1. Элементы теории сигналов

ЛЕКЦИЯ 1 от 11.02.2015

1.1. Основные понятия

Сигнал — физический процесс, отображающий сообщения и служащий для передачи этого сообщения по каналу связи.

В общем случае описывается:

$$u(x, y, z, t)$$

Классификация:

а) По аргументам:
  1) Пространственный: $u(x, y)$ или $u(x, y, z)$.
  2) Временной: $u(t)$.

б) По области определения:
  1) Финитный.
  2) Инфинитный.

в) По области определения и области значения:
  1) Аналоговый (непрерывная совокупность значений).
  2) Дискретный (дискретный ряд значений).
  3) Квантованый (имеется конечное число возможных значений).
  4) Цифровой (дискретный квантованный сигнал).

1.2. Математическое представление сигнала

Сигнал представляется в виде комплексного числа:

$$u(t) = u_1 + iu_2$$
$$u = u_0 e^{i\varphi}$$

Пусть:

$\{u_i\}$ — идеальный сигнал
$\{\tilde{u}_i\}$ — полученный сигнал

1.2.1. Сравнение сигналов

Интенсивность — $|u|^2$
Среднеквадратичное отклонение — $d = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(u_i - \tilde{u}_i)^2}$
Максимальное отклонение — $d = MAX_i|u_i - \tilde{u}_i|$
Пиковое отношение сигнал/шум (PSNR) — $d = 10\lg\frac{255^2 N^2}{\sum_{i,j=0}^{N-1}\left|u_{i,j} - \tilde{u}_{i,j}\right|^2}$
Используется для анализа отличий изображений. Чем больше, тем лучше.

1.2.2. Разложение по базисным функциям

Сигнал можно представить в виде разложения по базовым функциям:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \varphi_k(t)$$

Это позволяет сократить объем, необходимый для представления сигнала. Например, при разложении монохроматического сигнала в ряд Фурье, получается всего один коэффициент.

Виды базисных функций:

а) Гармонический функции: $\varphi_k(t) = e^{2\pi ikt}$
б) Функции отсчёта: $\varphi_k(t) = \mathrm{sinc}(2\pi T(t - \frac{k}{2T}))$; $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
в) Функции Уолша

1.2.3. Принцип суперпозиции

Описывает ситуацию, когда в одной точке имеет место сразу несколько сигналов.

$$u(t) = u_1 + u_2$$

Геометрическая сумма. Складываются не интенсивности сигналов, а сами сигналы. Если сигналы некогерентные, то происходит сложение интенсивност сигналов.

1.2.4. Дискретное представление сигналов (дискретизация)

Дискретизация — замена непрерывного сигнала последовательностью чисел, являющихся представлением этого сигнала по некоторому базису.

Также необходимо восстановить сигнал, то есть получить значения в промежуточных точках. Возникает вопрос, насколько полученный сигнал соответст реальному непрерывному сигналу. Ответ на этот вопрос дает теорема отсчетов.

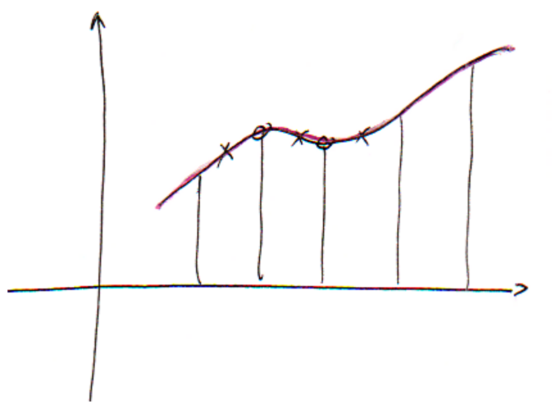

Рис. 1 — Простая дискретизация

x — отстутсвует;

o — насколько точно.

Теорема отсчётов (Котельникова) (Найквиста)

Сигналы, спектр Фурье которых равен нулю за пределами некоторого интервала $(-F, F)$, могут быть точно восстановлены по своим отсчетам, взятым с шагом $\Delta t = \frac{1}{2F}$ (частота Найквиста), по следующей формуле:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k\Delta t)\mathrm{sinc}(2\pi F(t - \frac{K}{2F}))$$

Шаг: $\Delta t = \frac{1}{2F}$ — частота Найквиста.

Спектр Фурье

Пусть задана функция: $u(t)$

Её спектр Фурье определяется следующим образом:

$$v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{2\pi i f t} dt$$

Обратное преобразование Фурье:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-\pi i f t} df$$

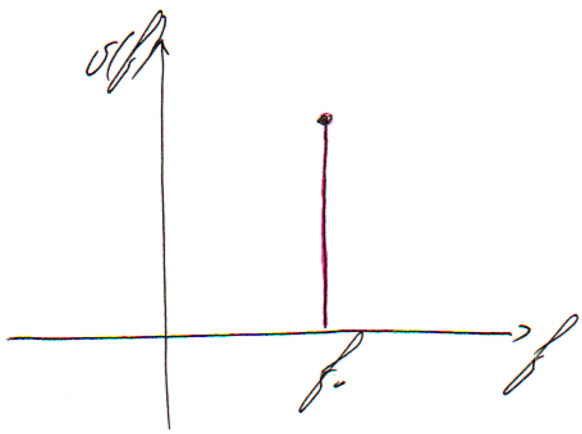

Рис. 2 — Спектр Фурье для одной частоты

Ошибки дискретизации

Если условие не выполнено (спектр сигнала является бесконечным).

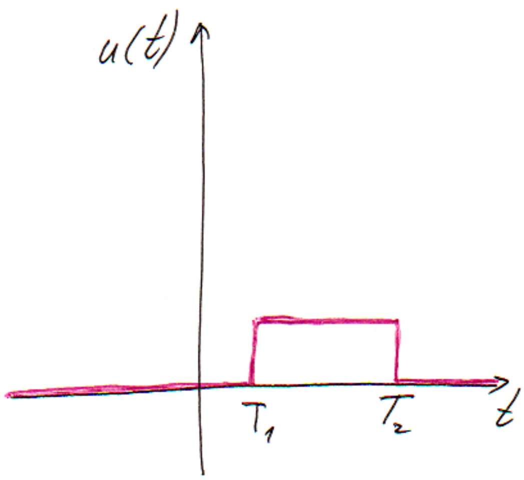

Рис. 3 — Простой сигнал — прямолинейный импульс

Возникает ряд эффектов, особенно по краям.

Если изображение неподвижно, возникает муар-эффект.

Строб-эффект (колесо вращается не в ту сторону).

ЛЕКЦИЯ 2 от 11.02.2015

Устранение ошибок дискретизации

Чтобы избежать этих эффектов, необходимо выполнить условие наличия интервала. Для этого применяются оконные функции.

Оконная функция пропускает частоты только в определенном диапазоне. Она приводит сигнал к определенному виду, что позволяет избегать ошибок дискретизации. Неправильно выбранная оконная функция приводит к возникновен эффекта Гиббса (например, прямоугольное окно).

— Окно Хэннинга:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + cos(\pi f/F), & |f| \leq F \\ 0, & |f| > F \end{cases}$$

— Окно Кайзера:

$$w(t) = \begin{cases} I_0(\alpha\sqrt{1 - (\frac{f}{F})^2}), & |f| \leq F \\ 0, & |f| > F \end{cases}$$

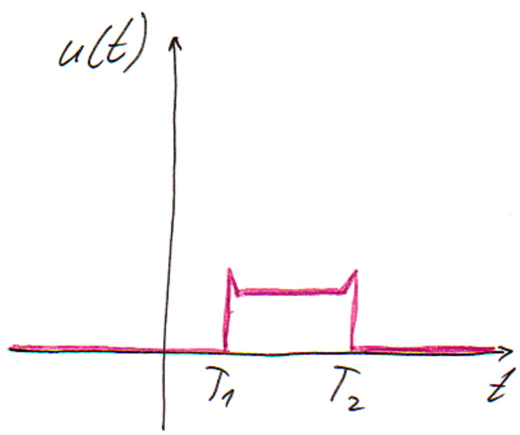

Рис. 4 — Муар-эффект

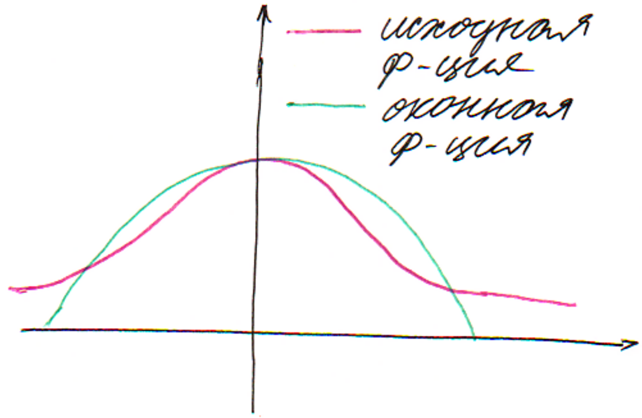

Рис. 5 — Окно дискретизации

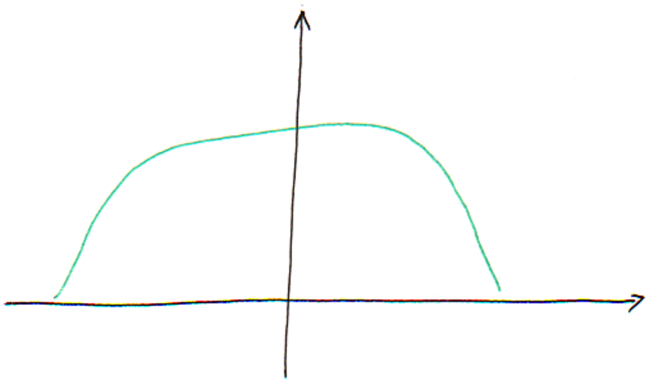

Рис. 6 — Окно Кайзера

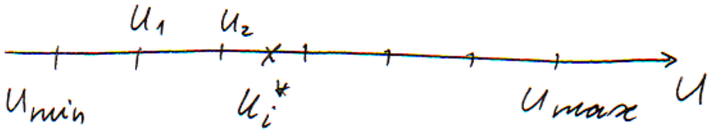

Рис. 7 — Квантование сигналов

1.2.5. Квантование сигналов

Процесс квантования выполняется в два этапа: разбиение всей области значений на некоторые интервалы (интервалы квантования), на каждом интервале выбирается так называемый представитель этого сигнала. Возникают следующие вопросы: как выбрать размер интервала, как выбрать представителя квантованного сигнала на каждом из этих интервалах.

Ошибка, которая получается в результате замены сигнала на представителя: $\varepsilon = |u - u^*|$

$D(\varepsilon_i)$ - функция ошибки.

Полная ошибка, которая получается в результате замены непрерывного представления квантованным:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \int_{u_{i-1}}^{u_i} D(\varepsilon_i) p(u) du$$

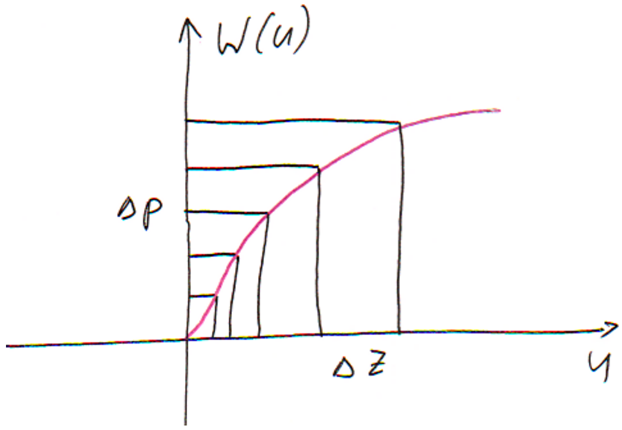

Рис. 8 — Нелинейное предискажение сигнала

Если интенсивность малая, то перепады яркости анализируются лучше, чем если интенсивность большая. Неравномерная шкала. Прежде, чем выполнять операцию квантования, выполняют нелинейное предискажения $w(u)$. Результат этого предыскажения используется для построения равномерной шкалы квантован

После введения функции предыскажения ошибка приобретает следующий вид:

$$Q = \int_{u_{min}}^{u_{max}} p(u) D(\frac{\Delta p}{w'(u)}) du$$

1.2.6. Пороговый критерий

На практике используется пороговый критерий для выбора функции.

$$D = \begin{cases} 0, & \Delta p \leq \Delta_{\text{пор}} \\ 1, & |\Delta p| > \Delta_{\text{пор}} \end{cases}$$

Значений Q будет меньше, если представитель берется в середине интервала, а количество разбиений зависит от того, в каком виде выбирается пороговое значения$\Delta porog$.

Способы выбора порогового значения:

а) Δпор $= const$; $M = \frac{u_{max} - u_{min}}{2\Delta_{\text{пор}}}$

б) Закон Вебера-Фехнера. $\Delta_{\text{пор}} = \sigma_0 u$. Учитывает восприятие человеком. Функция нелинейного предыскажения будет иметь вид:

$$\frac{w(u) - w(u_{min})}{w(u_{max}) - w(u_{max})} = \frac{\ln(\frac{u}{u_{min}})}{\ln q}$$
$$q = \frac{u_{max}}{u_{min}}$$
$$M = \frac{\ln q}{\sigma_0}$$

Прежде, чем выполнять квантование, первый шаг делают по логарифмическ закону. На этапе восстановления происходит сначала восстановление этого сигнала, затем выполняется операция потенциирования. Для звука выполняется квантование по закону, очень близкому к закону Вебера-Фехнера. Также используе логарифмирование. Для человеческого глаза:

$$\sigma_0 \sim 1.5 - 2$$
$$M \sim 230$$

1.2.7. Спектральное квантование сигналов

В ряде случаев удобнее оперировать не самим сигналом, а каким-то его преобразованным аналогом. Одним из самых распространенных преобразований сигнала является получение спектра сигнала. Получение спектра может выполнять различным образом. В теории обычно используется преобразование Фурье.

Преобразование Фурье

Одно из самых распространённых преобразований сигналов — получение спектра сигналов. Часто используется преобразование Фурье.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{2\pi i f t} dt$$

Основное свойство, которое нам потребуется для дальнейшей работы — так называемая теорема о свёртке.

Теорема о свёртке

Если у нас есть две функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$, то сверткой этих функций называется:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t') u_2(t - t') dt'$$

Теорема заключается в том, что Фурье-образ свёртки равен произведению Фурье-образов свёртываемых функций.

$$P(t) = F(w(t))$$
$$V_1(t) = F(u_1(t))$$
$$V_2(t) = F(u_2(t))$$

Преобразование Уолша

Функция Уолша

Для простоты определения будем считать, что аргумент функции лежит в пределах $0 \leq z \leq 1$:

Функция имеет вид:

$$w_\alpha(z) = (-1)\sum_{k=0}^{n} \lambda_k z_k$$

Где $z = \sum_{k=1}^{n} z_k 2^{-k}$ есть коэффициенты представления параметра

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 2^{k-1}$$

Для функции Уолша также справедлива теорема о свертке.

Преобразование Уолша

Тогда преобразование будет иметь следующий вид:

$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k w_k(t)$ — представление функции $x(t)$ через коэффициенты.

$$C_k = \int_0^1 x(t) w_k(t) dt$$

Дискретное преобразование Фурье (ДФП, DFT)

Дискретизация имеет следующий вид:

$$\{u(i)\},$$

где $i = 0, 1, \ldots, N-1$

Тогда спектр может быть получен следующим образом:

Прямое

$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-\frac{2\pi ikn}{N}}$

Обратное

$u(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) e^{\frac{2\pi ikn}{N}}$

Связь ДФП и АПФ

а) $v(k)\frac{\Delta t}{N}$

б) $\Delta t \Delta f = \frac{1}{N}$

Основные свойства ДПФ

Эффект близнецов

$v(0) = v(N)$

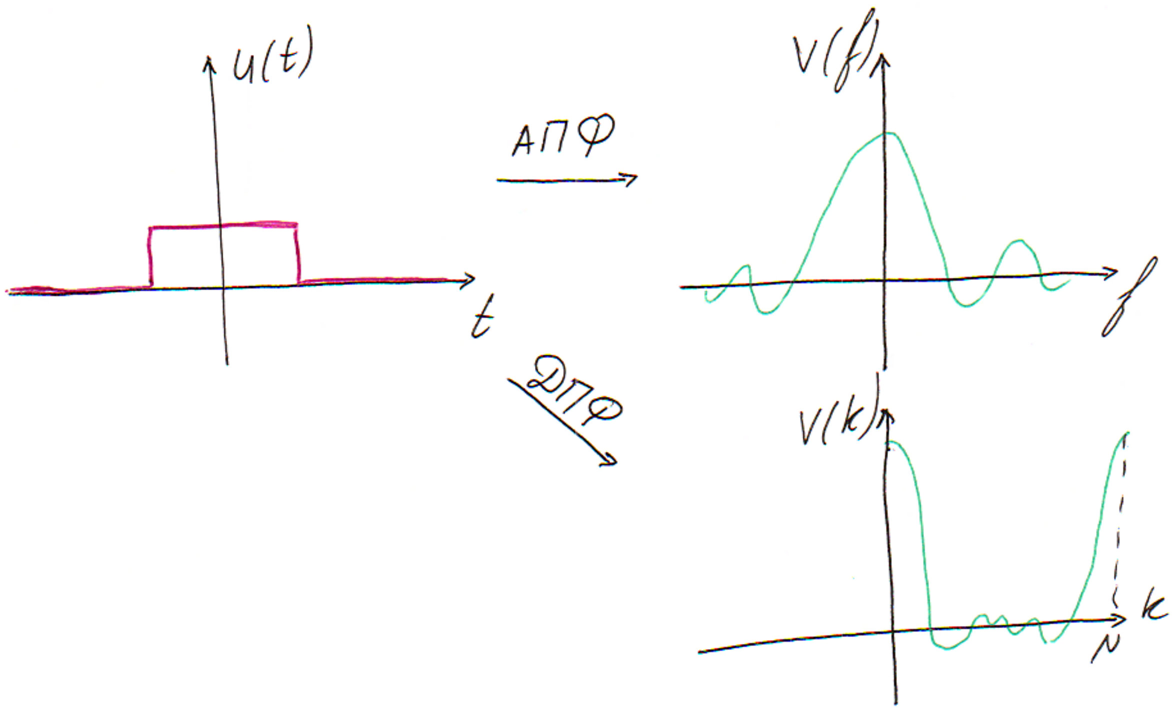

Рис. 9 — Эффект близнецов

Перед выполнением преобразования можно умножить $u(t) * (-1)^t$. Тогда эффект исчезнет.

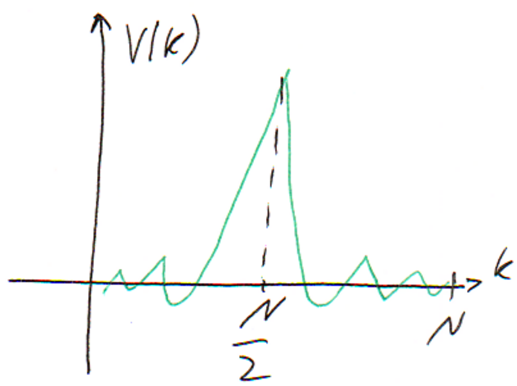

Рис. 10 — Исправление эффекта близнецов

Сдвиг

Спектр сдвигается на k_0

$$u(n)e^{\frac{2\pi i k_0 n}{N}} \to v(k - k_0)$$
$$u(n - n_0) \to v(k)e^{-\frac{2\pi i k n_0}{N}}$$

2. Линейные и нелинейные фильтры

Процесс преобразования сигналов по тому или иному алгоритму принято называть *фильтрацией*. Сам алгоритм называется *фильтром*.

2.1. Линейные фильтры

$$\tilde{u}(t) = \hat{T}[u(t)]$$

Линейный фильтр — такой, который осуществляет преобразование со следующим условием: действие фильтра на линейную комбинацию двух сигналов равно линейной комбинации результатов работы.

$$\hat{T}(au_1(t) + bu_2(t)) = a\hat{T}(u_1(t)) + b\hat{T}(u_2(t))$$

ЛИС-фильтры (инвариантные сдвигу)

Если мы рассмотрим результат фильтрации сигнала, сдвинутого на постоянную величину, то мы получим сдвиг на постоянную величину.

$$\hat{T}(u(t-\tau)) = \tilde{u}(t-\tau)$$

δ-функция Дирака

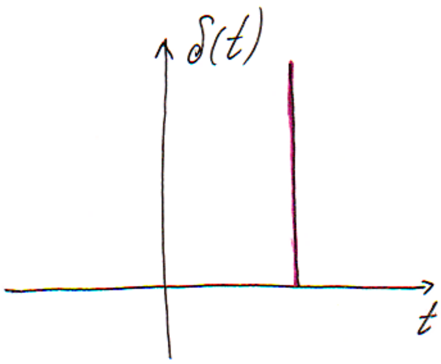

Рис. 11 — δ-функция Дирака

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Фильтрующие свойства δ-функции:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t')\delta(t-t')dt'$$

$$\tilde{u}(t) = \hat{T}(u(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t') \underbrace{\hat{T}(\delta(t-t'))d}_{H(t-t')}$$

То есть, фактически, свойства этого линейного фильтра определяются тем, как фильтр действует на одиночный сигнал. Функция импульсного отклика. Таким образом, любой линейный фильтр может быть описан как свертка исходного сигнала (сигнала на входе фильтра) и функции, которая определяет свойства линейного фильтра (функция импульсного отклика).

$$\tilde{u}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t') \underbrace{H(t-t')dt'}_{\text{spf}}$$

Фурье-образ функции импульсного отклика получил название передаточной функции:

$$h(f) = F(H(t))$$

2.1.1. Дискретное представление свёртки

Линейная свёртка:

$$\tilde{u}(n) = \sum_{l=0}^{N-1} u(l)H(n-l)$$

Теорема о свертке не будет выполняться для этой функции. Теорема о свертке выполняется только для циклических сверток:

$$\tilde{w}(n) = \sum_{l=0}^{N-1} w(l)H(n-l) \mod N$$

Для выполнения свертки используется следующий механизм. Дополнение нулями до удвоенного значения:

$$u(l) \to u_g(l) = \begin{cases} u(l) & 0 \le l < N \\ 0 & N \le l < 2N-1 \end{cases}$$

$$H(l) \to H_g(l) = \begin{cases} H_g(l) & 0 \le l < N \\ 0 & N \le l < 2N-1 \end{cases}$$