

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА

КАФЕДРА «ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»



КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

# Цифровая обработка сигналов

лектор

Филиппов Михаил Владимирович

Инфлянская, Карабатырова, Мушиц  
ИУ7-71

22 февраля 2015 г.

# Оглавление

1	Элементы теории сигналов . . . . .	3
1.1	Основные понятия . . . . .	3
1.2	Математическое представление сигнала . . . . .	3
1.2.1	Сравнение сигналов . . . . .	4
1.2.2	Разложение по базисным функциям . . . . .	4
1.2.3	Принцип суперпозиции . . . . .	4
1.2.4	Дискретное представление сигналов (дискретизация) .	5
1.2.5	Квантование сигналов . . . . .	8
1.2.6	Пороговый критерий . . . . .	9
1.2.7	Спектральное квантование сигналов . . . . .	11
2	Линейные и нелинейные фильтры . . . . .	15
2.1	Линейные фильтры . . . . .	15
2.1.1	Дискретное представление свёртки . . . . .	16
2.2	Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ, FFT) . . .	18
2.3	Особенности вычисления свёрток . . . . .	20
2.3.1	Последовательная свёртка . . . . .	20
2.3.2	Секционная свертка . . . . .	20
2.4	Виды линейных фильтров . . . . .	21
2.4.1	Классификация . . . . .	21

# 1. Элементы теории сигналов

ЛЕКЦИЯ №1. 11.02.2015

## 1.1. Основные понятия

**Сигнал** — физический процесс, отображающий сообщения и служащий для передачи этого сообщения по каналу связи.

В общем случае описывается:

$$u(x, y, z, t)$$

Классификация:

а) По аргументам:

1) Пространственный:  $u(x, y)$  или  $u(x, y, z)$ .

2) Временной:  $u(t)$ .

б) По области определения:

1) Финитный.

2) Инфинитный.

в) По области определения и области значения:

1) Аналоговый (непрерывная совокупность значений).

2) Дискретный (дискретный ряд значений).

3) Квантованный (имеется конечное число возможных значений).

4) Цифровой (дискретный квантованный сигнал).

## 1.2. Математическое представление сигнала

Сигнал представляется в виде комплексного числа:

$$u(t) = u_1 + iu_2$$

$$u = u_0 e^{i\varphi}$$

Пусть:

$\{u_i\}$  — идеальный сигнал

$\{\tilde{u}_i\}$  — полученный сигнал

### 1.2.1. Сравнение сигналов

**Интенсивность** —  $|u|^2$

**Среднеквадратичное отклонение** —  $d = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (u_i - \tilde{u}_i)^2}$

**Максимальное отклонение** —  $d = \max_i |u_i - \tilde{u}_i|$

**Пиковое отношение сигнал/шум (PSNR)** —  $d = 10 \lg \frac{255^2 N^2}{\sum_{i,j=0}^{N-1} |u_{i,j} - \tilde{u}_{i,j}|^2}$

Используется для анализа отличий изображений. Чем больше, тем лучше.

### 1.2.2. Разложение по базисным функциям

Сигнал можно представить в виде разложения по базовым функциям:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \varphi_k(t)$$

Это позволяет сократить объем, необходимый для представления сигнала. Например, при разложении монохроматического сигнала в ряд Фурье, получается всего один коэффициент.

Виды базисных функций:

- а) Гармонический функции:  $\varphi_k(t) = e^{2\pi i k t}$
- б) Функции отсчёта:  $\varphi_k(t) = \text{sinc}(2\pi T(t - \frac{k}{2T}))$ ;  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
- в) Функции Уолша

### 1.2.3. Принцип суперпозиции

Описывает ситуацию, когда в одной точке имеет место сразу несколько сигналов.

$$u(t) = u_1 + u_2$$

Геометрическая сумма. Складываются не интенсивности сигналов, а сами сигналы. Если сигналы некогерентные, то происходит сложение интенсивностей сигналов.

#### 1.2.4. Дискретное представление сигналов (дискретизация)

**Дискретизация** — замена непрерывного сигнала последовательностью чисел, являющихся представлением этого сигнала по некоторому базису.

Также необходимо восстановить сигнал, то есть получить значения в промежуточных точках. Возникает вопрос, насколько полученный сигнал соответствует реальному непрерывному сигналу. Ответ на этот вопрос дает теорема отсчетов.

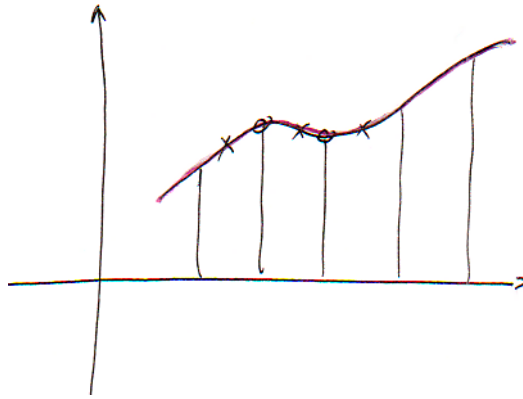


Рис. 1.1 — Простая дискретизация

**x** — отсутствует;

**o** — насколько точно.

#### Теорема отсчётов (Котельникова) (Найквиста)

Сигналы, спектр Фурье которых равен нулю за пределами некоторого интервала  $(-F, F)$ , могут быть точно восстановлены по своим отсчетам, взятым с шагом  $\Delta t = \frac{1}{2F}$  (частота Найквиста), по следующей формуле:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k\Delta t) \text{sinc}\left(2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)\right)$$

Шаг:  $\Delta t = \frac{1}{2F}$  — частота Найквиста.

#### Спектр Фурье

Пусть задана функция:  $u(t)$

Её спектр Фурье определяется следующим образом:

$$v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{2\pi i f t} dt$$

Обратное преобразование Фурье:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(f)e^{-2\pi i f t} df$$

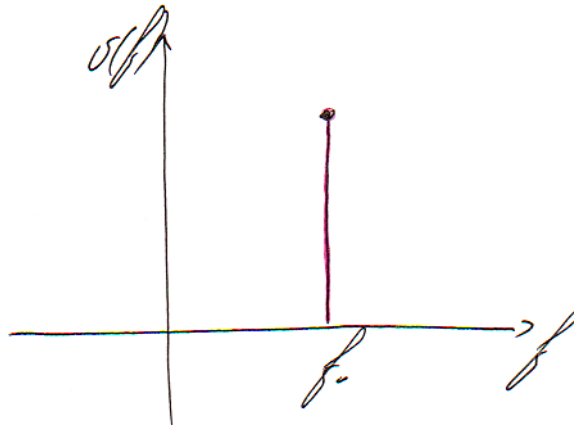


Рис. 1.2 — Спектр Фурье для одной частоты

### Ошибки дискретизации

Если условие не выполнено (спектр сигнала является бесконечным).

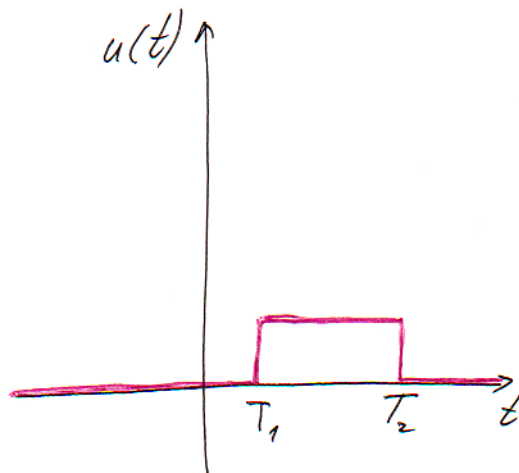


Рис. 1.3 — Простой сигнал — прямолинейный импульс

Возникает ряд эффектов, особенно по краям.

Если изображение неподвижно, возникает муар-эффект.

Строб-эффект (колесо вращается не в ту сторону).

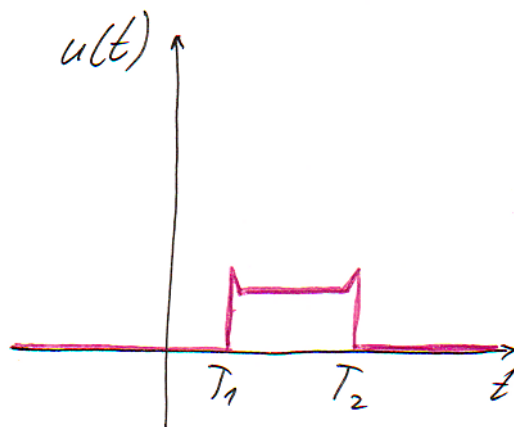


Рис. 1.4 — Муар-эффект

## Устранение ошибок дискретизации

Чтобы избежать этих эффектов, необходимо выполнить условие наличия интервала. Для этого применяются оконные функции.

Оконная функция пропускает частоты только в определенном диапазоне. Она приводит сигнал к определенному виду, что позволяет избегать ошибок дискретизации. Неправильно выбранная оконная функция приводит к возникновению эффекта Гиббса (например, прямоугольное окно).

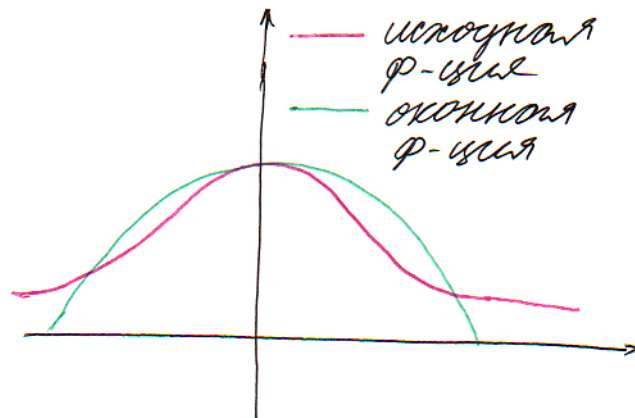


Рис. 1.5 — Окно дискретизации

— Окно Хэннинга:

$$w(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi f/F)), & |f| \leq F \\ 0, & |f| > F \end{cases}$$

— Окно Кайзера:

$$w(f) = \begin{cases} I_0(\alpha \sqrt{1 - (f/F)^2}), & |f| \leq F \\ 0, & |f| > F \end{cases}$$

### 1.2.5. Квантование сигналов

Процесс квантования выполняется в два этапа: разбиение всей области значений на некоторые интервалы (интервалы квантования), на каждом интервале выбирается так называемый представитель этого сигнала. Возникают



следующие вопросы: как выбрать размер интервала, как выбрать представителя квантованного сигнала на каждом из этих интервалах.

Ошибка, которая получается в результате замены сигнала на представителя:  $\varepsilon = |u - u^*|$

$D(\varepsilon_i)$  - функция ошибки.

Полная ошибка, которая получается в результате замены непрерывного представления квантованным:

$$Q = \sum_{i=1}^N \int_{u_{i-1}}^{u_i} D(\varepsilon_i) p(u) du$$

Если интенсивность малая, то перепады яркости анализируются лучше, чем если интенсивность большая. Неравномерная шкала. Прежде, чем выполнять операцию квантования, выполняют нелинейное предискажения  $w(u)$ . Результат этого предискажения используется для построения равномерной шкалы квантования. После введения функции предискажения ошибка приобретает следующий вид:

$$Q = \int_{u_{min}}^{u_{max}} p(u) D\left(\frac{\Delta p}{w'(u)}\right) du$$

### 1.2.6. Пороговый критерий

На практике используется пороговый критерий для выбора функции.

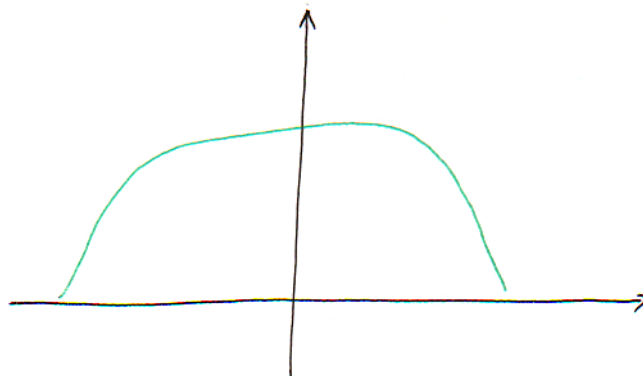


Рис. 1.6 — Окно Кайзера

$$D = \begin{cases} 0, & \Delta p \leq \Delta_{\text{пор}} \\ 1, & |\Delta p| > \Delta_{\text{пор}} \end{cases}$$

Значений  $Q$  будет меньше, если представитель берется в середине интервала, а количество разбиений зависит от того, в каком виде выбирается пороговое значения  $\Delta_{\text{пор}}$ .

Способы выбора порогового значения:

а)  $\Delta_{\text{пор}} = \text{const}; M = \frac{u_{\text{max}} - u_{\text{min}}}{2\Delta_{\text{пор}}}$

б) Закон Вебера-Фехнера.  $\Delta_{\text{пор}} = \sigma_0 u$ . Учитывает восприятие человеком.

Функция нелинейного предискажения будет иметь вид:

$$\frac{w(u) - w(u_{\text{min}})}{w(u_{\text{max}}) - w(u_{\text{min}})} = \frac{\ln(\frac{u}{u_{\text{min}}})}{\ln q}$$

$$q = \frac{u_{\text{max}}}{u_{\text{min}}}$$

$$M = \frac{\ln q}{\sigma_0}$$

Прежде, чем выполнять квантование, первый шаг делают по логарифмическому закону. На этапе восстановления происходит сначала восстановление этого сигнала, затем выполняется операция потенцирования. Для звука выполняется квантование по закону, очень близкому к закону Вебера-Фехнера. Также используется логарифмирование. Для человеческого глаза:

$$\sigma_0 \sim 1.5 - 2$$

$$M \sim 230$$

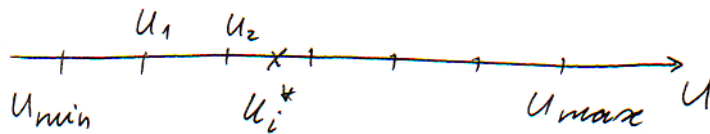


Рис. 1.7 — Квантование сигналов

### 1.2.7. Спектральное квантование сигналов

В ряде случаев удобнее оперировать не самим сигналом, а каким-то его преобразованным аналогом. Одним из самых распространенных преобразований сигнала является получение спектра сигнала. Получение спектра может выполняться различным образом. В теории обычно используется преобразование Фурье.

#### Преобразование Фурье

Одно из самых распространённых преобразований сигналов — получение спектра сигналов. Часто используется преобразование Фурье.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{2\pi i f t} dt$$

Основное свойство, которое нам потребуется для дальнейшей работы — так называемая теорема о свёртке.

#### Теорема о свёртке

Если у нас есть две функции  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , то сверткой этих функций называется:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t')u_2(t - t')dt'$$

Теорема заключается в том, что Фурье-образ свёртки равен произведению Фурье-образов свёртываемых функций.

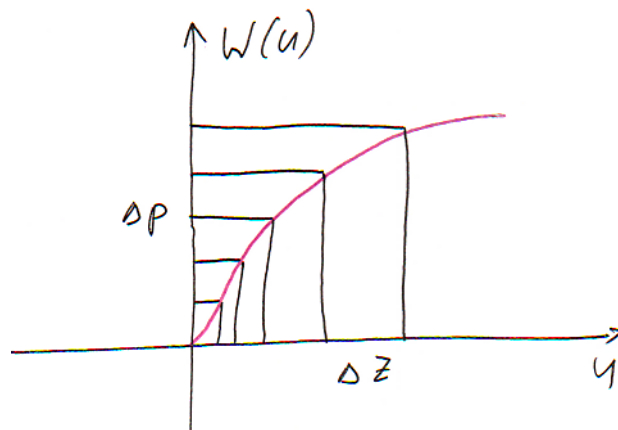


Рис. 1.8 — Нелинейное предискажение сигнала

$$P(t) = F(w(t))$$

$$V_1(t) = F(u_1(t))$$

$$V_2(t) = F(u_2(t))$$

## Преобразование Уолша

### Функция Уолша

Для простоты определения будем считать, что аргумент функции лежит в пределах  $0 \leq z \leq 1$ :

Функция имеет вид:

$$w_\alpha(z) = (-1) \sum_{k=0}^n \lambda_k z_k$$

Где  $z = \sum_{k=1}^n z_k 2^{-k}$  есть коэффициенты представления параметра

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k 2^{k-1}$$

Для функции Уолша также справедлива теорема о свертке.

### Преобразование Уолша

Тогда преобразование будет иметь следующий вид:

$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k w_k(t)$  — представление функции  $x(t)$  через коэффициенты.

$$C_k = \int_0^1 x(t) w_k(t) dt$$

## Дискретное преобразование Фурье (ДФП, DFT)

Дискретизация имеет следующий вид:

$$\{u(i)\},$$

где  $i = 0, 1, \dots, N - 1$

Тогда спектр может быть получен следующим образом:

### Прямое

$$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

### Обратное

$$u(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

### Связь ДФП и АПФ

а)  $v(k) \triangleq \frac{t}{N}$

б)  $\Delta t \Delta f = \frac{1}{N}$

### Основные свойства ДПФ

#### Эффект близнецов

$$v(0) = v(N)$$

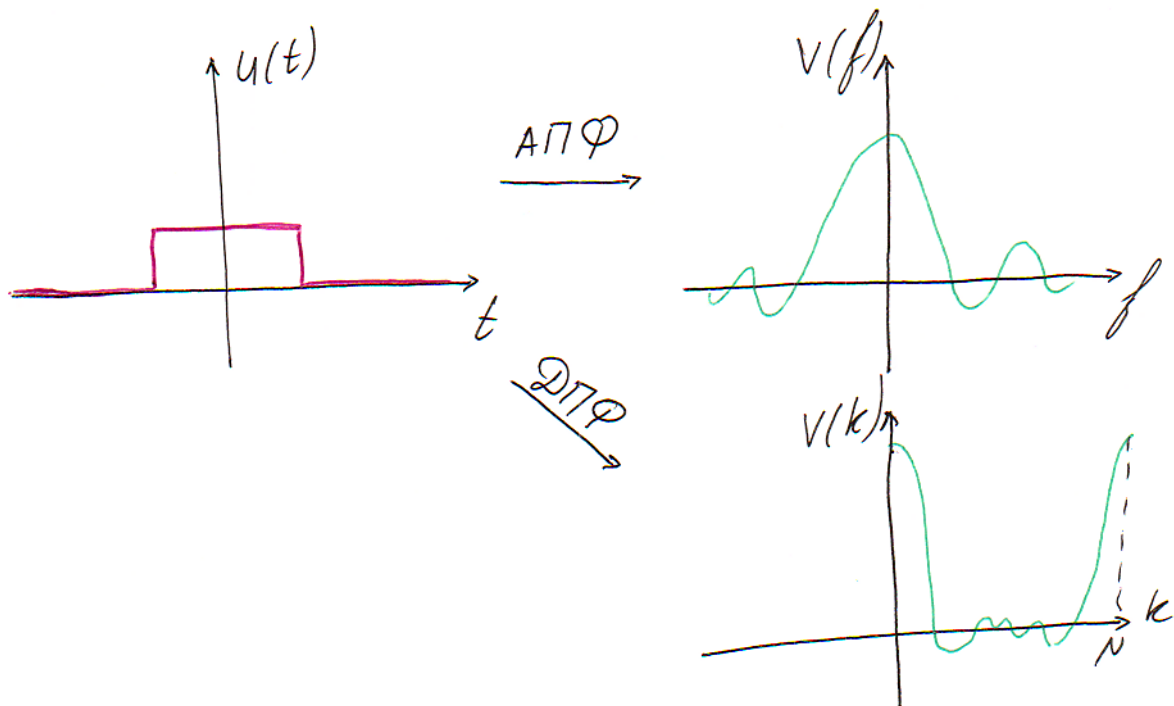


Рис. 1.9 — Эффект близнецов

Перед выполнением преобразования можно умножить  $u(t) * (-1)^t$ . Тогда эффект исчезнет.

### Сдвиг

Спектр сдвигается на  $k_0$

$$u(n)e^{\frac{2\pi i k_0 n}{N}} \rightarrow v(k - k_0)$$

$$u(n - n_0) \rightarrow v(k)e^{-\frac{2\pi i k n_0}{N}}$$

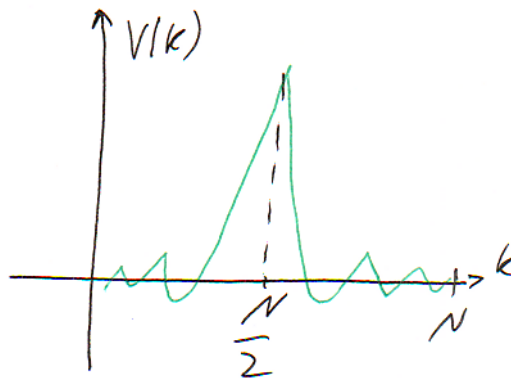


Рис. 1.10 — Исправление эффекта близнецов

## 2. Линейные и нелинейные фильтры

Процесс преобразования сигналов по тому или иному алгоритму принято называть *фильтрацией*. Сам алгоритм называется *фильтром*.

### 2.1. Линейные фильтры

$$\tilde{u}(t) = \hat{T}[u(t)]$$

**Линейный фильтр** — такой, который осуществляет преобразование со следующим условием: действие фильтра на линейную комбинацию двух сигналов равно линейной комбинации результатов работы.

$$\hat{T}(au_1(t) + bu_2(t)) = a\hat{T}(u_1(t)) + b\hat{T}(u_2(t))$$

#### ЛИС-фильтры (инвариантные сдвигу)

Если мы рассмотрим результат фильтрации сигнала, сдвинутого на постоянную величину, то мы получим сдвиг на постоянную величину.

$$\hat{T}(u(t - \tau)) = \tilde{u}(t - \tau)$$

#### $\delta$ -функция Дирака

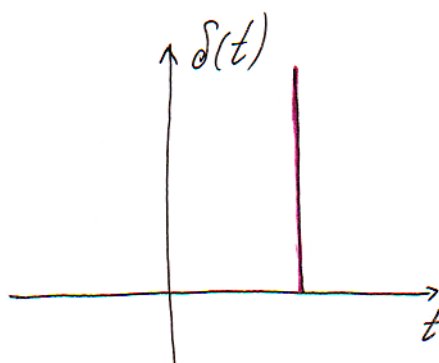


Рис. 2.1 —  $\delta$ -функция Дирака

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Фильтрующие свойства  $\delta$ -функции:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t') \delta(t - t') dt'$$

$$\tilde{u}(t) = \hat{T}(u(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t') \underbrace{\hat{T}(\delta(t - t'))}_{H(t-t')} dt'$$

То есть, фактически, свойства этого линейного фильтра определяются тем, как фильтр действует на одиночный сигнал. Функция импульсного отклика. Таким образом, любой линейный фильтр может быть описан как свертка исходного сигнала (сигнала на входе фильтра) и функции, которая определяет свойства линейного фильтра (функция импульсного отклика).

$$\tilde{u}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t') \underbrace{H(t - t')}_{\text{spf}} dt'$$

Фурье-образ функции импульсного отклика получил название передаточной функции:

$$h(f) = F(H(t))$$

### 2.1.1. Дискретное представление свёртки

Линейная свёртка:

$$\tilde{u}(n) = \sum_{l=0}^{N-1} u(l) H(n - l)$$

Теорема о свертке не будет выполняться для этой функции. Теорема о свертке выполняется только для циклических сверток:

$$\tilde{w}(n) = \sum_{l=0}^{N-1} w(l) H(n - l) \mod N$$

Для выполнения свертки используется следующий механизм. Дополнение нулями до удвоенного значения:



$$u(l) \rightarrow u_g(l) = \begin{cases} u(l) & 0 \leq l < N \\ 0 & N \leq l < 2N - 1 \end{cases}$$

$$H(l) \rightarrow H_g(l) = \begin{cases} H_g(l) & 0 \leq l < N \\ 0 & N \leq l < 2N - 1 \end{cases}$$

### ЛЕКЦИЯ №3. 18.02.2015

Большинство разработанных фильтров, как правило, созданы для единой частотной области. Для вычисления дискретных преобразований был разработан так называемый быстрый алгоритм, который позволяет вычислять с меньшими временными затратами, чем вычисления “в лоб”.

## 2.2. Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ, FFT)

Преобразование Фурье

$$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

Выполняется примерно за  $\sim N^2$ . Для изображений  $\sim N^4$ .

В 1965 году был получен алгоритм Кули-Тьюки, который существенно повысил эффективность преобразований.

Идея составления таких алгоритмов

Если  $N$  — четное. Если мы представим  $n = 2m$ , то  $m = 0, \dots, N/2$ . После выполнения преобразования сумма разбивается на две части:

$$v(k) = \sum_{m=0}^{N_1-1} u(2m) e^{-\frac{2\pi i k m}{N_1}} + \sum_{m=0}^{N_1-1} u(2m+1) e^{-\frac{2\pi i k m}{N_1}} e^{-\frac{2\pi i k}{N}}$$

при  $N_1 = N/2$

Децимация по времени. Если  $0 \leq k \leq N_1 - 1$ , то соотношение можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(k) &= S_0(k) + S_1(k) e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \\ v(k + N_1) &= S_0(k) - S_1(k) e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \end{aligned}$$

Эту формулу называют “бабочка”. Связано с геометрической интерпретацией (рисунок 1).

Если  $N = 2^P$ , то эту процедуру можно продолжать дальше. В итоге в формуле  $S_0$  и  $S_1$  являются элементами сигнала, а не суммами.

Эффективность алгоритма  $\sim N \log_2 N$ . Все преобразования являются тождественными, поэтому ошибка не вносится. Для двумерного преобразования Фурье  $\sim N^2 \log_2 N$ .

Когда  $u(n)$  - действительные числа, используется несколько групп алгоритмов

Совмещенные алгоритмы

$$v(k) = V * (N - k)$$

Пусть есть отсчеты некоторого сигнала  $u$ . Из этих отсчетов можно сделать единый эффективный или совмещенный сигнал.

$\{u(n)\}$  и

$$\{w(n)\} \Rightarrow Q(n) = u(n) + iw(n)$$

В данном случае это есть просто мнимая единица. Если мы теперь вычислим преобразование Фурье от этого совмещенного сигнала

$$\kappa(k) = \text{БПФ}(Q(n))$$

$$v(k) = \text{БПФ}(u(n)) = \frac{\kappa(k) + \kappa^*(N-k)}{2}$$

$$\gamma(k) = \text{БПФ}(w(n)) = i \frac{\kappa(k) - \kappa^*(N-k)}{2}$$

Вторая группа алгоритмов, которая используется при обработке изображений, в частности, видеоряда с общей областью (перекрытием) у двух кадров. При наличии общих областей можно делать упрощения. Такого рода алгоритмы получили название «рекуррентные алгоритмы».

Рекуррентные алгоритмы

Сигнал  $u(n)$ , спектр  $v(k)$ , сигнал, сдвинутый на  $p$  относительно исходного.

$$u(n) \leftrightarrow v(k)$$

$$0 \leq n \leq N - 1$$

$$u_p(n) \leftrightarrow V_p(k)$$

Спектр сдвинутого сигнала выражается относительно спектра исходного сигнала следующим образом:

$$v_p(k) = v(k)e^{-\frac{2\pi i p k}{N}} + \left\{ \sum_{n=0}^{P-1} [u(n+N) - u(n)] e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right\} e^{-\frac{2\pi i k p}{N}}$$

Частный случай при  $p = 1$ , что часто бывает при обработке видеосигнала, - скользящий алгоритм. Имеет следующий вид:

$$v_1(k) = \{v(k) + u(N) - u(0)\} e^{-\frac{2\pi i k}{N}}$$

### 2.3. Особенности вычисления свёрток

Рассмотрим еще один довод в пользу использования спектральных преобразований, а именно так называемую последовательную свёртку.

#### 2.3.1. Последовательная свёртка

Общий вид может быть представлен таким образом: (рисунок 2) на входе сигнал, первый фильтр, второй фильтр и т. д. На выходе получается некоторый преобразованный сигнал.

В частотной области за счет свойства свёртки (Фурье образ свёртки равен произведению свернутых функций) нет необходимости вычислять работу каждого фильтра в отдельности.

$$w(n) = F^{-1}[\tilde{\Phi}_1(f)\tilde{\Phi}_2(f)\dots\tilde{\Phi}_e(f)V(f)]$$

$F^{-1}$  - обратное преобразование Фурье

#### 2.3.2. Секционная свертка

Когда функция импульсного отклика имеет гораздо меньше отсчетов, чем количество отсчетов сигнала.

$$N_c \gg N_u$$

Нет необходимости приводить отсчеты к одному и тому же значению путем добавления нулей. Можно использовать секционную свертку.

Есть исходный сигнал  $u(n)$ . Он разбивается на секции.

$u_l(n)$  -  $l$ -ая секция.

$$u(n) : u_l(n) = \begin{cases} u(n), & lN_u \leq n < (l+1)N_u \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Сигнал на выходе фильтра:

$$w(n) = \sum_l \left( \sum_{n'=0}^{N_c-1} u_l(n') h(n - n') \right)$$

$$u(n) = \sum_l u_l(n)$$

### **Секционная свертка с перекрытием и без перекрытия.**

Количество отсчетов в результате свертки  $w(n)$  будет больше, чем количество отсчетов  $N_u$ .

Секционная свертка с перекрытием - свертка с суммированием перекрывающихся значений.

Формула свертки:

$$w(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) h(k - n)$$

Из соотношения свертки следует, что результат свертки двух функций, лежащих в пределах  $0 \leq n \leq N-1$ , лежит в  $0 \leq k \leq 2N-2$ . Отсюда возникает перекрытие.

Обычно перекрывающиеся части гораздо меньше, чем неперекрывающиеся. Поэтому чаще используют алгоритм суммирования без перекрытия, когда перекрывающиеся части просто обрезают.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ №2**

### **2.4. Виды линейных фильтров**

#### **2.4.1. Классификация**

Идея разработки фильтров возникла задолго до начала использования свёртки. Для описания фильтров использовались дифференциальные уравнения. Классификация строилась на дискретном представлении результатов дифференциальных уравнений.

Сигнал на выходе фильтра выражается через две суммы. Первая сумма представляет только отсчеты исходного сигнала (отсчеты функций импульсного ввода). Вторая сумма вносит элемент рекурсии, поскольку это отсчеты выходного сигнала.

$$y(i) = \sum_0^K b_k x(i - k) - \sum_{l=1}^L a_l y(i - l)$$

В зависимости от наличия или отсутствия второго слагаемого принято рассматривать фильтры двух видов:

- а) Нерекурсивные (КИХ-фильтры): все  $a_l = 0$
- б) Рекурсивные (БИХ-фильтры): хотя бы один  $a_l \neq 0$