

# **ELASTİK DALGA YAYINIMI**

Prof.Dr. Eşref YALÇINKAYA  
(2016 - 3. DERS)

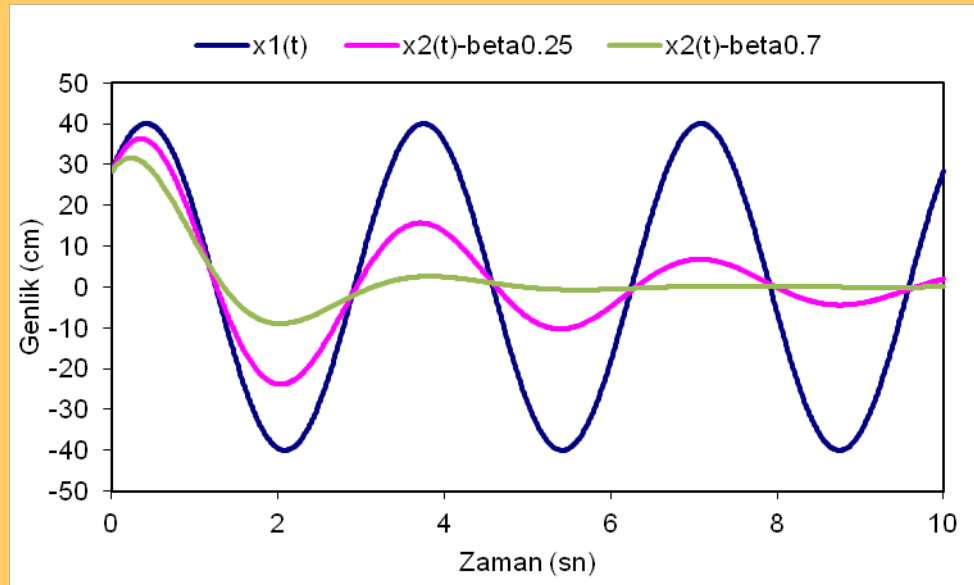
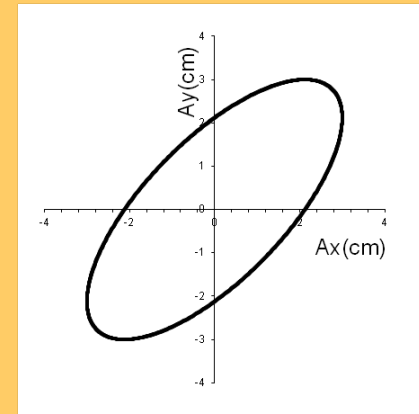
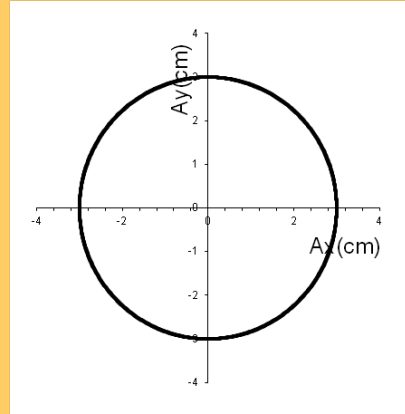
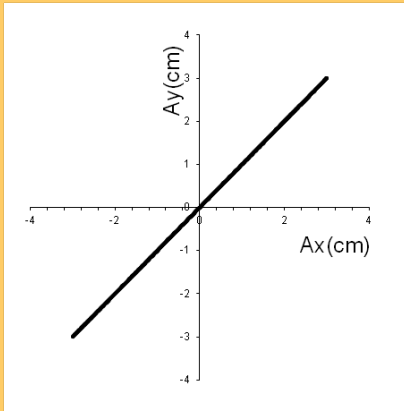
# Geçtiğimiz ders;

- **Düzgün dairesel hareket**
- **Sönümlü harmonik hareket**
- **Sönüm**

# Bu derste;

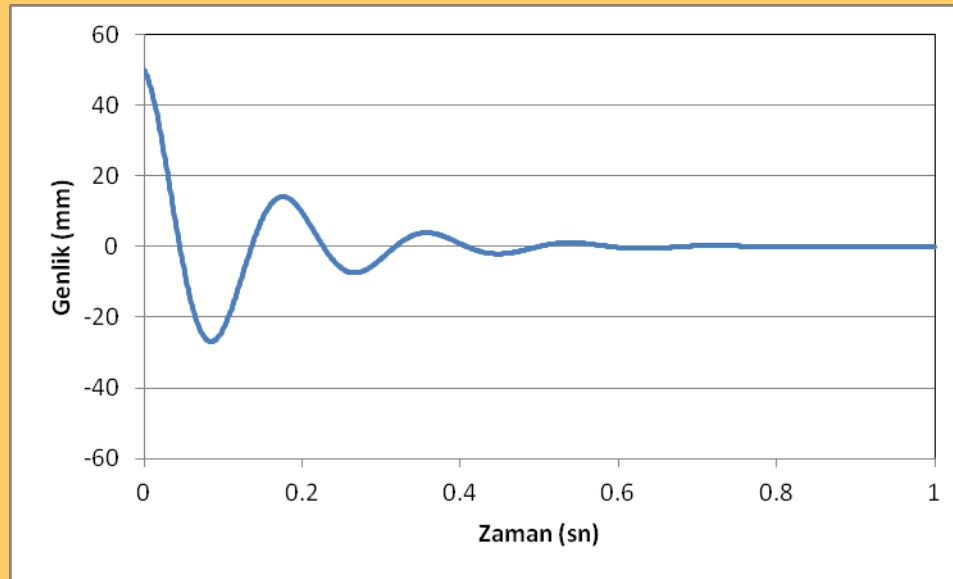
- **Sönümlü zoruna hareket**
- **Rezonans**
- **Sismograf teorisi**

## 2. haftanın ödevi:



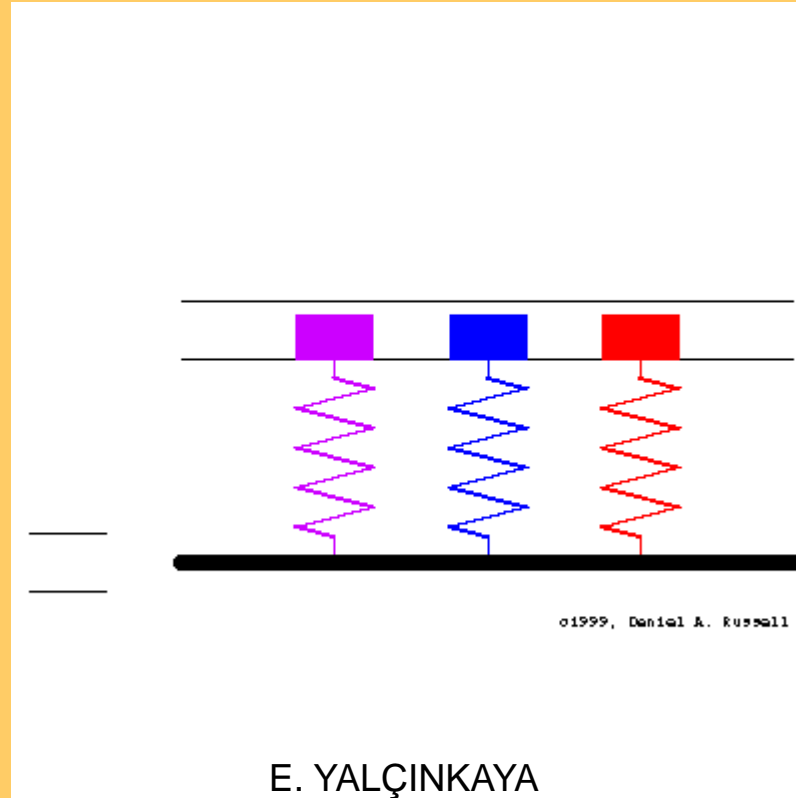
## 2. haftanın ödevi:

<b>m=</b>	<b>4</b>	<b>kg</b>	
<b>k=</b>	<b>5000</b>	<b>N/m</b>	
<b>dr=</b>	<b>0.2</b>		
<b>A=</b>	<b>50</b>	<b>mm</b>	
<b>c=</b>	<b>56.56854</b>	<b>Ns/m</b>	
<b>cc=</b>	<b>282.8427</b>	<b>Ns/m</b>	
<b>beta=</b>	<b>7.071068</b>	<b>Ns/kgm</b>	<b>Q= 2.489465</b>
<b>wo=</b>	<b>35.35534</b>	<b>rad/s</b>	
<b>fo=</b>	<b>5.626977</b>	<b>Hz</b>	
<b>wb=</b>	<b>34.64102</b>	<b>rad/s</b>	
<b>fb=</b>	<b>5.513289</b>	<b>Hz</b>	



# Zoruna Titreřimler

Bundan önce sönümlü ve sönümsüz serbest titreşimleri incelemiştik. şimdi, sisteme dışarıdan bir kuvvet ile sürekli enerji sağlanan **zoruna titreşimleri** inceleyeceğiz.



**Zoruna titreşim denklemi ;  $F = ma$**

$$-kx - c\dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

**Zorlayıcı kuvvet**

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

**$F_0$ : Dış hareketin genliği**

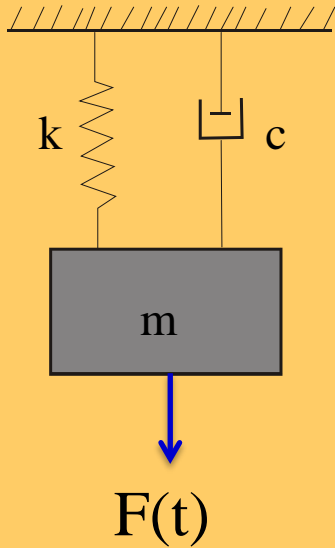
**$\omega$  : Dış hareketin açısal frekansı**

**Genel çözüm :**

$$x(t) = \underbrace{x_c(t)} + \underbrace{x_p(t)}$$

**Homojen denklem  
çözümü**

**Özel çözüm**



$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$x_c(t)$  ; **Homojen denklem çözümü, başlangıç şartlarına bağlı geçici etkileri temsil eder (geçici çözüm). Bu çözümün ihtiva ettiği terimler zamanla söner.**

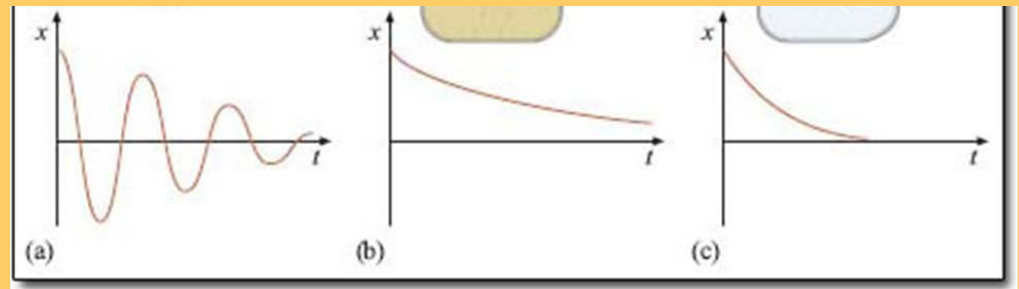
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x_c(t) = e^{-\beta t} [Be^{(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + Ce^{(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}]$$

$\zeta < 1$     **Underdamped**

$\zeta > 1$     **Overdamped**

$\zeta = 1$     **Critically damped**



$x_p(t)$  ; Özel çözüm, homojen olmayan denklem çözümü, kararlı durumu temsil eder (durağan çözüm).  $t \gg 1/\beta$  olduğu hallerde  $x(t \gg 1/\beta) = x_p(t)$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$$

$$-m\omega^2 D \cos(\omega t - \delta) - c\omega D \sin(\omega t - \delta) + kD \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$D[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \delta) - c\omega \sin(\omega t - \delta)] = F_0 \cos(\omega t)$$

$$D = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2]^{1/2}}$$

$$\delta = \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right)$$

$$D = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}}$$

$$\delta = \tan^{-1} \left( \frac{2\beta m \omega}{m\omega_0^2 - m\omega^2} \right)$$

$$D = \frac{\omega_0^2 F_0 / k}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}}$$

$$\delta = \tan^{-1} \left( \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$



$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$$

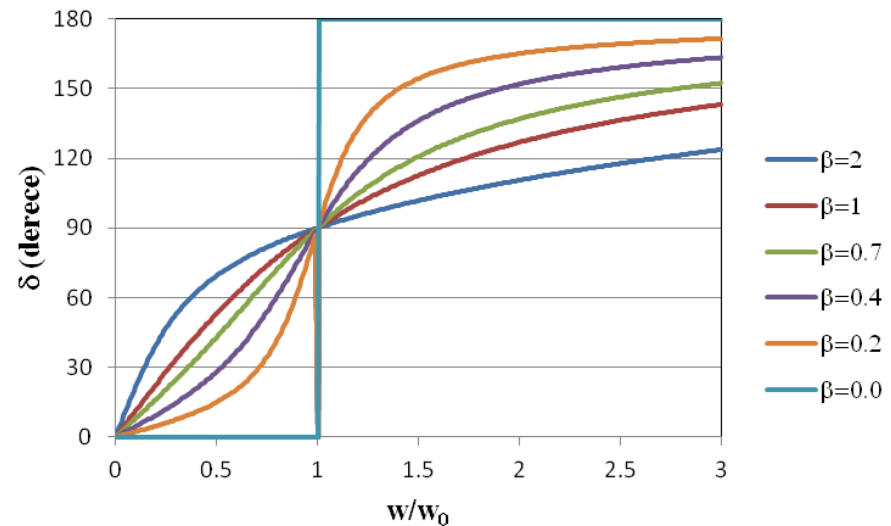
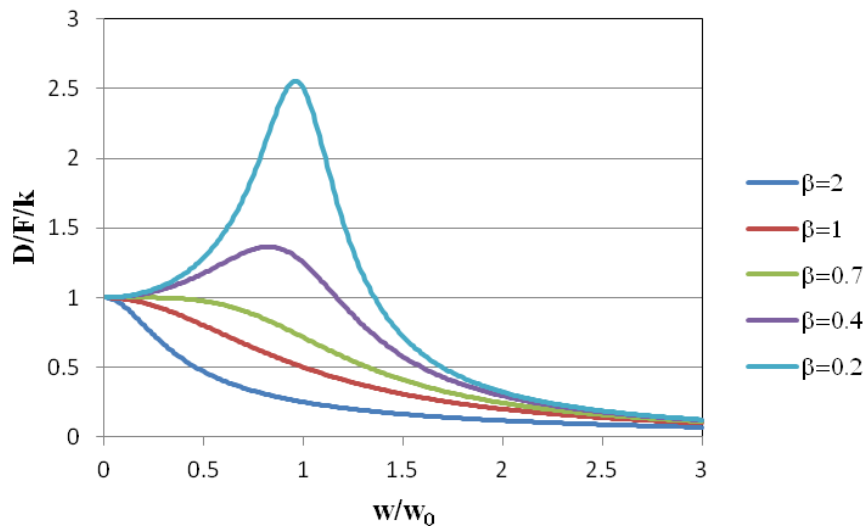
$$x_p(t) = \frac{\omega_0^2 F_0 / k}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}} \cos(\omega t - \delta)$$

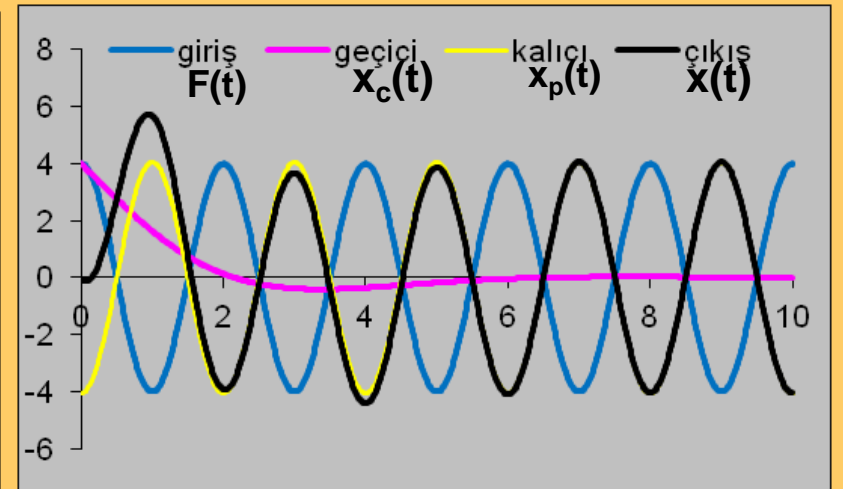
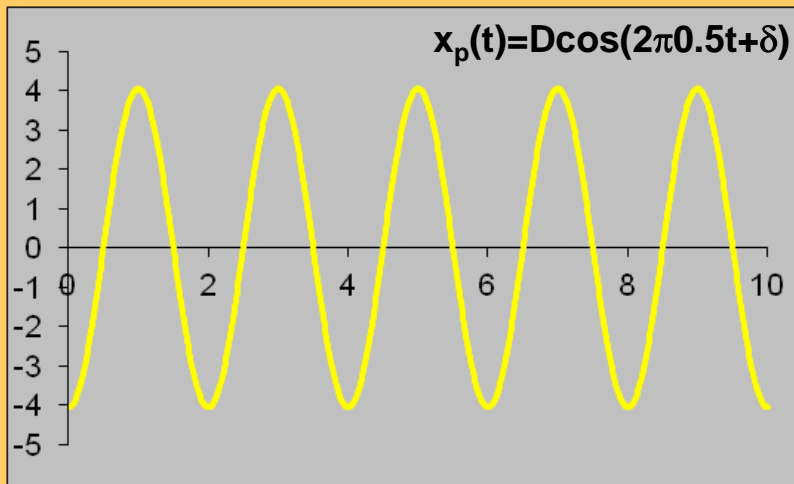
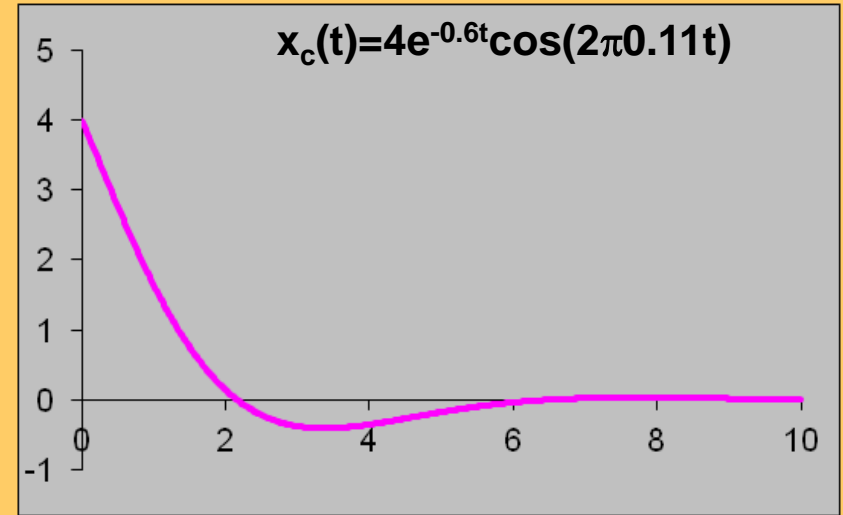
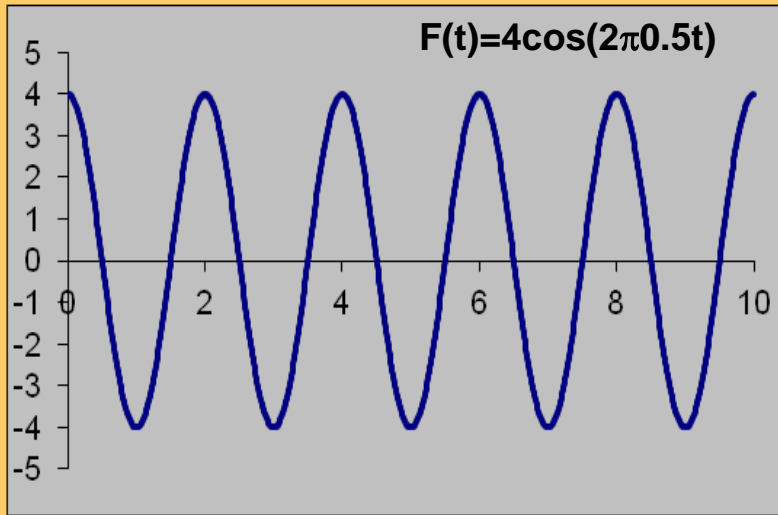
$$\delta = \tan^{-1} \left( \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

*zorlayıcı kuvvet ile meydana gelen titreşim arasındaki faz farkı*

$$\frac{D}{F_0 / k} = \frac{\omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}}$$

**Amplitude ratio**  
**Magnification factor**





# Rezonans

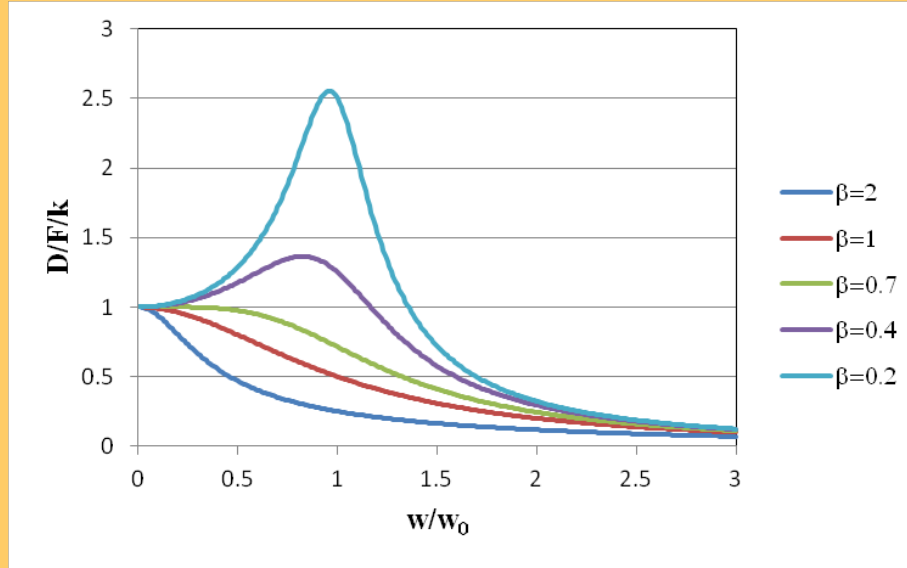
$$x_p(t) = \frac{\omega_0^2 F_0 / k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}} \cos(\omega t + \delta)$$

$\omega_0 = \omega$   
olursa

Sönüm faktörü sıfır olursa

**Rezonansı oluşturur**

$$\frac{D}{F_0 / k} = \frac{\omega_0^2}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]^{1/2}}$$



Gerçekte hiçbir zaman sönüm sıfır değildir. Yani gerçek rezonans hiçbir zaman oluşmaz. Fakat, düşük sönüm değerlerinde (ya da yüksek Q değerlerinde) ve  $w_0 = w$  olması durumunda D genliğinin yani büyütmenin en yüksek değerlerine çıkacağı açıktır.  $w_0$  frekansı bir çok yerde rezonans frekansı olarak adlandırılır.

## Rezonans titreşimi :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{Zoruna titreşim denklemi}$$

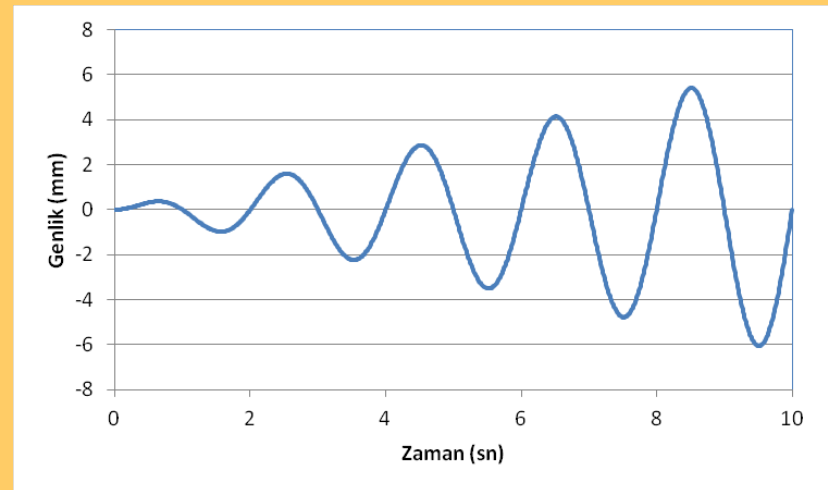
$c = 0$  olursa;

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{Sönümsüz zoruna titreşim denklemi}$$

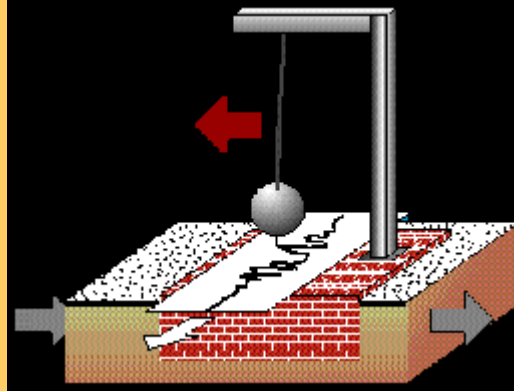
$\omega = \omega_0$  olursa;

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{A}{m} \cos(\omega_0 t)$$

$$x_p(t) = \frac{A}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$



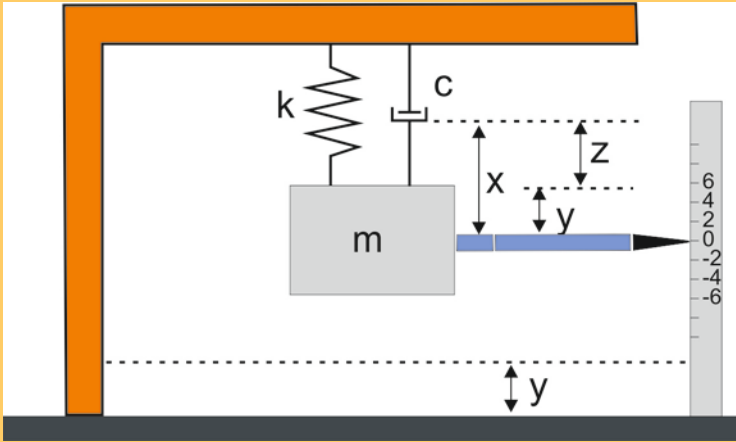
# Sismograf



# Sismometre teorisi

***Sismometre esas itibarı ile zoruna titreşim yapan bir sarkaçtır. Burada zorlayıcı kuvvet deprem sırasında meydana gelen yerdeğiştirmeden ileri gelen kuvvettir.***

## Düşey sismometre



“ $m$ ” kütlesi, elastik sabiti “ $k$ ” olan bir yay ve sönüm sabiti “ $c$ ” olan bir söndürücü sistem ile düşey sarkaç olarak tasarlanmıştır.

Sarkacın çerçevesi “ $y(t)$ ” kadar hareket ettiğinde kütle “ $x(t)$ ” kadar hareket eder. Kütleyle bağlı kalem, yere sabitlenmiş cetvel üzerine çizgi çizer. Cetvel üzerine çizilen kayıt kütlenin çerçeveye göre rölatif hareketini “ $z(t)$ ” gösterir.

$$z(t) = x(t) - y(t)$$

kütlenin çerçeveye  
göre yerdeğiştirmesi  
(rölatif hareket)

kütlenin toplam  
yerdeğiştirmesi

çerçevenin  
yerdeğiştirmesi

$$m\ddot{x} + c\dot{z} + kz = 0$$

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}) + c\dot{z} + kz = 0$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

*Kütle ivmesi  
kuvveti*

*Sönüm  
kuvveti*

*Yay  
kuvveti*

*Deprem veya dış  
kuvvet*

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{y}$$

*Deprem hareketinin  
ivmesi*

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega^2 F_0 \cos(\omega t)$$

$y(t) = A \cos(\omega t)$

$$z(t) = z_c(t) + z_p(t) \quad z_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$$

$$-\omega^2 D \cos(\omega t - \delta) - 2\beta\omega D \sin(\omega t - \delta) + \omega_0^2 D \cos(\omega t) = \omega^2 F_0 \cos(\omega t)$$

$$D[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \delta) - 2\beta\omega \sin(\omega t - \delta)] = \omega^2 F_0 \cos(\omega t)$$



$$D = \frac{\omega^2 F_0}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \quad \delta = \tan^{-1} \left( \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

$$z(t) = e^{-\beta t} [B e^{(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C e^{(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}] + \frac{\omega^2 F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

Geçici terim Devamlı terim

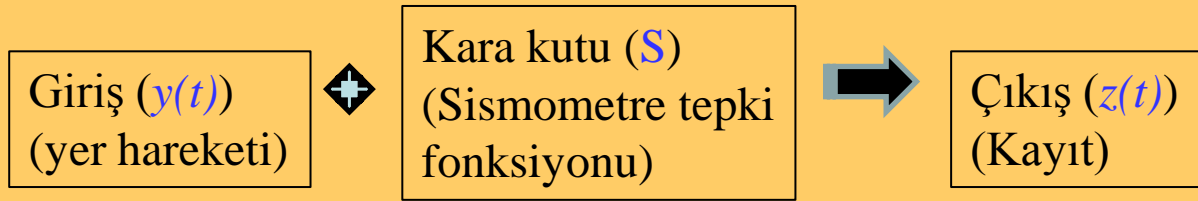
*m* kütlesinin çerçeveye göre hareketi (rölatif hareket), kütlenin zorlayıcı kuvvet bulunmadığı zamanki öz titreşimi olan geçici titreşim ile,  $y(t)=F_0 \cos(\omega t)$  yerdeğiştirmesine sebep olan zorlayıcı kuvvetin meydana getirdiği devamlı titreşimin toplamıdır.

Geçici terimi ihmal edersek;

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}} \omega^2 F_0 \cos(\omega t - \delta)$$

Rölatif yerdeğiştirme (Kalemin çizdiği kayıt) Yer hareketi ivmesi

- Sismometrenin transfer fonksiyonu
- Instrument response function
- Sismometrenin genlik tepki fonksiyonu



$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \omega^2 F_0 \cos(\omega t - \delta) \quad \text{İvme sismometresi} - a(t)$$

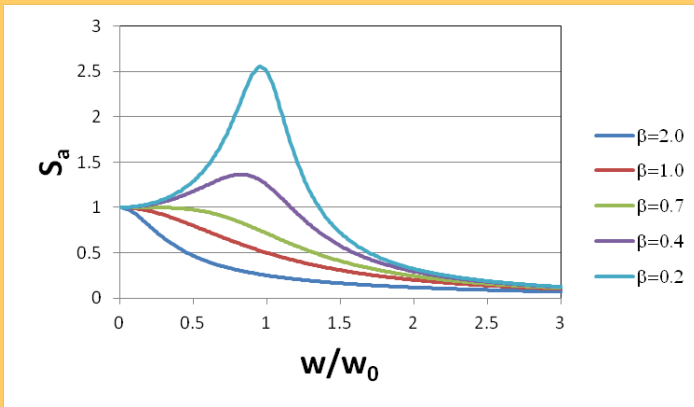
↘  $S_a \cong 1$  olursa

$$z(t) = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \omega F_0 \cos(\omega t - \delta) \quad \text{Hız sismometresi} - v(t)$$

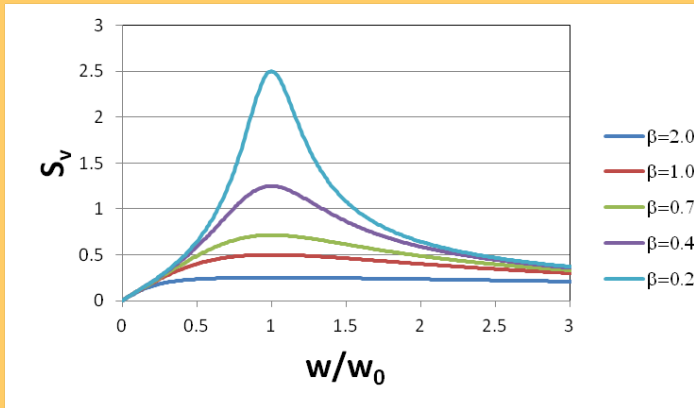
↘  $G_v \cong 1$  olursa

$$z(t) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} F_0 \cos(\omega t - \delta) \quad \text{Yerdeğiştirme sismometresi}$$

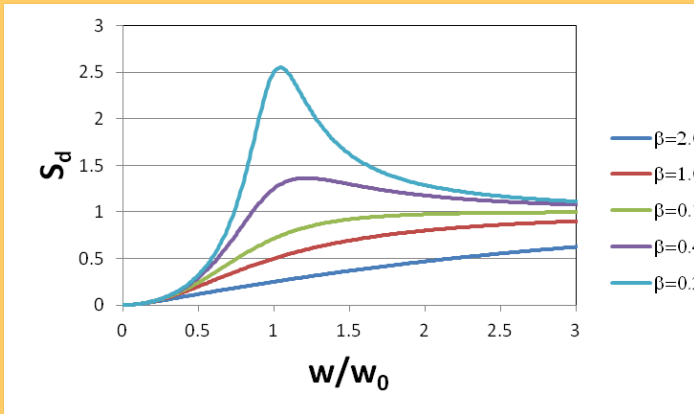
↘  $G_a \cong 1$  olursa



**Sismometrenin yer titreşiminin ivmesine tepki spektrumu; sismometrenin doğal frekansından daha küçük frekansa sahip yer hareketleri için uygun:  $w_0 > w$**



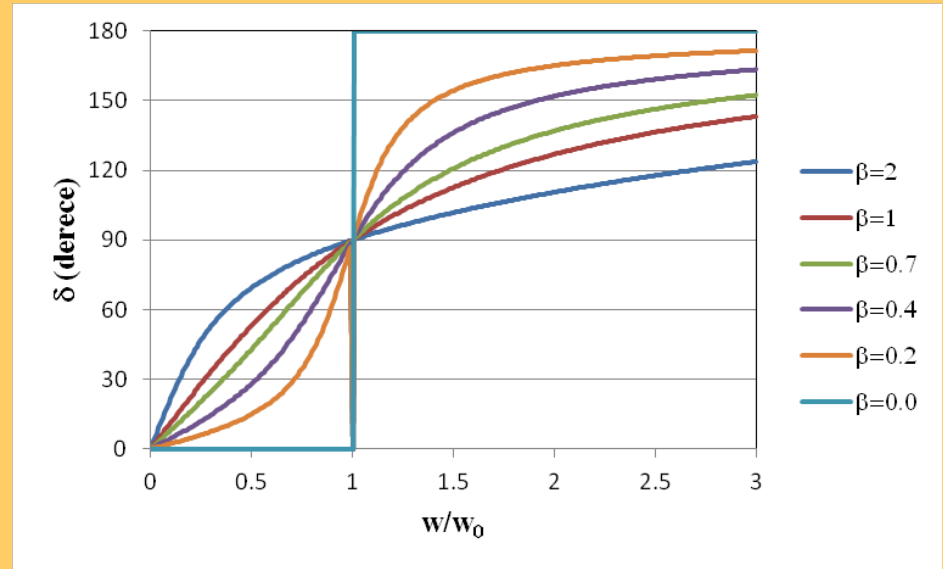
**Sismometrenin yer titreşiminin hızına tepki spektrumu; sismometrenin doğal frekansına yakın frekansa sahip yer hareketleri için uygun:  $w_0 \cong w$**



**Sismometrenin yer titreşiminin verdeğıştirmesine tepki spektrumu; sismometrenin doğal frekansından daha büyük frekansa sahip yer hareketleri için uygun:  $w_0 < w$**

## Yer hareketi ile sarkacın titreşimi arasındaki faz farkı Sismometrenin faz tepki spektrumu :

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$



*Yerdeğiştirmede:*  $\delta = \pi$

*Hızda:*  $\delta = \pi / 2$

*İvmede:*  $\delta = 0$

## ÖDEV:

1. Yer hareketini harmonik fonksiyon olarak tanımlarsak; denklemi aşağıda verilmiştir.  $F_0 = 5$  mm ve  $w = 0.2$  rad/s olarak  $F(t)$  fonksiyonunu çizdiririniz. Zaman sayacını (t) 0'dan 100 sn'ye kadar 0.1 sn aralıklarla arttırınız.

$$F(t) = F_0 \cos(wt)$$

2. Sismometrenin kayıt fonksiyonu (rölatif hareket denklemi) ise aşağıda verilmiştir. Sismometre parametrelerini  $m=5$ kg,  $k=5$ Ns/m ve  $\beta=0.7$ Ns/kgm olarak verilmiştir. Aşağıdaki denklemi kullanarak kayıt fonksiyonunu çizdiriniz

$$z(t) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}} F_0 \cos(\omega t - \delta) \quad \delta = \tan^{-1} \left( \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

3. Yer hareketini  $w=2$  rad/s olacak şekilde değiştirerek kayıt fonksiyonunu tekrar çizdiriniz.

4. Ödev teslim tarihi : 11 Mart 2016