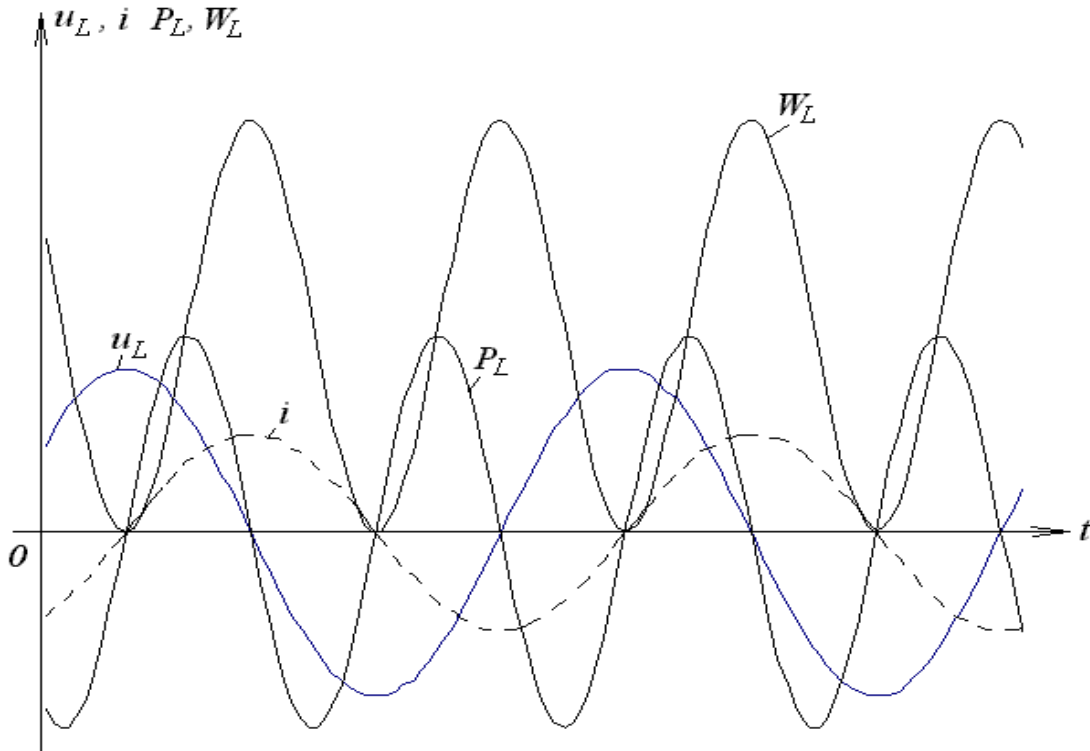


Рис.35

Энергия магнитного поля индуктивности

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \psi) = \frac{LI^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi)],$$

т. е. также как и мгновенная мощность колеблется с удвоенной частотой (рис.35) и происходит непрерывный обмен энергии между источником и индуктивностью, причем средняя мощность, поступающая в индуктивность равна нулю.

### 3. Гармонический ток в емкости

При подключении к источнику гармонического напряжения емкости в цепи потечет ток

$$i_C = C \frac{dU}{dt}.$$

Используя метод комплексных амплитуд, получаем

$$\dot{I}_C = C \frac{d(U_m e^{j\psi_U} e^{j\omega t})}{dt} = CU_m e^{j\psi_U} j\omega e^{j\omega t} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t},$$

$$\dot{I} = I_m e^{j\psi_i} = j\omega CU_m e^{j\psi_U} = \omega CU_m e^{j(\psi_U + \frac{\pi}{2})}.$$

Отсюда следует, что амплитуда тока в емкости

$$I_m = \omega CU_m = b_C U_m = \frac{U_m}{X_C},$$

где  $b_C = \omega C$  – проводимость емкости,  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  – емкостное сопротивление.

Сдвиг фаз между напряжением и током  $\varphi = \psi_U - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$ ,

т.е. ток опережает напряжение на  $\pi / 2$  (рис.36).

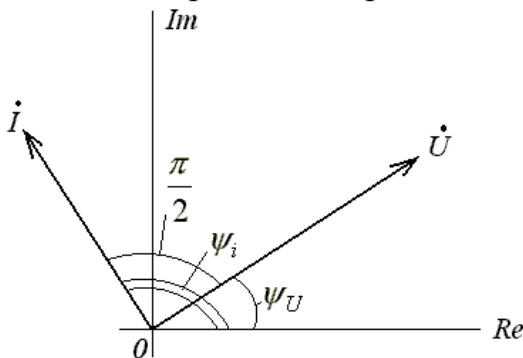


Рис.36

Следует отметить, что входное сопротивление емкости является чисто мнимой отрицательной величиной:

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U_m e^{j\psi_U}}{j\omega CU_m e^{j\psi_U}} = \frac{1}{j\omega C} =$$

$$= -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \text{ зависящей от}$$

частоты источника ( $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ ).

Мгновенная мощность, поступающая в емкость

$$\begin{aligned} P_C = ui &= U_m I_m \cos(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}) = \\ &= -UI \sin 2(\omega t + \psi). \end{aligned}$$

## Энергия электрического поля емкости

$$W_C = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \psi) = \frac{CU^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi)].$$

Как и в индуктивности, мгновенная мощность и энергия в емкости колеблются с удвоенной частотой, причем средняя мощность, поступающая в емкость, равна нулю.

## Лекция 6.

### Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Согласно первому закону Кирхгофа сумма мгновенных значений токов в узле равна нулю. Представляя мгновенные значения токов как вещественные части комплексных функций

$$i_1(t) = \operatorname{Re}(\dot{I}_{m1} e^{j\omega t}), \quad i_2(t) = \operatorname{Re}(\dot{I}_{m2} e^{j\omega t}), \quad \dots, \quad i_n(t) = \operatorname{Re}(\dot{I}_{mn} e^{j\omega t}),$$

получим

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(\dot{I}_{mk} e^{j\omega t}) = 0.$$

Так как сумма вещественных частей комплексных функций равна вещественной части суммы функций, то

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \dot{I}_{mk} e^{j\omega t}\right) = 0.$$

Это выражение справедливо для любого момента времени, в том числе и для  $t = 0$ . Поэтому

$$\sum_{k=0}^n \dot{I}_{mk} = 0.$$

Таким образом, сумма комплексных амплитуд токов в узле равна нулю.

Второй закон Кирхгофа гласит, что сумма мгновенных значений напряжений на пассивных элементах контура равна сумме э. д. с., действующих в контуре.

Для электрической цепи (рис.37)

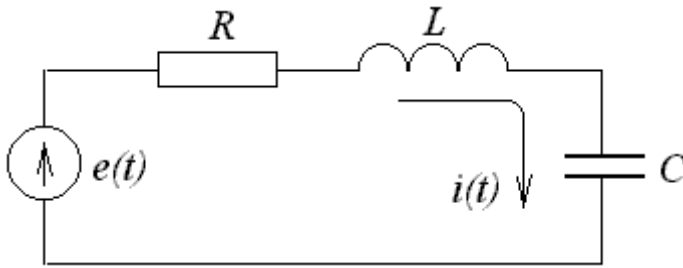


Рис.37

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Пусть  $\dot{E} = \dot{E}_m e^{j\omega t}$ , тогда ток может быть представлен в виде  $\dot{I} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$ , где  $\dot{E}_m$  и  $\dot{I}_m$  – комплексные амплитуды источника э. д. с. и тока в контуре.

Тогда последнее уравнение может быть представлено в виде:

$$\text{Re}(\dot{E}_m e^{j\omega t}) = R \cdot \text{Re}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + L \frac{d}{dt} \text{Re}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) + \frac{1}{C} \int \text{Re}(\dot{I}_m e^{j\omega t}) dt.$$

Заменяя операции над действительными частями комплексных функций операциями над самими комплексными функциями с последующим выделением действительных частей от полученного результата, имеем:

$$\text{Re}(\dot{E}_m e^{j\omega t}) = \text{Re}(R\dot{I}_m e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt} \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{C} \int \dot{I}_m e^{j\omega t} dt).$$

После операций дифференцирования и интегрирования в правой части уравнения получим:

$$\text{Re}(\dot{E}_m e^{j\omega t}) = \text{Re}(R\dot{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m e^{j\omega t}).$$

Проведя деление обеих частей уравнения на  $e^{j\omega t}$ , получим алгебраическое комплексное уравнение:

$$\dot{E}_m = R\dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m,$$



из которого следует, что комплексная амплитуда э. д. с. источника равна сумме комплексных амплитуд падений напряжения на элементах

$$\dot{E}_m = \dot{U}_{Rm} + \dot{U}_{Lm} + \dot{U}_{Cm}.$$

Алгебраическое комплексное уравнение может быть представлено и в другой форме:

$$\dot{E}_m = \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{I}_m = \dot{Z} \dot{I}_m,$$

где  $\dot{Z}$  – комплексное сопротивление цепи.

Последнее уравнение представляет собой закон Ома для комплексных амплитуд.

В общем случае второй закон Кирхгофа в комплексной форме можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^n \dot{Z}_k \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k,$$

где  $\dot{Z}_k$  и  $\dot{I}_k$  – комплексное сопротивление и комплексная амплитуда тока в  $k$ -ой ветви,  $\dot{E}_k$  – комплексная амплитуда э. д. с.  $k$ -ой ветви.

Построим векторную диаграмму напряжений для последовательной RLC-цепи (рис.38).

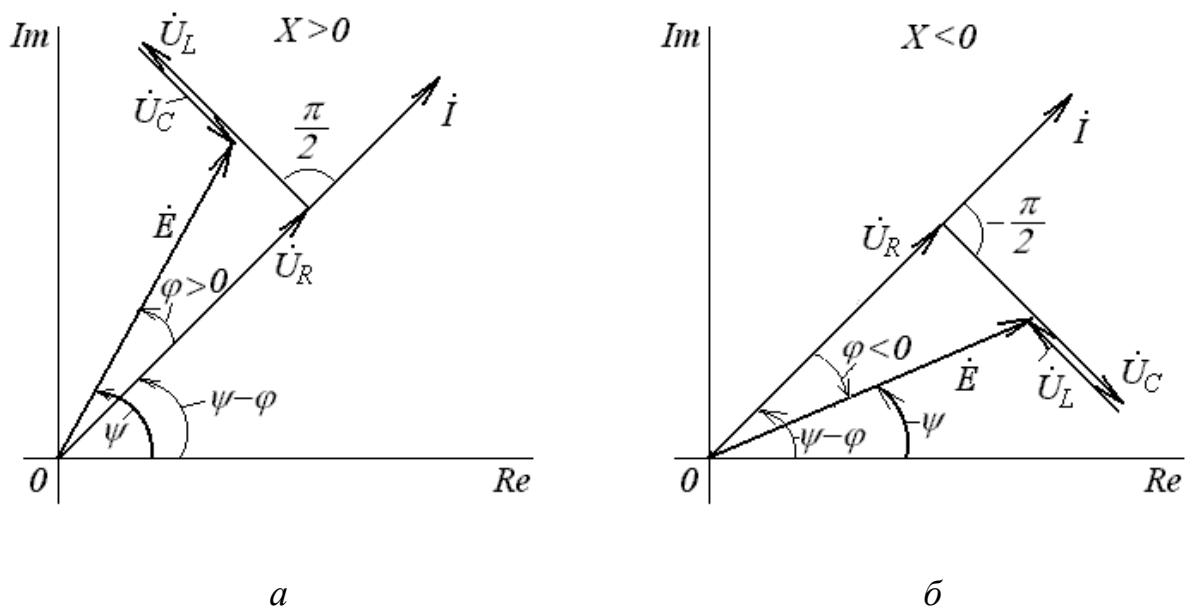


Рис.38

Изображенные на рис.38 напряжения на элементах равны:

$$\dot{U}_R = R\dot{I}, \quad \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}, \quad \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}.$$

При  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$   $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$ ,  $\varphi = \arctg \frac{X}{R} > 0$ ,

сопротивление цепи имеет индуктивный характер и ток в цепи отстает от входного напряжения на угол  $\varphi$ , зависящий от соотношения сопротивлений индуктивности, емкости и резистора (рис.38, а).

При  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$   $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$ ,  $\varphi = \arctg \frac{X}{R} < 0$ ,

сопротивление цепи имеет емкостный характер, и ток в цепи опережает входное напряжение на угол  $\varphi$  (рис.38, б).

Векторы, представляющие действующие в цепи э. д. с. и напряжения на элементах, образуют на векторной диаграмме замкнутую фигуру (треугольник напряжений (рис.39, а)).

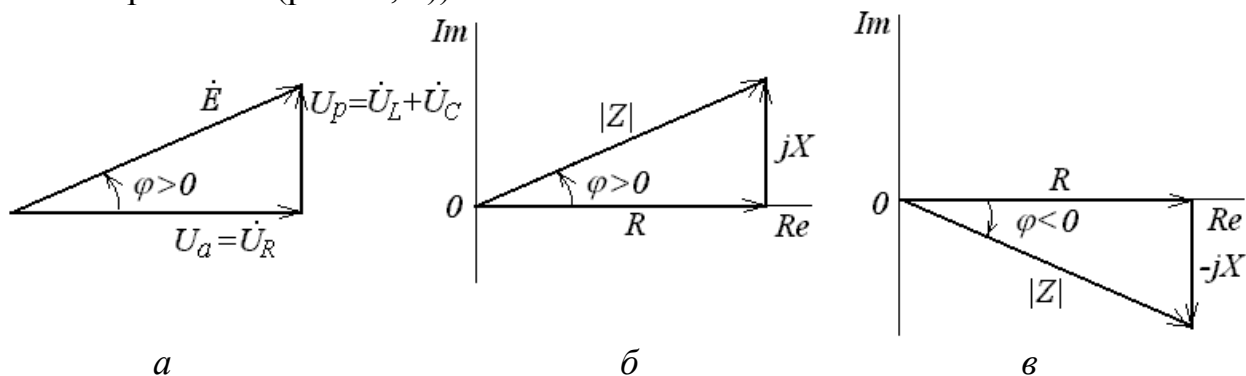


Рис.39

Треугольник сопротивлений представляет собой геометрическую интерпретацию выражения комплексного сопротивления при  $X > 0$  (рис.39, б) и  $X < 0$  (рис.39, в).

В соответствии с первым законом Кирхгофа для цепи с параллельным соединением  $R$ ,  $L$ ,  $C$  (рис.40) имеем:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{j\omega L} + j\omega C\dot{U} = \dot{Y}\dot{U}.$$

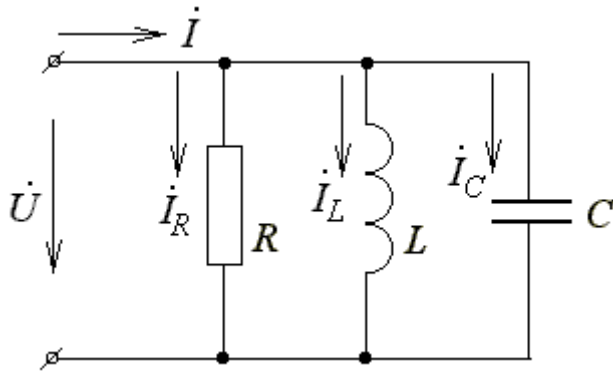


Рис.40

Ток в сопротивлении  $\dot{I}_R$  совпадает по фазе с напряжением  $\dot{U}$ ;

ток в индуктивности  $\dot{I}_L$  отстает напряжения на  $\frac{\pi}{2}$ ;

ток в емкости  $\dot{I}_C$  опережает напряжение на  $\frac{\pi}{2}$ .

Выражение

$$\dot{Y} = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - jb$$

представляет собой комплексную проводимость цепи;  $g = 1/R$  – активная и  $b$  – реактивная составляющие проводимости цепи.

Уравнение

$$\dot{I} = \dot{Y}\dot{U}$$

выражает закон Ома в комплексной форме.

Построим векторную диаграмму токов для параллельной RLC-цепи (рис.41).

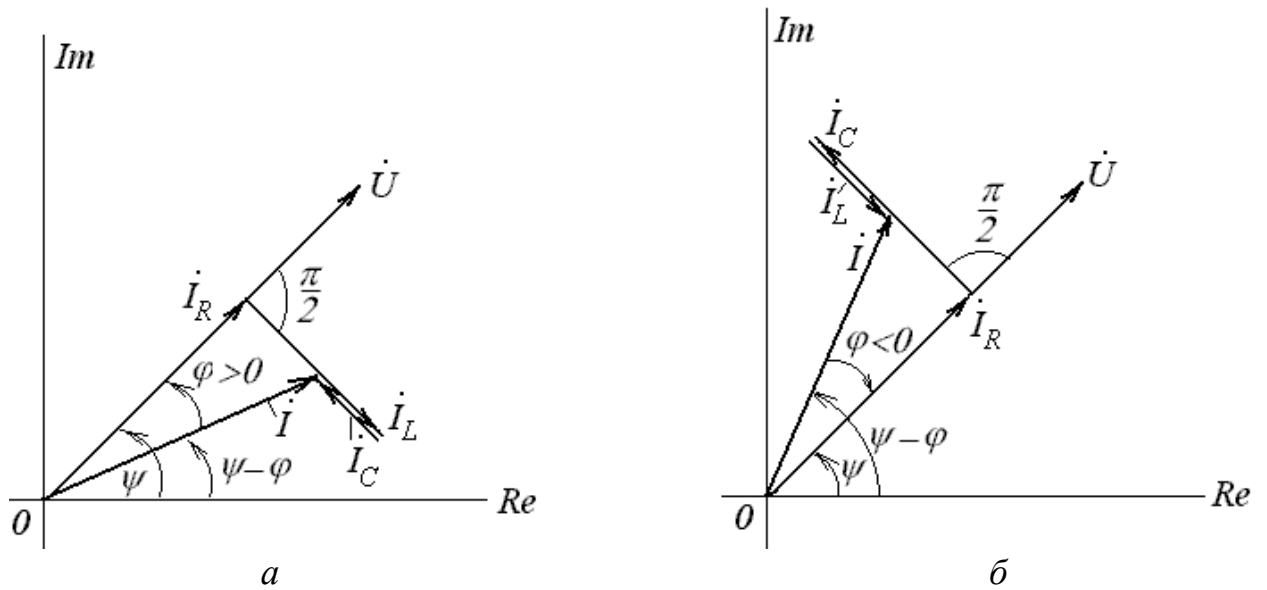


Рис.41

При  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$  цепь имеет индуктивный характер проводимости и полный ток  $\dot{I}$  отстает от входного напряжения  $\dot{U}$  по фазе (рис.41, а).

При  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$  цепь имеет емкостный характер проводимости и полный ток  $\dot{I}$  опережает входное напряжение  $\dot{U}$  по фазе (рис.41, б).

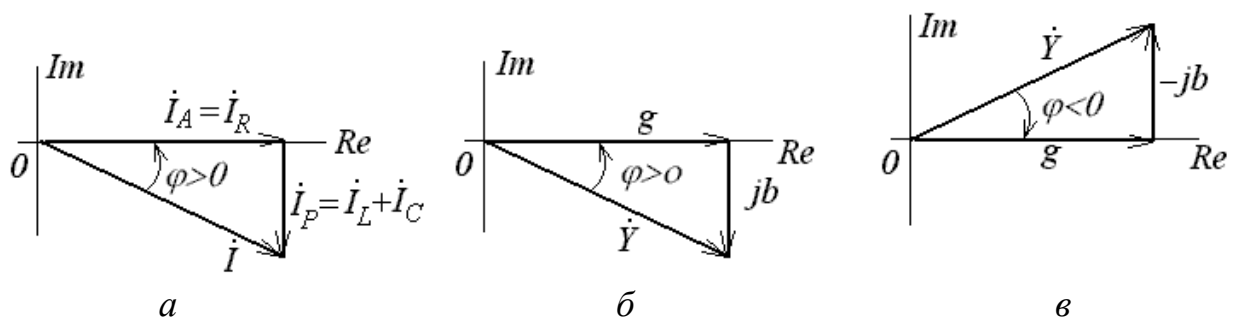


Рис.42

Активная составляющая тока  $\dot{I}_A = \dot{I}_R$ , реактивная составляющая  $\dot{I}_P = \dot{I}_L + \dot{I}_C$  и суммарный ток  $\dot{I}$  образуют треугольник токов (рис.42, а).

Если стороны треугольника токов поделить на входное напряжение, то получатся стороны треугольника проводимостей; для случая  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$  (рис.42, б) и (рис.42, в) для случая  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ .

## Лекция 7.

### Мощность в цепи гармонического тока

Пусть имеем участок цепи  $R, X$  (рис.43), находящийся под воздействием гармонического напряжения.

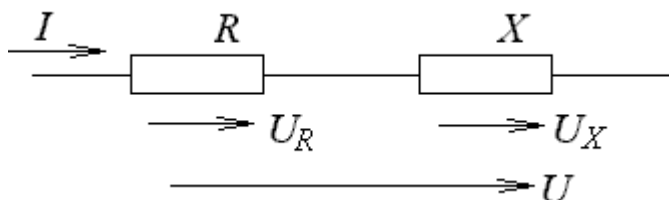


Рис.43

При напряжении на участке цепи  $u = U_m \cos \omega t$  ( $\psi = 0$ ) в цепи течет ток  $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ .

Мгновенная мощность, поступающая в цепь

$$P = ui = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]$$

состоит из двух составляющих: постоянной величины  $\frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi$  и гармонической  $\frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi)$ , колеблющейся с удвоенной частотой.

На рис.44 приведены временные диаграммы напряжения, тока и мгновенной мощности.

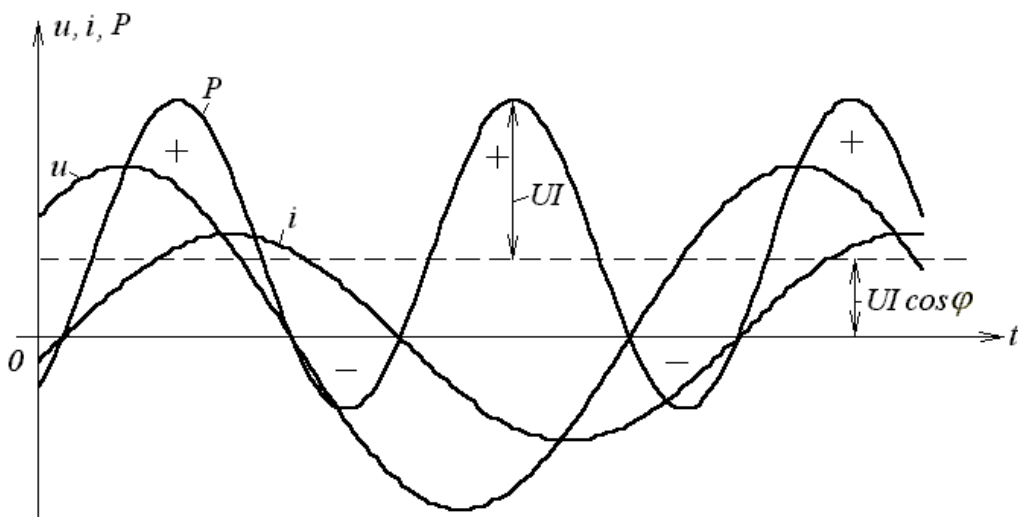


Рис.44

Сравнивая кривую мгновенной мощности, изображенную на рис.44 с аналогичными кривыми, полученными для цепей с реактивными элементами (рис.35), можно увидеть, что в отличие от рис.35, площадь, ограниченная положительными ординатами кривой, превышает площадь отрицательных участков. Это свидетельствует о том, что энергия частично расходуется в активном сопротивлении  $R$ , подобно тому, что наблюдается в цепи с сопротивлением (рис.33). Однако одновременно некоторое количество энергии периодически то накапливается в магнитном или электрическом полях реактивного сопротивления  $X$ , то возвращается к генератору.

Выражение для мгновенной мощности может быть также представлено в иной форме:

$$P = ui = U_m I_m \cos \omega t [\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi] = \\ \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) + \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi \sin 2\omega t.$$

Очевидно, что первое слагаемое является мгновенной скоростью *расхода* энергии в цепи, т. е. мощностью потребляемой активным сопротивлением.

Второе слагаемое представляет собой мгновенную скорость *запасания* энергии в магнитном или электрическом поле цепи.

Среднее значение мощности за период, равно активной мощности

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

В отличие от цепи, содержащей только активное сопротивление, где  $P_A = UI = RI^2$ , теперь  $P_A < UI$ .

Таким образом, активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока умноженному на  $\cos \varphi$ , который носит название *коэффициента мощности*. Чем ближе угол  $\varphi$  к нулю, ближе  $\cos \varphi$  к единице и тем большая активная мощность будет передаваться от источника к нагрузке при заданном напряжении.

Мгновенная скорость запасаения энергии – реактивная мощность имеет абсолютное значение

$$Q = \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi = UI \sin \varphi.$$

Знак  $Q$  свидетельствует о характере запасаемой энергии. Если  $Q > 0$ , то энергия запасается в магнитном поле; если же  $Q < 0$ , энергия накапливается в электрическом поле цепи.

В отличие от чисто реактивной цепи, для которой

$$|Q| = \frac{U_m I_m}{2} = UI,$$

в смешанной цепи

$$|Q| < \frac{U_m I_m}{2}.$$

Поскольку  $\sin \varphi = \frac{X}{|Z|} = \frac{I}{U} X$ , то

$$Q = \frac{I_m^2 X}{2} = I^2 X.$$

Реактивная мощность измеряется в вольт - амперах реактивных (ВАР).

Реактивная мощность, подводимая к индуктивности:

$$Q_L = UI \sin \frac{\pi}{2} = \omega LI^2 = \omega \frac{LI_m^2}{2} = \omega W_{L \max},$$

где  $W_{L \max}$  – максимальное значение энергии магнитного поля, запасаемой в индуктивности.

Реактивная мощность, подводимая к емкости:

$$Q_C = UI \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\omega CU^2 = -\omega \frac{CU_m^2}{2} = -\omega W_{C \max},$$

где  $W_{C \max}$  – максимальное значение энергии электрического поля, запасаемой емкостью.

В цепи, содержащей индуктивность и емкость реактивная мощность равна

$$Q = \omega(W_{L \max} - W_{C \max}).$$

Величина, равная произведению действующих значений напряжения и тока на зажимах цепи

$$S = UI,$$

называется полной мощностью и измеряется в вольт - амперах (ВА).

Поскольку

$$P_A = UI \cos \varphi = S \cos \varphi, \quad Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi,$$

то, очевидно

$$S^2 = P_A^2 + Q^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P_A}.$$

Энергетический расчет цепи гармонического тока может быть проведен и методом комплексных амплитуд, если воспользоваться следующим приемом.

Пусть через некоторое комплексное сопротивление  $\dot{Z}$  под действием комплексной амплитуды напряжения  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_U}$  протекает ток с комплексной амплитудой  $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ .

Найдем произведение из комплексной амплитуды напряжения  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_U}$  и комплексного числа, сопряженного с комплексной амплитудой тока  $\dot{I}_m^* = I_m e^{-j\psi_i}$ .

Разделив полученное произведение на два, имеем

$$\dot{S} = \frac{U_m I_m}{2} e^{j(\psi_U - j\psi_i)} = \frac{U_m I_m}{2} e^{j\varphi} = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi + j \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi.$$



Таким образом, вещественная часть полученного произведения равна активной мощности  $P_A$ , а мнимая часть реактивной мощности  $Q$ .

На комплексной плоскости соотношение между мощностями может быть представлено в виде треугольника мощностей (рис.45), подобного треугольнику сопротивлений.

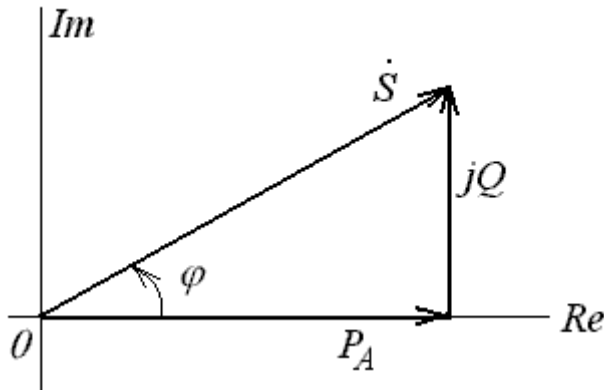


Рис.45

Если комплексно-сопряженное напряжение умножить на комплексный ток и поделить полученное произведение на два, то получим:

$$\frac{U_m^* \dot{I}_m}{2} = \frac{U_m I_m}{2} e^{j(\psi_i - \psi_U)} = \frac{U_m I_m}{2} e^{-j\varphi} = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi - j \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi.$$

$$\frac{U_m^* \dot{I}_m}{2} = P_A - jQ.$$

Отсюда следует, что активная и реактивная мощности могут быть записаны в виде:

$$P_A = \frac{1}{4}(\dot{U}_m^* \dot{I}_m + \dot{U}_m \dot{I}_m^*), \quad Q = \frac{1}{4j}(\dot{U}_m^* \dot{I}_m - \dot{U}_m \dot{I}_m^*).$$

Для комплексов действующих значений напряжения и тока

$$P_A = \frac{1}{2}(\dot{U}^* \dot{I} + \dot{U} \dot{I}^*), \quad Q = \frac{1}{2j}(\dot{U}^* \dot{I} - \dot{U} \dot{I}^*).$$

**Условие передачи максимума средней мощности от генератора к нагрузке.  
Коэффициент полезного действия**

Пусть источник э. д. с. (рис.46) с внутренним сопротивлением  $\dot{Z}_i = R_i + jX_i$  подключен к сопротивлению нагрузки  $\dot{Z}_H = R_H + jX_H$ .

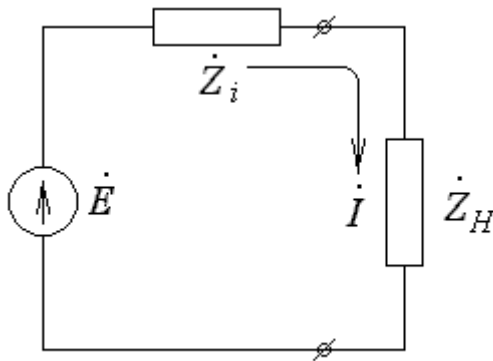


Рис.46

Амплитуда тока в цепи

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}}.$$

Средняя мощность, потребляемая нагрузкой

$$P_A = \frac{1}{2} R_H I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{R_H E_m^2}{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}.$$

Отсюда видно, что первым условием получения максимума  $P_A$  является равенство

$$X_H = -X_i.$$

В этом случае мощность, выделяемая в сопротивлении нагрузки

$$P_{A \max} = \frac{1}{2} \frac{R_H E_m^2}{(R_i + R_H)^2}.$$

Дифференцируя по  $R_H$  и приравнявая производную к нулю, получим второе условие, при выполнении которого активная мощность достигает наибольшего возможного (максимум максиморум) значения:

$$\frac{dP_{A\max}}{dR_H} = \frac{1}{2} \frac{E_m^2 (R_i + R_H)^2 - 2(R_i + R_H)R_H E_m^2}{(R_i + R_H)^4} = 0.$$

Отсюда

$$R_i = R_H.$$

При этом условии активная мощность в нагрузке

$$P_{Am\max} = \frac{E_m^2}{8R_i} = \frac{E_m^2}{8R_H}.$$

Таким образом, условия получения наибольшей мощности в нагрузке могут быть выражены одной формулой

$$R_H + jX_H = R_i - jX_i.$$

Если это условие выполняется, то считается, что генератор и нагрузка *согласованы*.

На рис.47 показана зависимость  $P_{A\max}$  от отношения  $R_H / R_i$ .

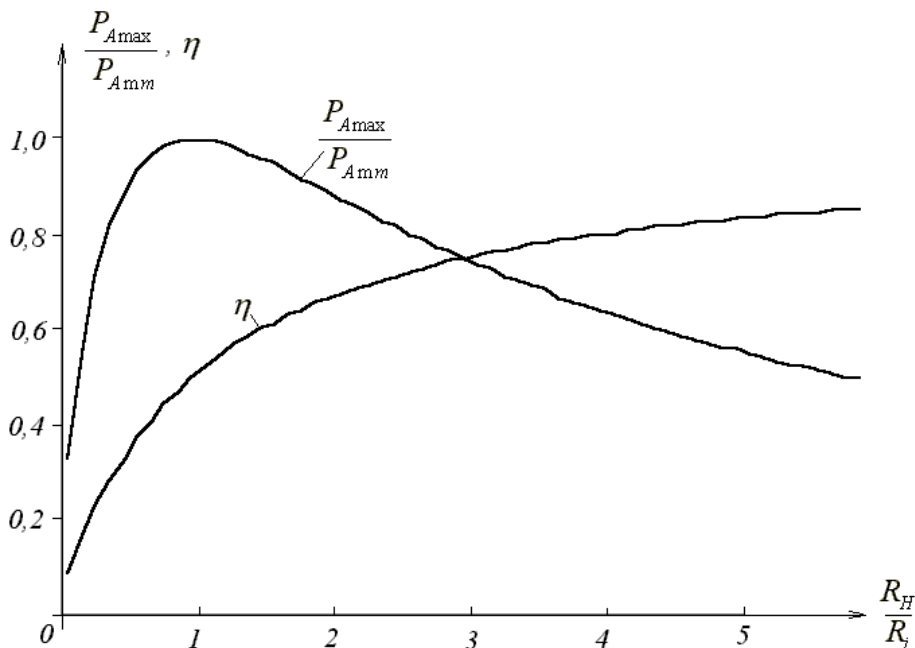


Рис.47

Поскольку ток в цепи протекает как через нагрузку, так и через внутреннее сопротивление генератора, то часть мощности генератора расходуется на его внутреннем сопротивлении и эту мощность можно считать бесполезно потерянной.

*Коэффициент полезного действия* равен

$$\eta = \frac{P_A}{P_i + P_A},$$

где  $P_i$  – мощность, расходуемая внутри генератора.

Учитывая, что

$$P_A = \frac{1}{2} R_H I_m^2 \quad \text{и} \quad P_i = \frac{1}{2} R_i I_m^2,$$

получим

$$\eta = \frac{R_H}{R_i + R_H} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_H}}.$$

График зависимости коэффициента полезного действия от отношения  $R_H / R_i$  приведен на рис.47.

В режиме согласованной нагрузки ( $R_i = R_H$ ) полезная мощность максимальна, коэффициент полезного действия равен лишь 50%, т. е. внутри генератора расходуется такая же мощность, какая выделяется в нагрузке, а отдаваемая генератором мощность вдвое превосходит полезную. При  $R_H > R_i$  полезная мощность падает с ростом  $R_H$ , в то время как коэффициент полезного действия продолжает расти, приближаясь к единице.

В тех случаях, когда получение высокого коэффициента полезного действия является решающим, следует выбирать режим цепи при  $R_H > R_i$ .

В радиотехнических цепях при преобразовании маломощных сигналов чаще всего стоит задача получения возможно большей полезной мощности; в этом случае следует добиваться режима согласования  $R_i = R_H$ .

## Лекция 8.

**Избирательные (резонансные) цепи**

Одной из основных задач радиотехники является осуществление *частотной избирательности (селективности)* радиотехнических устройств.

В общем случае в любой приемной антенне возбуждается одновременно множество э. д. с. различных частот, излучаемых передающими станциями, а также источниками промышленных и атмосферных помех.

Радиоприемное устройство должно на фоне всех сигналов выделить один нужный сигнал (рис.48).

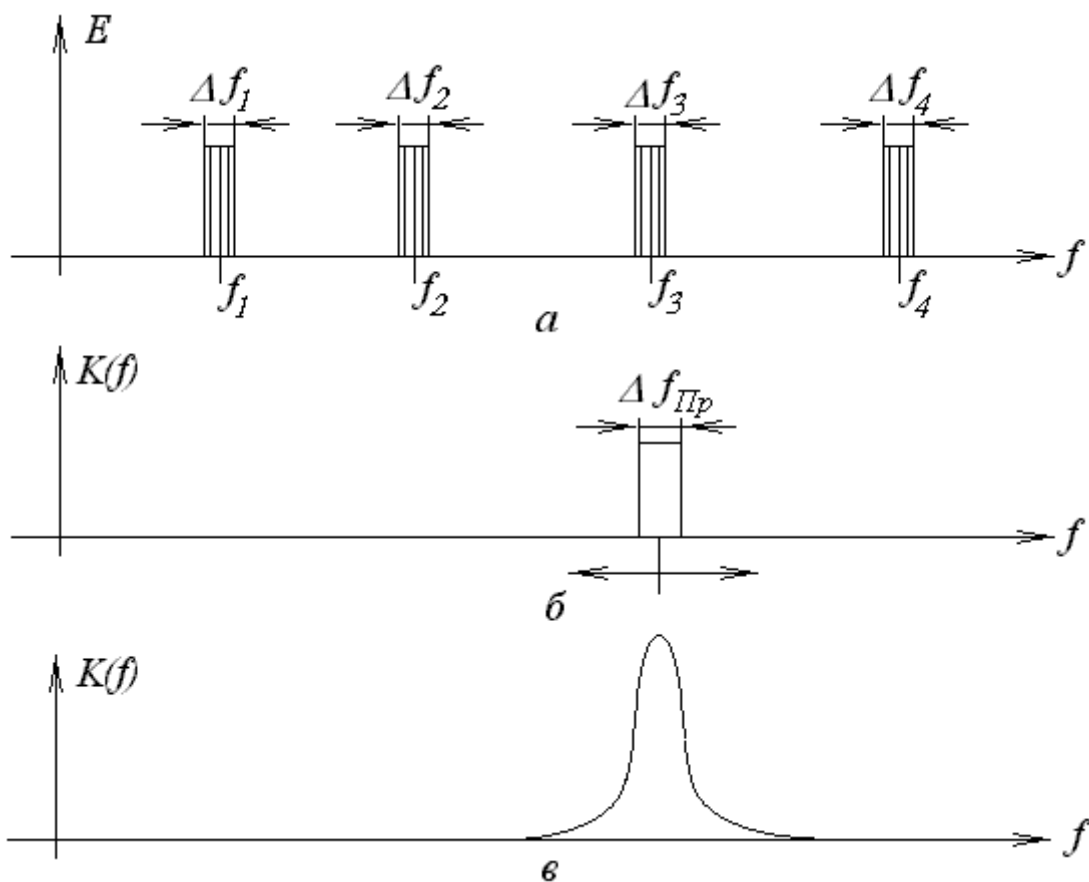


Рис.48

На рис.48, *а* изображена шкала частот, на которой прямоугольниками обозначены области частот с центральными частотами, отведенными для работы каждого источника сигнала. Амплитуды колебаний всех источников будем считать одинаковыми.

Для выделения одного из сигналов приемное устройство должно иметь частотную характеристику вида (рис.48, *б*). Приемное устройство пропускает только частоты, лежащие внутри полосы  $\Delta f_{Пр}$ . Если, например, полоса час-

тот  $\Delta f_{\text{пр}}$  совпадает с  $\Delta f_3$ , приемное устройство выбирает из всех воздействующих на нее колебаний лишь колебания третьего источника. При идеальной характеристике (рис.48, б) воздействие всех остальных источников не вызывает никаких откликов.

Для того, чтобы иметь возможность настраиваться на различные сигналы необходимо передвигать полосу  $\Delta f_{\text{пр}}$  вдоль шкалы частот.

Реализовать цепи, имеющие частотную характеристику прямоугольной формы (рис.48, б), практически не представляется возможным, удастся лишь в известной степени (рис.48, в) приблизиться к подобному виду характеристики, используя для этого *избирательные (резонансные) цепи*.

### Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений

Последовательным колебательным контуром называется цепь, составленная из последовательно соединенных индуктивности, ёмкости и активного сопротивления, характеризующего потери в реактивных элементах (рис.49).

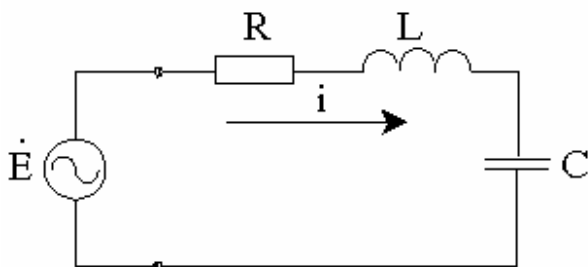


Рис. 49

При воздействии гармонической

э. д. с.  $\dot{E} = \dot{E}_m e^{j\omega t}$

ток в контуре  $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}}$ ,

где

$$\dot{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jX,$$

$$\dot{Z} = |\dot{Z}| e^{j\varphi}, \quad |\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}, \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Активную составляющую входного сопротивления  $R$  можно приближенно считать не зависящей от частоты генератора. Реактивная составляющая

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

является функцией частоты и в зависимости от величины

$L$ ,  $C$ , и  $\omega$  изменяется по величине и знаку (рис.50).

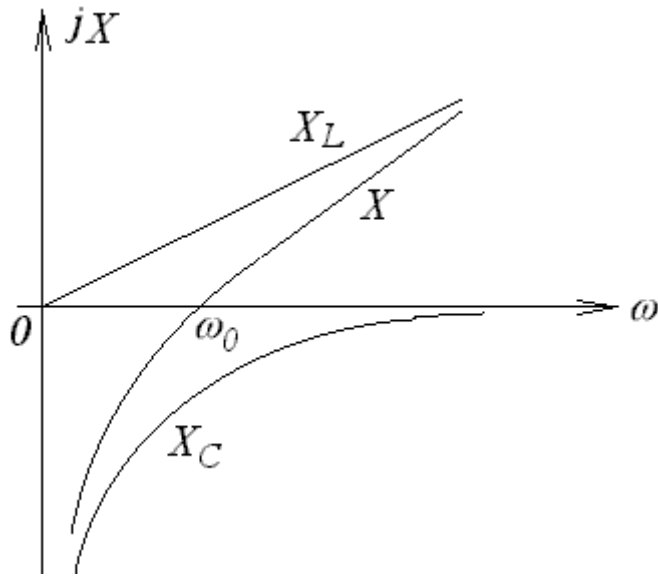


Рис.50

В зависимости от соотношения величин индуктивного и емкостного сопротивлений возможны три случая:

а)  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ,  $X > 0$ , реактивная составляющая имеет индуктивный характер, ток в контуре отстает от входного напряжения (рис.51, а).

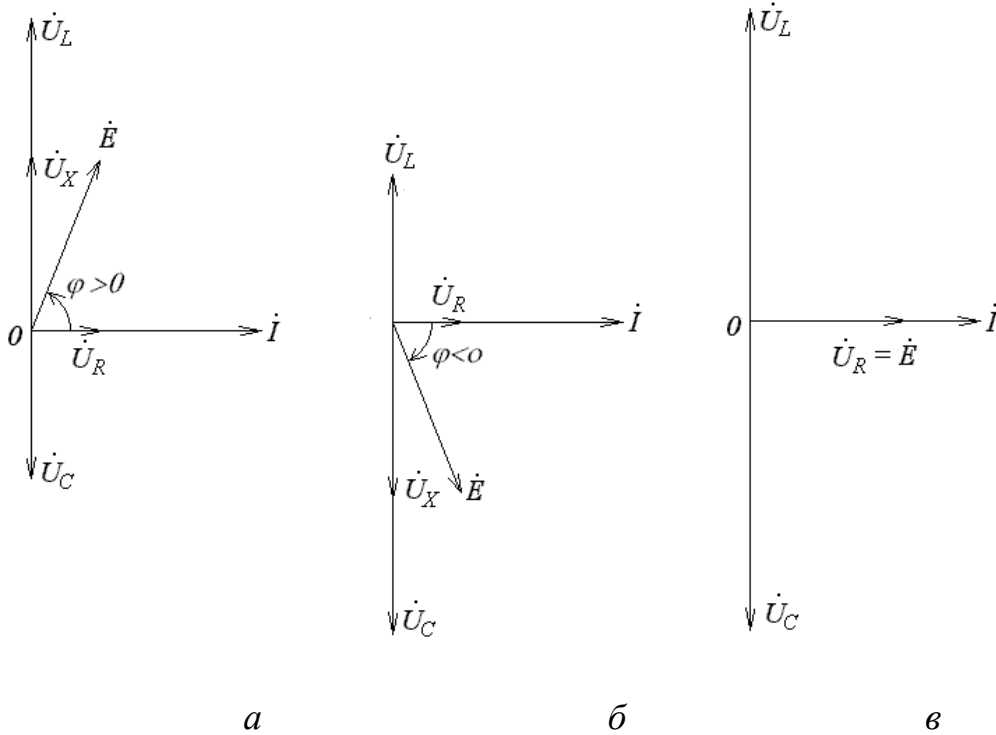


Рис.51

б)  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ ,  $X < 0$ , реактивная составляющая имеет емкостный характер, ток в контуре опережает входное напряжение (рис.51, б).

в)  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ ,  $X = 0$ , напряжение и ток в контуре совпадают по фазе

(рис.51, в), этот режим цепи называется *резонансом напряжений*.

**При заданных  $L$  и  $C$  резонанс наступает на частоте**

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

которая называется *резонансной частотой* колебательного контура.

Входное сопротивление контура в этом случае

$$Z_{BX_p} = Z_p = R, \quad \text{ток в цепи} \quad \dot{I}_p = \frac{\dot{E}}{R}.$$

Напряжения на реактивных элементах

$$U_{L_p} = U_{C_p} = \omega_0 L I_p = \frac{1}{\omega_0 C} I_p, \quad U_{L_p} = \frac{\omega_0 L E}{R}, \quad U_{C_p} = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{E}{R},$$

$$\frac{U_{L_p}}{I_p} = \frac{U_{C_p}}{I_p} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho,$$

где  $\rho$  – *характеристическое* или *волновое* сопротивление контура.

Поскольку  $\rho \gg R$ , то  $U_{L_p} = U_{C_p} \gg E$ , отсюда и происходит название *резонанс напряжений*.

$$\text{Величина} \quad \frac{U_{L_p}}{E} = \frac{U_{C_p}}{E} = \frac{\rho}{R} = Q - \text{добротность контура,}$$



$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho} - \text{затухание.}$$

Энергетические соотношения в колебательном контуре

Пусть колебательный контур работает на резонансной частоте  $\omega = \omega_0$ , тогда  $U_{L_p} = U_{C_p}$ .

Если в контуре протекает ток  $i_p = I_{mP} \cos \omega_0 t$ , то напряжение на конденсаторе отстает от тока на  $\frac{\pi}{2}$  и равно  $U_{C_p} = U_{CmP} \sin \omega_0 t$ .

Мгновенное значение энергии магнитного и электрического полей, связанных с индуктивностью и емкостью контура:

$$W_L = \frac{Li_p^2}{2} = \frac{LI_{mP}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t,$$

$$W_C = \frac{CU_{C_p}^2}{2} = \frac{CU_{CmP}^2}{2} \sin^2 \omega_0 t.$$

Временные диаграммы тока, напряжения на конденсаторе и мгновенных значений  $W_L$  и  $W_C$  приведены на рис.52.

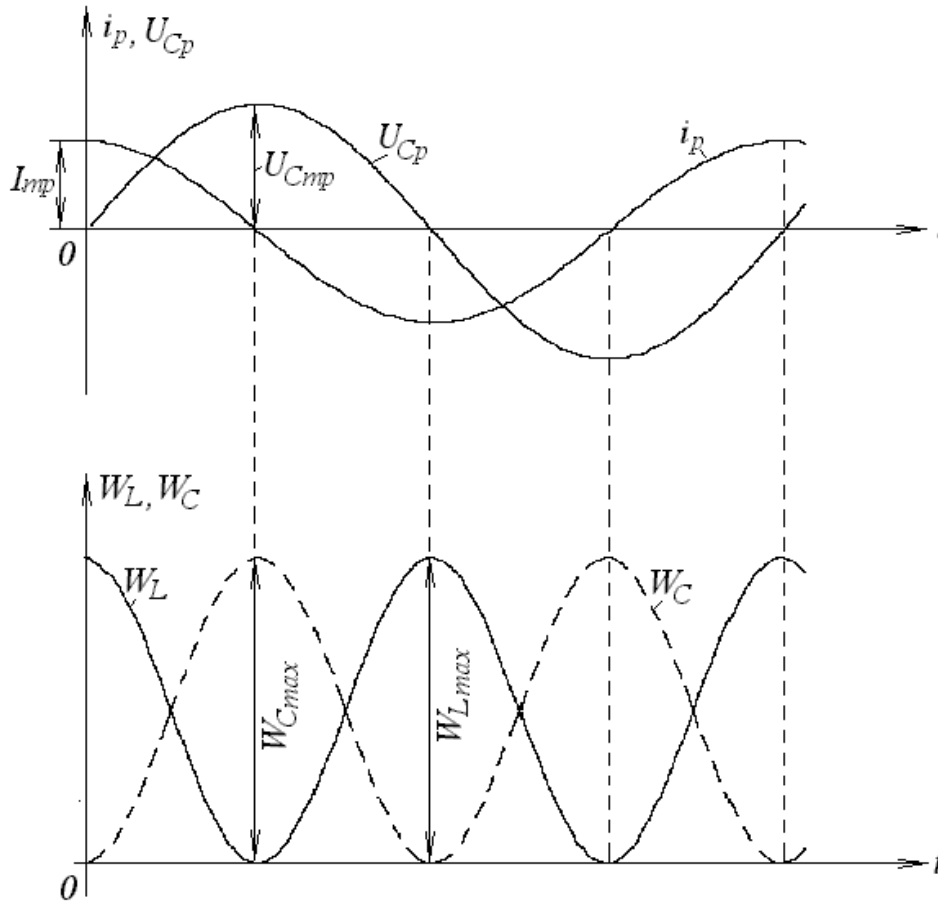


Рис.52

Поскольку

$$\frac{LI_{mP}^2}{2} = \frac{L}{2} \left( \frac{U_{CmP}}{\omega_0 L} \right)^2 = \frac{L}{2} \frac{U_{CmP}^2}{\frac{1}{LC} L^2} = \frac{CU_{CmP}^2}{2},$$

то  $W_{Lmax} = W_{Cmax}$ , т. е. максимально запасаемые в электрическом и магнитном полях количества энергии равны между собой.

Таким образом, при резонансе происходит непрерывное перераспределение энергии магнитного и электрического полей с частотой  $2\omega_0$ , причем суммарная энергия остается неизменной:

$$W_L + W_C = \frac{LI_{mP}^2}{2} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \frac{LI_{mP}^2}{2} = \frac{CU_{CmP}^2}{2}.$$

Энергия, первоначально внесенная в контур при подключении его к источнику, совершает колебания в режиме резонанса между  $L$  и  $C$  без участия в этом процессе источника, поэтому контур называется *колебательным*.

Наряду с периодическим обменом энергии между  $L$  и  $C$  в цепи происходят потери энергии в активном сопротивлении  $R$ .

Так как входное сопротивление контура при резонансе  $Z_{BX_p} = Z_p = R$  активное, то в энергетическом смысле генератор поставляет активную мощность, расходуемую активном сопротивлении  $R$ .

Если бы контур не имел потерь ( $R = 0$ ), то генератор в стационарном режиме оказался бы ненужным, колебания происходили бы в контуре за счет первоначально внесенной энергии.

Выше было введено понятие добротности контура

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \omega_0 \frac{L \cdot \frac{1}{2} I_{mP}^2}{R \cdot \frac{1}{2} I_{mP}^2} = \omega_0 \frac{W_{L \max}}{P_A} = 2\pi \frac{W_{L \max}}{P_A T_0},$$

$$\text{где } T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Таким образом, добротность контура определяется отношением максимальной энергии, запасаемой в реактивных элементах к энергии  $W_{R,T} = P_A T_0$ , расходуемой в сопротивлении  $R$  за период  $T_0$ .

### Частотные характеристики последовательного колебательного контура

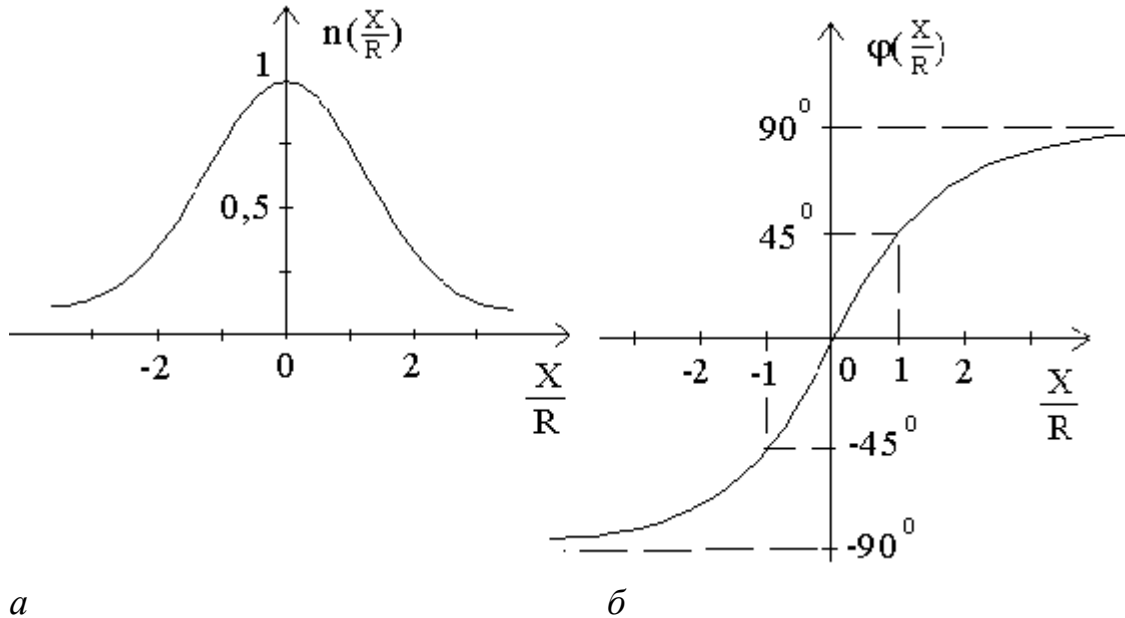
При неизменных  $E$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $R$  зависимость тока от частоты

$$I(\omega) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{E}{R \sqrt{1 + \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}{R^2}}}.$$

Безразмерное отношение

$$n(\omega) = \frac{I(\omega)}{I_P} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{X}{R})^2}}, \quad \text{где } I_P = \frac{E}{R}$$

выражает закон изменения амплитуды тока в контуре при изменении частоты (АЧХ) для всех возможных соотношений между  $X$  и  $R$  и называется *предельной нормированной частотной характеристикой* контура.



**Рис. 53**

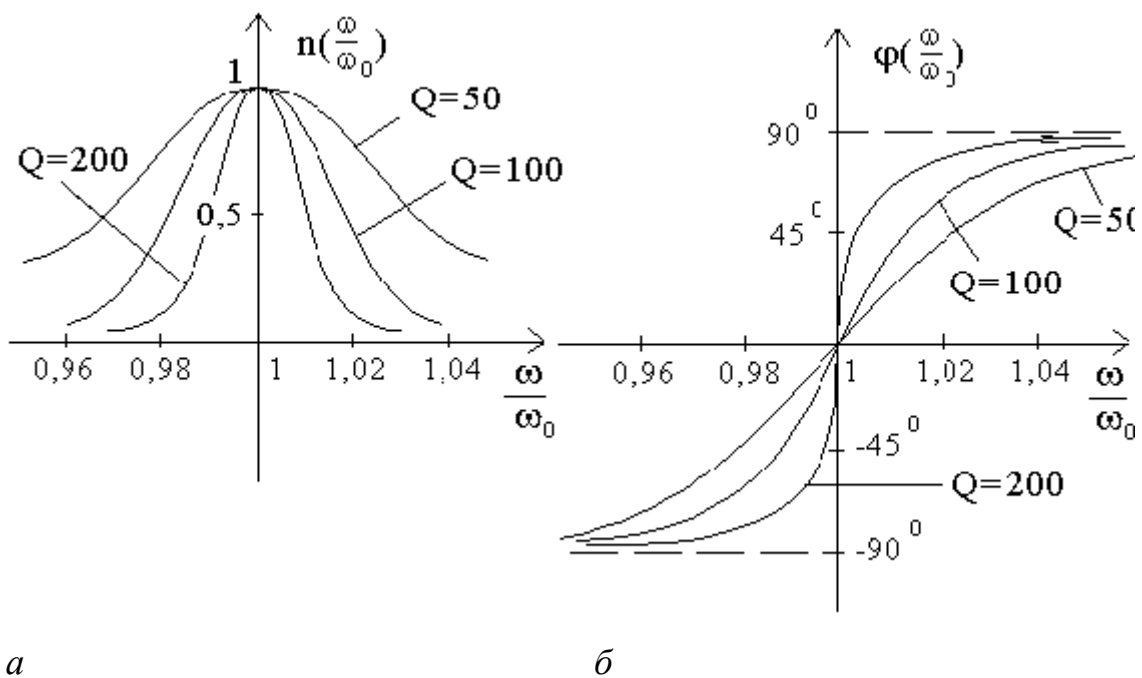
$\varphi(\omega) = \arctg \frac{X}{R}$  – фазочастотная характеристика контура.

Графики функций  $n\left(\frac{X}{R}\right)$  и  $\varphi\left(\frac{X}{R}\right)$  приведены на рис.53.

Часто при построении частотных характеристик пользуются нормированными аргументами, например относительной частотой  $\omega/\omega_0$ . Тогда, для различных соотношений между  $R$  и  $\rho$ , получим два семейства кривых (рис.54):

$$n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}{R^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC}\right)\right]^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}, \quad \varphi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctg\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right].$$



a

б

Рис.54

На рис.55 представлены кривые частотной зависимости напряжения на сопротивлении контура и фазочастотная характеристика при неизменном характеристическом сопротивлении ( $L=20$  мГн,  $C=10$  нФ,  $E=1$  В).

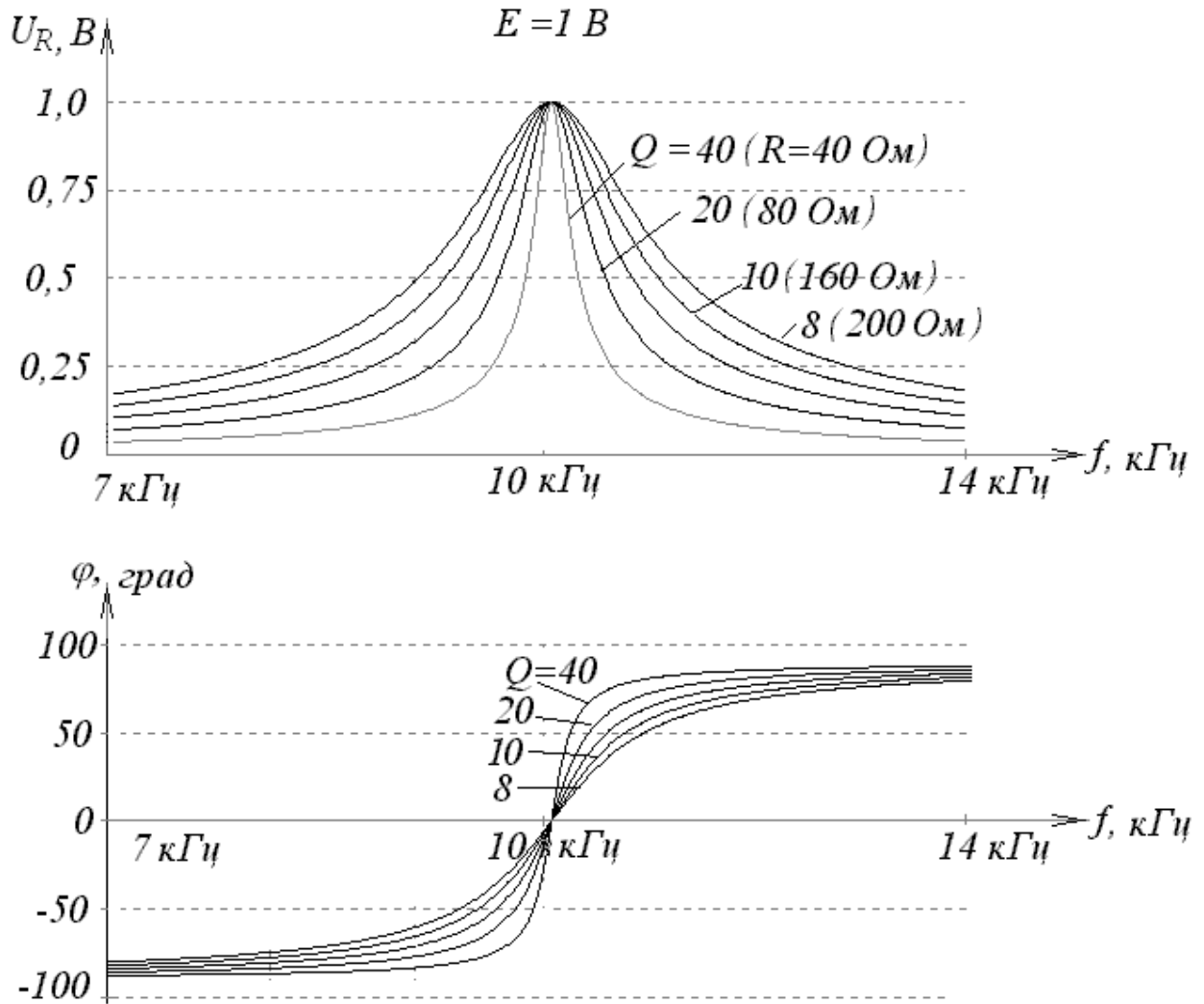


Рис.55

Напряжения на реактивных элементах:

$$U_L(\omega) = \omega L I(\omega) = \omega L n(\omega) I_P = \omega L n(\omega) \frac{E}{R},$$

$$U_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} I(\omega) = \frac{1}{\omega C} n(\omega) I_P = \frac{1}{\omega C} n(\omega) \frac{E}{R}.$$

Графики частотной зависимости напряжений  $U_L$  и  $U_C$  для контура с параметрами  $L = 20 \text{ мГн}$ ,  $C = 10 \text{ нФ}$ ,  $E = 1 \text{ В}$  при различных активных сопротивлениях приведены на рис.56.

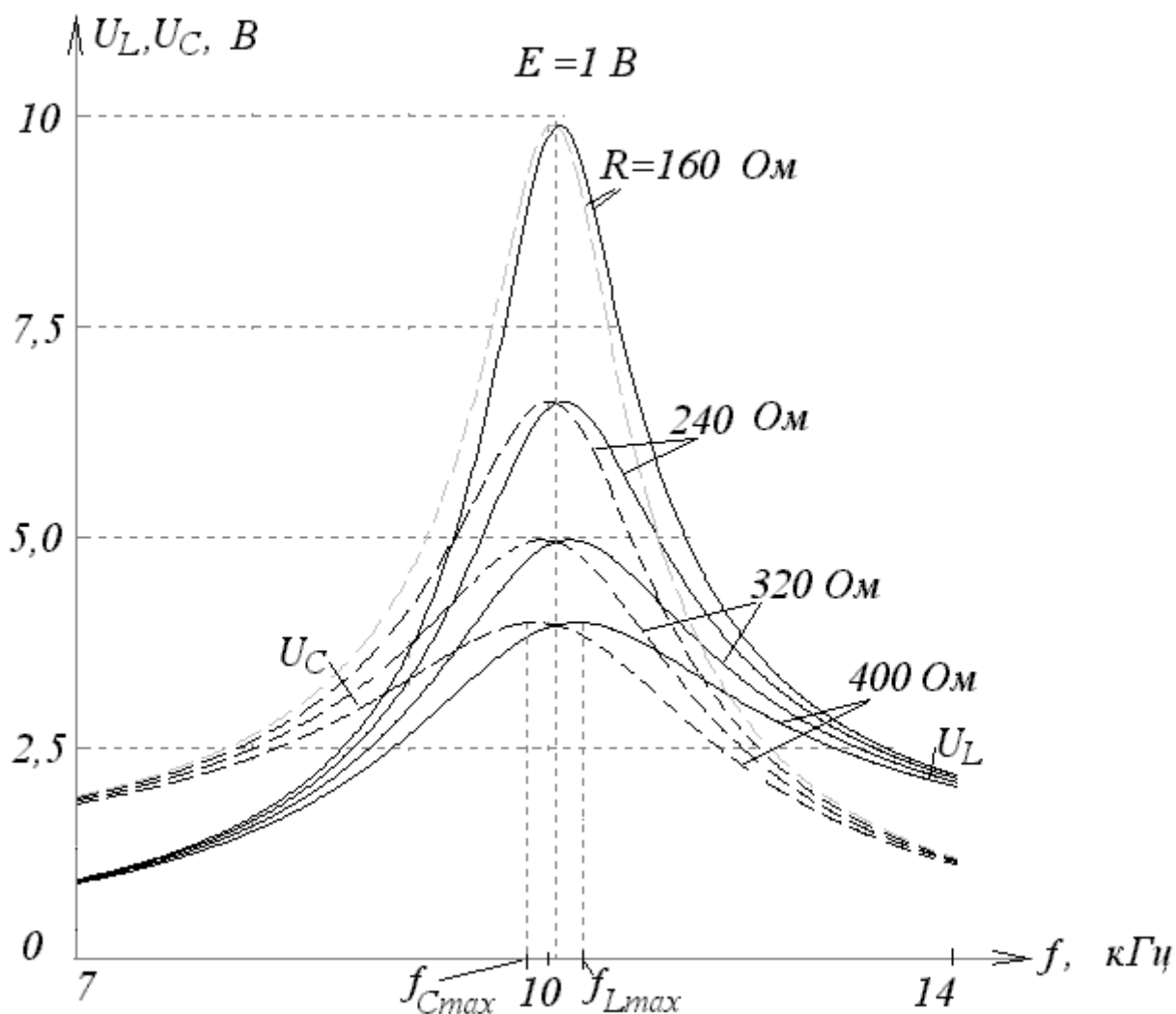


Рис.56

Из приведенных графиков следует, что при малых добротностях (больших сопротивлениях потерь) максимумы напряжений на индуктивности и емкости сдвинуты по отношению к резонансной частоте (частоте, на которой  $U_L = U_C = QE$ ) на некоторую величину, определяемую резонансной частотой и добротностью контура. Исследуя выражения напряжений на индуктивности и емкости на экстремум, получим следующие формулы для частот:

$$f_{C\max} = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{и} \quad f_{L\max} = \frac{f_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

При больших добротностях можно считать, что максимумы напряжений на индуктивности и емкости совпадают с резонансной частотой.

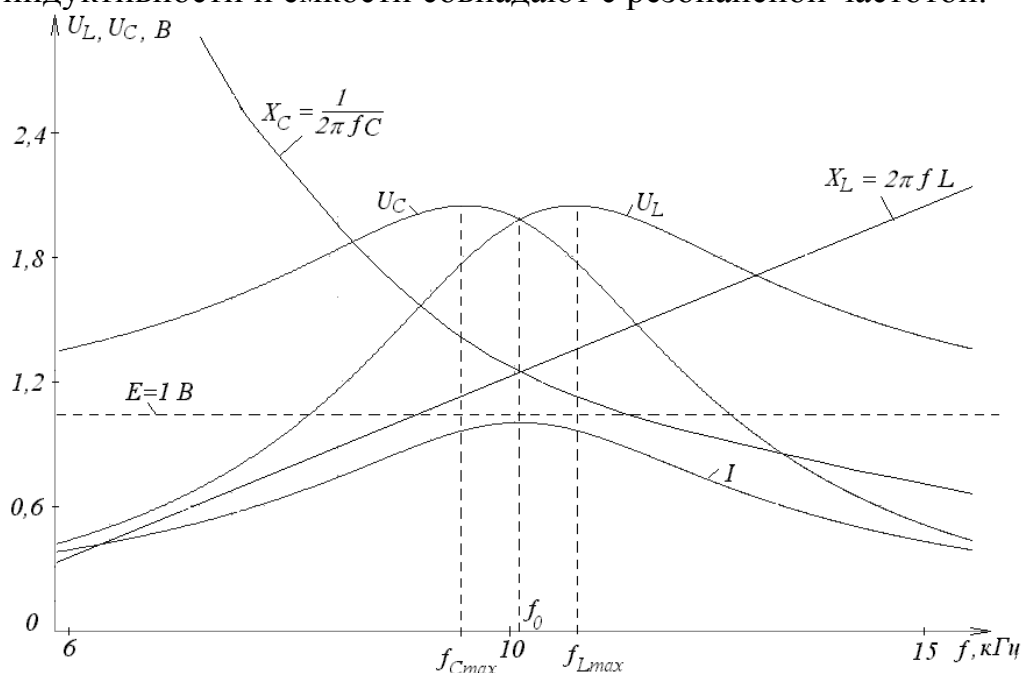


Рис.57

На рис.57 приведены графики зависимости тока, напряжений на индуктивности и емкости, а также индуктивного и емкостного сопротивлений от частоты для контура с параметрами  $L=20 \text{ мГн}$ ,  $C=10 \text{ нФ}$ ,  $R=800 \text{ Ом}$ .

Из графиков следует, что при отходе от резонансной частоты влево ток вблизи резонанса изменяется медленно, а сопротивление емкости растет значительно быстрее, следовательно, напряжение на емкости, равное произведению тока на сопротивление становится больше чем  $U_{C_p} = QE$ .

При дальнейшем уменьшении частоты ток уменьшается быстрее, чем увеличивается сопротивление конденсатора, и напряжение на емкости начинает уменьшаться, стремясь к напряжению источника э. д. с.

При отходе от резонансной частоты вправо сопротивление индуктивности растет быстрее, чем уменьшается ток, и напряжение на индуктивности сначала увеличивается, становясь больше  $U_{L_p} = QE$ , а затем уменьшается до величины напряжения источника э. д. с.

Очевидно, что чем меньше добротность контура, тем дальше отстоят максимумы напряжений на  $L$  и  $C$  от резонансной частоты.

В радиотехнике часто приходится иметь дело с малыми расстройками сигнала от резонансной частоты контура  $\omega_0$ . Тогда

$$Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{X}{R} = \xi,$$



где  $\xi$  – обобщенная расстройка.

Действительно,

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega\omega_0} = \frac{(\omega + \omega_0)\Delta\omega}{\omega\omega_0} \approx 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0},$$

$\Delta\omega = \omega - \omega_0$  – абсолютная расстройка, при  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$  ( $\omega \approx \omega_0$ )

$$\xi = Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \quad \text{и} \quad n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \varphi(\xi) = \arctg \xi.$$

Графики этих функций с большой точностью совпадают с графиками  $n\left(\frac{X}{R}\right)$  и  $\varphi\left(\frac{X}{R}\right)$  в полосе частот около резонансной частоты.

Входные частотные характеристики последовательного контура

Комплексное входное сопротивление контура

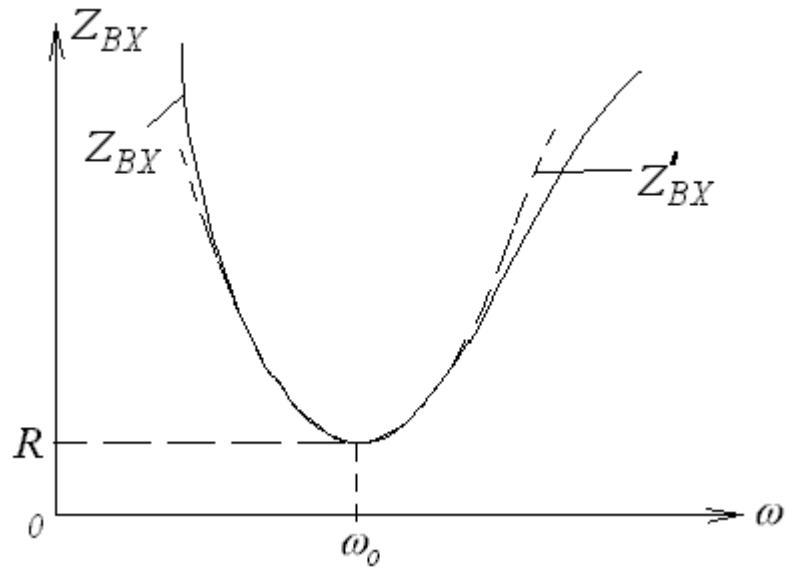
$$\begin{aligned} \dot{Z}_{BX} &= R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R \left[ 1 + j \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = \\ &= R[1 + j\xi]. \end{aligned}$$

Зависимость модуля комплексного входного сопротивления от частоты называется *входной амплитудно-частотной характеристикой*, а зависимость фазы от частоты – *входной фазочастотной характеристикой* контура.

Входная АЧХ  $Z_{BX} = R\sqrt{1 + \xi^2}$  (рис.58).

Входная ФЧХ  $\varphi = \arctg \xi$ . В области малых расстроек

$$Z'_{BX} \approx R \sqrt{1 + \left( 2Q \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \right)^2}.$$



**Рис.58**

Полоса пропускания последовательного контура

Полосой пропускания контура называют интервал частот, на границах которого амплитуда тока снижается до уровня  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  от резонансного значения (рис.59).

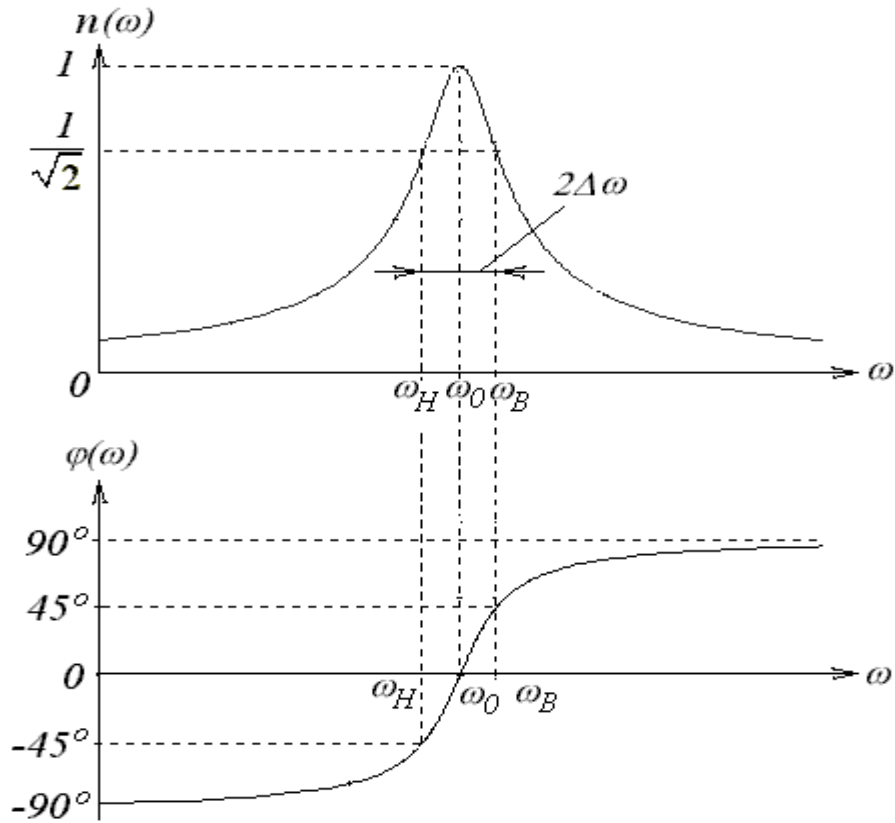


Рис.59

$$n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \xi = \pm 1, \quad \text{откуда}$$

$$Q \left( \frac{\omega_B - \omega_0}{\omega_0 - \omega_B} \right) = 1, \quad Q \left( \frac{\omega_H - \omega_0}{\omega_0 - \omega_H} \right) = -1,$$

$$\omega_B = \omega_0 \left( \frac{d}{2} + \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} \right), \quad \omega_H = \omega_0 \left( -\frac{d}{2} + \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} \right),$$

$$\text{где } d = \frac{1}{Q}, \quad 2\Delta\omega = \omega_B - \omega_H = \omega_0 d = \frac{\omega_0}{Q}.$$

На границах полосы пропускания  $\xi = \pm 1$  и  $\varphi(\pm 1) = \pm 45^\circ$ , т.е. в пределах полосы пропускания ФЧХ изменяется от  $-45^\circ$  на  $\omega = \omega_H$  до  $+45^\circ$  на  $\omega = \omega_B$ .

### Передаточные функции последовательного контура

Комплексная передаточная функция по напряжению при выходном напряжении на ёмкости (рис.60, а)

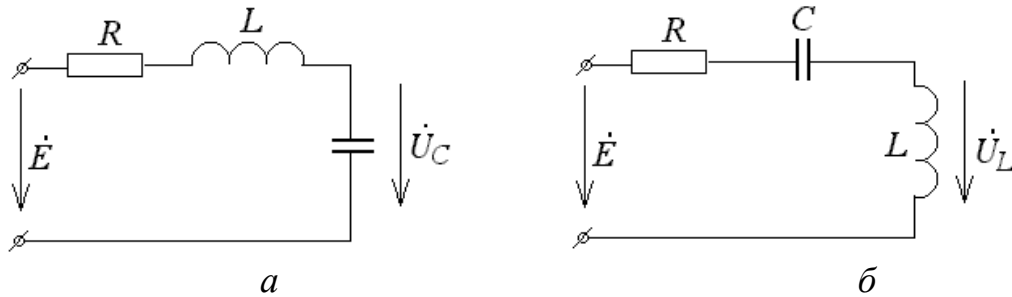


Рис.60

$$\dot{K}_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{E}} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}} \cdot \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{\dot{E}} = \frac{1}{j\omega CR \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} = \frac{-jQ \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + j\xi}.$$

Передаточная АЧХ  $K_C = \frac{Q \frac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1 + \xi^2}} = n \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) Q \frac{\omega_0}{\omega}.$

Передаточная ФЧХ  $\varphi_C = -\frac{\pi}{2} - \arctg \xi.$

Аналогично, комплексная передаточная функция по напряжению при выходном напряжении на индуктивности (рис.60, б)

$$\dot{K}_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{E}} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}} \cdot j\omega L \cdot \frac{1}{\dot{E}} = \frac{j\omega L}{R \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\xi},$$

$$\text{АЧХ} \quad K_L = \frac{Q \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \xi^2}} = n \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \cdot Q \frac{\omega}{\omega_0},$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi_L = \frac{\pi}{2} - \arctg \xi.$$

$$\text{При резонансе} \quad \dot{K}_{C_P} = Q e^{-j \frac{\pi}{2}}, \quad K_{C_P} = Q, \quad \varphi_C = -\frac{\pi}{2},$$

$$\dot{K}_{L_P} = Q e^{j \frac{\pi}{2}}, \quad K_{L_P} = Q, \quad \varphi_L = \frac{\pi}{2}.$$

Графики передаточных АЧХ и ФЧХ приведены на рис.61.

Из последних соотношений следует, что максимумы  $K_C$  и  $K_L$  не совпадают с резонансной частотой, а сдвинуты по оси частот.

$K_{C_{max}}$  получается на частоте

$$\omega_{C_{max}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}},$$

$K_{L_{max}}$  — получается на частоте

$$\omega_{L_{max}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

$$\text{При } Q \gg 1 \quad \frac{1}{2Q^2} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad K_{L_{max}} = K_{C_{max}} = Q.$$

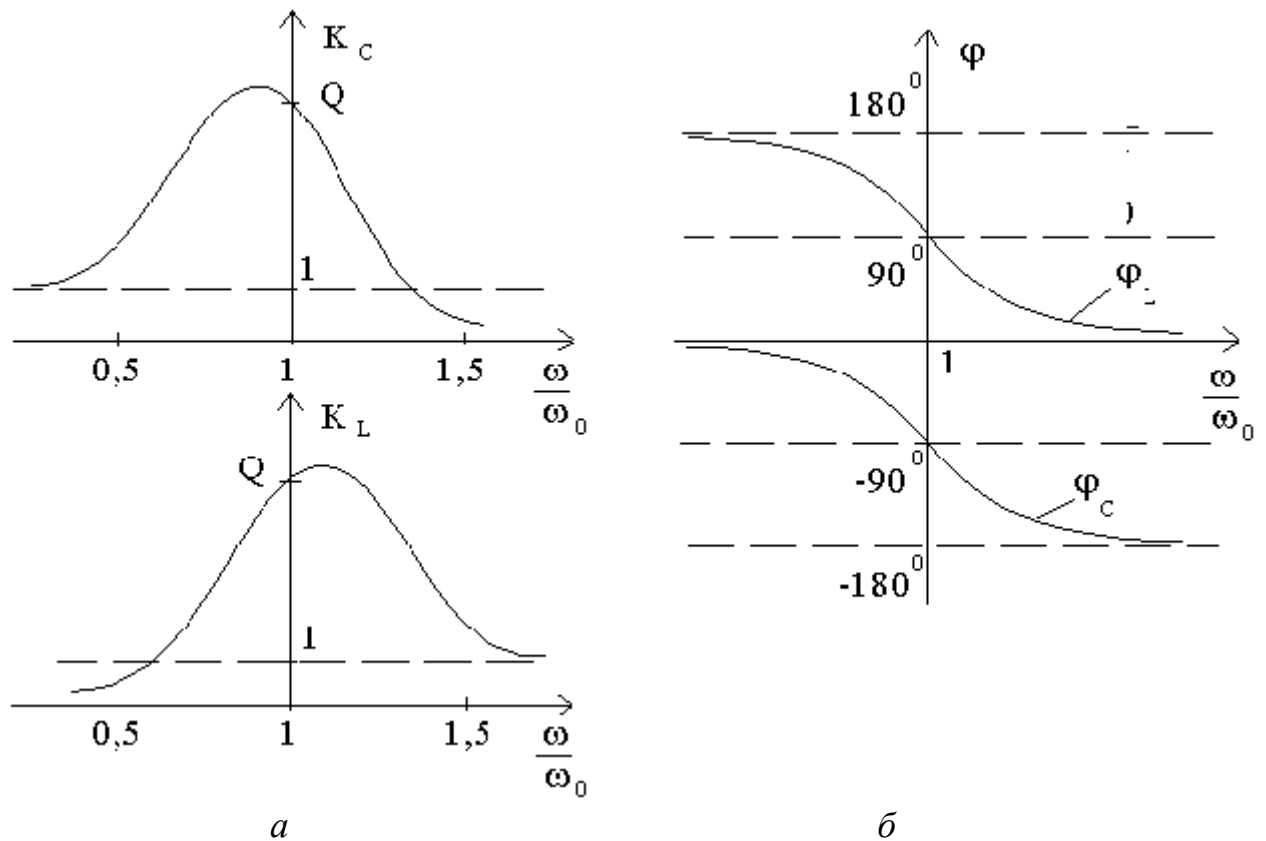


Рис. 61

### Влияние сопротивления генератора и нагрузки на избирательность *последовательного колебательного контура*

Избирательность—способность контура разделять колебания близких частот определяется крутизной резонансной кривой контура.

При подключении контура к реальному источнику э. д. с. (рис.62) эквивалентная добротность

$$Q_{\Sigma} = \frac{\rho}{R + R_i} < Q = \frac{\rho}{R},$$

следовательно, увеличение внутреннего сопротивления генератора ведет к расширению полосы пропускания контура (рис.63).

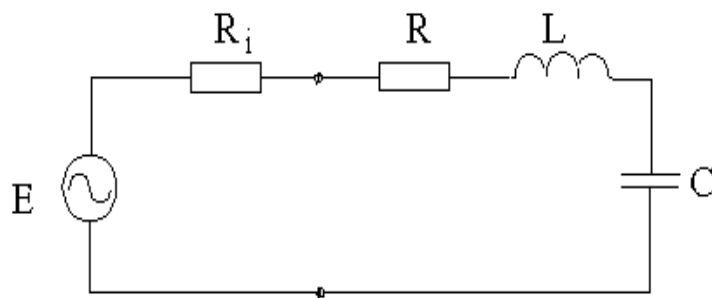


Рис. 62

Если к выходным зажимам контура подключить резистор  $R_H$ , то в этом резисторе будет рассеиваться энергия, вследствие чего добротность цепи окажется меньше добротности ненагруженного контура.

Для определения  $Q_H$  нагруженного контура заменим параллельное соединение  $R_H$  и  $C$  эквивалентным последовательным на частоте  $\omega = \omega_0$  (рис.64).

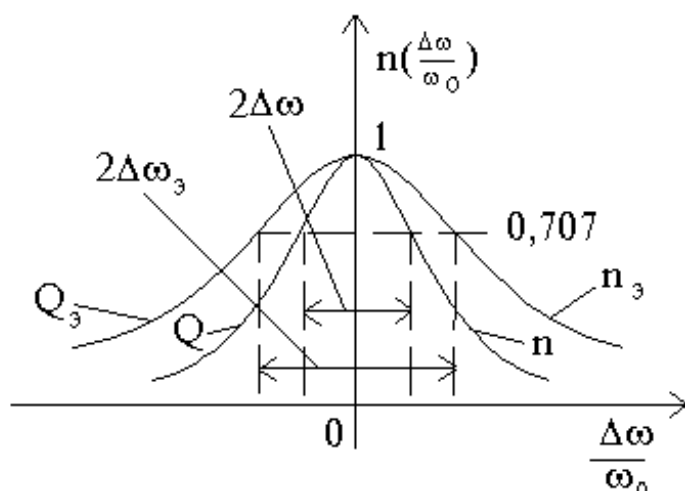
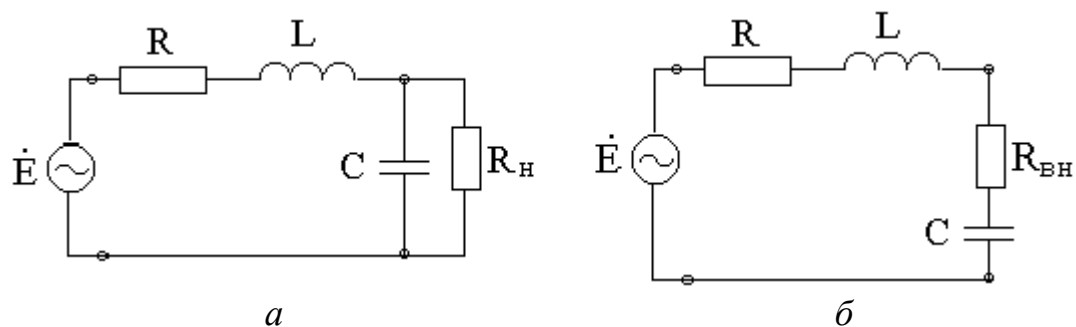


Рис. 63



**Рис. 64**

Условие эквивалентности цепей (рис.64, а, б).

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{R_H C \parallel} = \dot{Z}_{R_{BH} C} &= \frac{R_H \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_H + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_H}{1 + j\omega_0 R_H C} = \\ &= \frac{R_H}{1 + (\omega_0 R_H C)^2} - j \frac{R_H^2 \omega_0 C}{1 + (\omega_0 R_H C)^2}, \quad \frac{1}{\omega_0 C} = \rho \quad \text{при} \quad \rho \gg R_H \\ Z_{R_H C \parallel} &= \frac{R_H}{\left(\frac{R_i}{\rho}\right)^2} - j \frac{\frac{R_H^2}{\rho^2}}{\frac{R_H^2}{\rho^2}} = \frac{\rho^2}{R_H} - j\rho = R_{BH} - j\frac{1}{\omega_0 C}, \quad R_{BH} = \frac{\rho^2}{R_H}. \end{aligned}$$

Добротность нагруженного контура

$$Q_H = \frac{\rho}{R + R_{BH}} = \frac{\rho}{R + \frac{\rho^2}{R_H}} < Q,$$

а полоса пропускания нагруженного контура становится шире полосы ненагруженного контура и его избирательность ухудшается.

Лекция 9.

**Параллельный колебательный контур**

Параллельным колебательным контуром называется цепь (рис.65), составленная из катушки индуктивности и конденсатора, подключенных параллельно выходным зажимам источника.



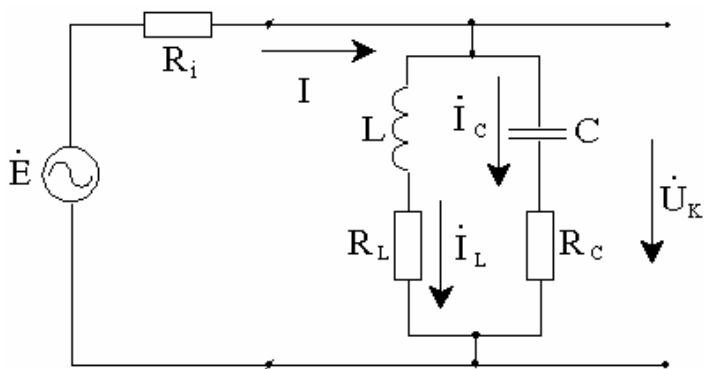


Рис. 65

Если на входных зажимах действует источник с  $R_i = 0$ , то

$\dot{E} = \dot{U}_K$  и согласно первому закону Кирхгофа

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C,$$

где 
$$\dot{I}_L = \frac{\dot{E}}{R_L + j\omega L},$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}}{R_C - \frac{1}{j\omega C}}.$$

На практике контуры составлены из индуктивностей и конденсаторов имеющих большие добротности, т. е.  $R_L \ll \omega L$  и  $R_C \ll \frac{1}{\omega C}$ .

В зависимости от соотношения  $X_L = \omega L$  и  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  можно наблюдать три режима работы контура.

При  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$  ток в индуктивной ветви

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{E}}{R_L + j\omega L} \approx \frac{\dot{E}}{j\omega L}.$$

Этот ток отстает от напряжения на контуре на угол

$$\varphi_L = \arctg\left(\frac{\omega L}{R_L}\right) \approx \frac{\pi}{2},$$

поскольку  $R_L \ll \omega L$ .

**Ток в емкостной ветви**

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}}{R_C - \frac{1}{j\omega C}} \approx j\omega C \dot{E}.$$

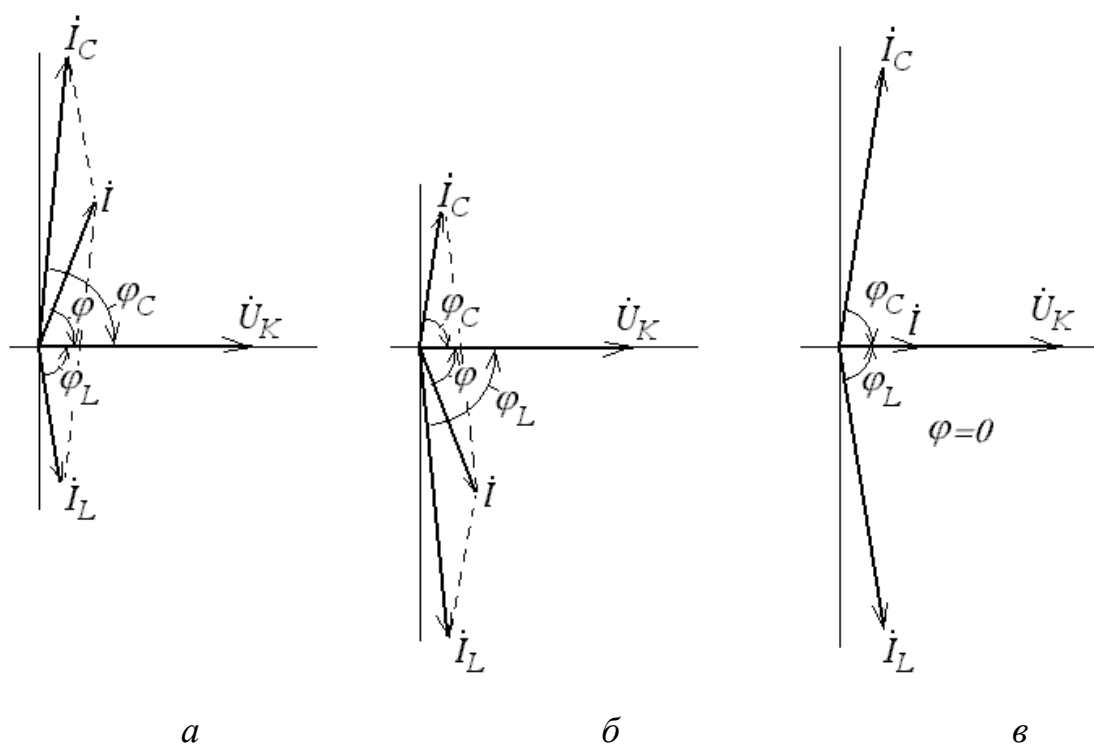
Ток  $\dot{I}_C$  опережает напряжение на контуре на угол

$$\varphi_C = \arctg\left(\frac{1}{R_C \omega C}\right) \approx -\frac{\pi}{2},$$

поскольку  $R_C \ll \frac{1}{\omega C}$ .

Очевидно, что ток  $I_C > I_L$ . Ток  $\dot{I}$  в неразветвленной части цепи опережает напряжение на контуре на угол  $\varphi$ , т. е. реактивная составляющая входного сопротивления имеет *емкостный* характер.

Векторная диаграмма токов и напряжения на контуре для этого режима приведена на рис.66, а.



**Рис.66**

При  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ ,  $I_C < I_L$ . Ток  $\dot{I}$  в неразветвленной части цепи (рис.66, б) отстает от напряжения на контуре на угол  $\varphi$ , т. е. реактивная составляющая входного сопротивления имеет *индуктивный* характер.

При  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ ,  $I_C \approx I_L$ . Ток  $\dot{I}$  в неразветвленной части цепи

(рис.66, в) совпадает по фазе с напряжением на контуре, т. е. реактивная составляющая входного сопротивления равна нулю. Режим цепи, при котором реактивная составляющая входной проводимости равна нулю, называется *резонансом токов*.

Резонансная частота с учетом  $R_L$  и  $R_C$  находится из условия равенства нулю реактивной составляющей входной проводимости

$$\dot{Y}_{BX} = \frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{R_C + 1/j\omega C} = g - jb,$$

где 
$$b = \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} - \frac{1/\omega C}{R_C^2 + (1/\omega C)^2}.$$

$b = 0$  при  $\omega'_0$ , определяемой из условия

$$\omega'_0 L \cdot [R_C^2 + (1/\omega'_0 C)^2] - 1/\omega'_0 C \cdot [R_L^2 + (\omega'_0 L)^2] = 0,$$

откуда

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{(L/C) - R_L^2}{(L/C) - R_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_L^2}{\rho^2 - R_C^2}}.$$

При равенстве активных сопротивлений ветвей  $R_L = R_C$  или при  $R_L \ll \rho$ ,  $R_C \ll \rho$ , что выполняется практически во всем интересующем

нас диапазоне частот,  $\omega'_0 \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , т.е. условия резонанса токов сов-

падают с условиями резонанса напряжений в последовательном контуре, составленном из тех же элементов  $L$  и  $C$ .

**На резонансной частоте**

$$I_{L_p} \approx I_{C_p} \approx \frac{U_K}{\rho} = I_K.$$

В случае идеального контура ( $R_L = R_C = 0$ ) токи  $I_{L_p} = I_{C_p}$  в ветвях равны по величине и противоположны по фазе, следовательно, ток в неразветвленной цепи равен нулю. Контур не потребляет энергию от генератора и происходит периодическое колебание энергии между электрическим и магнитным полями конденсатора и индуктивности за счет первоначально внесенной энергии при подключении генератора.

### Входные частотные характеристики параллельного колебательного контура

Комплексное входное сопротивление контура

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{(R_L + j\omega L)(R_C + 1/j\omega C)}{R_L + R_C + j(\omega L - 1/\omega C)},$$

при  $R_L \ll \omega L$  и  $R_C \ll \frac{1}{\omega C}$ ,

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{L/C}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\rho^2}{\dot{Z}_{BX.ПОСЛ}} = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)},$$

$\dot{Z}_{BX.ПОСЛ} = R_L + R_C + j(\omega L - 1/\omega C)$  – входное сопротивление последовательного контура, составленного из тех же элементов.

На резонансной частоте

$$Z_{BXp} = R_{\mathcal{O}} = \frac{\rho^2}{R} = Q \cdot \rho,$$

при  $Q = 100-200$  и  $\rho = 100-1000 \text{ Ом}$ ,  $Z_{BXp} = R_{\mathcal{O}} = 10 - 200 \text{ кОм}$ .

Разделив вещественную и мнимую часть комплексного входного сопротивления, получим:

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{R_{\mathcal{O}}}{1 + j\xi} = \frac{R_{\mathcal{O}}}{1 + \xi^2} - j \frac{R_{\mathcal{O}}\xi}{1 + \xi^2} = R_{BX} - jX_{BX}.$$

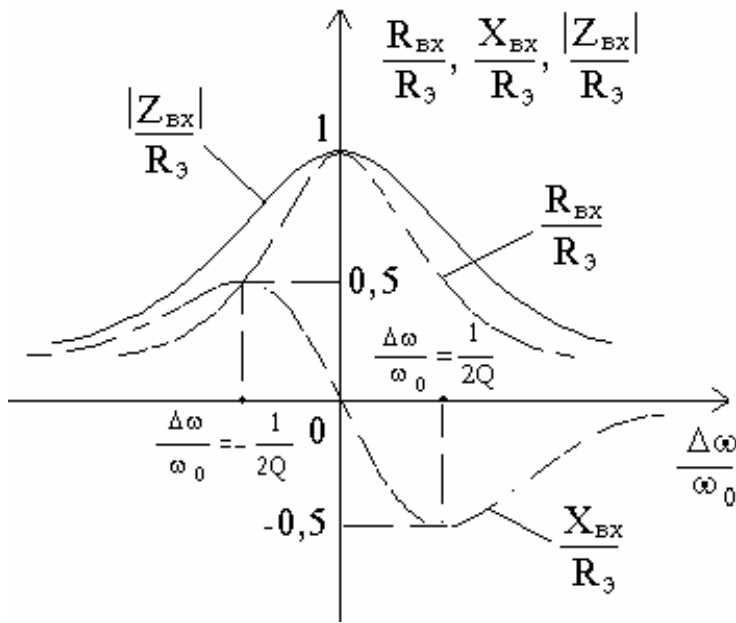


Рис. 67

Модуль входного сопротивления

$$|Z_{BX}| = \frac{R_3}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$\frac{|Z_{BX}|}{R_3} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = n(\xi)$$

имеет такой же вид, как и резонансная кривая последовательного контура; ФЧХ представляет собой зеркальное отображение ФЧХ последовательного контура.

Графики частотных зависимостей  $|Z_{BX}|/R_3$ ,  $R_{BX}/R_3$ ,  $X_{BX}/R_3$  представлены на рис.67.

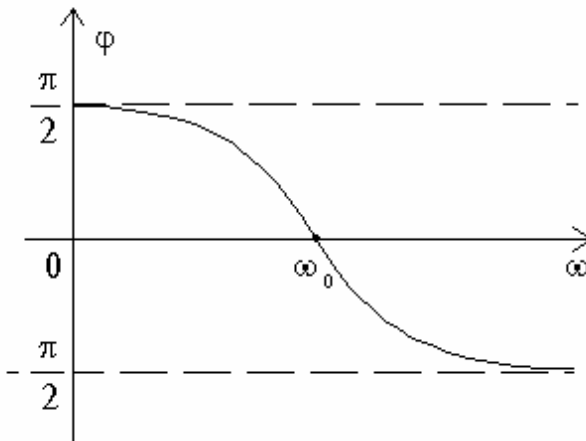


Рис.68

$X_{BX}$  имеет максимум при

$$\frac{dX_{BX}}{d\xi} = \frac{R_3 \cdot (1 + \xi^2) - \xi R_3 \cdot 2\xi}{(1 + \xi^2)^2} = 0,$$

откуда  $1 + \xi^2 - 2 \cdot \xi^2 = 0$ ,

$$\xi = \pm 1 \text{ или } \xi = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm 1 \text{ и } \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_m = \pm \frac{1}{2Q}.$$

ФЧХ  $\varphi = \text{arctg}(-\xi)$  приведена на рис. 68.

При питании контура от источника тока (источника с бесконечным внутренним сопротивлением) напряжение на контуре

$$\dot{U}_K = \dot{I} \dot{Z}_{BX} = \frac{\dot{I} R_{\mathcal{E}}}{1 + j\xi}, \quad \dot{U}_{K \max} = \dot{I} R_{\mathcal{E}},$$

$$\frac{U_K}{U_{K \max}} = \frac{|\dot{Z}_{BX}|}{R_{\mathcal{E}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = n(\xi),$$

т. е. график функции  $\frac{U_K}{U_{K \max}} = n(\xi)$  имеет вид предельной резонансной кривой, зависящей от соотношений  $\rho$  и  $R$ , как в последовательном колебательном контуре.

## Передаточные функции параллельного колебательного контура

Комплексные передаточные функции контура по току

$$\dot{K}_{IL} = \frac{\dot{I}_L}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_K / j\omega L}{\dot{U}_K / \dot{Z}_{BX}} = \frac{\dot{Z}_{BX}}{j\omega L} \quad (\text{при } R_L \ll \omega L).$$

$$\text{АЧХ } |K_{IL}| = \frac{|\dot{Z}_{BX}|}{\omega L} \cdot \frac{\omega_0 R_{\mathcal{E}}}{\omega_0 R_{\mathcal{E}}} = n(\omega) \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\rho^2}{\rho \cdot R} = Qn(\omega) \cdot \frac{\omega_0}{\omega},$$

что аналогично АЧХ последовательного контура при выходном напряжении на емкости.

$$\dot{K}_{IC} = \frac{\dot{I}_C}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_K / (-jX_C)}{\dot{U}_K / \dot{Z}_{BX}} = -\frac{\dot{Z}_{BX}}{jX_C} \quad (\text{при } R_C \ll 1/\omega C).$$

$$\text{АЧХ } |K_{IC}| = Q \cdot n(\omega) \cdot \frac{\omega}{\omega_0},$$

что совпадает с выражением для передаточной функции по напряжению последовательного контура, когда напряжение снимается с индуктивности.

При  $\omega = \omega_0$   $n(\omega_0) = 1$ ,  $I_{Lp} = I_{Cp} = I_{Kp}$ ,  $|K_{IL}| = |K_{IC}| = \frac{I_{Kp}}{I} = Q$ ,

т.е. ток в контуре в  $Q$  раз больше тока в неразветвленной части цепи, поэтому явление резонанса называется *резонансом токов*.

### Частотная зависимость токов в ветвях параллельного контура

Выше было показано, что токи в ветвях параллельного контура определяются

$$\dot{I}_L \approx \frac{\dot{E}}{j\omega L}, \quad \dot{I}_C \approx j\omega C \dot{E}.$$

При малых добротностях ( $Q = 1-3$ ) максимумы токов в ветвях сдвинуты по отношению к резонансной частоте на величину тем большую, чем меньше добротность контура (рис.69).

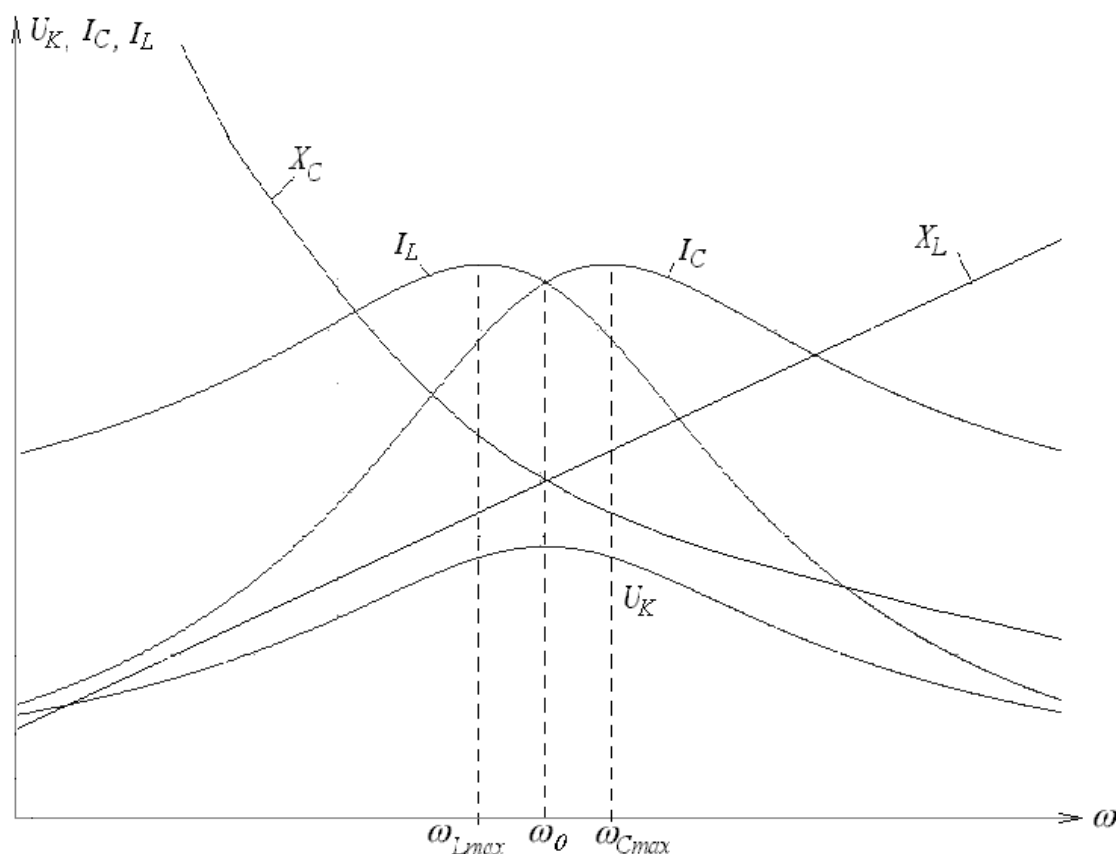


Рис.69

Действительно, при отходе от резонансной частоты влево напряжение на контуре вначале изменяется медленно, а индуктивное сопротивление падает достаточно быстро, следовательно, ток в индуктивной ветви, равный отно-

шению напряжения на контуре к сопротивлению индуктивности, увеличивается.

Аналогично, при отходе от резонансной частоты вправо напряжение на контуре вначале изменяется медленно, а емкостное сопротивление падает достаточно быстро, следовательно, ток в емкостной ветви, равный отношению напряжения на контуре к сопротивлению конденсатора, также увеличивается.

При достаточно большой расстройке напряжение на контуре уменьшается быстрее, чем убывают сопротивления индуктивности и емкости, и токи в ветвях уменьшаются, стремясь к величине тока, потребляемого от генератора.

### ***Влияние внутреннего сопротивления генератора и нагрузки на избирательность параллельного контура***

Сопротивление нагрузки  $R_H$ , включенное параллельно контуру, вызывает дополнительные потери, уменьшает добротность и увеличивает полосу пропускания контура

$$Q_H = \frac{\rho}{R + R_{BH}} = \frac{\rho}{R + \frac{\rho^2}{R_H}} = \frac{Q}{1 + \frac{R_{\Sigma}}{R_H}} < Q,$$

где  $R_{BH} = \frac{\rho^2}{R_H}$  – внесенное сопротивление, сопротивление нагрузки, пересчитанное в последовательное сопротивление в контуре.

Таким же образом оказывает влияние на избирательность контура внутреннее сопротивление источника сигнала. Заменяв в схеме (рис.65) источник э. д. с. эквивалентным источником тока, получим цепь, в которой параллельно контуру подключено внутреннее сопротивление  $R_i$ , оказывающее такое же влияние, как и сопротивление нагрузки. Эквивалентная добротность контура

$$Q_{\Sigma} = \frac{\rho}{R + \frac{\rho^2}{R_i}} = \frac{Q}{1 + \frac{R_{\Sigma}}{R_i}} < Q.$$



С уменьшением внутреннего сопротивления генератора эквивалентная добротность уменьшается, а полоса пропускания увеличивается.

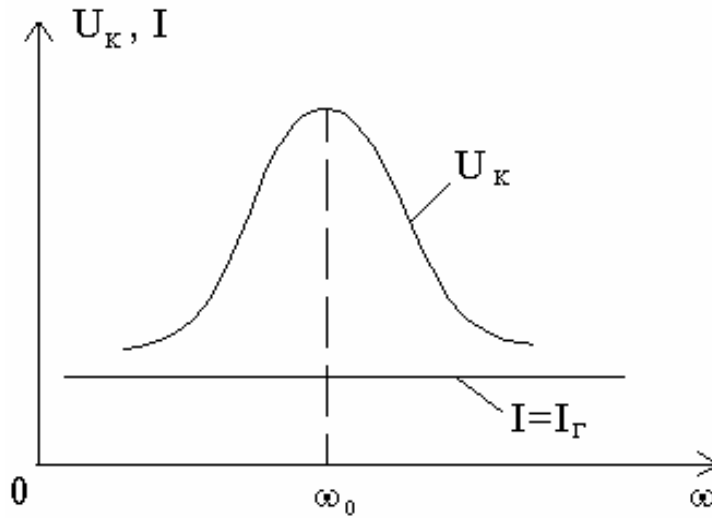


Рис.70

Если контур питается от идеального источника тока

$$(R_i = \infty), \quad \text{то} \quad Q_{\Sigma} = Q$$

и характер частотных зависимостей напряжения на контуре и тока в неразветвленной части цепи показан на рис.70.

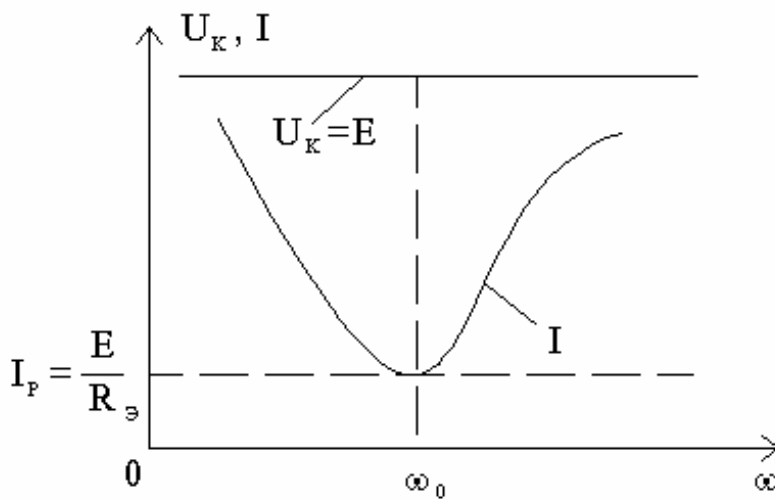
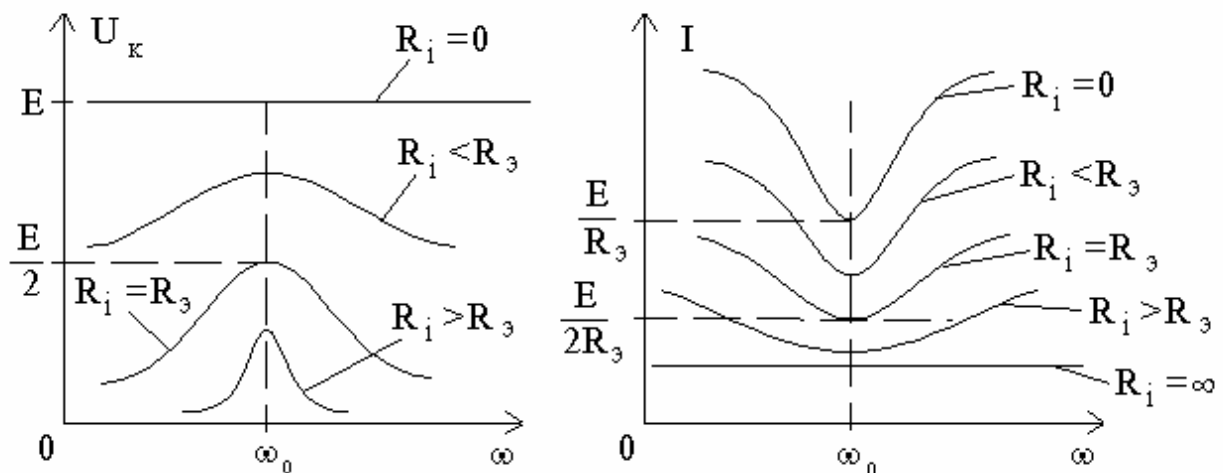


Рис.71

При питании контура от идеального источника ЭДС ( $R_i = 0$ ) напряжение на контуре не зависит от частоты, а ток имеет минимум на резонансной частоте

$$I_P = \frac{E}{R_{\Sigma}} \quad (\text{рис.71}).$$



**Рис.72**

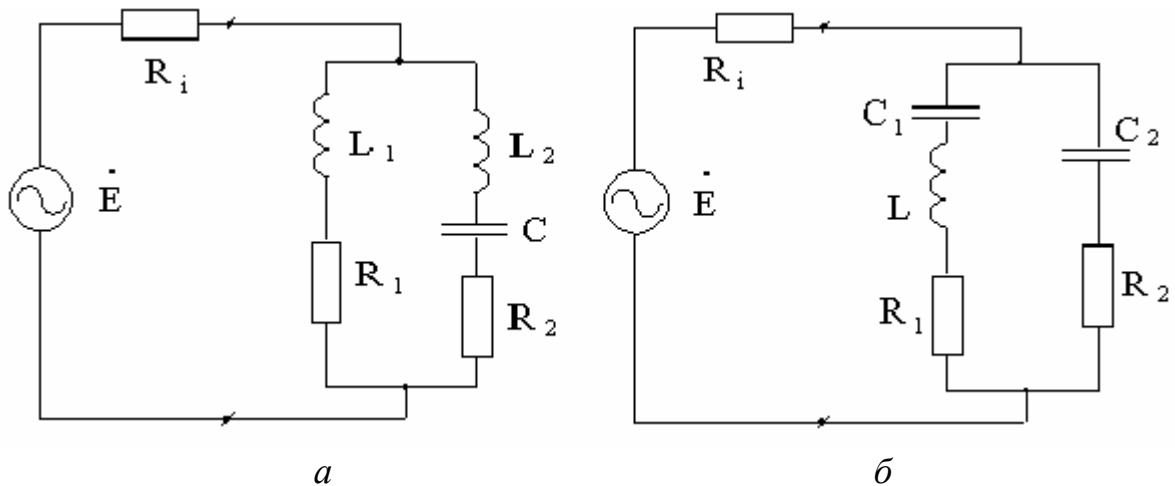
В реальных условиях, при произвольном внутреннем сопротивлении генератора частотно-зависимыми функциями являются как напряжение на контуре, так и ток в неразветвленной части цепи (рис.72)

## Лекция 10.

### Сложные схемы параллельных контуров

Получение высокой избирательности требует как можно меньшего влияния внутреннего сопротивления источника сигнала на колебательный контур. Кроме того, максимальная мощность передается от генератора к нагрузке при

$R_i = R_H$ . Поскольку параллельный колебательный контур является нагрузкой генератора, внутреннее сопротивление  $R_i$  которого не регулируется в широких пределах, то для согласования контура с генератором необходимо изменить его параметры так, чтобы изменилось входное сопротивление  $R_{\text{вх}}$  при неизменной резонансной частоте и полосе пропускания. Это условие выполняется в сложных контурах II и III вида с неполным включением индуктивности и ёмкости рис.73.

**Рис. 73**

В общем случае соотношения между  $L_1$  и  $L_2$ ;  $C_1$  и  $C_2$  можно изменять. Для получения резонанса токов необходимо, как и в контуре первого вида, чтобы  $X_1 = -X_2$ . Для контура II вида (рис.73, а)

$$\omega_0 L_1 = - \left( \omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C} \right) \quad (\text{при } R_1 \ll X_1 \text{ и } R_2 \ll X_2).$$

$$\omega_0 (L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \text{или} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}),$$

где  $L = L_1 + L_2$ .

Обозначим  $p = \frac{L_1}{L}$  – коэффициент включения, тогда

$$X_1 = \omega_0 L_1 = p \omega_0 L, \quad \omega_0 L = \rho.$$

Входное сопротивление контура при резонансе

$$Z_{BX P} = R_{\text{э}} = \frac{X_{1 P}^2}{R} = \frac{p^2 \rho^2}{R} = p^2 R_{\text{э max}} \quad (R = R_1 + R_2).$$

Кроме резонанса токов, в контуре II вида возможен и резонанс напряжений в ветви  $L_2 C$ ;

$$X_2 = \omega_{02} L_2 - \frac{1}{\omega_{02} C} = 0, \quad \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} > \omega_0 \quad (f_{02} = \frac{\omega_{02}}{2\pi}).$$

При частоте  $\omega = \omega_{02}$  сопротивление второй ветви резко падает до величины  $R_2$ .

Поскольку  $L_2 = L - L_1 = L(1 - p)$ , то

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L(1-p)C}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-p}},$$

т.е. чем меньше коэффициент включения, тем ближе  $\omega_{02}$  к  $\omega_0$ .

Модуль входного сопротивления контура при небольших расстройках

$$|Z_{BX}| = p^2 \frac{R_{\text{э max}}}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Если контур питается от идеального источника тока, то напряжение на нем изменяется с частотой также как и  $|Z_{BX}|$ .

На рис.74, а приведена зависимость напряжения от частоты на реальном контуре с параметрами  $L_1 = L_2 = 25 \text{ мГн}$ ,  $C = 7,5 \text{ нФ}$ ,  $R = 40 \text{ Ом}$  при подключении его к источнику  $E = 1 \text{ В}$  с внутренним сопротивлением  $R_i = 10 \text{ кОм}$ .

Контур II вида не только выделяет сигналы с частотой, близкой к  $\omega_0$ , но и более сильно, чем контур I вида, подавляет сигналы, близкие по частоте к  $\omega_{02}$ .

На рис.74, б представлена ФЧХ, соответствующая данной амплитудно-частотной характеристике.

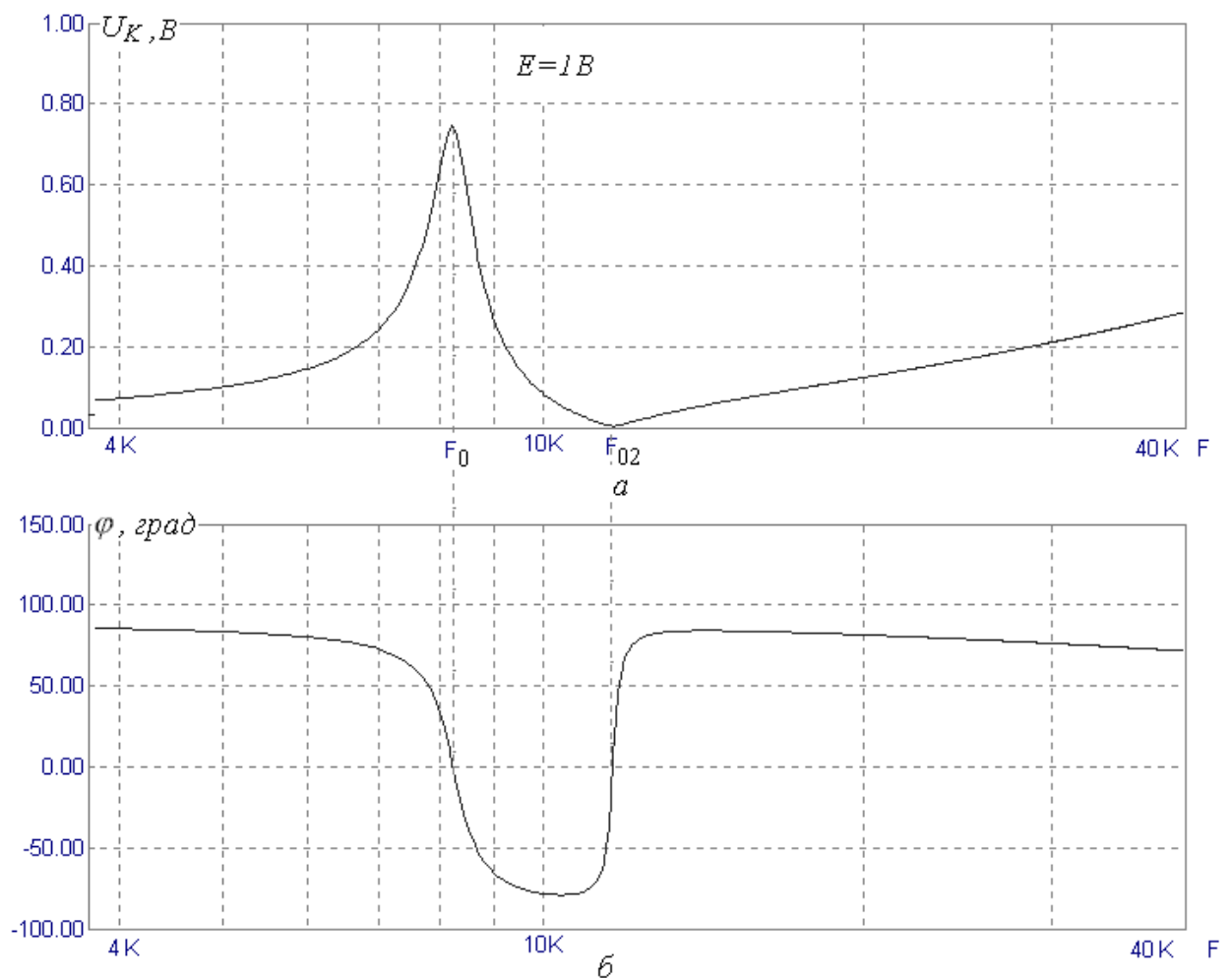


Рис.74

Действительно, на частотах  $0 < \omega < \omega_0$  входное сопротивление контура имеет индуктивный характер, поскольку на частоте ниже резонансной в параллельном контуре сопротивление левой ветви (рис.73, а) меньше сопротивления правой ветви, имеющей ёмкостной характер. На частотах  $\omega_0 < \omega < \omega_{02}$  входное сопротивление определяется ёмкостным сопротивлением правой ветви, поскольку последовательный контур  $L_2 C$  на  $\omega < \omega_{02}$  имеет входное сопротивление ёмкостного характера. На частотах  $\omega > \omega_0$  сопротивления ветвей  $X_1$  и  $X_2$  имеют индуктивный характер и ФЧХ стремится к  $90^\circ$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Следует отметить, что в колебательном контуре с потерями ФЧХ нигде не достигает значения  $\pm 90^\circ$ .

В контуре III вида (рис.73, б)  $X_1 = -X_2$  при

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1} = -\left( \frac{1}{\omega_0 C_2} \right), \quad (R_1 \ll X_1 \text{ и } R_2 \ll X_2).$$

$$\text{Откуда } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \text{где } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Обозначив  $\frac{C}{C_2} = p$  – коэффициент включения,

получим

$$R_3 = \frac{1}{R(\omega_0 C_2)^2} = \frac{1}{R\left(\omega_0 \frac{C}{p}\right)^2} = p^2 \frac{\rho^2}{R} = p^2 Q \cdot \rho.$$

Как и в контуре II вида, в контуре III вида возможен резонанс напряжений в первой ветви, когда  $X_1 = 0$

$$\left( \omega_{01} L - \frac{1}{\omega_{01} C_1} \right) = 0, \quad \omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} < \omega_0 \quad (f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi}).$$

АЧХ и ФЧХ для контура с параметрами  $L = 50 \text{ мГн}$ ,  
 $C_1 = C_2 = 15 \text{ нФ}$ ,  $R = 40 \text{ Ом}$  при подключении его к источнику  
 $E = 1 \text{ В}$  с внутренним сопротивлением  $R_i = 10 \text{ кОм}$  представлены на  
 рис.75.

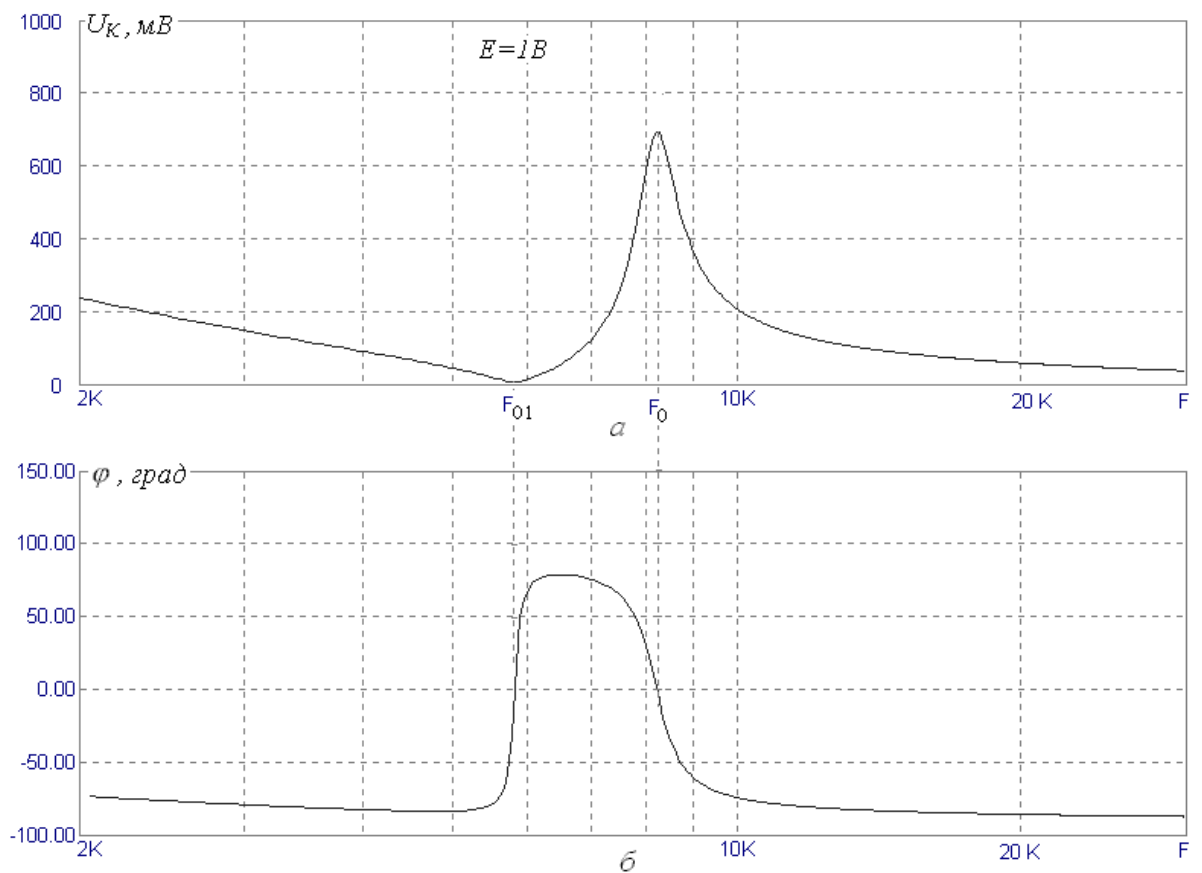


Рис.75

Следует отметить, что для передачи максимальной мощности от генератора к контуру следует выбрать коэффициент включения

$$p_{OPT} = \sqrt{\frac{R_i R}{\rho^2}} = \sqrt{\frac{R_i}{R_{\text{э max}}}} \quad \left( R_i = R_{\text{э}} = p_{OPT}^2 \frac{\rho^2}{R} \right).$$

## Лекция 11.

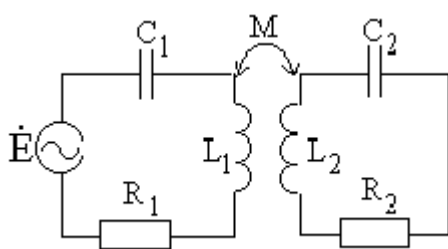
### Колебательные системы. Связанные контуры

Рассмотренные ранее одиночные колебательные контуры обладают недостаточно высокой избирательностью ввиду невысокой крутизны скатов резонансной кривой, что препятствует четкому разделению сигналов по частоте. Для повышения избирательности применяют сложные колебательные системы из нескольких контуров связанных между собой различным способом. Чаще всего применяют системы из двух связанных контуров.

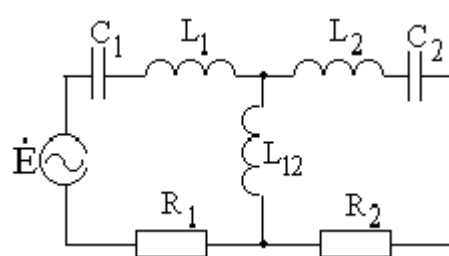
#### Виды связи

В зависимости от того, как осуществляется связь между контурами через общий магнитный поток или общее электрическое поле различают *магнитную (индуктивную)* (рис.76, а, б) или *электрическую* (рис.76, в, г) связь. Применяют также и комбинированную индуктивно-ёмкостную связь (рис.77, а).

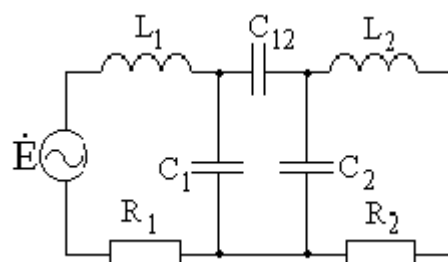
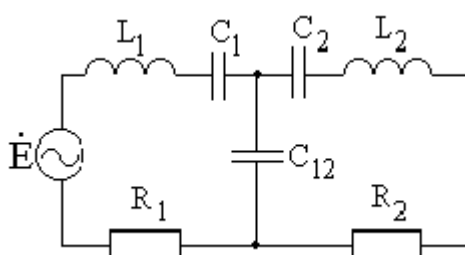
Кроме того связь подразделяют на *внешнюю*, когда элементы связи не входят в состав контуров и *внутреннюю*, когда элементы связи являются общими для двух контуров.



а) трансформаторная  
(внешняя магнитная)



б) автотрансформаторная  
(внутренняя магнитная)

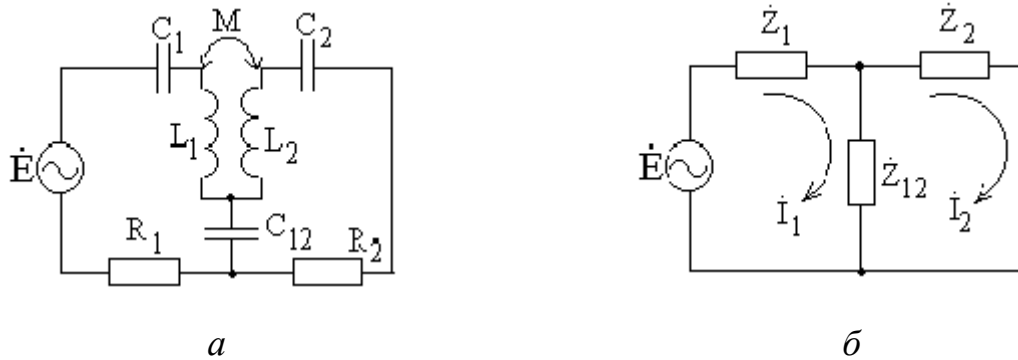


в) внутренняя ёмкостная

г) внешняя ёмкостная

**Рис.76**

При рассмотрении стационарного режима любую из двухконтурных цепей можно представить в виде обобщенной схемы (рис.77, б).

**Рис.77**

В общем случае  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$  имеют  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $R_1$  и  $L_2$ ,  $C_2$ ,  $R_2$ , входящие только в первый или во второй контуры,  $\dot{Z}_{12}$  имеет  $L_{12}$ ,  $C_{12}$ ,  $R_{12}$  – общие для двух контуров.

Результирующие величины  $L$ ,  $C$ ,  $R$ , получаемые при обходе данного контура при разомкнутом втором:  $L_{11}$ ,  $C_{11}$ ,  $R_{11}$  и  $L_{22}$ ,  $C_{22}$ ,  $R_{22}$ .

Следовательно,

$$\dot{Z}_{11} = R_{11} + j\omega L_{11} + \frac{1}{j\omega C_{11}},$$

$$\dot{Z}_{22} = R_{22} + j\omega L_{22} + \frac{1}{j\omega C_{22}}.$$

Общее сопротивление

$$\dot{Z}_{12} = R_{12} + j\omega L_{12} + \frac{1}{j\omega C_{12}}.$$



Очевидно, что

$$\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_{12}, \quad \dot{Z}_{22} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_{12}.$$

### **Коэффициент связи**

Для количественной оценки взаимного влияния контуров применяется понятие *коэффициента связи*. Рассмотрим, например, случай трансформаторной связи (рис.76, а). Пусть при разомкнутом втором контуре в первом протекает ток  $\dot{I}_1$ . Тогда отношение э. д. с., индуцированной в катушке  $L_{22}$ , к полному напряжению на индуктивности  $L_{11}$

$$k_1 = \frac{\dot{E}_2}{\dot{U}_{L_{11}}} = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{j\omega L_{11} \dot{I}_1} = \frac{M}{L_{11}},$$

где  $k_1$  имеет смысл коэффициента трансформации и является величиной, характеризующей степень связи первого контура со вторым.

Если генератор включить со стороны второго контура, а первый контур разомкнуть, то

$$k_2 = \frac{M}{L_{22}}.$$

При одновременном протекании токов в обоих контурах имеется взаимное влияние между ними тем большее, чем больше произведение  $k_1 k_2$ .

Коэффициент связи между контурами определяют  $k = \sqrt{k_1 k_2}$ .

Для трансформаторной связи

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}.$$

В общем случае *коэффициент связи*  $k$  определяется как отношение сопротивления связи к среднему геометрическому сопротивлений того же рода обоих контуров. Для рассмотренной выше трансформаторной связи

$$k = \frac{X_{12}}{\sqrt{\omega L_{11} \omega L_{22}}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_{11} \omega L_{22}}} = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}.$$

Для автотрансформаторной связи (рис.76, б)

$$k = \frac{X_{12}}{\sqrt{\omega L_{11} \omega L_{22}}} = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{\omega L_{11} \omega L_{22}}} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}.$$

Для внутренней ёмкостной связи (рис.76, в)

$$k = \frac{\frac{1}{\omega C_{12}}}{\sqrt{\frac{1}{\omega C_{11}} \frac{1}{\omega C_{22}}}} = \frac{\frac{1}{C_{12}}}{\sqrt{\frac{1}{C_{11}} \frac{1}{C_{22}}}} = \frac{\sqrt{C_{11} C_{22}}}{C_{12}},$$

$$\text{где } C_{11} = \frac{C_1 C_{12}}{C_1 + C_{12}}, \quad C_{22} = \frac{C_2 C_{12}}{C_2 + C_{12}}.$$

При изменении ёмкости  $C_{12}$  от  $0$  до  $\infty$  коэффициент связи изменяется от  $k = 1$  до  $k = 0$ .

При  $C_{12} = 0$  система вырождается в один контур, при  $C_{12} \rightarrow \infty$   $\frac{1}{\omega C_{12}} \rightarrow 0$  и контуры оказываются не связанными.

Если связь между контурами осуществляется через чисто реактивное сопротивление и контуры настроены на одну частоту, совпадающую с частотой генератора, то индуктивное и ёмкостное сопротивления каждого контура приблизительно равны характеристическому сопротивлению и коэффициент связи может быть определен по формуле

$$k = \frac{|X_{12}|}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}},$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — характеристические (волновые) сопротивления первого и второго контуров.

### **Соотношения между токами в связанных контурах**

Для обобщенной схемы связанных контуров (рис.77, б) можно составить систему уравнений методом контурных токов

$$\begin{cases} \dot{E} = \dot{Z}_{11} \dot{I}_1 - \dot{Z}_{12} \dot{I}_2, \\ 0 = -\dot{Z}_{12} \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \dot{I}_2. \end{cases}$$

Решив систему относительно токов в контурах, получим

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{22}} \dot{I}_1, \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{11} - \frac{\dot{Z}_{12}^2}{\dot{Z}_{22}}}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{11} - \frac{\dot{Z}_{12}^2}{\dot{Z}_{22}}} \cdot \frac{\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{22}},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{11} - \frac{\dot{Z}_{12}^2}{\dot{Z}_{22}}} \cdot \frac{\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{22}} \cdot \frac{\frac{\dot{Z}_{22}}{\dot{Z}_{11}}}{\frac{\dot{Z}_{22}}{\dot{Z}_{11}}} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{22} - \frac{\dot{Z}_{12}^2}{\dot{Z}_{11}}} \cdot \frac{\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{11}}.$$

Из выражения для тока в первом контуре следует, что влияние второго контура на первый можно оценить с помощью некоторого «вносимого» сопротивления, добавляемого к собственному сопротивлению  $\dot{Z}_{11}$ ,

$$\text{т.е. } \dot{Z}_{1BH} = -\frac{\dot{Z}_{12}^2}{\dot{Z}_{22}}, \quad \text{тогда } \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{11} + \dot{Z}_{1BH}}.$$

Таким же образом влияние первого контура на второй можно оценить с помощью вносимого сопротивления

$$\dot{Z}_{2BH} = -\frac{\dot{Z}_{12}^2}{\dot{Z}_{11}}.$$

Чаще всего сопротивление связи чисто реактивное

$$\dot{Z}_{12} = \pm jX_{12}, \quad \text{тогда } \dot{Z}_{12}^2 = -X_{12}^2 \quad \text{и} \quad \dot{Z}_{1BH} = \frac{X_{12}^2}{\dot{Z}_{22}}.$$

$$\text{При } \dot{Z}_{22} = R_2 + jX_{22}$$

$$\dot{Z}_{1BH} = \frac{X_{12}^2}{R_2 + jX_{22}} = \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_{22}^2} R_2 - j \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_{22}^2} X_{22},$$

$$\dot{Z}_{1BH} = R_{1BH} + jX_{1BH}.$$

Аналогично, из первого контура во второй вносится сопротивление

$$\dot{Z}_{2BH} = \frac{X_{12}^2}{\dot{Z}_{11}} = \frac{X_{12}^2}{R_1 + jX_{11}} = R_{2BH} + jX_{2BH},$$

$$\text{где } R_{2BH} = \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{11}|} R_1, \quad X_{2BH} = -j \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{11}|} X_{11}.$$

Следует отметить, что независимо от вида связи и настройки контуров действительная часть вносимого сопротивления всегда положительна. Это следует из физического эффекта поглощения энергии, поступающей из первого контура во второй.

Реактивная составляющая вносимого сопротивления может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от настройки контуров;

$$X_{22} = \omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_{22}},$$

при  $\omega > \omega_{02}$   $X_{22} > 0$  и  $X_{1BH} < 0$ , при  $\omega < \omega_{02}$   $X_{22} < 0$ ,  $X_{1BH} > 0$  ( $\omega_{02}$  – резонансная частота второго контура).

Это значит, что при индуктивной расстройке второго контура в первый вносится ёмкостное сопротивление, а при ёмкостной наоборот – индуктивное.

При резонансе второго контура

$$\omega = \omega_{02} \quad X_{22} = 0, \quad X_{1BH} = 0, \quad \text{а } R_{1BH} = \frac{X_{12}^2}{R_2},$$

т. е. чем меньше сопротивление потерь второго контура, тем больше вносимое сопротивление и большее влияние оказывает второй контур на режим работы первого контура.

Следует также отметить, что фазы  $\dot{Z}_{1BH}$  и  $\dot{Z}_{2BH}$  равны соответственно и противоположны по знаку фазам  $\dot{Z}_{22}$  и  $\dot{Z}_{11}$

$$\frac{X_{1BH}}{R_{1BH}} = -\frac{X_{22}}{R_2}, \quad \frac{X_{2BH}}{R_{2BH}} = -\frac{X_{11}}{R_1}.$$

### **Векторные диаграммы связанных контуров**

Векторные диаграммы токов и напряжений в связанных контурах рассмотрим на примере схемы с трансформаторной связью (рис.78, а). Схема замещения первого контура содержит кроме собственных элементов еще и вносимые активное  $R_{1BH}$  и реактивное  $X_{1BH}$  сопротивления (рис.78, б).

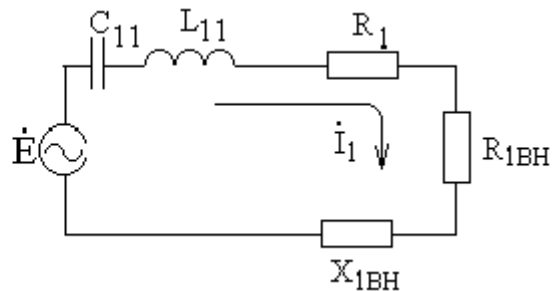
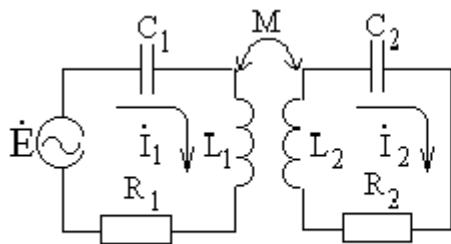
Для построения векторных диаграмм удобно воспользоваться системой уравнений связанных контуров:

$$\begin{cases} \dot{E} = \dot{Z}_{11} \dot{I}_1 - \dot{Z}_{12} \dot{I}_2, \\ 0 = -\dot{Z}_{12} \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \dot{I}_2. \end{cases}$$

С учетом вносимых сопротивлений эти уравнения можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dot{E} = (R_{11} + j\omega L_{11} + \frac{1}{j\omega C_{11}}) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2, \\ 0 = -j\omega M \dot{I}_1 + (R_{22} + j\omega L_{22} + \frac{1}{j\omega C_{22}}) \dot{I}_2. \end{cases}$$

Здесь  $R_{11} = R_1 + R_{1BH}$  и  $R_{22} = R_2 + R_{2BH}$ .



а

б

Рис.78

Предположим, что контуры работают на частоте выше резонансной, т. е. их реактивное сопротивление имеет индуктивный характер. Тогда напряжения на индуктивностях по величине больше напряжений на емкостях.

Выбрав произвольно направление тока  $\dot{I}_2$ , откладываем напряжение на сопротивлении  $R_{22}$ , совпадающее по направлению с током  $\dot{I}_2$  (рис.79). Напряжение на индуктивности  $L_{22}$  опережает, а на емкости  $C_{22}$  отстает от тока  $\dot{I}_2$  на  $\frac{\pi}{2}$ . Согласно второму уравнению сумма напряжений на элементах

второго контура равна напряжению на сопротивлении связи  $j\omega M\dot{I}_1$ .

Ток  $\dot{I}_1$  отстает от напряжения  $j\omega M\dot{I}_1$  на  $\frac{\pi}{2}$ .

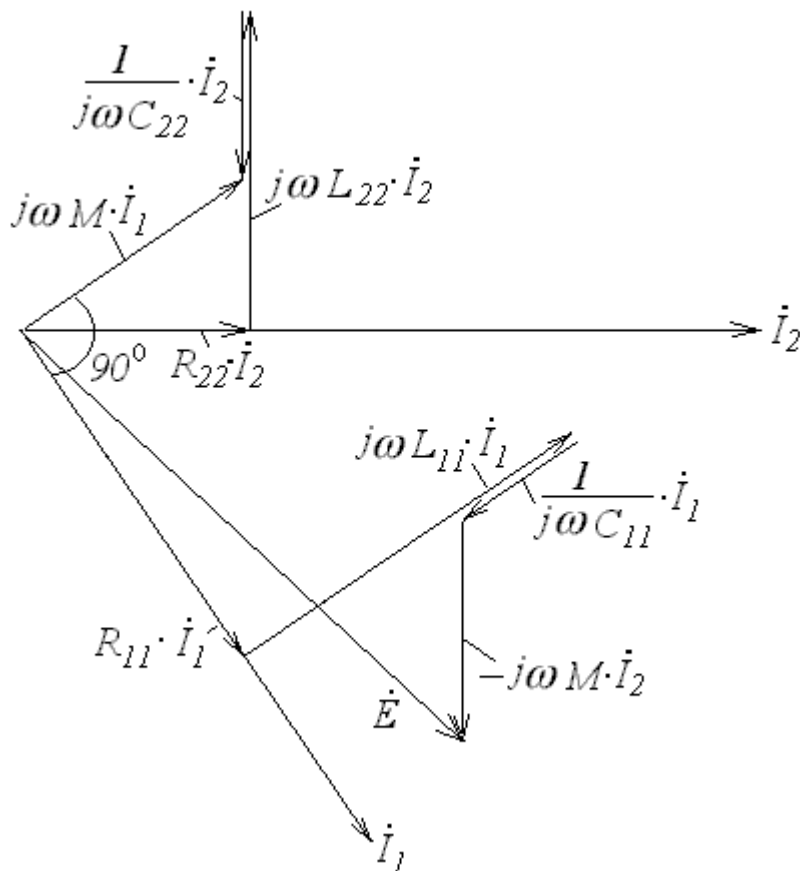


Рис.79

Аналогично строим векторную диаграмму для первого контура.

## Лекция 12.

### *Настройка связанных контуров*

Под *настройкой* системы связанных контуров понимается подбор значений параметров контуров, включая и коэффициент связи между контурами, таким образом, чтобы обеспечить получение максимальной мощности или максимального к. п. д. передачи энергии, или нужной полосы пропускания при заданной частоте и ЭДС источника сигнала.

Для выяснения условий настройки необходимо исследовать зависимость тока второго контура от настройки каждого контура и величины коэффициента связи.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{11} + \dot{Z}_{1BH}} = \frac{\dot{E}}{R_1 + R_{1BH} + j(X_{11} + X_{1BH})}.$$

Амплитуды токов в контурах

$$I_1 = \frac{E}{\sqrt{(R_1 + \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|^2} R_2)^2 + (X_{11} - \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|^2} X_{22})^2}},$$

$$I_2 = \frac{E}{\sqrt{(R_1 + \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|^2} R_2)^2 + (X_{11} - \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|^2} X_{22})^2}} \cdot \frac{|X_{12}|}{\sqrt{R_2^2 + X_{22}^2}}.$$

В зависимости от того, параметры какого контура изменяются при настройке, различают несколько способов настройки.

*Первый частный резонанс.* Ток во втором контуре имеет максимум, когда максимален ток в первом контуре, таким образом, настроив первый контур так, чтобы

$$X_{11} - \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|^2} X_{22} = 0,$$

получим

$$I_{1\max} = \frac{E}{R_1 + \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|} R_2}, \quad I_{2\max} = \frac{E}{R_1 + \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|} R_2} \cdot \frac{|X_{12}|}{|\dot{Z}_{22}|}.$$

Таким образом, для получения первого частного резонанса необходимо при неизменных параметрах второго контура и сопротивления связи изменять параметры первого контура.

Очевидно, что  $I_{2\max}$  не является наибольшим при данных параметрах контуров и ЭДС источника сигнала. Для достижения наибольшего значения тока во втором контуре необходимо подобрать еще оптимальную связь между контурами.

*Первый сложный резонанс.* При настроенном в резонанс первом контуре оптимальное сопротивление связи можно найти, приравняв к нулю первую производную выражения для второго тока по  $|X_{12}|$ .

$$\frac{dI_{2\max}}{d|X_{12}|} = \frac{E(R_1|\dot{Z}_{22}| + \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|} R_2 - 2\frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|} R_2)}{(R_1 + \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|} R_2)^2 |\dot{Z}_{22}|} = 0$$

Отсюда

$$R_1|\dot{Z}_{22}| - \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{22}|} R_2 = 0$$

и оптимальное сопротивление связи

$$X_{12opt} = |\dot{Z}_{22}| \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Токи в контурах при этом сопротивлении связи



$$I_{2mm} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}, \quad I_{1\max(X_{12opt})} = \frac{E}{2R_1}.$$

*Второй частный резонанс.* В этом случае при неизменных параметрах первого контура и неизменной связи настраивается второй контур так, чтобы

$$X_{22} - \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{11}|} X_{11} = 0,$$

тогда

$$I_2 = \frac{E}{\sqrt{(R_2 + \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{11}|} R_1)^2 + (X_{22} - \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{11}|} X_{11})^2}} \cdot \frac{|X_{12}|}{\sqrt{R_1^2 + X_{11}^2}},$$

$$I_{2\max} = \frac{E}{R_2 + \frac{X_{12}^2}{|\dot{Z}_{11}|} R_1} \cdot \frac{|X_{12}|}{|\dot{Z}_{11}|}.$$

*Второй сложный резонанс.* Если после настройки на второй частный резонанс подобрать оптимальное сопротивление связи, то можно получить

$$I_{2mm} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}, \quad I_{1\max(X_{12opt})} = \frac{E}{2R_2} \cdot \frac{|\dot{Z}_{22}|}{|\dot{Z}_{11}|}$$

при

$$X_{12opt} = |\dot{Z}_{11}| \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$$

*Полный резонанс.* В этом случае каждый из контуров отдельно настраивается в резонанс на частоту генератора. Для этого при настройке одного контура другой размыкается. Практически вместо размыкания контуров доста-

точно ослабить связь между контурами настолько, чтобы вносимыми сопротивлениями из одного контура в другой можно было бы пренебречь. После отдельной настройки каждого контура подбирается оптимальная связь.

$$X_{22} = X_{11} = 0, \quad |\dot{Z}_{11}| = R_1, \quad |\dot{Z}_{22}| = R_2.$$

$$I_{2\max} = \frac{E}{R_2 + \frac{X_{12}^2}{R_1}} \cdot \frac{|X_{12}|}{R_1} = \frac{E|X_{12}|}{R_1 R_2 + X_{12}^2},$$

$$\frac{dI_{2\max}}{d|X_{12}|} = \frac{E(R_1 R_2 + X_{12}^2 - 2X_{12}^2)}{(R_1 R_2 + X_{12}^2)^2} = 0,$$

$$\text{откуда} \quad |X|_{12\text{opt}} = \sqrt{R_1 R_2}, \quad I_{2\text{mm}} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}, \quad I_{1\max(X_{12\text{opt}})} = \frac{E}{2R_1}.$$

Значения токов в контурах в этом режиме не отличаются от полученных при настройке в сложный резонанс. Сопротивление связи, при котором ток во втором контуре достигает максимально возможного значения, получается много меньше, чем при сложном резонансе и составляет единицы Ом.

Коэффициент связи, при котором система настроена в полный резонанс, называется оптимальным

$$k_{\text{opt}} \approx \frac{|X_{12}|}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}} = \sqrt{d_1 d_2},$$

$$\text{где} \quad Q_1 = \frac{1}{d_1}, \quad Q_2 = \frac{1}{d_2} - \text{добротности контуров.}$$

Так как добротность контуров, используемых в радиотехнике, имеет величину примерно 100–300, коэффициенты связи обычно составляют единицы или доли процентов.

Энергетические соотношения в двухконтурной системе

Рассматривая второй контур как нагрузочный, содержащий полезное сопротивление  $R_2$ , можно ввести понятие *коэффициента полезного действия* двухконтурной системы

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2},$$

где  $P_1$  – мощность, расходуемая в сопротивлении  $R_1$ ,

$P_2$  – мощность, расходуемая в сопротивлении  $R_2$ ,

$P_1 + P_2$  – мощность, отдаваемая генератором.

$$P_1 = R_1 \frac{I_{1m}^2}{2}, \quad P_2 = R_2 \frac{I_{2m}^2}{2} = R_{1BH} \frac{I_{1m}^2}{2} = \frac{X_{12}^2}{|Z_{22}^2|} R_2 \frac{I_{1m}^2}{2}.$$

При настройке второго контура в резонанс

$$|Z_{22P}^2| = R_2, \quad R_{1BH} = \frac{X_{12}^2}{R_2} \text{ и}$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{R_{1BH}}{R_1 + R_{1BH}} = \frac{X_{12}^2}{R_1 R_2 + X_{12}^2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_{1BH}}}.$$

Таким образом, для получения высокого  $\eta$  необходимо увеличивать  $\frac{R_{1BH}}{R_1}$ , т. е. снижать  $R_1$  и подбирать достаточно сильную связь (это применяется на выходе передатчиков, когда вторым контуром является антенна с  $\eta=0,8-0,9$ ).

$$\text{При полном резонансе } X_{12} = \sqrt{R_1 R_2} \text{ и } \eta = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_2} = 0,5,$$

т. е. для получения максимального коэффициента полезного действия полный и сложный резонансы не пригодны.

Если поставить задачу передачи максимальной мощности во второй контур при заданных  $\dot{E}$  и  $R_1$  то, очевидно,  $P_{2\max}$  будет при условии согласо-

вания  $R_1 = R_{1BH}$ , т. е. при  $\eta=0,5$ . Для получения  $P_{2\max}$  необходимо использовать полный и сложный резонансы.

### Лекция 13.

#### *Резонансные кривые связанных контуров*

Основной интерес представляет поведение амплитуд токов в контурах вблизи резонансных частот системы. Для простоты полагаем, что резонансные частоты контуров равны между собой:

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{11}C_{11}}} = \frac{1}{\sqrt{L_{22}C_{22}}}.$$

Полные сопротивления контуров

$$\dot{Z}_{11} = R_1 + jX_{11} = R_1(1 + j\frac{X_{11}}{R_1}),$$

$$\dot{Z}_{22} = R_2 + jX_{22} = R_2(1 + j\frac{X_{22}}{R_2}).$$

На частотах близких к резонансной частоте

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{X}{R} = \xi = Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) \approx \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0} Q \quad \text{и}$$

$$\dot{Z}_{11} = R_1 + jX_{11} \approx R_1(1 + j\xi_1),$$

$$\dot{Z}_{22} = R_2 + jX_{22} \approx R_2(1 + j\xi_2),$$

где  $\xi_1, \xi_2$ —обобщенная расстройка первого и второго контуров.

Ток в первом контуре

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{11} + \frac{X_{12}^2}{\dot{Z}_{22}}} = \frac{\dot{E}}{R_1(1 + j\xi_1) + \frac{X_{12}^2}{R_2(1 + j\xi_2)}} = \\ &= \frac{\dot{E}}{R_1} \cdot \frac{R_2(1 + j\xi_2)}{1 - \xi_1\xi_2 + \frac{X_{12}^2}{R_1R_2} + j(\xi_1 + \xi_2)}. \end{aligned}$$

Ток во втором контуре

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{11} + \frac{X_{12}^2}{\dot{Z}_{22}}} \cdot \frac{\pm jX_{12}}{\dot{Z}_{22}} = \frac{\dot{E}}{\sqrt{R_1R_2}} \cdot \frac{\pm j \frac{X_{12}}{\sqrt{R_1R_2}}}{1 - \xi_1\xi_2 + \frac{X_{12}^2}{R_1R_2} + j(\xi_1 + \xi_2)}.$$

На частотах, близких к резонансной частоте

$$\frac{X_{12}^2}{R_1R_2} = \frac{X_{12}^2}{\rho_1\rho_2} \frac{\rho_1\rho_2}{R_1R_2} = k^2 Q_1 Q_2.$$

Кроме того, выше было получено

$$\frac{E}{\sqrt{R_1R_2}} = 2I_{2mm}, \quad \frac{E}{R_1} = 2I_{1\max(X_{12opt})}.$$

Таким образом, подставив последние выражения в формулы для токов, получим уравнения нормированных резонансных кривых первого и второго контуров

$$\dot{n}_1 = \frac{\dot{I}_1}{I_{1\max(X_{12opt})}} = \frac{2\sqrt{1 + \xi_2^2}}{\sqrt{(1 - \xi_1\xi_2 + k^2 Q_1 Q_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}} e^{-j(\varphi_{12} - \varphi_2)},$$

$$\dot{n}_2 = \frac{\dot{I}_2}{I_{2mm}} = \frac{2k\sqrt{Q_1Q_2}}{\sqrt{(1-\xi_1\xi_2 + k^2Q_1Q_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}} e^{-j(\varphi_{12} \pm \frac{\pi}{2})},$$

где

$$\varphi_{12} = \arctg \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 - \xi_1\xi_2 + k^2Q_1Q_2}, \quad \varphi_2 = \arctg \xi_2, \quad \pm \frac{\pi}{2} - \text{фаза } X_{12},$$

$$+ \frac{\pi}{2} - \text{соответствует емкостной связи, } - \frac{\pi}{2} - \text{магнитной связи.}$$

Для одинаковых контуров, использующихся в полосовых фильтрах приемников,

$$Q_1 = Q_2 = Q, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi,$$

$$n_1 = \frac{2\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{(1-\xi^2 + k^2Q^2)^2 + 4\xi^2}}, \quad n_2 = \frac{2kQ}{\sqrt{(1-\xi^2 + k^2Q^2)^2 + 4\xi^2}} -$$

—амплитудно-частотные характеристики первого и второго контуров,

$$\varphi_1 = \arctg \frac{2\xi}{1-\xi^2 + k^2Q^2} - \arctg \xi, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{2\xi}{1-\xi^2 + k^2Q^2} \pm \frac{\pi}{2} -$$

—фазочастотные характеристики первого и второго контуров.

На рис.80 приведены АЧХ и ФЧХ второго контура в функции обобщенной расстройки при пяти различных значениях произведения  $kQ$ . ( $kQ$  характеризует степень связи контуров и называется *параметром* или *фактором* связи).

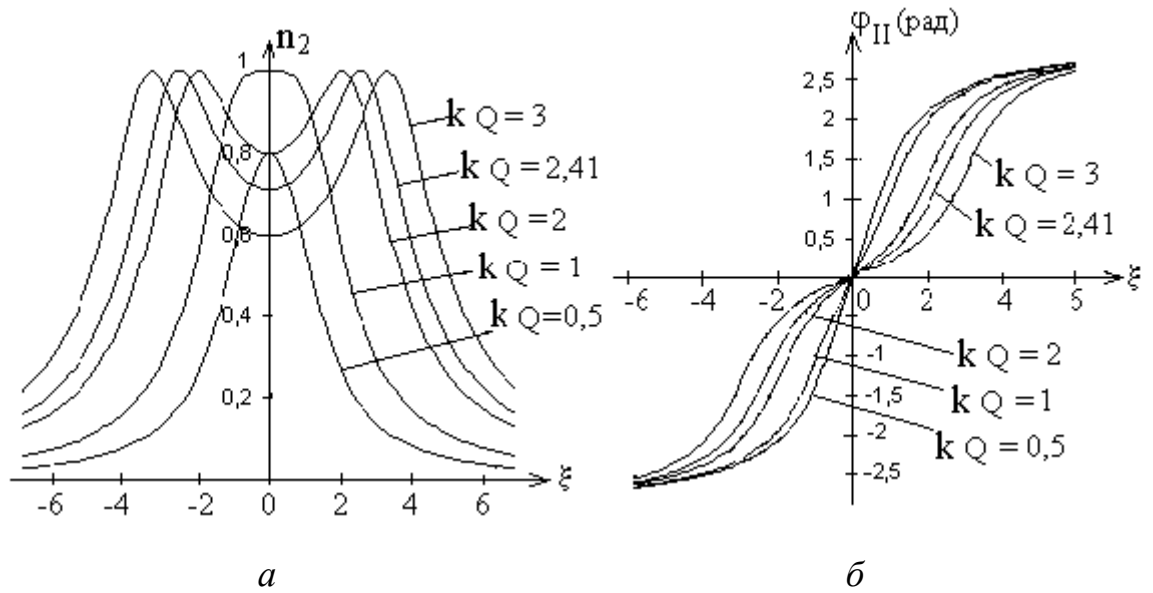


Рис.80

Из графиков амплитудно-частотной характеристики (рис.80, а) видно, что при факторе связи  $kQ < 1$  кривые имеют одnogорбый характер с максимумом на резонансной частоте ( $\xi = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ ). При  $kQ = 1$  кривая АЧХ является предельной одnogорбой кривой, коэффициент связи  $k_{KP} = 1/Q$  называется *критическим*. При факторе связи  $kQ > 1$  кривые имеют два максимума на частотах ниже и выше резонансной частоты контуров и минимум на резонансной частоте. Частоты максимумов (частоты связи) можно определить из условия равенства нулю производной АЧХ по обобщенной расстрой-

$$\text{ке } \frac{dn_2}{d\xi} = 0.$$

$$\xi_1 = \sqrt{k^2 Q^2 - 1}, \quad \xi_{11} = -\sqrt{k^2 Q^2 - 1},$$

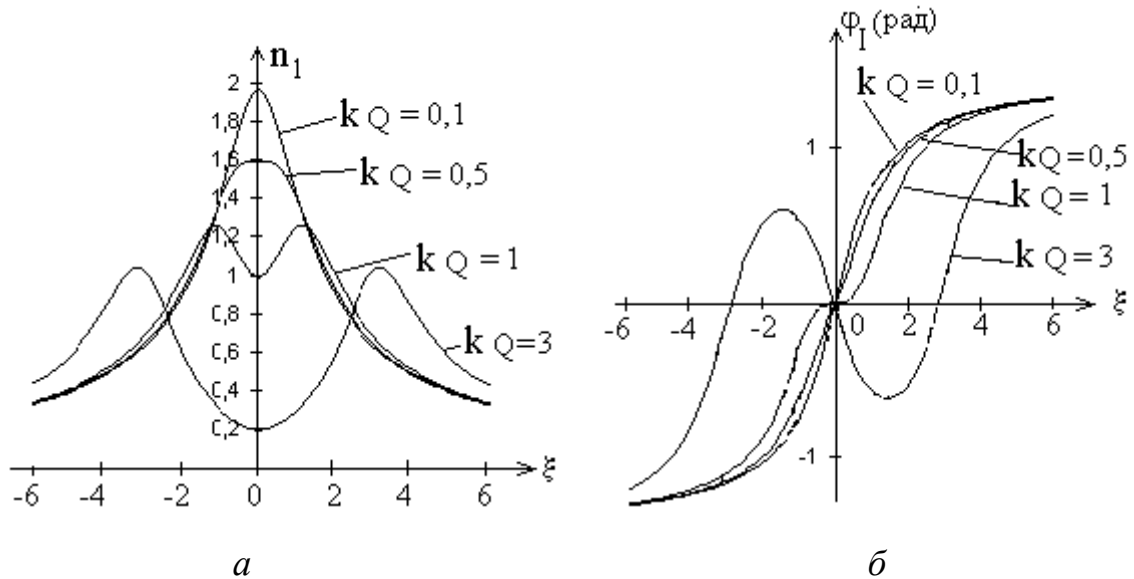
откуда

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - \frac{1}{Q^2}}\right), \quad \omega_{11} = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - \frac{1}{Q^2}}\right).$$

Фазо-частотная характеристика (рис.80, б), построенная для соответствующих факторов связи, должна быть поднята по оси ординат на  $\pi/2$  при ёмкостной связи и опущена также на  $\pi/2$  при индуктивной связи.

Частотные характеристики первого контура (рис.81) изменяются более резко при изменении обобщенной расстройки, чем характеристики второго

контура. Это объясняется наличием в выражении для резонансной кривой в числителе множителя, зависящего от величины расстройки (в аналогичном выражении для второго контура числитель от частоты не зависит).



**Рис.81**

Таким образом, образование седловины на АЧХ первого контура получается при меньших факторах связи, чем во втором контуре (рис.81, а). Фазо-частотная характеристика (рис.81, б) при факторах связи больше единицы трижды переходит через нуль, что соответствует резонансной частоте ( $\xi = 0$ ) и частотам связи.

Если два связанных контура имеют одинаковые резонансные частоты, но разные добротности ( $Q_1 > Q_2$  что характерно для выходных каскадов передатчиков, нагруженных на сопротивление нагрузки), то условием образования седловины на кривой тока второго контура является

$$k > k_{KP} = \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{2}},$$

где  $d_1 = \frac{1}{Q_1}$  и  $d_2 = \frac{1}{Q_2}$  —затухание контуров.

При этом, частоты связи тем больше отличаются от резонансной частоты, чем больше коэффициент связи отличается от критического



$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - k_{KP}^2}}}, \quad \omega_{11} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - k_{KP}^2}}}.$$

### ***Полоса пропускания связанных контуров***

Полосой пропускания системы связанных контуров называют полосу частот, в пределах которой ток во втором контуре не падает ниже  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  от наибольшего его значения при заданных параметрах контуров и коэффициенте связи. Так как резонансные кривые тока второго контура зависят от фактора связи  $kQ$ , то следует рассмотреть три случая:  $kQ < 1$ ,  $kQ = 1$  и  $kQ > 1$ .

1. Связь слабая  $kQ < 1$ . Если контуры одинаковы  $Q_1 = Q_2 = Q$  и  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ , то в этом случае кривая тока второго контура является однокорбкой и имеет максимум на резонансной частоте

$$n_2(0) = \frac{2kQ}{1 + k^2Q^2}.$$

Обобщенная расстройка на границах полосы пропускания определяется из выражения

$$\frac{n_2(0)}{\sqrt{2}} = \frac{2kQ}{\sqrt{2}(1 + k^2Q^2)} = \frac{2kQ}{\sqrt{(1 - \xi_0^2 + k^2Q^2)^2 + 4\xi_0^2}},$$

откуда получается

$$|\xi_0| = \sqrt{k^2Q^2 - 1 + \sqrt{2(1 + k^4Q^4)}}.$$

При  $kQ \ll 1$   $|\xi_0| = \sqrt{-1 + \sqrt{2}} \approx \sqrt{0,41} \approx 0,64,$

$$2\Delta\omega_{CB} = \frac{\xi_0 \cdot \omega_0}{Q} = 0,64 \cdot 2\Delta\omega, \text{ т. е. полоса пропускания } 2\Delta\omega_{CB} \text{ свя-}$$

занных контуров составляет 0,64 от полосы пропускания  $2\Delta\omega$  одиночного контура.

2. При критической связи  $kQ = 1$

$$|\xi_0| = \sqrt{1 - 1 + \sqrt{2(1+1)}} = \sqrt{2}, \text{ т. е. } 2\Delta\omega_{CB} = \sqrt{2} \cdot 2\Delta\omega.$$

3. При сильной связи  $kQ > 1$  обобщенную расстройку на границах полосы пропускания следует определять из общего выражения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2kQ}{\sqrt{(1 - \xi_0^2 + k^2 Q^2)^2 + 4\xi_0^2}},$$

откуда получается

$$|\xi_0| = \sqrt{k^2 Q^2 + 2kQ - 1}.$$

Очевидно, что с ростом фактора связи увеличивается и обобщенная расстройка. Можно показать, что при  $kQ > 2,41$  на резонансной частоте воз-

никает впадина на частотной характеристике ниже уровня  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  от максиму-

ма и условия для полосы пропускания перестают выполняться. Появляется две полосы пропускания, разделенные по частоте тем дальше, чем больше фактор связи превышает величину 2,41.

В предельном случае  $kQ = 2,41$ ,

$$2\Delta\omega_{CB} = 3,1 \cdot 2\Delta\omega,$$

т. е. полоса пропускания в 3,1 раза шире полосы одиночного контура.

На рис.82 приведена зависимость полосы пропускания связанных контуров от фактора связи  $kQ$ .



Рис. 82

Таким образом, при слабой связи ( $kQ \ll 1$ ) полоса пропускания связанных контуров составляет примерно 0,64 от полосы одиночного контура. С увеличением фактора связи полоса пропускания возрастает (при  $kQ = 1$  полоса пропускания системы равна 1,41 от полосы одиночного контура). Дальнейшее увеличение  $kQ$  приводит к появлению двугорбой кривой тока второго контура, при  $kQ = 2,41$  впадина на резонансной частоте становится равной  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  от максимума тока и полоса пропускания достигает максимальной ширины равной 3,1 от полосы одиночного контура. При  $kQ > 2,41$  полоса пропускания разрывается на две части, так как впадина в точке, соответствующей  $\xi = 0$ , становится ниже, чем определяется условием полосы пропускания.

### **Коэффициент передачи связанных контуров**

Часто на практике необходимо знать, как зависит напряжение на реактивных элементах второго контура при изменении частоты источника сигнала. Для этой цели вводится комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}},$$

где  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \frac{1}{j\omega C_2}$ , если напряжение снимается с емкости и

$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 j\omega L_2$ , если напряжение снимается с индуктивности.

Амплитуда тока второго контура

$$I_2 = n_2 \cdot I_{2mm} = \frac{2kQ}{\sqrt{(1 - \xi^2 + k^2 Q^2)^2 + 4\xi^2}} \cdot \frac{E}{2R},$$

тогда модуль комплексного коэффициента передачи, если напряжение снимается с емкости

$$|\dot{K}| = \frac{I_2 \frac{1}{\omega C_2}}{E} = \frac{2kQ}{\sqrt{(1 - \xi^2 + k^2 Q^2)^2 + 4\xi^2}} \cdot \frac{E}{2R} \cdot \frac{1}{\omega C_2 E}.$$

При малых расстройках

$$\frac{1}{R\omega C_2} = Q,$$

следовательно,

$$|\dot{K}| = Q \frac{kQ}{\sqrt{(1 - \xi^2 + k^2 Q^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

Таким образом, коэффициент передачи по напряжению имеет характер частотной зависимости аналогичный зависимости тока второго контура. Если фактор связи  $kQ < 1$ , то кривая коэффициента передачи одногорбая, если  $kQ > 1$ , то двугорбая. При критической связи ( $kQ = 1$ ) на резонансной частоте  $|K| = Q/2$ , т. е. чем больше добротность контуров системы, тем больше напряжение на выходе.

Очевидно, что кривые зависимости фазы комплексного коэффициента передачи от частоты совпадают с кривыми ФЧХ второго контура, если их опустить на  $\pi/2$  при съёме напряжения с ёмкости (напряжение на ёмкости отстает от тока на  $\pi/2$ ) и поднять на  $\pi/2$  при съёме напряжения с индуктивности (напряжение на индуктивности опережает ток на  $\pi/2$ ).

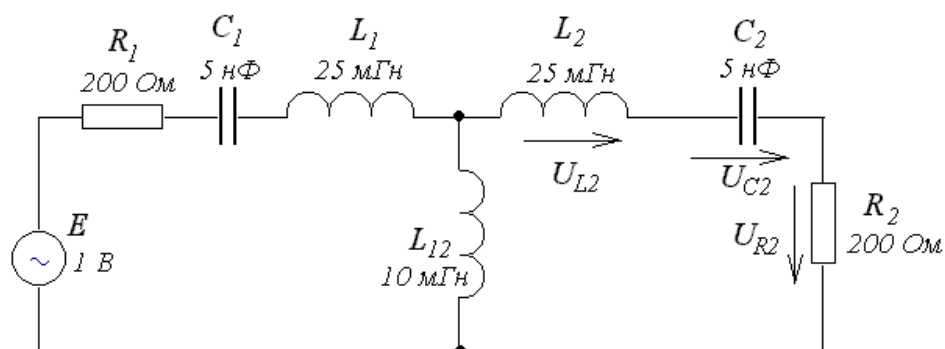


Рис.83

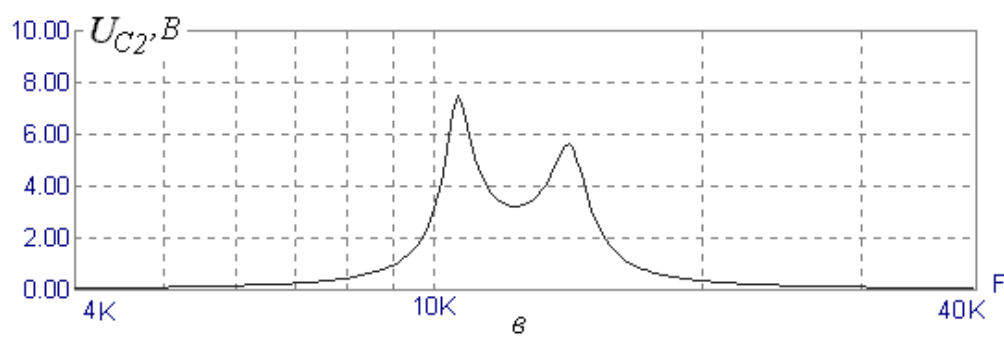
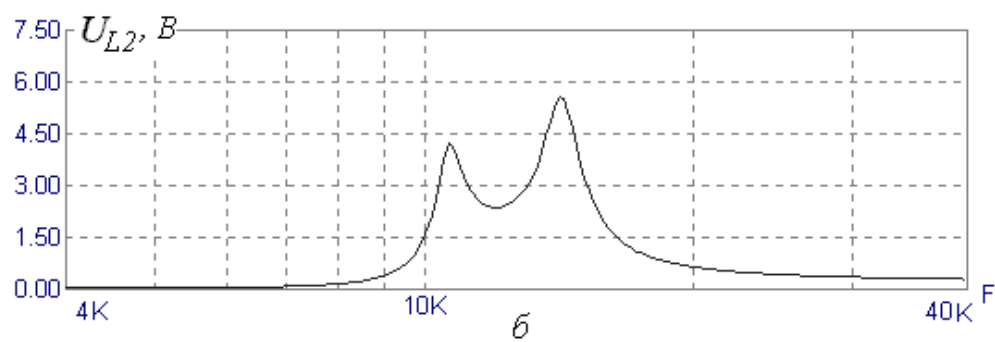
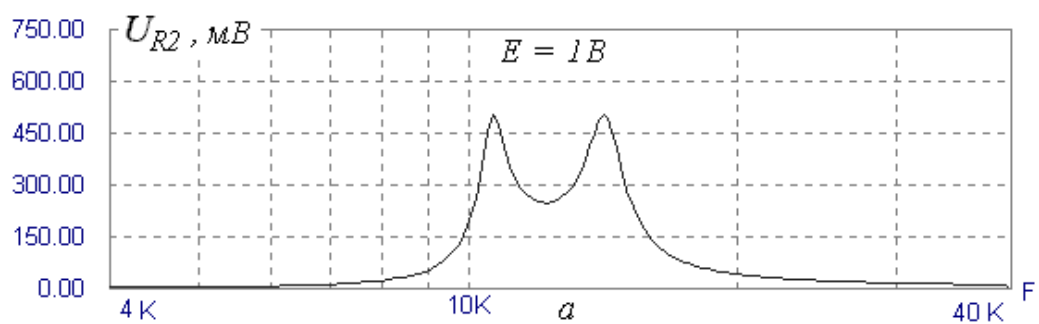


Рис.84

Следует отметить, что хотя у одинаковых контуров (рис.83) при  $kQ > 1$  амплитуды токов на частотах связи одинаковы (рис.84, а), амплитуды напряжений на индуктивности и емкости (рис.84, б, в) различны, поскольку

$$U_{C2} = I_2 \frac{1}{\omega C_2}, \quad U_{L2} = I_2 \omega L_2, \quad \omega_1 < \omega_{11}.$$

## Лекция 14.

### Основы теории четырехполюсников

#### Определение четырехполюсника

Для передачи информации с помощью электромагнитной энергии (волн, сигналов в электрических схемах) применяются различные устройства (рис.85), имеющие два входных (первичных) зажима и два выходных (вторичных). К входным зажимам подключается источник электрической энергии, к выходным присоединяется нагрузка. Такие устройства называются *четыреpolюсниками*.

Четыреpolюсниками являются фильтры, трансформаторы, усилители, каскады радиопередатчиков и радиоприемников, линии связи и т. д.



Рис.85

#### Классификация четырехполюсников

Четыреpolюсники бывают *активные и пассивные*. В активном четырехполюснике есть источники энергии, в пассивном – источников энергии нет. Примерами активных четырехполюсников являются усилители, каскады радиопередатчиков и радиоприемников и др. Примером пассивного четырех-

полюсника может служить кабельная или воздушная линия связи, электрический фильтр и др.

Четырехполюсники делятся на *линейные и нелинейные*. Четырехполюсник является линейным, если напряжение и ток на его выходных зажимах линейно зависят от напряжения и тока на входных зажимах. Примерами линейных четырехполюсников являются линии связи, фильтры, примерами нелинейного – выпрямитель, детектор, преобразователь частоты в радиоприемнике.

Четырехполюсники могут быть *симметричными и несимметричными*. Четырехполюсник симметричен, если перемена местами входных и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений в цепи, с которой четырехполюсник соединен. В противном случае четырехполюсник несимметричен.

Четырехполюсники бывают *автономными и неавтономными*. На зажимах автономного четырехполюсника остается напряжение, обусловленное наличием внутренних источников, т. е. такой четырехполюсник обязательно является активным. В противном случае четырехполюсник пассивен.

Различают также *обратимые и необратимые* четырехполюсники. В обратимых четырехполюсниках отношение напряжения на входе к току на выходе (передаточное сопротивление) не зависит от того, какая пара зажимов является входной, а какая выходной. В противном случае четырехполюсник необратим.

Системы уравнений четырехполюсника

**Основной задачей теории четырехполюсников является установление соотношений между напряжениями на входе и выходе и токами, протекающими через входные и выходные зажимы. Вариант с токами  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$  (рис.85) называют *прямой задачей*, а  $\dot{I}'_1$ ,  $\dot{I}'_2$  – *обратной*. Очевидно, что  $\dot{I}_1 = -\dot{I}'_1$ ,  $\dot{I}_2 = -\dot{I}'_2$ .**

Две из четырех величин, определяющих режим четырехполюсника можно рассматривать как заданные воздействия, две оставшиеся как отклики на эти воздействия. Таким образом, соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе четырехполюсника могут быть записаны в виде шести систем уравнений.

1. Токи на входе и выходе выражаются в зависимости от напряжений на входных и выходных зажимах:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}'_2 = \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2. \end{cases}$$

Коэффициенты  $\dot{Y}_{11}$ ,  $\dot{Y}_{12}$ ,  $\dot{Y}_{21}$ ,  $\dot{Y}_{22}$  называются  $Y$ -параметрами и являются комплексными проводимостями.

Действительно,

$$\dot{Y}_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad \text{— комплексная входная проводимость при коротком}$$

замыкании выходных зажимов.

$$\dot{Y}_{22} = \left. \frac{\dot{I}'_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} \quad \text{— комплексная входная проводимость со стороны за-}$$

жимов (2-2) при коротком замыкании входных зажимов.

$$\dot{Y}_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} \quad \text{— комплексная передаточная (взаимная) проводимость}$$

при коротком замыкании входных зажимов.

$$\dot{Y}_{21} = \left. \frac{\dot{I}'_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad \text{— комплексная передаточная (взаимная) проводимость}$$

при коротком замыкании выходных зажимов.

В случае обратимого четырехполюсника  $\dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21}$ . Если четырехполюсник симметричен, то  $\dot{Y}_{11} = \dot{Y}_{22}$  и его свойства определяются только двумя параметрами (например,  $\dot{Y}_{11}$ ,  $\dot{Y}_{12}$ ).

2. Напряжения на входе и выходе выражаются в зависимости от токов, протекающих через входные и выходные зажимы:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}'_2, \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{22}\dot{I}'_2. \end{cases}$$

$$\dot{Z}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}'_2=0} \quad \text{— входное сопротивление со стороны зажимов (1-1)}$$

при разомкнутых выходных зажимах.

$$\dot{Z}_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}'_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \quad \text{— передаточное (взаимное) сопротивление при}$$

разомкнутых зажимах (1-1).



$$\dot{Z}_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad \text{—передаточное (взаимное) сопротивление при}$$

разомкнутых зажимах (2-2).

$$\dot{Z}_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2'} \right|_{\dot{I}_1=0} \quad \text{—входное сопротивление со стороны зажимов (2-}$$

2) при разомкнутых зажимах (1-1).

В случае обратимого четырехполюсника  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}$ . Если четырехполюсник симметричен, то  $\dot{Z}_{22} = \dot{Z}_{11}$  и его свойства определяются только двумя параметрами (например,  $\dot{Z}_{11}$ ,  $\dot{Z}_{12}$ ).

3. В случае, когда четырехполюсник выполняет роль промежуточного звена между источником сигнала и сопротивлением нагрузки, заданными являются напряжение и ток на выходе ( $\dot{U}_2$ ,  $\dot{I}_2$ ), а искомыми величины, характеризующие режим на входе четырехполюсника ( $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_1$ ). Связь между входными и выходными напряжениями и токами устанавливает система параметров прямой передачи:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11}\dot{U}_2 + \dot{A}_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21}\dot{U}_2 + \dot{A}_{22}\dot{I}_2. \end{cases}$$

$$\dot{A}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad \text{—отношение напряжений в режиме холостого хода на выходе.}$$

де.

$$\dot{A}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad \text{—величина, обратная передаточному сопротивлению в режиме холостого хода на выходе.}$$

режиме холостого хода на выходе.

$$\dot{A}_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad \text{—величина, обратная передаточной проводимости в режиме короткого замыкания на выходе.}$$

короткого замыкания на выходе.

$\dot{A}_{22} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \bigg|_{\dot{U}_2=0}$  – отношение токов в режиме короткого замыкания на выходе.

Найдем связь между  $\dot{A}$  и  $\dot{Y}$  – параметрами. Из второго уравнения системы  $\dot{Y}$  – параметров следует

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2' = \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2. \end{cases}$$

$$-\dot{I}_2 = \dot{I}_2' = \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2, \quad \dot{U}_1 = -\frac{\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{21}}\dot{U}_2 - \frac{1}{\dot{Y}_{21}}\dot{I}_2.$$

Подставив последнее выражение в первое уравнение системы  $\dot{Y}$  – параметров, получим:

$$\dot{I}_1 = \dot{Y}_{11}\left(-\frac{\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{21}}\dot{U}_2 - \frac{1}{\dot{Y}_{21}}\dot{I}_2\right) + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2 = -\frac{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22} - \dot{Y}_{12}\dot{Y}_{21}}{\dot{Y}_{21}}\dot{U}_2 - \frac{\dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{21}}\dot{I}_2.$$

И окончательно,

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\frac{\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{21}}\dot{U}_2 - \frac{1}{\dot{Y}_{21}}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = -\frac{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22} - \dot{Y}_{12}\dot{Y}_{21}}{\dot{Y}_{21}}\dot{U}_2 - \frac{\dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{21}}\dot{I}_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{A}_{11} &= -\frac{\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{21}}, \quad \dot{A}_{12} = -\frac{1}{\dot{Y}_{21}}, \quad \dot{A}_{21} = -\frac{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22} - \dot{Y}_{12}\dot{Y}_{21}}{\dot{Y}_{21}} = -\frac{|\dot{Y}|}{\dot{Y}_{21}}, \\ \dot{A}_{22} &= -\frac{\dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{21}},\end{aligned}$$

где  $|\dot{Y}| = \dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22} - \dot{Y}_{12}\dot{Y}_{21}$  – определитель, составленный из  $\dot{Y}$ –параметров.

Определитель, составленный из  $\dot{A}$ –параметров, равен:

$$|\dot{A}| = \dot{A}_{11}\dot{A}_{22} - \dot{A}_{12}\dot{A}_{21} = \frac{\dot{Y}_{12}}{\dot{Y}_{21}}.$$

Для обратимого четырехполюсника  $\dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21}$  и

$$|\dot{A}| = \dot{A}_{11}\dot{A}_{22} - \dot{A}_{12}\dot{A}_{21} = 1.$$

4. Для анализа передачи сигнала от зажимов (2-2) к зажимам (1-1) используется система уравнений обратной передачи:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{B}_{11}\dot{U}_1 + \dot{B}_{12}\dot{I}'_1, \\ \dot{I}'_2 = \dot{B}_{21}\dot{U}_1 + \dot{B}_{22}\dot{I}'_1. \end{cases}$$

Значения  $\dot{B}$ –параметров определяются также из опытов холостого хода входной цепи ( $\dot{I}'_1 = 0$ ) и короткого замыкания ( $\dot{U}_1 = 0$ ).

5. Когда заданными являются комплексные амплитуды тока на входе  $\dot{I}_1$  и напряжения на выходе  $\dot{U}_2$ , искомые величины  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}'_2$  могут быть найдены из системы уравнений в  $\dot{H}$ –параметрах:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{H}_{11}\dot{I}_1 + \dot{H}_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}'_2 = \dot{H}_{21}\dot{I}_1 + \dot{H}_{22}\dot{U}_2. \end{cases}$$

Значения каждого из  $\dot{H}$ –параметров определяются из опытов короткого замыкания на выходе ( $\dot{U}_2 = 0$ ) и холостого хода первичной цепи ( $\dot{I}_1 = 0$ ).

6. В том случае, когда задаются величины  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_2$ , ток на входе  $\dot{I}_1$  и напряжение на выходе  $\dot{U}_2$  определяются из уравнений в  $\dot{G}$ -параметрах:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{G}_{11}\dot{U}_1 + \dot{G}_{12}\dot{I}_2', \\ \dot{U}_2 = \dot{G}_{21}\dot{U}_1 + \dot{G}_{22}\dot{I}_2'. \end{cases}$$

**Входящие в эту систему уравнений  $\dot{G}$ -параметры могут быть найдены из опытов холостого хода выходной цепи ( $\dot{I}_2' = 0$ ) и короткого замыкания на входе ( $\dot{U}_1 = 0$ ).**

Поскольку все шесть систем параметров описывают один четырехполюсник, то они связаны между собой формулами пересчета, приведенными в справочных таблицах.

### ***Входное сопротивление четырехполюсника***

Влияние четырехполюсника на режим цепи, с которой он соединен, оценивается входными сопротивлениями (рис.86):

$$\dot{Z}_{BX1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \text{ и } \dot{Z}_{BX2} = \dot{Z}_{BIX} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2'}.$$

На эти входные сопротивления оказывается нагруженным источник при передаче сигнала слева направо (рис.86, а) и справа налево (рис.86, б).

Входные сопротивления могут быть выражены через любую систему параметров четырехполюсника. Удобнее всего это сделать, воспользовавшись системой  $\dot{A}$ -параметров.

В этом случае

$$\dot{Z}_{BX1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{A}_{11}\dot{U}_2 + \dot{A}_{12}\dot{I}_2}{\dot{A}_{21}\dot{U}_2 + \dot{A}_{22}\dot{I}_2} = \frac{\dot{A}_{11}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_H + \dot{A}_{22}}, \text{ где } \dot{Z}_H = \dot{U}_2 / \dot{I}_2.$$

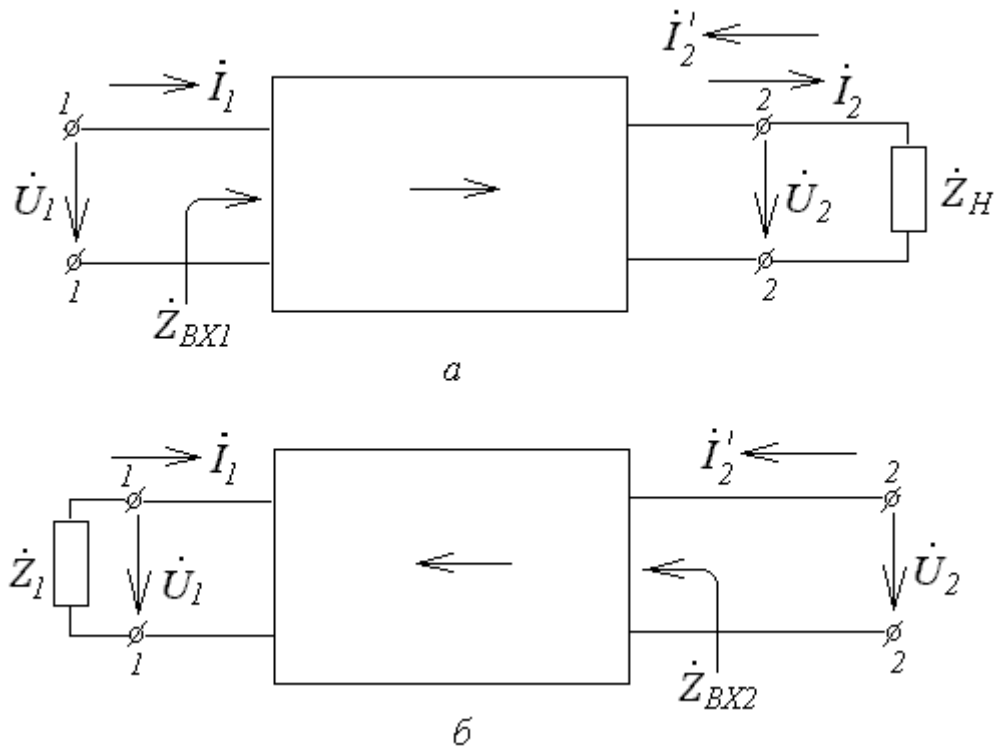


Рис.86

В случае перемены направления передачи сигнала (рис.86, б) воспользуемся следующим приемом. Если в системе уравнений в  $\dot{A}$ -параметрах заменить токи  $\dot{I}_1$  на  $-\dot{I}'_1$  и  $\dot{I}_2$  на  $-\dot{I}'_2$  и решить уравнения относительно  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}'_2$ , то получим уравнения в системе  $\dot{B}$ -параметров, выраженные через  $\dot{A}$ -коэффициенты. Тогда

$$\dot{Z}_{BX2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}'_2} = \frac{\dot{A}_{22}\dot{U}_1 + \dot{A}_{12}\dot{I}'_1}{\dot{A}_{21}\dot{U}_1 + \dot{A}_{11}\dot{I}'_1} = \frac{\dot{A}_{22}\dot{Z}_1 + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_1 + \dot{A}_{11}},$$

так как  $\dot{Z}_1 = \dot{U}_1 / \dot{I}'_1$ .

Выражения для входных сопротивлений могут быть представлены и в иной форме. Действительно,

$$\dot{Z}_{BX1} = \frac{\dot{A}_{11} \frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{11}} + \dot{Z}_H}{\dot{A}_{21} \frac{\dot{A}_{22}}{\dot{A}_{21}} + \dot{Z}_H} = \dot{Z}_{1X} \frac{\dot{Z}_{2K} + \dot{Z}_H}{\dot{Z}_{2X} + \dot{Z}_H} \quad \text{и} \quad \dot{Z}_{BX2} = \dot{Z}_{2X} \frac{\dot{Z}_{1K} + \dot{Z}_1}{\dot{Z}_{1X} + \dot{Z}_1},$$

где  $\dot{Z}_{1X} = \frac{\dot{A}_{11}}{\dot{A}_{21}}$ ,  $\dot{Z}_{1K} = \frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{22}}$  – входные сопротивления в режиме хо-

лостого хода и короткого замыкания на выходе,  $\dot{Z}_{2X} = \frac{\dot{A}_{22}}{\dot{A}_{21}}$ ,

$\dot{Z}_{2K} = \frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{11}}$  – входные сопротивления в режиме холостого хода и

короткого замыкания на входе.

Таким образом, четырехполюсник трансформирует сопротивление нагрузки в новое сопротивление, зависящее как от величины нагрузки, так и от параметров четырехполюсника.

## Лекция 15.

### ***Характеристические (вторичные) параметры четырехполюсника***

Наряду с рассмотренными выше первичными параметрами (коэффициентами в системах уравнений) четырехполюсника, при решении многих задач пользуются *характеристическими (вторичными) параметрами* четырехполюсника. К ним относятся: *характеристические сопротивления, постоянная передачи (мера передачи) и коэффициент трансформации*.

Известно, что генератор с внутренним сопротивлением  $\dot{Z}_i$  отдает максимальную мощность в нагрузку  $\dot{Z}_H$  при условии  $\dot{Z}_i = \dot{Z}_H$ . Если между генератором и нагрузкой находится четырехполюсник, то для передачи максимальной мощности от генератора в четырехполюсник необходимо согласовать входное сопротивление четы-

рехполюсника  $\dot{Z}_{BX1}$  с внутренним сопротивлением генератора, т. е. выполнить условие  $\dot{Z}_i = \dot{Z}_{BX1}$ , а для передачи максимальной мощности от четырехполюсника в нагрузку – согласовать выходное сопротивление четырехполюсника с сопротивлением нагрузки, т. е. выполнить условие  $\dot{Z}_{BX2} = \dot{Z}_H$ . Режим работы четырехполюсника, когда  $\dot{Z}_i = \dot{Z}_{BX1}$  и  $\dot{Z}_{BX2} = \dot{Z}_H$ , называется режимом *согласованного включения*.

Оказывается, для любого четырехполюсника существует такая пара сопротивлений, для которой выполняется условие:

$$\dot{Z}_{BX1} = \frac{\dot{A}_{11}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_H + \dot{A}_{22}} = \dot{Z}_i, \quad \dot{Z}_{BX2} = \frac{\dot{A}_{22}\dot{Z}_1 + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_1 + \dot{A}_{11}} = \dot{Z}_H.$$

Эти сопротивления называются *характеристическими сопротивлениями* четырехполюсника и обозначаются  $\dot{Z}_{1C}$  и  $\dot{Z}_{2C}$ .

Учитывая, что  $\dot{Z}_{BX1} = \dot{Z}_i = \dot{Z}_{1C}$  и  $\dot{Z}_{BX2} = \dot{Z}_H = \dot{Z}_{2C}$ , получим

$$\dot{Z}_{1C} = \frac{\dot{A}_{11}\dot{Z}_{2C} + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_{2C} + \dot{A}_{22}}, \quad \dot{Z}_{2C} = \frac{\dot{A}_{22}\dot{Z}_{1C} + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_{1C} + \dot{A}_{11}}.$$

Решив совместно эти уравнения, найдем

$$\dot{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{11}\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{A}_{22}}}, \quad \dot{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{22}\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{A}_{11}}}.$$

Поскольку

$$\frac{\dot{A}_{11}}{\dot{A}_{21}} = \dot{Z}_{1X}, \quad \frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{22}} = \dot{Z}_{1K}, \quad \frac{\dot{A}_{22}}{\dot{A}_{21}} = \dot{Z}_{2X}, \quad \frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{11}} = \dot{Z}_{2K},$$

то характеристические сопротивления можно выразить через параметры холостого хода и короткого замыкания:

$$\dot{Z}_{1C} = \sqrt{\dot{Z}_{1X} \dot{Z}_{1K}}, \quad \dot{Z}_{2C} = \sqrt{\dot{Z}_{2X} \dot{Z}_{2K}}.$$

Если четырехполюсник согласован с нагрузкой, т. е.

$$\dot{Z}_H = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \dot{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{22} \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21} \dot{A}_{11}}},$$

то уравнения в системе  $\dot{A}$  – параметров принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11} \dot{U}_2 + \dot{A}_{12} \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_{2C}}, \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21} \dot{Z}_{2C} \dot{I}_2 + \dot{A}_{22} \dot{I}_2. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 (\dot{A}_{11} + \sqrt{\frac{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21} \dot{A}_{11}}{\dot{A}_{22}}}), \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 (\dot{A}_{22} + \sqrt{\frac{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21} \dot{A}_{22}}{\dot{A}_{11}}}). \end{cases}$$

Из последней системы уравнений можно получить

$$\begin{cases} \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \cdot \sqrt{\frac{\dot{A}_{22}}{\dot{A}_{11}}} = \sqrt{\dot{A}_{11} \dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21}}, \\ \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \cdot \sqrt{\frac{\dot{A}_{11}}{\dot{A}_{22}}} = \sqrt{\dot{A}_{11} \dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21}}. \end{cases}$$

Величина

$$\sqrt{\frac{\dot{A}_{11}}{\dot{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{1C}}{\dot{Z}_{2C}}} = n_T$$

называется *коэффициентом трансформации* четырехполюсника.

Входное сопротивление согласованного четырехполюсника



$$\dot{Z}_{BX1} = \dot{Z}_{1C} = n_T^2 \dot{Z}_{2C} = n_T^2 \dot{Z}_H,$$

т. е. согласованный четырехполюсник трансформирует сопротивление нагрузки в  $n_T^2$  раз.

Таким образом,

$$\frac{1}{n_T} \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n_T \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}} = e^{\dot{g}},$$

где  $\dot{g}$  – характеристическая постоянная передачи (мера передачи) четырехполюсника.

Если четырехполюсник симметричен  $\dot{A}_{11} = \dot{A}_{22}$ ,  $\dot{Z}_{1C} = \dot{Z}_{2C}$ ,  $n_T = 1$ , то

$$\dot{g} = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \ln(\sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}}),$$

т. е. постоянная передачи определяется только первичными параметрами четырехполюсника.

Выразим первичные  $\dot{A}$ –параметры через характеристические параметры  $\dot{Z}_{1C}$ ,  $\dot{Z}_{2C}$ ,  $\dot{g}$ .

Согласно полученному выше

$$e^{\dot{g}} = \sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}},$$

$$e^{-\dot{g}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}}}.$$

Умножив числитель и знаменатель последнего выражения на  $\sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} - \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}}$  и учитывая, что  $|\dot{A}| = \dot{A}_{11}\dot{A}_{22} - \dot{A}_{12}\dot{A}_{21} = 1$ , получим

$$e^{-\dot{g}} = \sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} - \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}}.$$

Таким образом,

$$\frac{e^{\dot{g}} + e^{-\dot{g}}}{2} = \sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} = ch\dot{g} \quad \text{и} \quad \frac{e^{\dot{g}} - e^{-\dot{g}}}{2} = \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}} = sh\dot{g},$$

где  $ch\dot{g}$  – гиперболический косинус,  $sh\dot{g}$  – гиперболический синус.

Далее находим

$$\dot{Z}_{1C} \cdot \dot{Z}_{2C} = \frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}} \quad \text{и} \quad \frac{\dot{Z}_{1C}}{\dot{Z}_{2C}} = \frac{\dot{A}_{11}}{\dot{A}_{22}}.$$

В итоге получаем систему уравнений, связывающих первичные параметры с вторичными параметрами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{A}_{11}}{\dot{A}_{22}} = \frac{\dot{Z}_{1C}}{\dot{Z}_{2C}}, \\ \frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}} = \dot{Z}_{1C} \cdot \dot{Z}_{2C}, \text{ из которой следует} \\ \dot{A}_{12}\dot{A}_{21} = sh^2\dot{g}, \\ \dot{A}_{11}\dot{A}_{22} = ch^2\dot{g}, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \dot{A}_{11} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{1C}}{\dot{Z}_{2C}}} ch\dot{g}, \\ \dot{A}_{22} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{2C}}{\dot{Z}_{1C}}} ch\dot{g}, \\ \dot{A}_{12} = \sqrt{\dot{Z}_{1C}\dot{Z}_{2C}} sh\dot{g}, \\ \dot{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\dot{Z}_{1C}\dot{Z}_{2C}}} sh\dot{g}. \end{array} \right.$$

Подставляя найденные коэффициенты в систему уравнений для  $\dot{A}$ -параметров, получим систему уравнений четырехполюсника в гиперболических функциях:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{1C}}{\dot{Z}_{2C}}} (\dot{U}_2 ch\dot{g} + \dot{Z}_{2C} \dot{I}_2 sh\dot{g}), \\ \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{2C}}{\dot{Z}_{1C}}} (\dot{I}_2 ch\dot{g} + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_{2C}} sh\dot{g}). \end{cases}$$

Если четырехполюсник симметричен  $\dot{Z}_{1C} = \dot{Z}_{2C}$ , то

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 ch\dot{g} + \dot{Z}_{2C} \dot{I}_2 sh\dot{g}, \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 ch\dot{g} + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_{2C}} sh\dot{g}. \end{cases}$$

При согласованной нагрузке  $\dot{Z}_H = \dot{Z}_{2C}$ ,  $\dot{Z}_{2C} \dot{I}_2 = \dot{U}_2$ ,  
 $ch\dot{g} + sh\dot{g} = e^{\dot{g}}$ ,  
 система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{1C}}{\dot{Z}_{2C}}} \dot{U}_2 e^{\dot{g}}, \\ \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{2C}}{\dot{Z}_{1C}}} \dot{I}_2 e^{\dot{g}}. \end{cases}$$

Постоянная передачи в общем случае величина комплексная  
 $\dot{g} = a + jb$ .

Характеристические сопротивления также величины комплексные

$$\dot{Z}_{1C} = |\dot{Z}_{1C}| e^{j\varphi_{1C}}, \quad \dot{Z}_{2C} = |\dot{Z}_{2C}| e^{j\varphi_{2C}}.$$

Амплитуды или действующие значения напряжений и токов на входе и выходе четырехполюсника связаны через характеристиче-

ские сопротивления и постоянную передачи следующими выражениями:

$$\begin{cases} |\dot{U}_1| e^{j\varphi_{U1}} = \left[ \sqrt{\frac{|\dot{Z}_{1C}|}{|\dot{Z}_{2C}|}} |\dot{U}_2| e^a \right] e^{j\varphi_{U2}} e^{j\frac{1}{2}(\varphi_{1C} - \varphi_{2C})} e^{jb}, \\ |\dot{I}_1| e^{j\varphi_{I1}} = \left[ \sqrt{\frac{|\dot{Z}_{2C}|}{|\dot{Z}_{1C}|}} |\dot{I}_2| e^a \right] e^{j\varphi_{I2}} e^{j\frac{1}{2}(\varphi_{2C} - \varphi_{1C})} e^{jb}. \end{cases}$$

Таким образом, вещественная часть постоянной передачи  $a$  характеризует изменение амплитуды или действующего значения тока и напряжения при прохождении сигнала через четырехполюсник. Мнимая составляющая  $b$  характеризует фазовый сдвиг между входным и выходным напряжениями или токами,

$$\varphi_{U1} - \varphi_{U2} = \frac{1}{2}(\varphi_{1C} - \varphi_{2C}) + jb, \quad \varphi_{I1} - \varphi_{I2} = \frac{1}{2}(\varphi_{2C} - \varphi_{1C}) + jb.$$

Для симметричного четырехполюсника

$$\begin{cases} |\dot{U}_1| e^{j\varphi_{U1}} = |\dot{U}_2| e^a e^{j\varphi_{U2}} e^{jb}, \\ |\dot{I}_1| e^{j\varphi_{I1}} = |\dot{I}_2| e^a e^{j\varphi_{I2}} e^{jb}. \end{cases}$$

$b$  – коэффициент фазы измеряется в радианах или градусах и равен

$$b = \varphi_{U1} - \varphi_{U2} = \varphi_{I1} - \varphi_{I2}.$$

Коэффициент  $a$  – собственное затухание определяется как

$$a = \ln \frac{|\dot{U}_1|}{|\dot{U}_2|} = \ln \frac{|\dot{I}_1|}{|\dot{I}_2|} \text{ (непер)}.$$

Затуханию  $a = 1 \text{ nep}$  соответствует уменьшение амплитуды или действующего значения напряжения или тока в  $e = 2,718$  раза.

В радиотехнике часто легче измерить мощность сигнала на входе и выходе, кроме того, при расчетах предпочтительнее применять не натуральные, а десятичные логарифмы. Поэтому затухание измеряют в *белах*:

$$a_{(\text{бел})} = \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \lg \frac{S_1}{S_2}.$$

Поскольку  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{I_1^2}{I_2^2}$ ,  $a_{(\text{бел})} = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2}$ .

Единица *бел* достаточно велика поэтому пользуются *0,1 бел* называемой *децибел*.

$$a_{(\text{дб})} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} = 10 \lg \frac{S_1}{S_2},$$

$$1 \text{ дб} \approx 0,115 \text{ nep}; \quad 1 \text{ nep} \approx 8,7 \text{ дб}.$$

### ***Рабочее и вносимое затухание четырехполюсника***

Рассмотренное выше собственное затухание четырехполюсника является мерой передачи сигнала с входа на выход без учета влияния источника сигнала и реальной нагрузки.

В общем случае четырехполюсник включен между источником с внутренним сопротивлением  $\dot{Z}_i$  и нагрузкой  $\dot{Z}_H$  (рис.87).

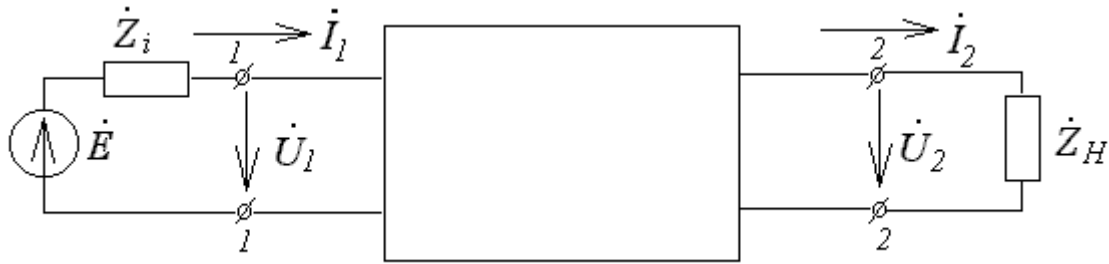


Рис.87

Для оценки влияния условий согласования четырехполюсника с генератором и нагрузкой на передачу сигнала вводится *рабочее затухание четырехполюсника*, которое определяется как

$$a_P = \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_2},$$

где  $S_0$  –максимальная полная мощность, которую генератор отдает в нагрузку, согласованную с его внутренним сопротивлением,  $S_2$  –полная мощность, выделяемая в нагрузке, подключенной к выходу четырехполюсника.

Максимальная полная мощность выделяется на сопротивлении, равном внутреннему сопротивлению генератора:

$$S_0 = |\dot{Z}_i \dot{I}_1|^2 = \left| \frac{\dot{E}}{2\dot{Z}_i} \right|^2 \cdot |\dot{Z}_i| = \left| \frac{\dot{E}^2}{4\dot{Z}_i} \right|.$$

Полная мощность, выделяемая в нагрузке:

$$S_2 = |\dot{U}_2 \dot{I}_2| = \left| \frac{\dot{U}_2^2}{\dot{Z}_H} \right|.$$

Рабочее затухание в этом случае

$$a_P = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{E}^2}{4\dot{Z}_i} \frac{\dot{Z}_H}{\dot{U}_2^2} \right| = \ln \left| \frac{\dot{E}}{2\dot{U}_2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{Z}_H}{\dot{Z}_i} \right|.$$

Задающее напряжение генератора

$$\dot{E} = \dot{U}_1 + \dot{Z}_i \dot{I}_1 = \dot{A}_{11} \dot{U}_2 + \dot{A}_{12} \dot{I}_2 + \dot{Z}_i (\dot{A}_{21} \dot{U}_2 + \dot{A}_{22} \dot{I}_2).$$

Учитывая, что  $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_H}$ , получим

$$\frac{\dot{E}}{\dot{U}_2} = \dot{A}_{11} + \frac{\dot{A}_{12}}{\dot{Z}_H} + \dot{Z}_i \dot{A}_{21} + \frac{\dot{Z}_i \dot{A}_{22}}{\dot{Z}_H}.$$

Заменив в последнем выражении  $A$  –параметры на характеристические

$$\dot{A}_{11} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{1C}}{\dot{Z}_{2C}}} ch\dot{g}, \quad \dot{A}_{12} = \sqrt{\dot{Z}_{1C} \dot{Z}_{2C}} sh\dot{g}, \quad \dot{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\dot{Z}_{1C} \dot{Z}_{2C}}} sh\dot{g},$$

$$\dot{A}_{22} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{2C}}{\dot{Z}_{1C}}} ch\dot{g}$$

и подставив полученное выражение в формулу для рабочего затухания, после некоторых преобразований имеем:

$$a_p = a + \ln \left| \frac{\dot{Z}_i + \dot{Z}_{1C}}{2\sqrt{\dot{Z}_i \dot{Z}_{1C}}} \right| + \ln \left| \frac{\dot{Z}_H + \dot{Z}_{2C}}{2\sqrt{\dot{Z}_H \dot{Z}_{2C}}} \right| + \ln |1 - p_1 p_2 e^{-2\dot{g}}|,$$

где  $p_1 = \frac{\dot{Z}_i - \dot{Z}_{1C}}{\dot{Z}_i + \dot{Z}_{1C}}$ ,  $p_2 = \frac{\dot{Z}_H - \dot{Z}_{2C}}{\dot{Z}_H + \dot{Z}_{2C}}$  – коэффициенты отражения на

входе и

выходе четырехполюсника соответственно.

Таким образом, рабочее затухание содержит четыре составляющих. Первая составляющая – собственное затухание четырехполюсника  $a$ . Вторая составляющая характеризует степень рассогласования генератора с входом четырехполюсника, третья – степень рассогласования выхода четырехполюсника с нагрузкой. Четвертая составляющая появляется лишь тогда, когда не согласованы и вход, и выход, т. е. когда оба коэффициента отражения не равны нулю. На практике эта составляющая обычно мала, и ей можно пренебречь.

Следует отметить, что при согласовании входа четырехполюсника с генератором ( $\dot{Z}_i = \dot{Z}_{1C}$ ), вторая составляющая равна нулю. Если еще обеспечить согласование четырехполюсника с нагрузкой ( $\dot{Z}_H = \dot{Z}_{2C}$ ), то третья и четвертая составляющие также обращаются в нули, и рабочее затухание равно собственному затуханию четырехполюсника.

Вместо рабочего затухания нередко применяется другой параметр – *вносимое затухание*. В этом случае полная мощность, поступающая в нагрузку, сравнивается с полной мощностью, которую генератор отдавал бы в нагрузку при их прямом соединении, т. е. вносимое затухание

$$a_{BH} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_{12}}{S_2},$$

где  $S_{12} = \left| \frac{\dot{E}^2 \dot{Z}_H}{(\dot{Z}_i + \dot{Z}_H)^2} \right|$  – полная мощность, которую генератор отдавал бы в нагрузку при их прямом соединении.

Вносимое затухание можно связать с рабочим затуханием

$$a_{BH} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_{12} S_0}{S_2 S_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_2} - \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_{12}} = a_P - \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_{12}}.$$

Можно показать, что



$$\frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_{12}} = \ln \left| \frac{\dot{Z}_i + \dot{Z}_H}{2\sqrt{\dot{Z}_i \dot{Z}_H}} \right|.$$

Поэтому вносимое затухание определяется:

$$a_{BH} = a_P - \ln \left| \frac{\dot{Z}_i + \dot{Z}_H}{2\sqrt{\dot{Z}_i \dot{Z}_H}} \right|,$$

т. е. из рабочего затухания исключается затухание, вызванное несогласованностью генератора с нагрузкой.

Если  $a_P = 0$ , полные мощности на входе и выходе четырехполюсника равны. Если  $a_P < 0$ , четырехполюсник является усилителем сигнала.

### ***Передаточные функции четырехполюсника***

Передаточной функцией нагруженного четырехполюсника называется отношение комплексных амплитуд или комплексных действующих значений отклика к комплексным амплитудам или комплексным действующим значениям воздействия.

Если входное воздействие представляет собой напряжение генератора, а откликом четырехполюсника на это воздействие – напряжение или ток на выходе, то комплексные передаточные функции имеют вид:

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}} \quad \text{и} \quad \dot{Y}_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{E}},$$

где  $\dot{K}_U$  – комплексный коэффициент передачи по напряжению,

$\dot{Y}_{21}$  – комплексная передаточная проводимость.

Если входное воздействие представляет собой ток на входе четырехполюсника, а откликом четырехполюсника на это воздействие

– напряжение или ток на выходе, то в этом случае комплексные передаточные функции:

$$\dot{K}_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \quad \text{и} \quad \dot{Z}_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1},$$

$\dot{K}_I$  – комплексный коэффициент передачи по току,

$\dot{Z}_{21}$  – комплексное передаточное сопротивление.

Передаточные функции четырехполюсника могут быть выражены через первичные параметры и сопротивление нагрузки. Например,

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{A}_{11}\dot{U}_2 + \dot{A}_{12}\dot{I}_2} = \frac{\dot{Z}_H}{\dot{A}_{11}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}}.$$

В режиме холостого хода ( $\dot{Z}_H = \infty$ )

$$\dot{K}_{UXX} = \frac{1}{\dot{A}_{11}}.$$

При согласованном включении ( $\dot{Z}_H = \dot{Z}_{2C}$ ) симметричного четырехполюсника

$$\dot{K}_{UC} = \frac{\dot{Z}_{2C}}{\dot{A}_{11}\dot{Z}_{2C} + \dot{A}_{12}} = \frac{\sqrt{\frac{\dot{A}_{22}\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{A}_{11}}}}{\dot{A}_{11}\sqrt{\frac{\dot{A}_{22}\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{A}_{11}}} + \dot{A}_{12}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}}} = e^{-\dot{g}}.$$

Последняя формула устанавливает связь между передаточной функцией по напряжению и постоянной передачи симметричного согласованного на выходе четырехполюсника.

Аналогичным образом можно получить остальные передаточные функции в различных режимах работы. Например,

$$\dot{K}_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{A}_{21}\dot{U}_2 + \dot{A}_{22}\dot{I}_2} = \frac{1}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_H + \dot{A}_{22}}.$$

В режиме короткого замыкания на выходе

$$\dot{K}_{IKЗ} = \frac{1}{\dot{A}_{22}}.$$

Если четырехполюсник симметричен ( $\dot{A}_{11} = \dot{A}_{22}$ ), то коэффициент передачи по напряжению в режиме холостого хода на выходе равен коэффициенту передачи по току в режиме короткого замыкания также на выходе.

Лекция 16.

### ***Эквивалентные схемы пассивных линейных четырехполюсников***

Для анализа прохождения сигнала через четырехполюсник в общем случае необходимо знать его первичные, например,  $\dot{A}$  – параметры (или характеристические параметры  $\dot{g}$ ,  $\dot{Z}_{1C}$ ,  $\dot{Z}_{2C}$ ). В том случае, когда внутреннее устройство четырехполюсника неизвестно, параметры можно определить экспериментально из опытов холостого хода и короткого замыкания. Если же схема четырехполюсника известна, то параметры его могут быть рассчитаны по заданным значениям сопротивлений элементов, его составляющих.

Пусть известны сопротивления  $\dot{Z}_a$ ,  $\dot{Z}_b$ ,  $\dot{Z}_c$  Т-образного четырехполюсника (рис.88, в). Найдем выражения для первичных  $\dot{A}$  – параметров в зависимости от этих сопротивлений.

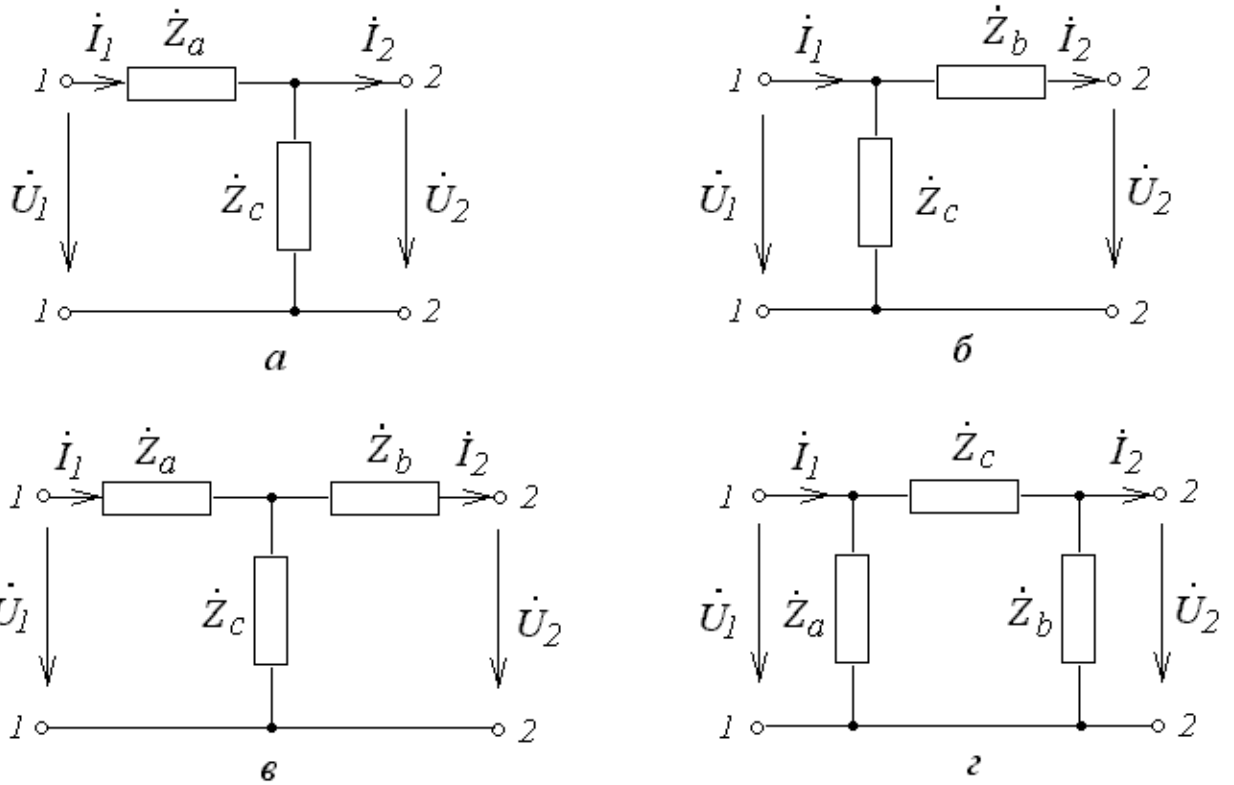


Рис.88

В системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11}\dot{U}_2 + \dot{A}_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21}\dot{U}_2 + \dot{A}_{22}\dot{I}_2, \end{cases}$$

$$\dot{A}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_c} \dot{Z}_c} = 1 + \frac{\dot{Z}_a}{\dot{Z}_c}, \quad \dot{A}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1 \dot{Z}_c} = \frac{1}{\dot{Z}_c},$$

$$\dot{A}_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\frac{\dot{U}_1}{(\dot{Z}_a + \frac{\dot{Z}_b \dot{Z}_c}{\dot{Z}_b + \dot{Z}_c}) \cdot \frac{\dot{Z}_b \dot{Z}_c}{\dot{Z}_b + \dot{Z}_c} \cdot \frac{1}{\dot{Z}_b}}} = \dot{Z}_a + \dot{Z}_b + \frac{\dot{Z}_a \dot{Z}_b}{\dot{Z}_c},$$

$$\dot{A}_{22} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1 \cdot \frac{\dot{Z}_b \dot{Z}_c}{\dot{Z}_b + \dot{Z}_c} \cdot \frac{1}{\dot{Z}_b}} = 1 + \frac{\dot{Z}_b}{\dot{Z}_c}.$$

Характеристические параметры Т-образного четырехполюсника:

$$\dot{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{11}\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_a + \dot{Z}_c}{\dot{Z}_b + \dot{Z}_c} (\dot{Z}_a \dot{Z}_b + \dot{Z}_c \dot{Z}_b + \dot{Z}_a \dot{Z}_c)},$$

$$\dot{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{22}\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_b + \dot{Z}_c}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_c} (\dot{Z}_a \dot{Z}_b + \dot{Z}_c \dot{Z}_b + \dot{Z}_a \dot{Z}_c)},$$

$$\dot{g} = Arch \sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} = Arch \left[ \frac{\sqrt{(\dot{Z}_a + \dot{Z}_c)(\dot{Z}_b + \dot{Z}_c)}}{\dot{Z}_c} \right].$$

Для симметричного Т-образного четырехполюсника ( $\dot{Z}_a = \dot{Z}_b$ ,  $\dot{A}_{11} = \dot{A}_{22}$ ):

$$\dot{Z}_{1C} = \dot{Z}_{2C} = \dot{Z}_T = \sqrt{\dot{Z}_a(\dot{Z}_a + 2\dot{Z}_c)}, \quad \dot{g} = Arch \left[ \frac{(\dot{Z}_a + \dot{Z}_c)}{\dot{Z}_c} \right].$$

Расчетные формулы для Г-образных схем могут быть получены из формул для Т-образного четырехполюсника, если принять  $\dot{Z}_b = 0$  (соответствует рис.88, а), или  $\dot{Z}_a = 0$  (для схемы рис.88, б).

Применяя подобную методику, можно получить расчетные формулы и для П-образного четырехполюсника.

Возможно решение обратной задачи: по заданным параметрам четырехполюсника (первичным или характеристическим) найти значения  $\dot{Z}_a$ ,  $\dot{Z}_b$ ,  $\dot{Z}_c$  для схемы Т- или П-образного четырехполюсника. Отсюда следует, что любой пассивный линейный четырехполюсник, для которого известны первичные или характеристические параметры, может быть заменен Т- или П-образной схемой.

**Схемы замещения четырехполюсника**

В радиотехнике для упрощения анализа и расчета электронных схем, содержащих активные элементы (транзисторы, микросхемы, лампы и т. д.) используются схемы замещения, которые строятся на основании систем уравнений четырехполюсника. На практике чаще всего применяют П- и Т-образную схему замещения (рис.89).

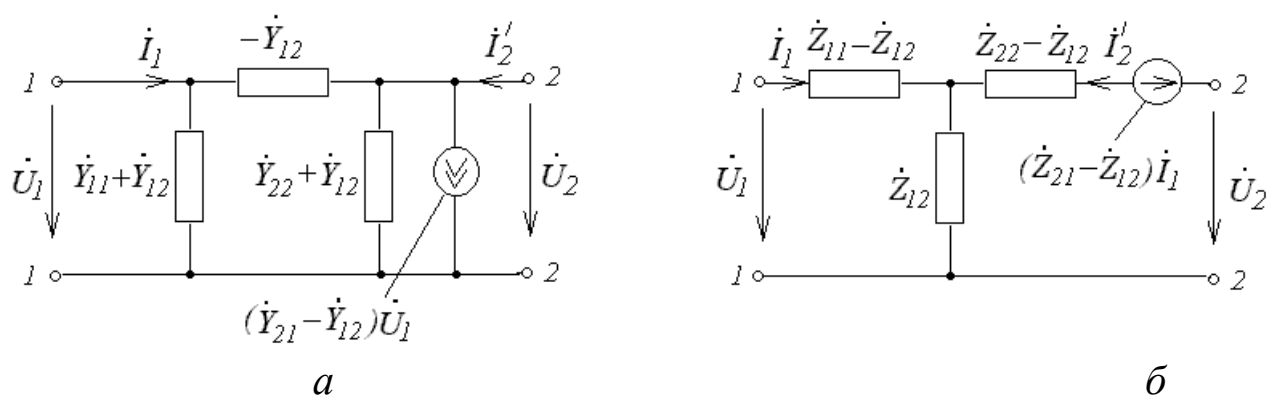


Рис.89

В соответствии с первым законом Кирхгофа для входного узла схемы (рис.89, а):

$$\dot{I}_1 = (\dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{12})\dot{U}_1 + (-\dot{Y}_{12})(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2.$$

Для выходного узла:

$$\dot{I}'_2 = (\dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{12})\dot{U}_2 + (-\dot{Y}_{12})(\dot{U}_2 - \dot{U}_1) + (\dot{Y}_{21} - \dot{Y}_{12})\dot{U}_1 = \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2.$$

Таким образом, для схемы (рис.89, а) справедлива система уравнений в  $\dot{Y}$  – параметрах. Зависимый источник тока сохраняется только в случае необратимого четырехполюсника. Для обратимого четырехполюсника  $\dot{Y}_{21} = \dot{Y}_{12}$  и источник тока отсутствует  $(\dot{Y}_{21} - \dot{Y}_{12})\dot{U}_1 = 0$ , т. е. схема замещения представляет собой пассивный П-образный четырехполюсник.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для входного контура схемы (рис.89, б):

$$\dot{U}_1 = (\dot{Z}_{11} - \dot{Z}_{12})\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}(\dot{I}'_2 + \dot{I}_1) = \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}'_2.$$

Аналогично для выходного контура:

$$\dot{U}_2 = (\dot{Z}_{21} - \dot{Z}_{12})\dot{I}_1 + (\dot{Z}_{22} - \dot{Z}_{12})\dot{I}'_2 + \dot{Z}_{12}(\dot{I}'_2 + \dot{I}_1) = \dot{Z}_{21}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{22}\dot{I}'_2.$$

Как и в предыдущем случае, для схемы (рис.89, б) справедлива система уравнений в  $\dot{Z}$  – параметрах. Зависимый источник напряжения сохраняется только в случае необратимого четырехполюсника. Для обратимого четырехполюсника  $\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{12}$  и источник э. д. с. отсутствует, т. е. схема замещения представляет собой пассивный Т-образный четырехполюсник.

Параметры схем замещения могут быть выражены через любую из систем параметров. Пассивный четырехполюсник в виде П-образной схемы замещения может быть преобразован в Т-образный четырехполюсник (и наоборот) по правилу преобразования треугольника сопротивлений в звезду и наоборот.

Лекция 17.

### ***Сложные четырехполюсники***

Сложным называется четырехполюсник, который может быть образован в результате соединения между собой нескольких, в частности двух, четырехполюсников. Параметры сложного четырехполюсника могут быть рассчитаны, если известны параметры каждого из составляющих четырехполюсников. В зависимости от схемы соединения четырехполюсников расчет параметров результирующего (эквивалентного) проводят, используя соответствующие уравнения в матричной форме.

#### ***1. Каскадное соединение четырехполюсников.***

На практике четырехполюсники часто соединены каскадно, т. е. вход последующего соединяется с выходом предыдущего (рис.90, а). Уравнения четырехполюсников в матричной форме  $\|\dot{A}\|$  имеют

вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{12} \\ \dot{A}_{21} & \dot{A}_{22} \end{pmatrix}_a \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_a = \|\dot{A}_a\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_a ;$$

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix}_b = \begin{pmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{12} \\ \dot{A}_{21} & \dot{A}_{22} \end{pmatrix}_b \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_b = \|\dot{A}_b\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_b .$$

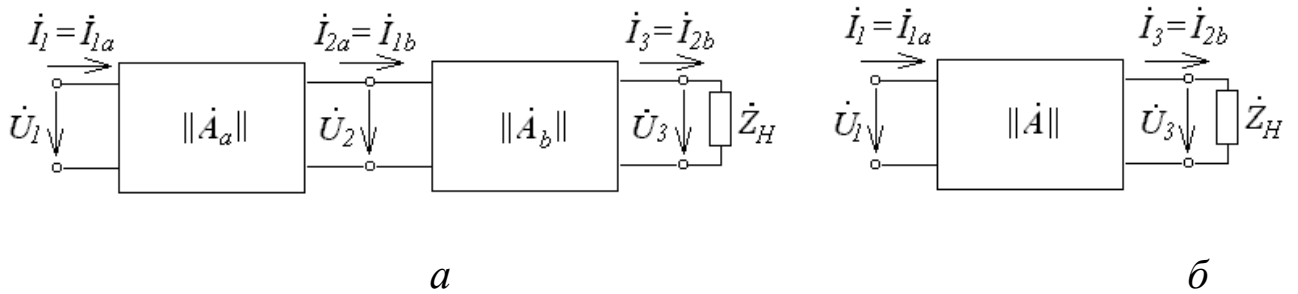


Рис.90

При каскадном соединении

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_{1a}, & \dot{U}_2 &= \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{1b}, & \dot{U}_3 &= \dot{U}_{2b}, \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_{1a}, & \dot{I}_{2a} &= \dot{I}_{1b}, & \dot{I}_3 &= \dot{I}_{2b}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \|\dot{A}_a\| \cdot \|\dot{A}_b\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}_b = \|\dot{A}\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{I}_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица  $\|\dot{A}\|$  результирующего (рис.90, б) четырехполюсника равна произведению матриц составляющих четырехполюсников:



$$\|\dot{A}\| = \|\dot{A}_a\| \cdot \|\dot{A}_b\|.$$

В случае каскадного соединения большего числа четырехполюсников, матрица эквивалентного четырехполюсника получается последовательным перемножением матриц каскадов.

Если обеспечить согласование выхода первого каскада с входом второго

$\dot{Z}_{2Ca} = \dot{Z}_{1Cb}$ , а также согласовать нагрузку с выходом второго каскада  $\dot{Z}_{2Cb} = \dot{Z}_H$ , то выражения для напряжений на зажимах каскадов примут следующий вид:

$$\dot{U}_2 = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{1Cb}}{\dot{Z}_{2Cb}}} \dot{U}_3 e^{\dot{g}_b}, \quad \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{1Ca}}{\dot{Z}_{2Ca}}} \dot{U}_2 e^{\dot{g}_a} \quad \text{и} \quad \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{1Ca}}{\dot{Z}_{2Cb}}} \dot{U}_3 e^{\dot{g}_a + \dot{g}_b}.$$

Аналогичные выражения получаются и для токов, протекающих через зажимы каскадов:

$$\dot{I}_{2a} = \dot{I}_{1b} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{2Cb}}{\dot{Z}_{1Cb}}} \dot{I}_3 e^{\dot{g}_b}, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{2Ca}}{\dot{Z}_{1Ca}}} \dot{I}_{2a} e^{\dot{g}_a} \quad \text{и}$$

$$\dot{I}_1 = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{2Cb}}{\dot{Z}_{1Ca}}} \dot{I}_3 e^{\dot{g}_a + \dot{g}_b}.$$

Таким образом, каскадное согласованное соединение четырехполюсников можно заменить одним эквивалентным, имеющим характеристические сопротивления равные входному  $\dot{Z}_{1Ca}$  и выходному  $\dot{Z}_{2Cb}$ , и постоянную передачи равную сумме постоянных передачи каскадов  $\dot{g} = \dot{g}_a + \dot{g}_b$ , т. е. собственное затухание  $a = a_a + a_b$  и коэффициент фазы  $b = b_a + b_b$ .

В общем случае постоянная передачи каскадной схемы, составленной из согласованных линейных четырехполюсников, равна сумме постоянных передачи четырехполюсников, составляющих эту схему:

$$\dot{g}_{\mathfrak{Z}} = a_{\mathfrak{Z}} + jb_{\mathfrak{Z}} = \sum_{i=1}^n \dot{g}_i.$$

## 2. Последовательное соединение четырехполюсников.

Последовательным называется соединение четырехполюсников, при котором как входные, так и выходные зажимы соединены последовательно (рис.91). При последовательном соединении четырехполюсников удобно воспользоваться системой уравнений в  $Z$ -параметрах, так как матрица токов для составных четырехполюсников одинакова.

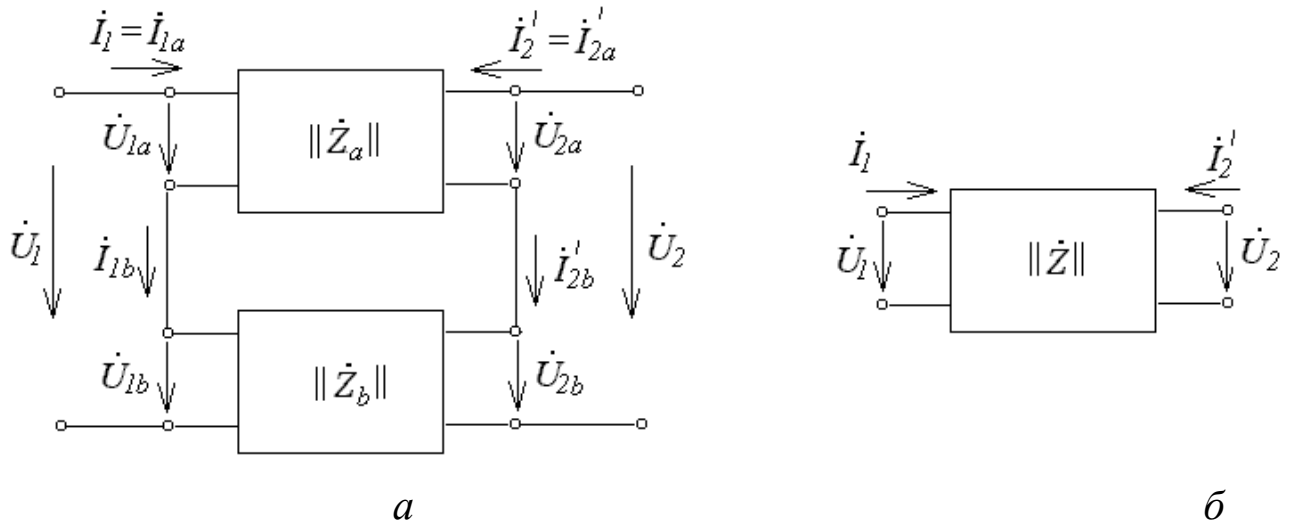


Рис.91

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}_a = \begin{Bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{Bmatrix}_a \cdot \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{Bmatrix}_a = \|\dot{Z}_a\| \cdot \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{Bmatrix}_a,$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}_b = \begin{Bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{Bmatrix}_b \cdot \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{Bmatrix}_b = \|\dot{Z}_b\| \cdot \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2' \end{Bmatrix}_b.$$

Результирующие напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсников:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b}, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b},$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b}, \quad \dot{I}'_2 = \dot{I}'_{2a} = \dot{I}'_{2b}.$$

Следовательно,

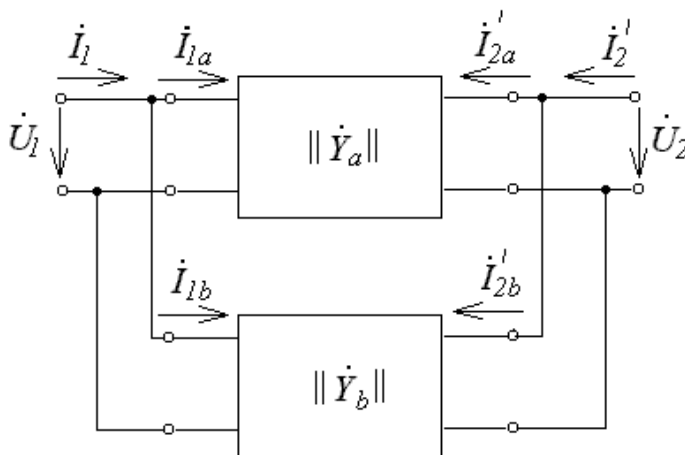
$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} = \left[ \begin{Bmatrix} \dot{Z}_a \\ \dot{Z}_b \end{Bmatrix} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Bmatrix},$$

т. е. матрица сопротивлений эквивалентного четырехполюсника (рис.91, б)

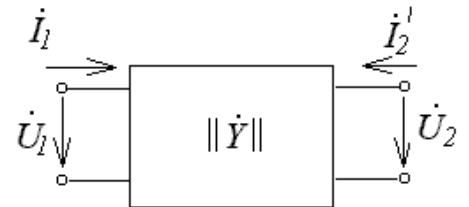
$$\|\dot{Z}\| = \|\dot{Z}_a\| + \|\dot{Z}_b\|.$$

### 3. Параллельное соединение четырехполюсников.

При параллельном соединении как входные, так и выходные зажимы составляющих четырехполюсников соединяются параллельно (рис.92).



*a*



*б*

Рис.92

Запишем уравнения исходных четырехполюсников (рис.92, а) в системе  $Y$ -параметров:

$$\begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Bmatrix}_a = \begin{Bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{Bmatrix}_a \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}_a = \|\dot{Y}_a\| \cdot \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}_a,$$

$$\left\| \begin{matrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{matrix} \right\|_b = \left\| \begin{matrix} \dot{Y}_{11} \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} \dot{Y}_{22} \end{matrix} \right\|_b \cdot \left\| \begin{matrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{matrix} \right\|_b = \left\| \dot{Y}_b \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{matrix} \right\|_b.$$

Напряжения и токи на входе и выходе эквивалентного четырех-  
полюсника (рис.92, б):

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b}, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b},$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}, \quad \dot{I}'_2 = \dot{I}'_{2a} + \dot{I}'_{2b}.$$

Следовательно,

$$\left\| \begin{matrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}'_2 \end{matrix} \right\| = \left[ \left\| \dot{Y}_a \right\| + \left\| \dot{Y}_b \right\| \right] \cdot \left\| \begin{matrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{matrix} \right\|.$$

Матрица проводимостей эквивалентного четырехполюсника  
(рис.92, б)

$$\left\| \dot{Y} \right\| = \left\| \dot{Y}_a \right\| + \left\| \dot{Y}_b \right\|.$$

### *3. Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников.*

В данном случае входные зажимы составляющих четырехполюсников соединяются последовательно, а выходные – параллельно (рис.93).

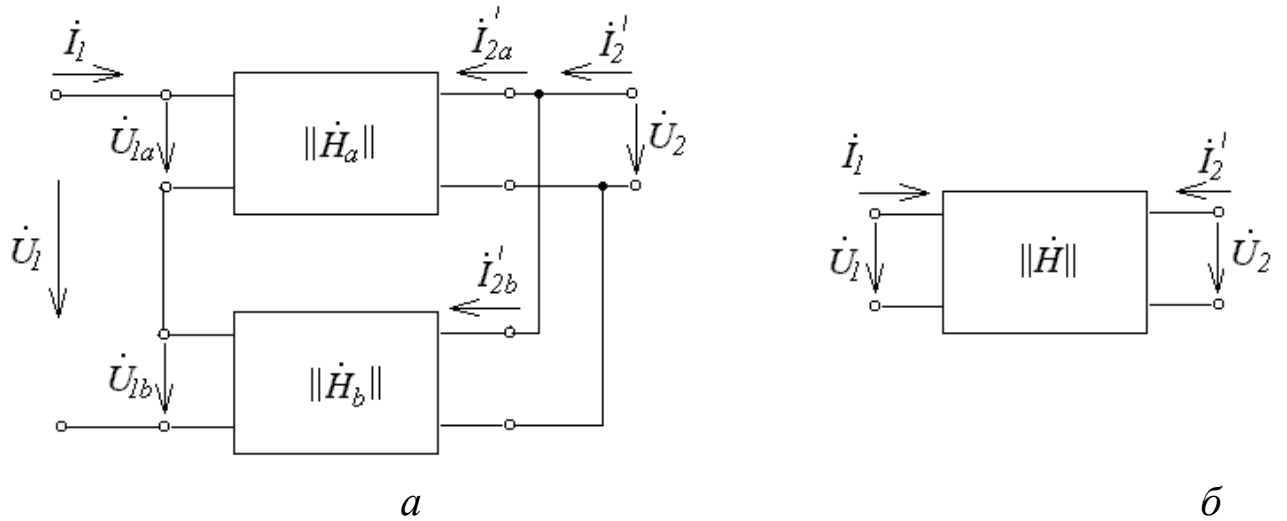


Рис.93

Запишем систему уравнений четырехполюсников в  $H$ -параметрах:

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{Bmatrix}_a = \begin{Bmatrix} \dot{H}_{11} & \dot{H}_{12} \\ \dot{H}_{21} & \dot{H}_{22} \end{Bmatrix}_a \cdot \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}_a = \begin{Bmatrix} \dot{H}_a \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}_a, \quad \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{Bmatrix}_b = \begin{Bmatrix} \dot{H}_b \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}_b.$$

Для эквивалентного четырехполюсника (рис.93, б) выполняются соотношения:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} + \dot{U}_{1b}, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} = \dot{U}_{2b},$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1b}, \quad \dot{I}_2' = \dot{I}_{2a}' + \dot{I}_{2b}'.$$

Таким образом,

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{Bmatrix} = \left[ \begin{Bmatrix} \dot{H}_a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{H}_b \end{Bmatrix} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix},$$

т. е. матрица  $H$ -параметров эквивалентного четырехполюсника:

$$\begin{Bmatrix} \dot{H} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{H}_a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{H}_b \end{Bmatrix}.$$

#### 4. Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников.

В рассматриваемой схеме (рис.94, а) входные зажимы составляющих четырехполюсников соединены параллельно, а выходные – последовательно.

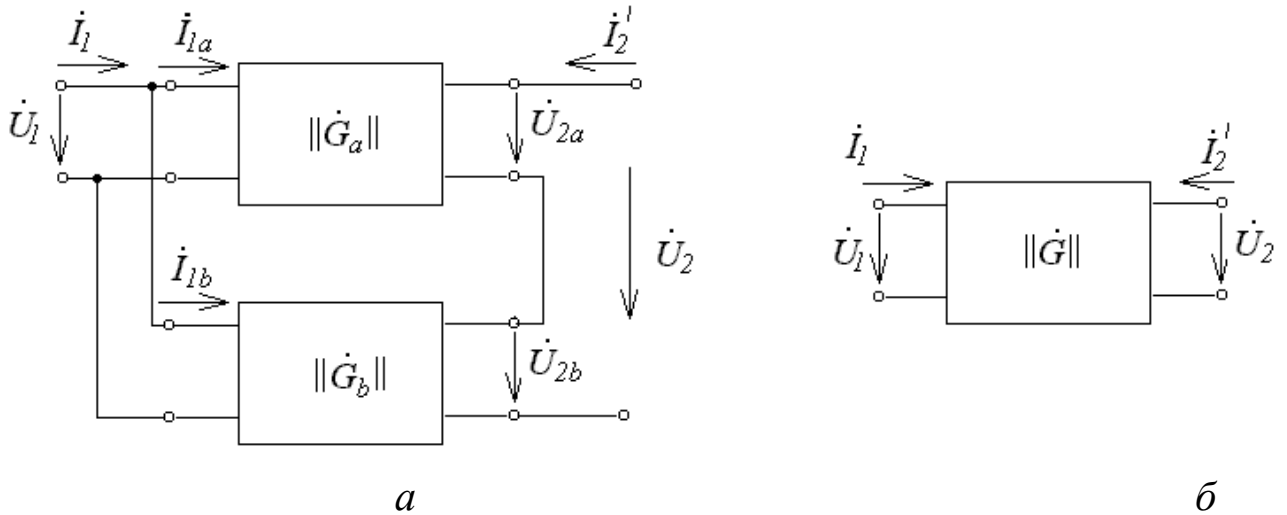


Рис.94

Уравнения четырехполюсников в данном случае удобно представить в системе  $G$ -параметров.

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} \dot{G}_{11} & \dot{G}_{12} \\ \dot{G}_{21} & \dot{G}_{22} \end{pmatrix}_a \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{pmatrix}_a = \|\dot{G}_a\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{pmatrix}_a, \quad \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}_b = \|\dot{G}_b\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{pmatrix}_b.$$

Из схемы (рис.94, а) следует, что

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1a} = \dot{U}_{1b}, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2a} + \dot{U}_{2b},$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1a} + \dot{I}_{1b}, \quad \dot{I}_2' = \dot{I}_{2a}' = \dot{I}_{2b}'.$$

Для эквивалентного четырехполюсника (рис.94, б) получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \|\dot{G}\| \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{pmatrix},$$

где

$$\|\dot{G}\| = \|\dot{G}_a\| + \|\dot{G}_b\|.$$

Следует отметить, что правила нахождения матриц сложных четырехполюсников выполняются только для регулярных соединений, т. е. таких, в которых токи входящие и выходящие в каждой паре зажимов равны.

### ***Мостовой четырехполюсник***

При анализе и синтезе пассивных симметричных четырехполюсников широко используются мостовые четырехполюсники. Доказано, что для любого пассивного симметричного четырехполюсника можно найти эквивалентный мостовой (рис.95, а).

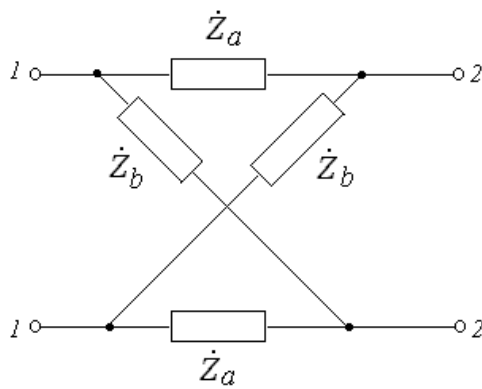
Мостовой четырехполюсник можно представить, как параллельное соединение двух простых четырехполюсников (рис.95, б). Уравнения, связывающие напряжения и токи на зажимах этих четырехполюсников имеют вид:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 - 2\dot{Z}_a \dot{I}'_{2a}, \quad \dot{I}_{1a} = -\dot{I}'_{2a}$$

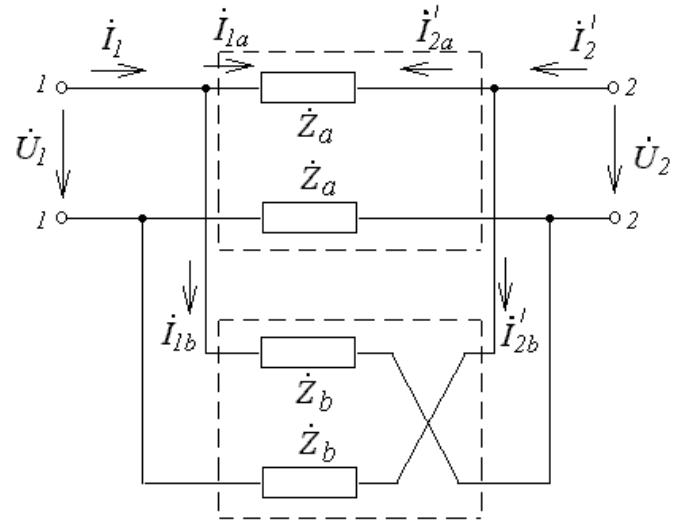
для первого четырехполюсника и

$$\dot{U}_1 = -\dot{U}_2 + 2\dot{Z}_b \dot{I}'_{2b}, \quad \dot{I}_{1b} = \dot{I}'_{2b}$$

для второго.



a



б

Рис.95

С учетом предыдущих выражений, можно получить уравнения для элементарных четырехполюсников

$$\begin{cases} \dot{I}_{1a} = \frac{1}{2\dot{Z}_a} \dot{U}_1 - \frac{1}{2\dot{Z}_a} \dot{U}_2, \\ \dot{I}'_{2a} = -\frac{1}{2\dot{Z}_a} \dot{U}_1 + \frac{1}{2\dot{Z}_a} \dot{U}_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{I}_{1b} = \frac{1}{2\dot{Z}_b} \dot{U}_1 + \frac{1}{2\dot{Z}_b} \dot{U}_2, \\ \dot{I}'_{2b} = \frac{1}{2\dot{Z}_b} \dot{U}_1 + \frac{1}{2\dot{Z}_b} \dot{U}_2. \end{cases}$$

Матрица проводимости мостового четырехполюсника, как сумма матриц проводимостей, имеет вид:

$$\|\dot{Y}\| = \begin{bmatrix} \frac{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b}{2\dot{Z}_a\dot{Z}_b} & \frac{\dot{Z}_a - \dot{Z}_b}{2\dot{Z}_a\dot{Z}_b} \\ \frac{\dot{Z}_a - \dot{Z}_b}{2\dot{Z}_a\dot{Z}_b} & \frac{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b}{2\dot{Z}_a\dot{Z}_b} \end{bmatrix}.$$

По известным коэффициентам матрицы проводимостей можно найти матрицу  $A$ -параметров



$$\|\dot{A}\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b}{\dot{Z}_b - \dot{Z}_a} & \frac{2\dot{Z}_a\dot{Z}_b}{\dot{Z}_b - \dot{Z}_a} \\ 2 & \frac{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b}{\dot{Z}_b - \dot{Z}_a} \end{array} \right\|.$$

Характеристические параметры симметричного мостового четырехполюсника определяются по формулам:

$$\dot{Z}_{CM} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}}} = \sqrt{\dot{Z}_a\dot{Z}_b}, \quad ch\dot{g} = \dot{A}_{11} = \dot{A}_{22} = \frac{\dot{Z}_a + \dot{Z}_b}{\dot{Z}_b - \dot{Z}_a},$$

$$sh\dot{g} = \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}} = \frac{2\sqrt{\dot{Z}_a\dot{Z}_b}}{\dot{Z}_b - \dot{Z}_a}.$$

После несложных преобразований можно получить

$$th\frac{\dot{g}}{2} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_a}{\dot{Z}_b}}.$$

Коэффициент передачи по напряжению мостового четырехполюсника при согласованной нагрузке

$$\dot{K}_{CM} = \frac{\dot{Z}_H}{\dot{A}_{11}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}} = \frac{\dot{Z}_{CM}}{\dot{A}_{11}\dot{Z}_{CM} + \dot{A}_{12}}.$$

Подставив в эту формулу значения первичных параметров, получим:

$$\dot{K}_{CM} = \frac{\dot{Z}_{CM} - \dot{Z}_a}{\dot{Z}_{CM} + \dot{Z}_a}.$$

Мостовой четырехполюсник обладает интересными свойствами в том случае, когда элементы  $\dot{Z}_a$  и  $\dot{Z}_b$  реактивны и имеют разные

знаки. Характеристическое сопротивление при этом оказывается вещественным:

$$\dot{Z}_{CM} = \sqrt{\dot{Z}_a \dot{Z}_b} = \sqrt{|X_a| \cdot |X_b|} = R_C.$$

Коэффициент передачи по напряжению реактивного мостового четырехполюсника при согласованной нагрузке

$$\dot{K}_{CM}(j\omega) = \frac{\dot{Z}_{CM} - jX_a}{\dot{Z}_{CM} + jX_a} = \frac{R_C - jX_a}{R_C + jX_a}.$$

Отсюда видно, что модуль коэффициента передачи  $|\dot{K}_{CM}(j\omega)| = 1$  и, значит, такой четырехполюсник пропускает все частоты без изменения их амплитуд.

Фазовый сдвиг напряжений на входе и выходе определяется из формулы:

$$\varphi_M = \arctg \frac{2X_a R_C}{X_a^2 - R_C^2}$$

и, следовательно, является функцией частоты. Такие цепи называются четырехполюсниками *чисто фазового сдвига* и используются при синтезе цепей по заданным частотным характеристикам.

## Литература

1. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. М.: Энергия, 1969.
2. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. М.: Энергия, 1972.
3. Попов В. П. Основы теории цепей. М.: Высш. шк., 1985.
4. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М.: Высш. шк., 1973.
5. Лосев А. К. Теория линейных электрических цепей. М.: Высш. шк., 1987.
6. Добротворский И. Н. Теория электрических цепей. М.: Радио и связь, 1989.
7. Теория линейных электрических цепей. Б.П. Афанасьев, О.Е. Гольдин, И.Г. Кляцкин, Г.Я. Пинес и др. Учеб. пособие для радиотехнических специальностей вузов. М.: Высш. шк., 1973.
8. Калашников А. М., Степук Я. В. Основы радиотехники и радиолокации. М.: 1972.
9. Белоцерковский Г. Б. Основы радиотехники и антенны. М.: Сов. радио, 1968.
10. Лосев А. К. Линейные радиотехнические цепи. М.: Высш. шк., 1971.
11. Добротворский И.Н. Лабораторный практикум по основам теории цепей. М.: Высш. Шк., 1986.
12. Баканов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники. М.: Радио и связь, 1989.
13. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. - М.: Высш. шк., 1972.

## Содержание

Лекция 1. Введение. Электрическая цепь	
3	
Лекция 2. Основные понятия, относящиеся к схеме электрической цепи	18
Лекция 3. Основные методы расчета линейных электрических цепей	23
Лекция 4. Линейные электрические цепи при гармоническом воздействии	34
Лекция 5. Метод комплексных амплитуд	37
Лекция 6. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме	46

Лекция 7. Мощность в цепи гармонического тока	52
Лекция 8. Избирательные (резонансные) цепи	60
Лекция 9. Параллельный колебательный контур	78
Лекция 10. Сложные схемы параллельных контуров	87
<b>Лекция 11. Колебательные системы. Связанные контуры</b>	
Лекция 12. Настройка связанных контуров	99
Лекция 13. Резонансные кривые связанных контуров	104
Лекция 14. Основы теории четырехполюсников	114
Лекция 15. Характеристические (вторичные) параметры четырехполюсника	122
Лекция 16. Эквивалентные схемы пассивных линейных четырехполюсников	134
Лекция 17. Сложные четырехполюсники	138
Литература	1