

ELASTİK DALGA YAYINIMI

**Prof.Dr. Eşref YALÇINKAYA
(2016 - 3. DERS)**

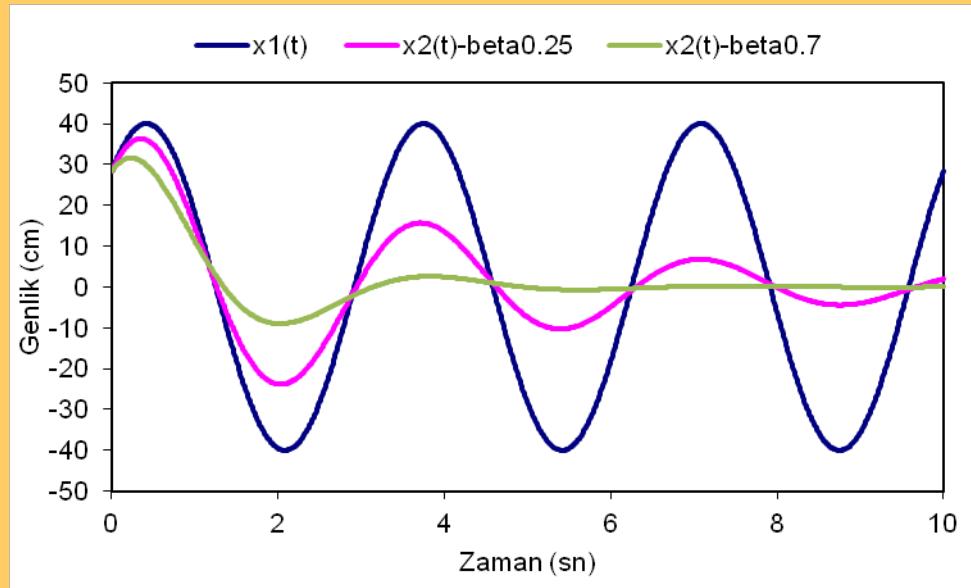
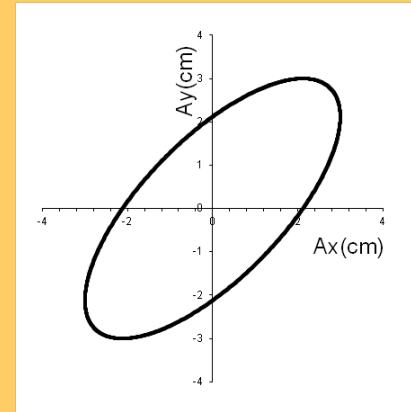
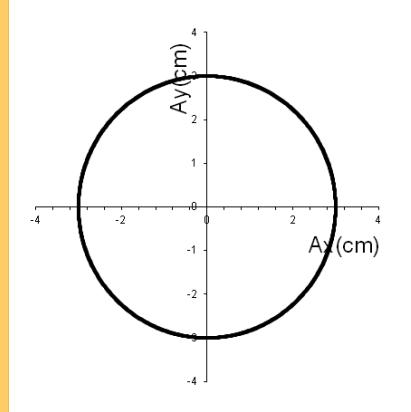
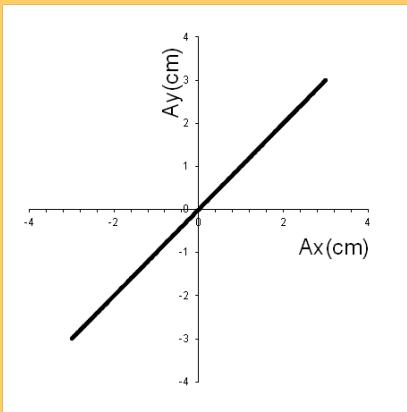
Geçtiğimiz ders;

- Düzgün dairesel hareket
- Sönümlü harmonik hareket
- Sönümlü

Bu derste;

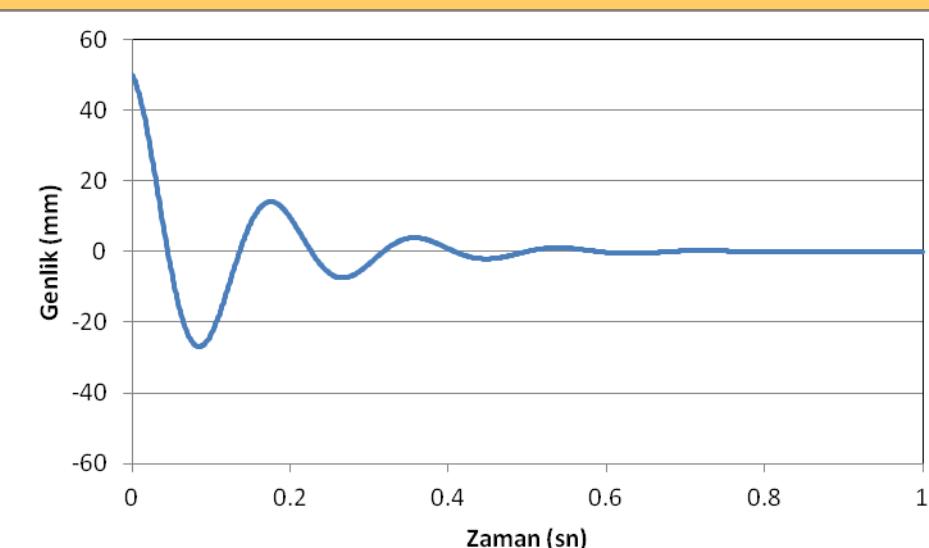
- Sönümlü zoruna hareket
- Rezonans
- Sismograf teorisi

2. haftanın ödevi:



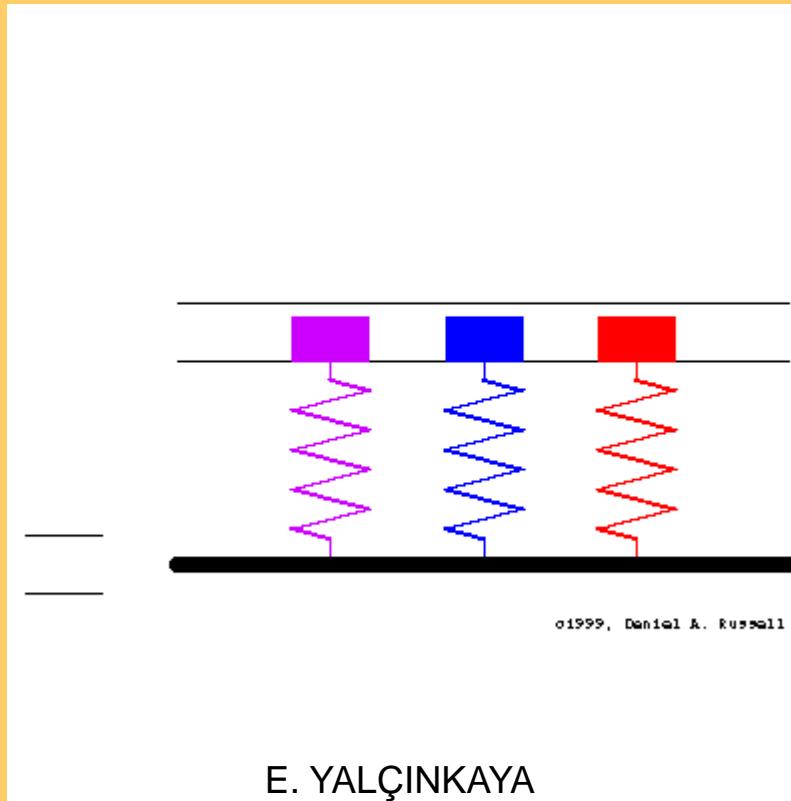
2. haftanın ödevi:

$m=$	4	kg
$k=$	5000	N/m
$dr=$	0.2	
$A=$	50	mm
$c=$	56.56854	Ns/m
$cc=$	282.8427	Ns/m
$\beta=$	7.071068	Ns/kgm
$\omega_0=$	35.35534	rad/s
$f_0=$	5.626977	Hz
$\omega_b=$	34.64102	rad/s
$f_b=$	5.513289	Hz
		$Q= 2.489465$



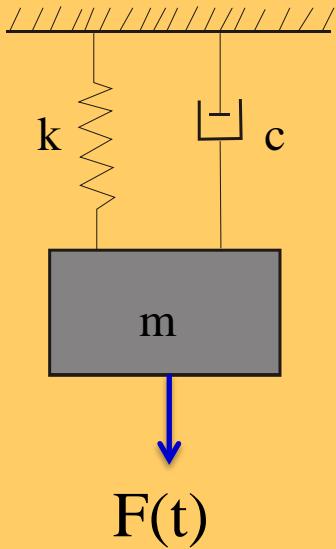
Zoruna Titreşimler

Bundan önce sönümlü ve sönümsüz serbest titreşimleri incelemiştik. Şimdi, sisteme dışarıdan bir kuvvet ile sürekli enerji sağlanan **zoruna titreşimleri** inceleyeceğiz.



Zoruna titreşim denklemi ; $F = ma$

$$-kx - c\dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Zorlayıcı kuvvet

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

F_0 : Dış hareketin genliği

ω : Dış hareketin açısal frekansı

Genel çözüm :

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

*Homojen denklem
çözümü*

Özel çözüm

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$x_c(t)$; **Homojen denklem çözümü, başlangıç şartlarına bağlı geçici etkileri temsil eder (geçici çözüm). Bu çözümün ihtiyacı ettiği terimler zamanla söner.**

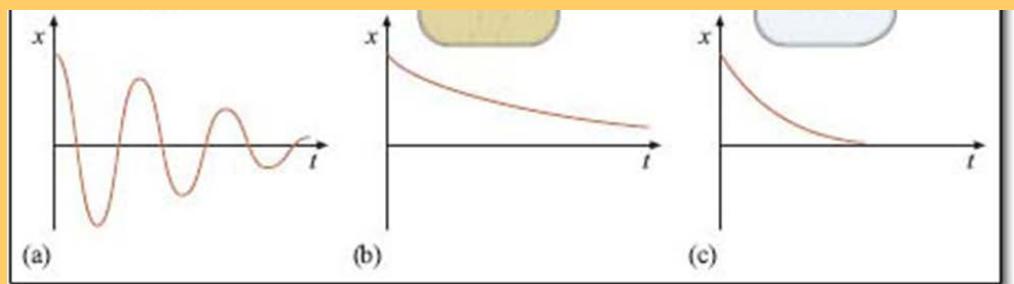
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x_c(t) = e^{-\beta t} [Be^{(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + Ce^{(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}]$$

$\zeta < 1$ Underdamped

$\zeta > 1$ Overdamped

$\zeta = 1$ Critically damped



$x_p(t)$; *Özel çözüm, homojen olmayan denklem çözümü, kararlı durumu temsil eder (durağan çözüm).* $t \gg 1/\beta$ olduğu hallerde $\mathbf{x}(t \gg 1/\beta) = x_p(t)$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$$

$$-m\omega^2 D \cos(\omega t - \delta) - c\omega D \sin(\omega t - \delta) + kD \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$D[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \delta) - c\omega \sin(\omega t - \delta)] = F_0 \cos(\omega t)$$

$$D = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

$$D = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\beta m\omega}{m\omega_0^2 - m\omega^2}\right)$$

$$D = \frac{\omega_0^2 F_0 / k}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$$

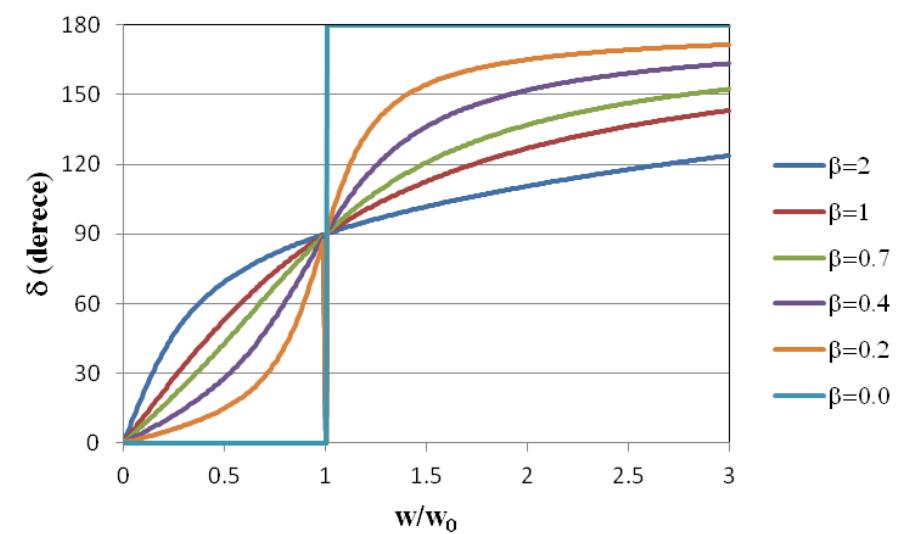
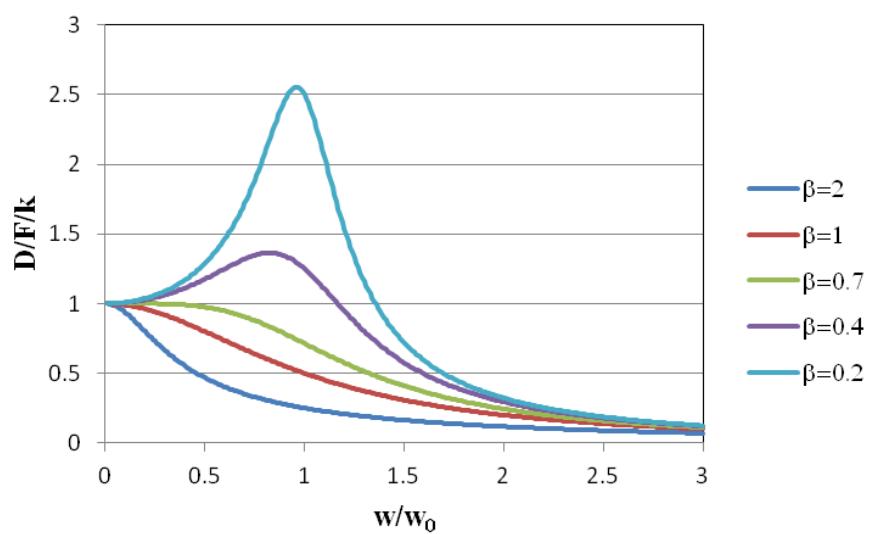
$$x_p(t) = \frac{\omega_0^2 F_0 / k}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}} \cos(\omega t - \delta)$$

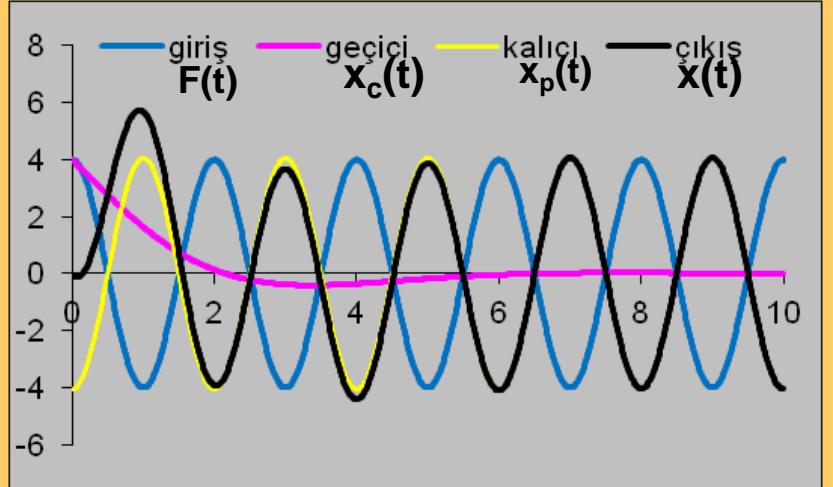
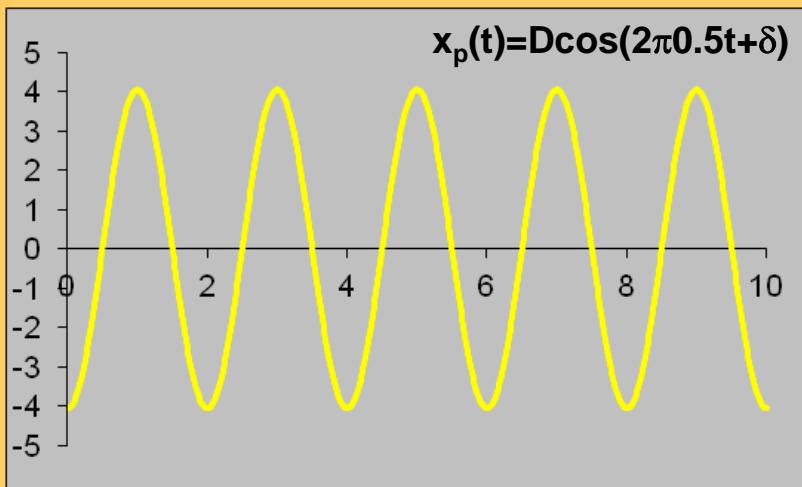
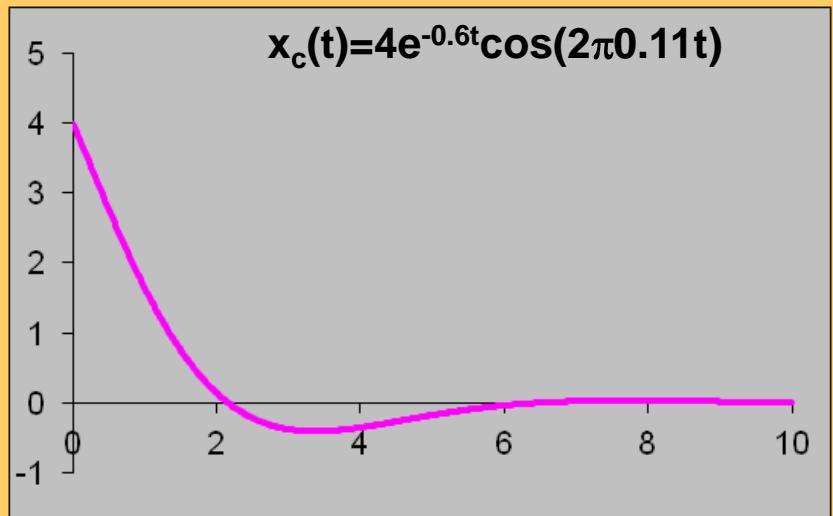
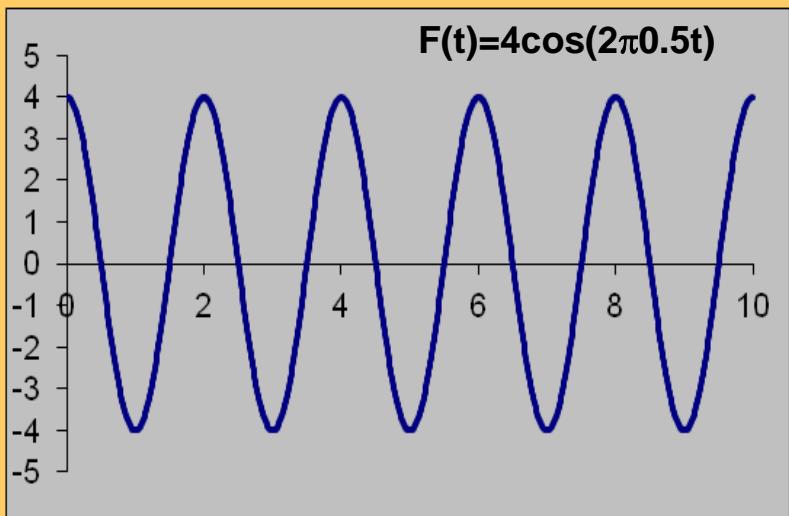
$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$

*zorlayıcı kuvvet ile meydana
gelen titreşim arasındaki faz farkı*

$$\frac{D}{F_0/k} = \frac{\omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}}$$

**Amplitude ratio
Magnification factor**





Rezonans

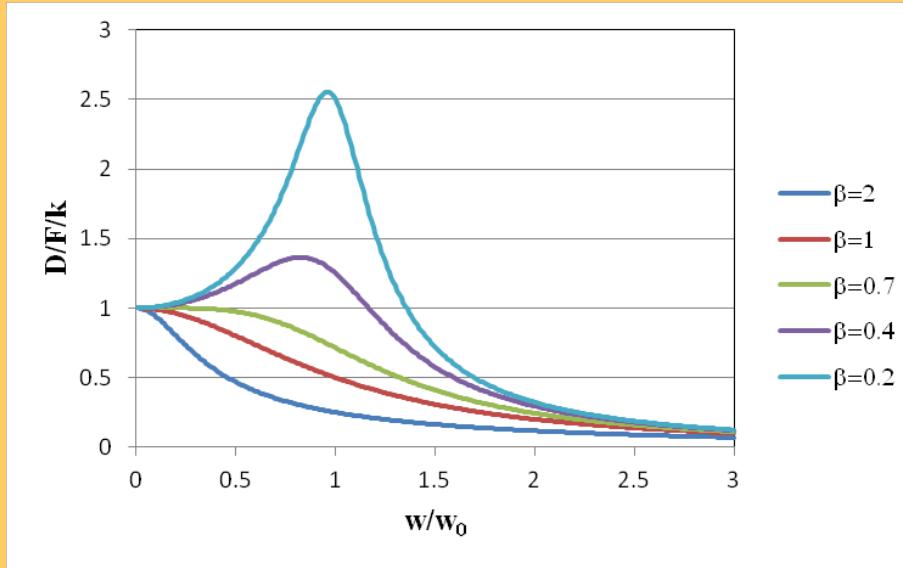
$$x_p(t) = \frac{\omega_0^2 F_0 / k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}} \cos(\omega t + \delta)$$

$\omega_0 = \omega$
olursa

Sönüm faktörü sıfır olursa

Rezonansı oluşturur

$$\frac{D}{F_0/k} = \frac{\omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}}$$



Gerçekte hiçbir zaman sönüm sıfır değildir. Yani gerçek rezonans hiçbir zaman oluşmaz. Fakat, düşük sönüm değerlerinde (ya da yüksek Q değerlerinde) ve $w_0 = w$ olması durumunda D genliğinin yani büyütmenin en yüksek değerlerine çıkacağı açıklarıdır. w_0 frekansı bir çok yerde rezonans frekansı olarak adlandırılır.

Rezonans titreşimi :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{Zoruna titreşim denklemi}$$

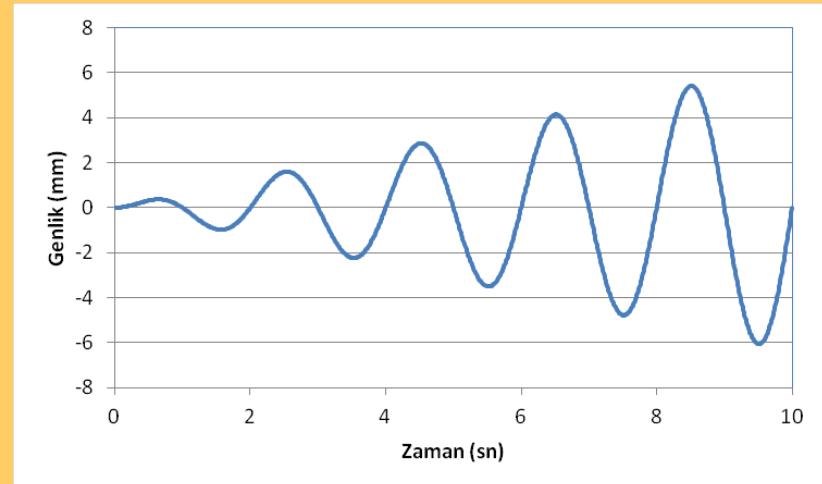
$c = 0$ olursa;

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{Sönümsüz zoruna titreşim denklemi}$$

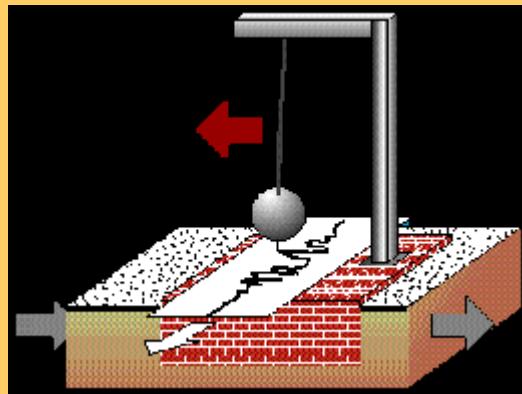
$\omega = \omega_0$ olursa;

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{A}{m} \cos(\omega_0 t)$$

$$x_p(t) = \frac{A}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$



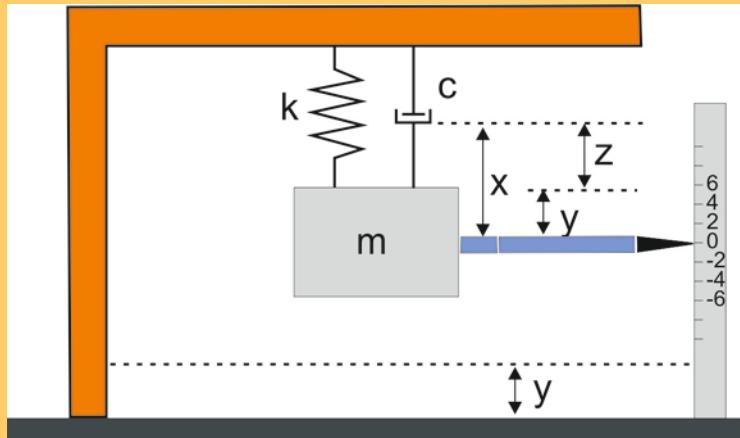
Sismograf



Sismometre teorisi

Sismometre esas itibarı ile zoruna titreşim yapan bir sarkaçtır. Burada zorlayıcı kuvvet deprem sırasında meydana gelen yerdeğiştirmeden ileri gelen kuvvettir.

Düsey sismometre



“ m ” kütlesi, elastik sabiti “ k ” olan bir yay ve söñüm sabiti “ c ” olan bir söndürücü sistem ile düşey sarkaç olarak tasarlanmıştır.

Sarkacın çerçevesi “ $y(t)$ ” kadar hareket ettiğinde kütle “ $x(t)$ ” kadar hareket eder. Kütleye bağlı kalem, yere sabitlenmiş cetvel üzerine çizgi çizer. Cetvel üzerine çizilen kayıt kütlenin çerçeveye göre rölatif hareketini “ $z(t)$ ” gösterir.

$$z(t) = x(t) - y(t)$$

kütlenin çerçeveye
göre yerdeğiştirmesi
(rölatif hareket)

kütlenin toplam
yerdeğiştirmesi

çerçevenin
yerdeğiştirmesi

$$m\ddot{x} + c\dot{z} + kz = 0$$

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}) + c\dot{z} + kz = 0$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

*Kütle ivmesi
kuvveti*

*Sönüm
kuvveti*

*Yay
kuvveti*

*Deprem veya dış
kuvvet*

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{y}$$

*Deprem hareketinin
ivmesi*

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega^2 F_0 \cos(\omega t)$$

$$z(t) = z_c(t) + z_p(t) \quad z_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$$

$$-\omega^2 D \cos(\omega t - \delta) - 2\beta\omega D \sin(\omega t - \delta) + \omega_0^2 D \cos(\omega t) = \omega^2 F_0 \cos(\omega t)$$

$$D[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \delta) - 2\beta\omega \sin(\omega t - \delta)] = \omega^2 F_0 \cos(\omega t)$$

$$D = \frac{\omega^2 F_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}} \quad \delta = \tan^{-1} \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

$$z(t) = e^{-\beta t} [Be^{(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + Ce^{(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}] + \frac{\omega^2 F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

Geçici terim *Devamlı terim*

m kütlesinin çerçeveye göre hareketi (rölatif hareket), kütlenin zorlayıcı kuvvet bulunmadığı zamanki öz titreşimi olan geçici titreşim ile, $y(t)=F_0 \cos(\omega t)$ yerdeğiştirmesine sebep olan zorlayıcı kuvvetin meydana getirdiği devamlı titreşimin toplamıdır.

Geçici terimi ihmal edersek;

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}} \omega^2 F_0 \cos(\omega t - \delta)$$

Rölatif yerdeğiştirme (Kalemin çizdiği kayıt) *Yer hareketi ivmesi*

- Sismometrenin transfer fonksiyonu
- Instrument response function
- Sismometrenin genlik tepki fonksiyonu

Giriş ($y(t)$)
(yer hareketi)

Kara kutu (**S**)
(Sismometre tepki fonksiyonu)

Çıkış ($z(t)$)
(Kayıt)

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \omega^2 F_0 \cos(\omega t - \delta)$$

İvme sismometresi – $a(t)$

$S_a \approx 1$ olursa

$$z(t) = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \omega F_0 \cos(\omega t - \delta)$$

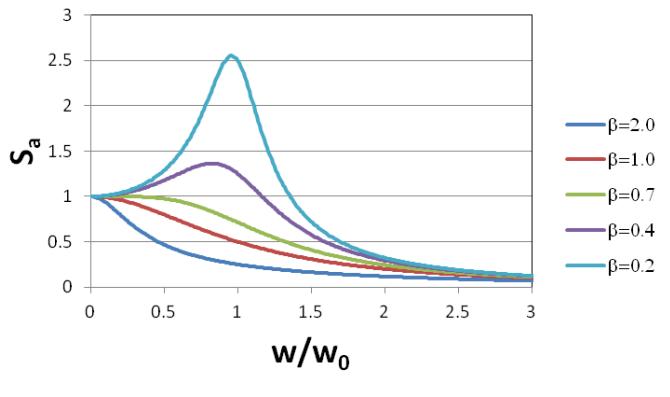
Hız sismometresi – $v(t)$

$G_v \approx 1$ olursa

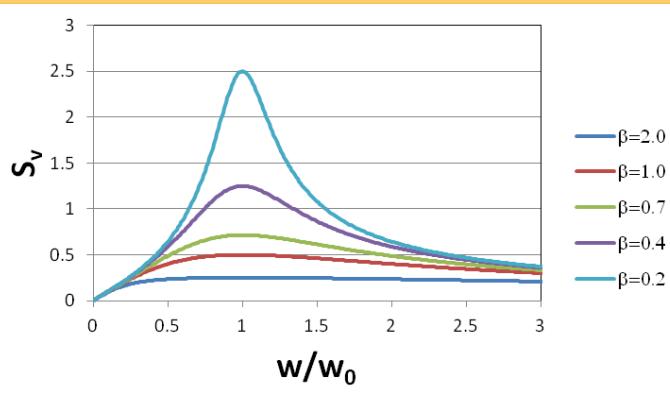
$$z(t) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} F_0 \cos(\omega t - \delta)$$

Yerdeğiştirme sismometresi

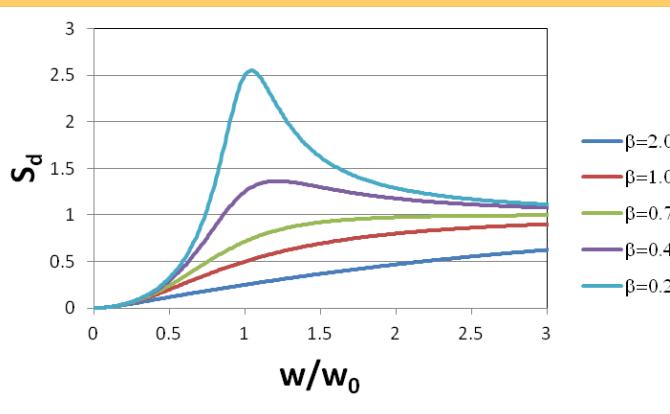
$G_a \approx 1$ olursa



Sismometrenin yer titreşiminin ivmesine tepki spektrumu; sismometrenin doğal frekansından daha küçük frekansa sahip yer hareketleri için uygun: $w_0 > w$



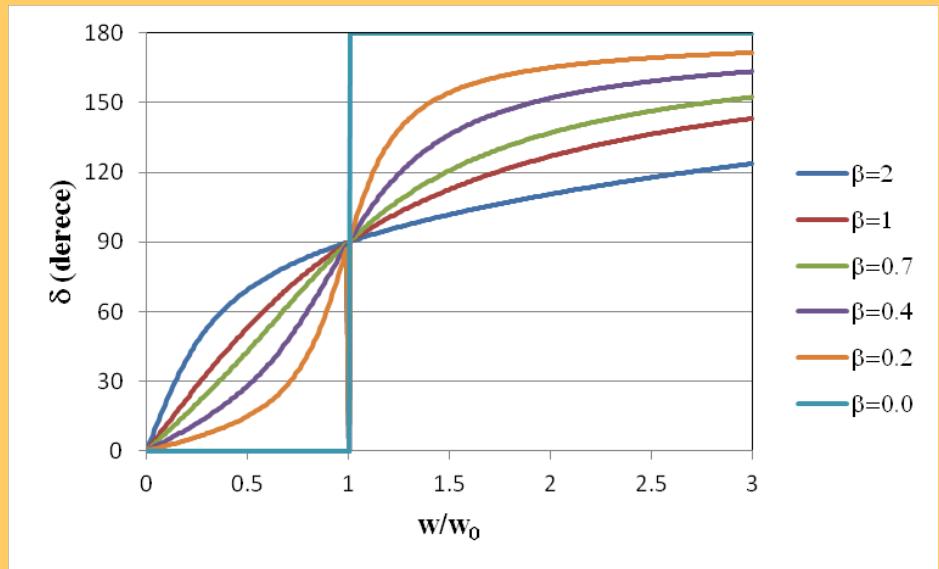
Sismometrenin yer titreşiminin hızına tepki spektrumu; sismometrenin doğal frekansına yakın frekansa sahip yer hareketleri için uygun: $w_0 \approx w$



Sismometrenin yer titreşiminin yerdeğiştirmesine tepki spektrumu; sismometrenin doğal frekansından daha büyük frekansa sahip yer hareketleri için uygun: $w_0 < w$

Yer hareketi ile sarkacın titreşimi arasındaki faz farkı Sismometrenin faz tepki spektrumu :

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$



Yerdeğiştirmede:

$$\delta = \pi$$

Hızda:

$$\delta = \pi / 2$$

İvmede:

$$\delta = 0$$

ÖDEV:

1. Yer hareketini harmonik fonksiyon olarak tanımlarsak; denklemi aşağıda verilmiştir. $F_0 = 5$ mm ve $w = 0.2$ rad/s alarak $F(t)$ fonksiyonunu çizdiriniz. Zaman sayacını (t) 0'dan 100 sn'ye kadar 0.1 sn aralıklarla artırınız.

$$F(t) = F_0 \cos(wt)$$

2. Sismometrenin kayıt fonksiyonu (rölatif hareket denklemi) ise aşağıda verilmiştir. Sismometre parametrelerini $m=5\text{kg}$, $k=5\text{Ns/m}$ ve $\beta=0.7\text{Ns/kgm}$ olarak verilmiştir. Aşağıdaki denklemi kullanarak kayıt fonksiyonunu çizdiriniz

$$z(t) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} F_0 \cos(\omega t - \delta) \quad \delta = \tan^{-1} \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

3. Yer hareketini $w=2$ rad/s olacak şekilde değiştirerek kayıt fonksiyonunu tekrar çizdiriniz.

4. Ödev teslim tarihi : 11 Mart 2016