

ELASTİK DALGA YAYINIMI

(7. Ders - 2016)

Prof.Dr. Esref YALÇINKAYA

Geçtiğimiz ders;

- Yansıyan ve iletilen dalgalar
- Yansıma (R) ve İletme katsayıları (T)
- Enerjinin ve frekansın korunması, genlik ve dalga boylarındaki değişim

Bu derste;

- Elastisite teorisi
- Gerilme ve bileşenleri
- Deformasyon ve bileşenleri

ELASTİSİTE TEORİSİ

Stress – Strain

Gerilme - Deformasyon

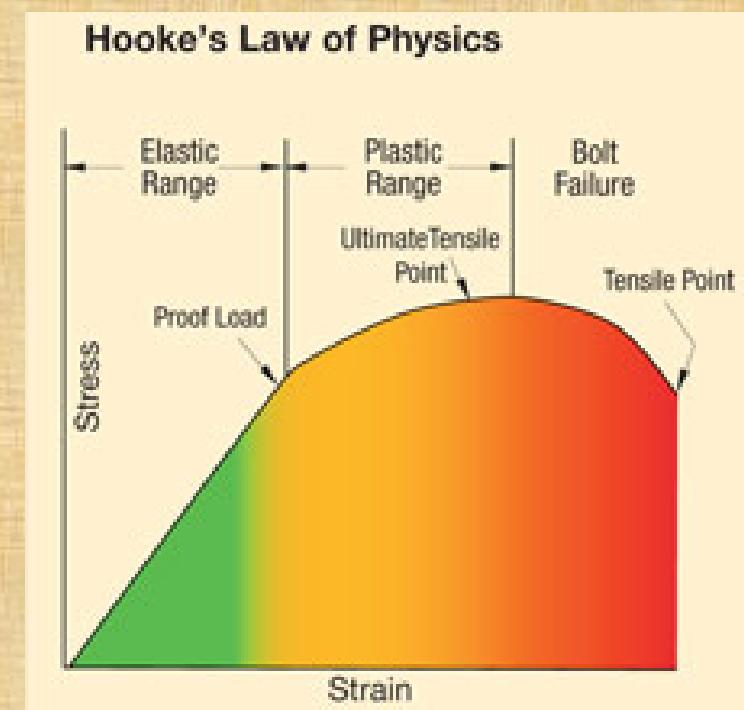
Önceki bölümlerde bir ip üzerinde Newton'ın hareket denklemini uygulayarak, deform edilen ipin yayılan dalgalara neden olduğunu bulmuştuk. Benzer şekilde deformasyona uğrayan katı yer küre, yayılan sismik dalgalara neden olur. Bu bölümde, elastik ortamda gerilme-deformasyon ilişkilerini kullanarak yer küre içinde yayılan dalga özelliklerini belirlemeye çalışacağız.

Hooke Kanunu

$$\sigma = E \varepsilon$$

↓ ↓ ↓

Gerilme Elastik parametre Deformasyon

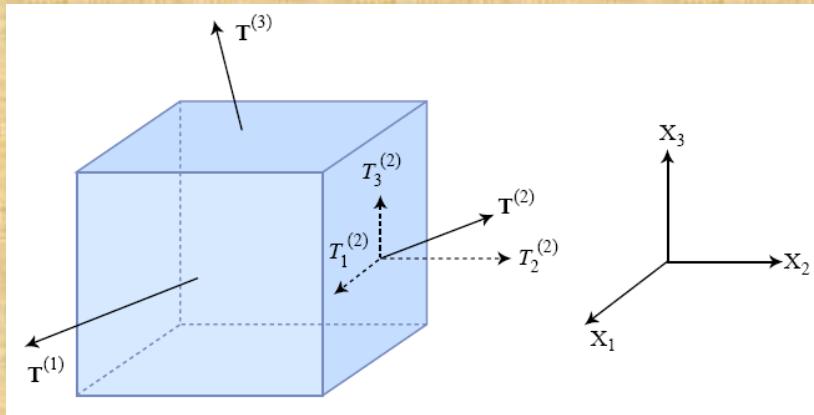


Gerilme (stress) ve Bileşenleri

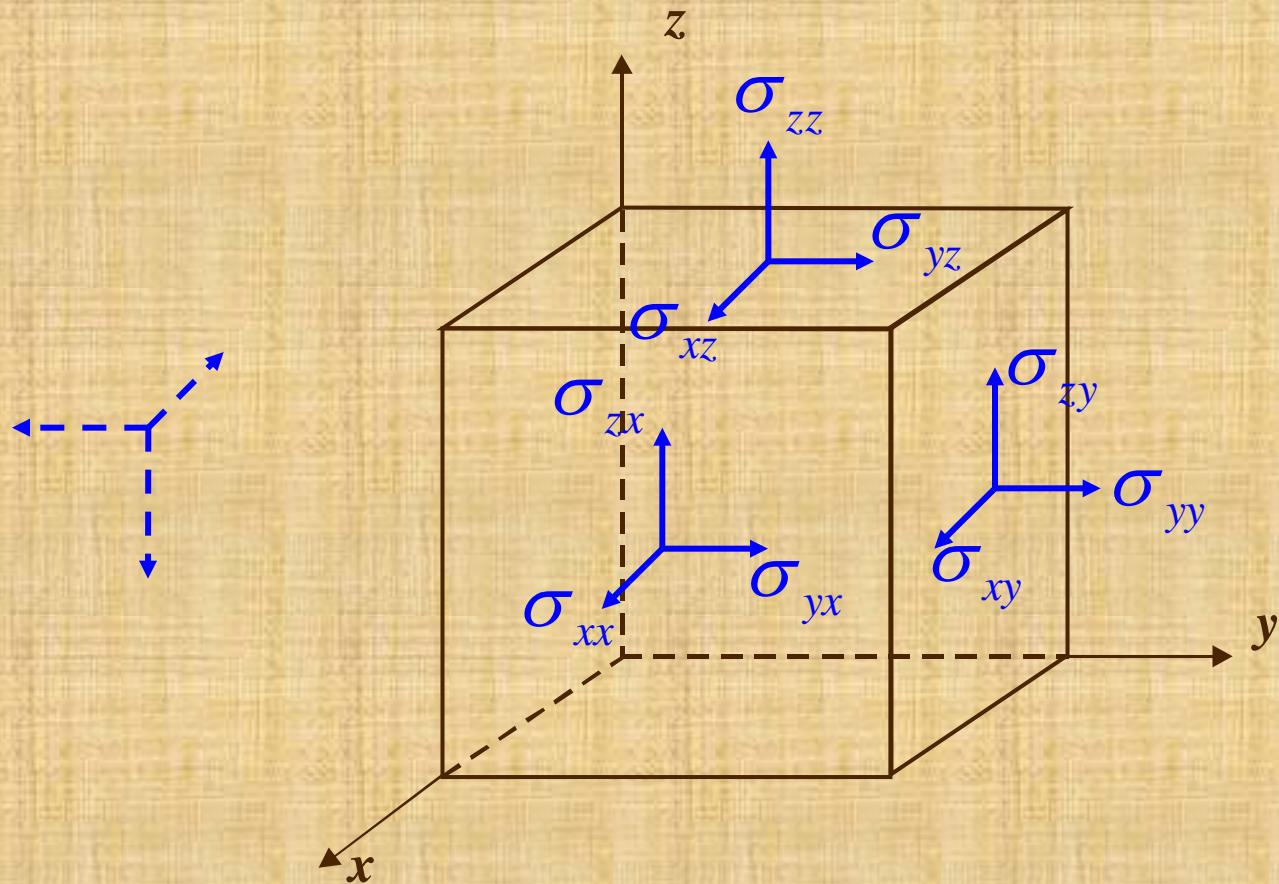
Gerilme ; S alanı üzerine etkiyen F kuvvetinin bu alan bölümü şeklinde tanımlanır. Gerilme, kuvvetin şiddeti olarak düşünülebilir (sivri uçlu bir çekiç ve düz yüzeyli bir çekiç ile bir kaya parçalamayı düşünün). Gerilmenin matematiksel tanımı :

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{\text{newton}}{\text{m}^2} = \text{Pascal} = 10^{-5} \text{ bar}$$

Gerilme vektörel bir büyüklüktür, yani genliği ve yönü vardır. Yatayda ve düşeyde bileşenlerine ayrılabilir.



Bir hacim elemanı yüzeyleri üzerinde gerilme dokuz bileşeni olan tensör ile tanımlanır :



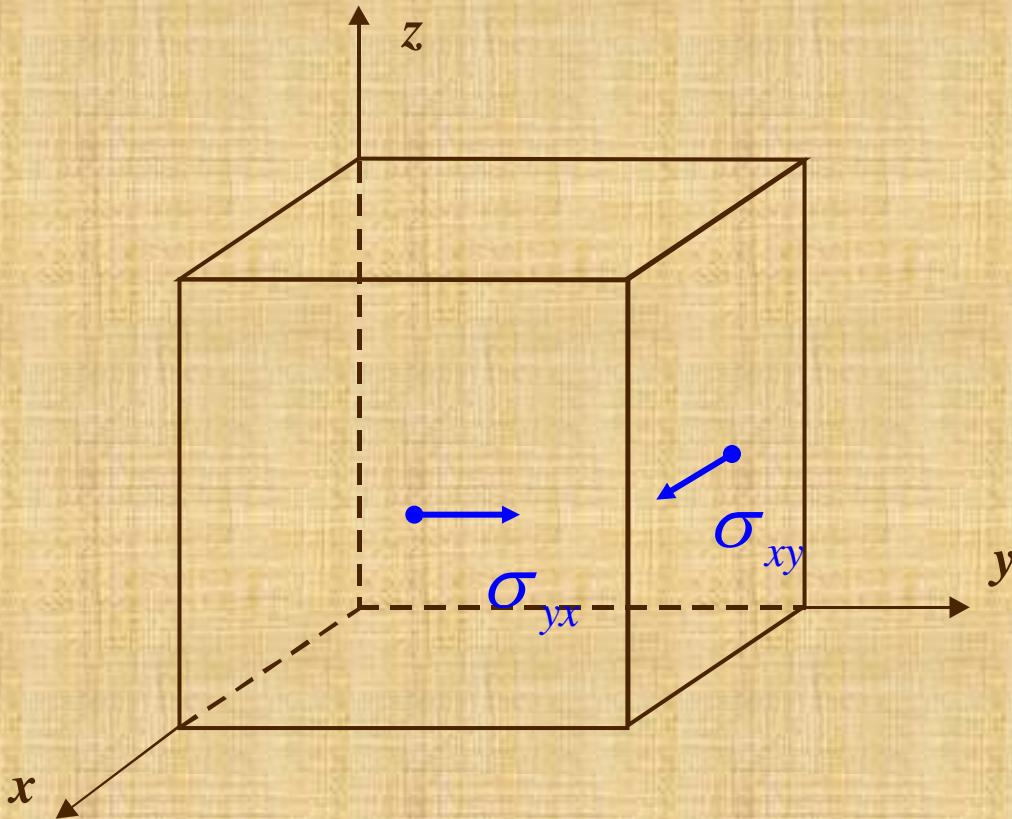
Cisim içinde herhangi bir O noktasına etkiyen gerilme dokuz bileşeni olan bir tensördür ;

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Gerilme bileşenlerinin hepsi birbirinden bağımsız değildirler. Herhangi bir hareket söz konusu olmadığından küp denge konumundadır, dolayısı ile kübe etkiyen kuvvetlerin denge halinde olması gereklidir.

Örneğin kübü, merkezinden geçen ve z eksenine paralel bir eksen etrafında döndürmeye çalışan gerilmeleri göz önüne alırsak (σ_{xy} , σ_{yx}) küp denge durumunda olduğuna göre eşit olmaları gereklidir :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$



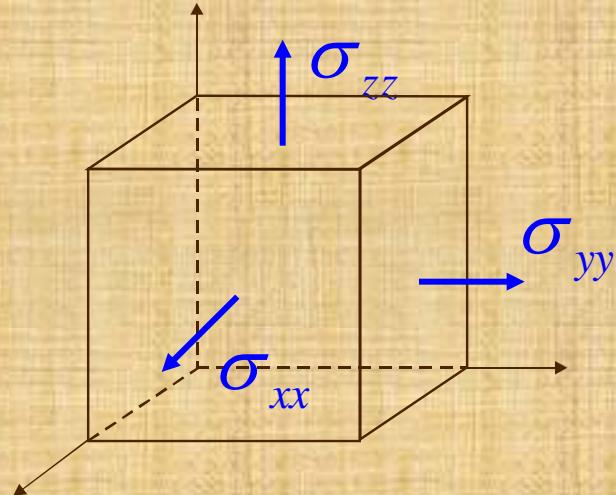
Benzer şekilde x ve y eksenlerine paralel olan dönme eksenlerine göre momentlerin toplamını sıfır yaparsak;

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

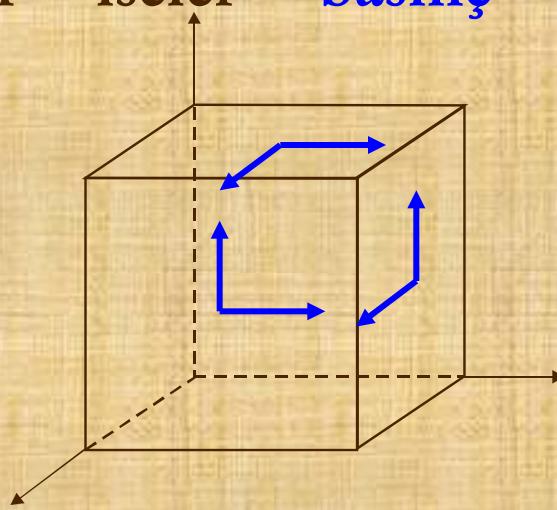
$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$

Bu sebeple, daha önce tanımladığımız 9 gerilme bileşeninden sadece altısı birbirinden bağımsızdır.

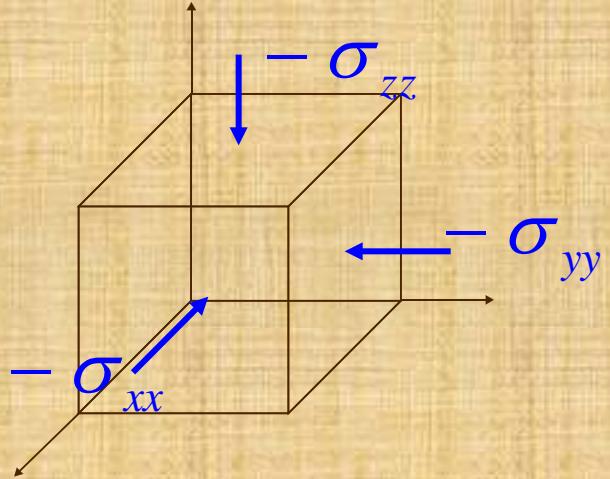
$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$



Kübün yüzeylerine dik olan σ_{xx} , σ_{yy} ve σ_{zz} gerilmeleri normal gerilmeler olarak bilinirler ve pozitif iseler çekme gerilmeleri, negatif iseler basınç gerilmeleri olarak adlandırılırlar.



Diğer bileşenler σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zy} , σ_{zx} ve σ_{xz} kayma gerilmeleri olarak adlandırılırlar.

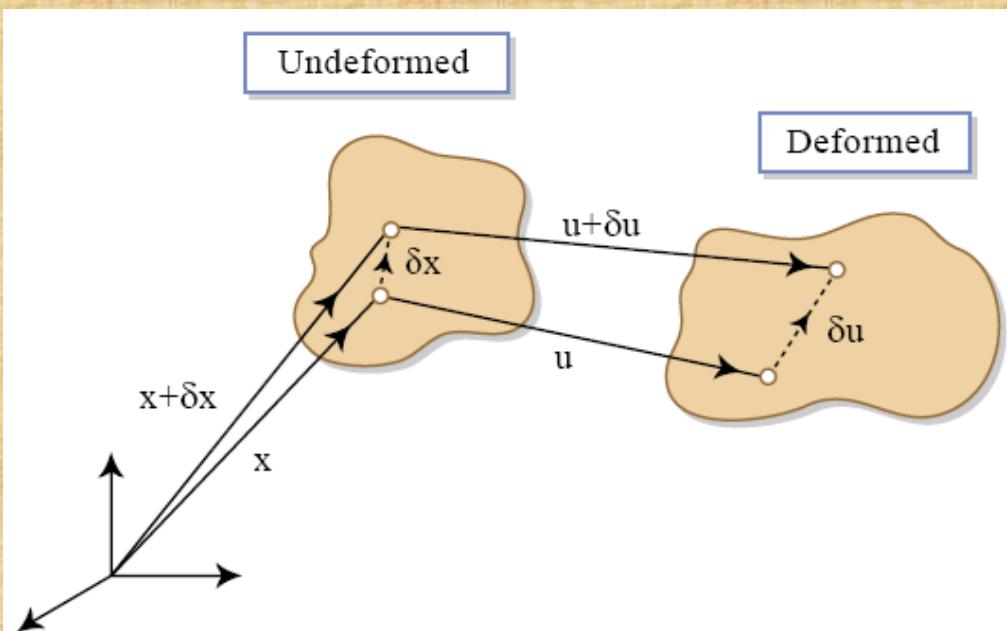


Kayma gerilmelerinin tümünün sıfır olması ve σ_{xx} , σ_{yy} ve σ_{zz} gerilmelerinin birbirine eşit ve negatif olması hali “hidrostatik basınç” olarak bilinir.

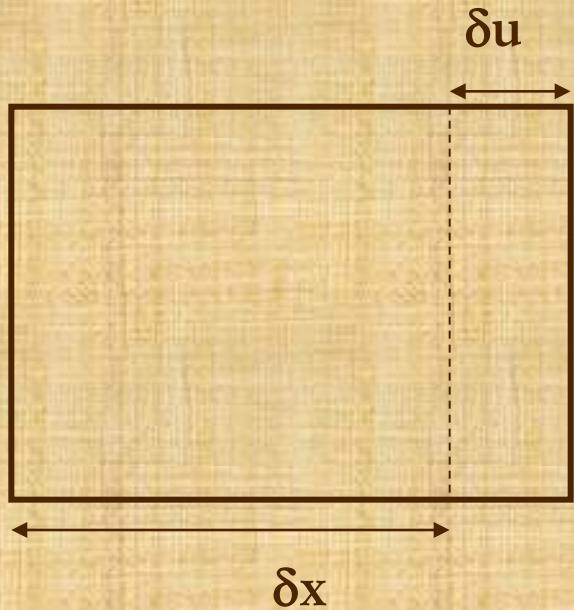
Deformasyon (strain) ve Bileşenleri

Bir cismin birim miktarında gerilmeye karşı meydana gelen şekil ve hacim değişmesine **strain** (birim deformasyon veya yamulma) denir.

Strain, bir noktanın komşu noktalara göre yer değiştirme miktarının, başlangıçtaki yeri ile referans noktası arasındaki uzaklığı bölümü şeklinde tanımlanabilir.



Hacimsel deformasyon;



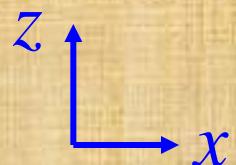
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta u}{\delta x}$$

$\delta x \rightarrow 0$ durumunda ;

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

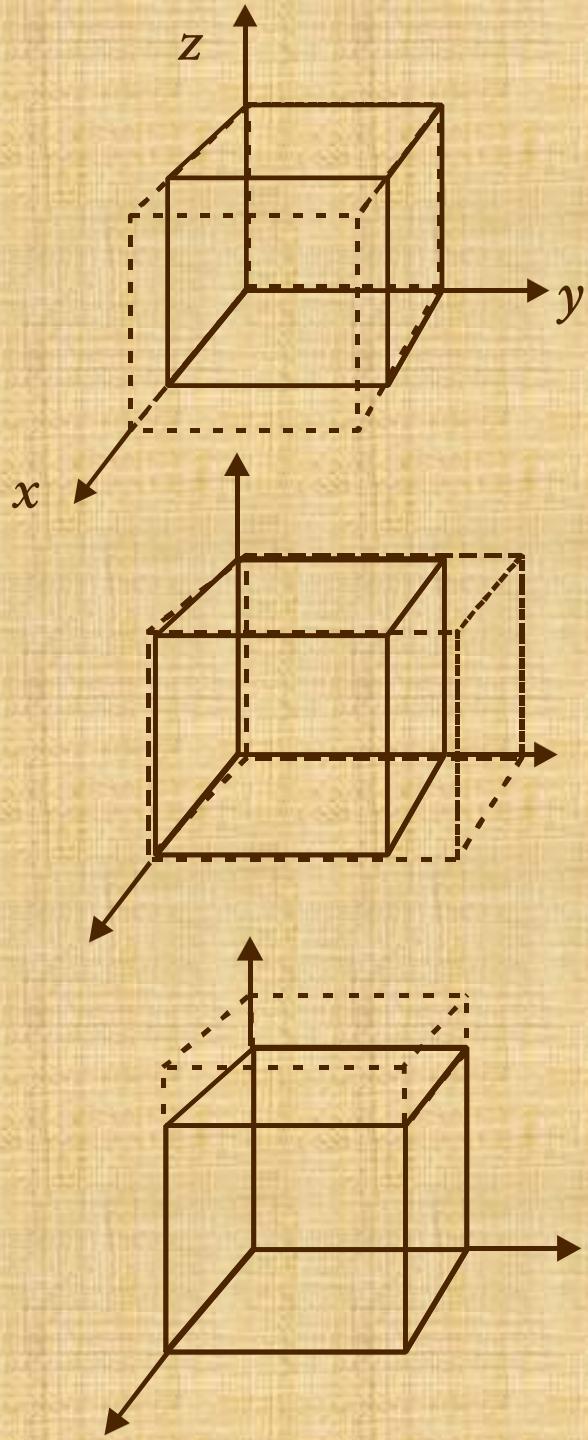


Uzunluktaki değişim miktarları ;

$$\varepsilon_{xx} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$$

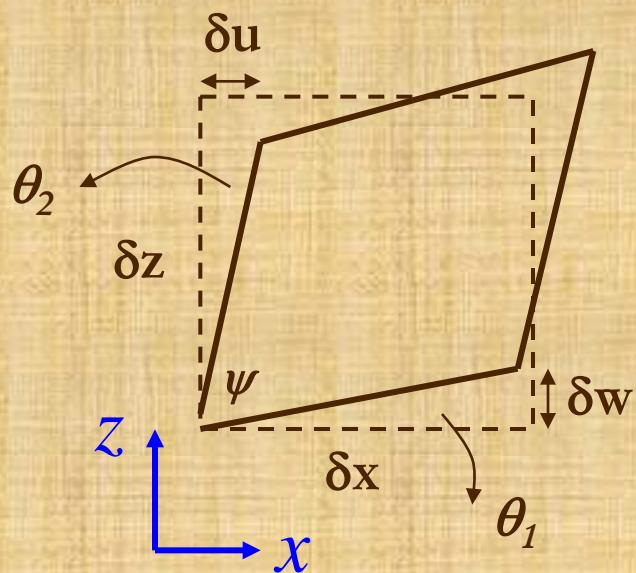
$$\varepsilon_{yy} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} \equiv \frac{\partial v}{\partial z}$$



Pozitif işaretli iseler “genleşme”
Negatif işaretli iseler “sıkışma”

Kayma (shear) deformasyonu;



$$\gamma_{xz} = \frac{\pi}{2} - \psi = \theta_1 + \theta_2$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\delta w}{\delta x} \Rightarrow \theta_1 (\text{çok küçük açıçılardır})$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\delta u}{\delta z} \Rightarrow \theta_2 (\text{çok küçük açıçılardır})$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xz} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2)$$

boyutlar $\rightarrow 0$ durumunda ;

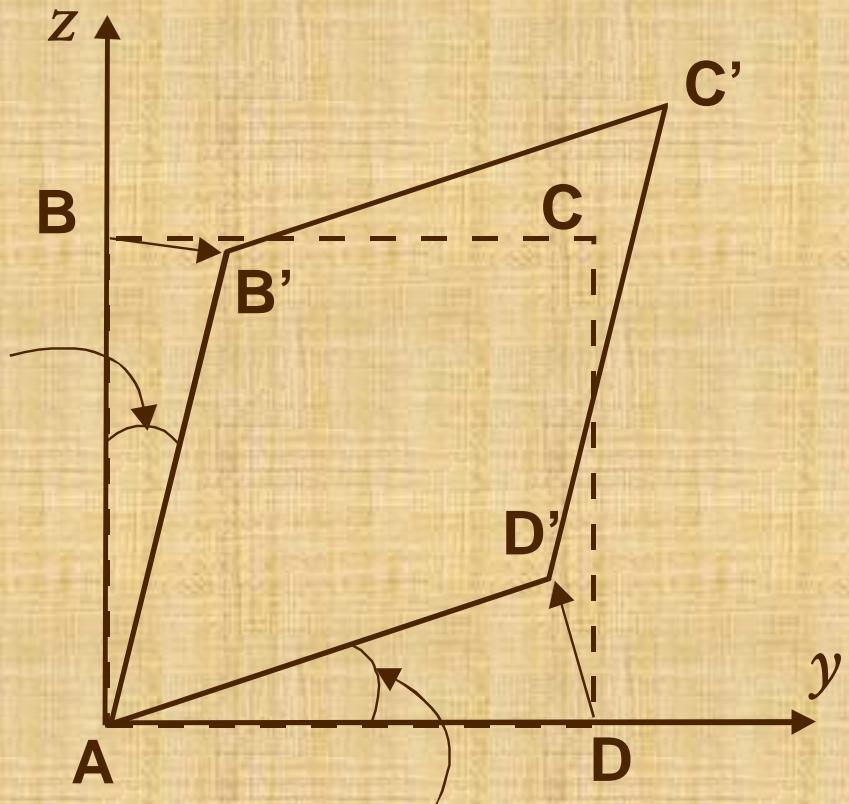
$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Kayma deformasyonları ;

$$\varepsilon_{xy} \equiv \varepsilon_{yx} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{zx} \equiv \varepsilon_{xz} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} \equiv \varepsilon_{zy} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

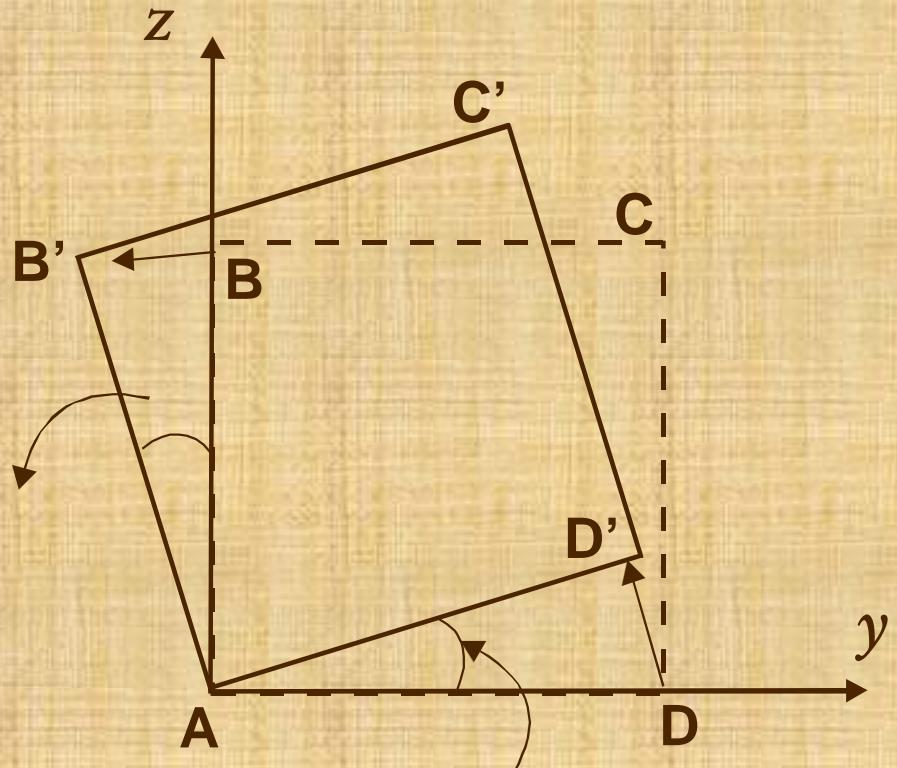


Dönme deformasyonları ;

$$\theta_x \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\theta_y \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\theta_z \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



Böylece, bir nokta için

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

gibi dokuz büyüklük bilinirse komşu noktaların rölatif yerdeğiştirmeleri hesaplanabilir. Deformasyon katsayıları aşağıdaki gibi tanımlayalım :

$$\varepsilon_{xx} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{xy} \equiv \varepsilon_{yx} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\theta_x \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{yy} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zx} \equiv \varepsilon_{xz} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\theta_y \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

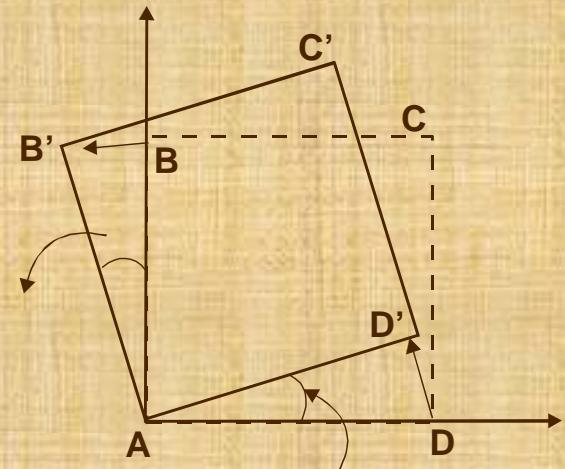
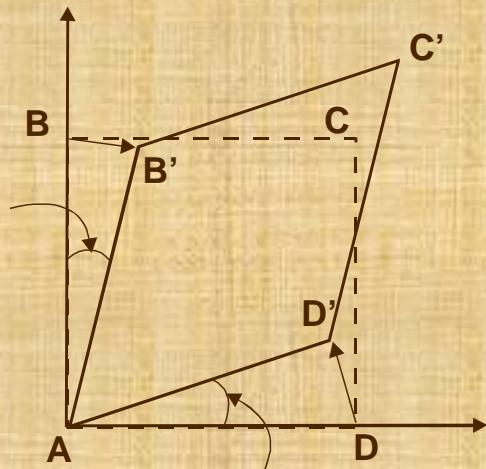
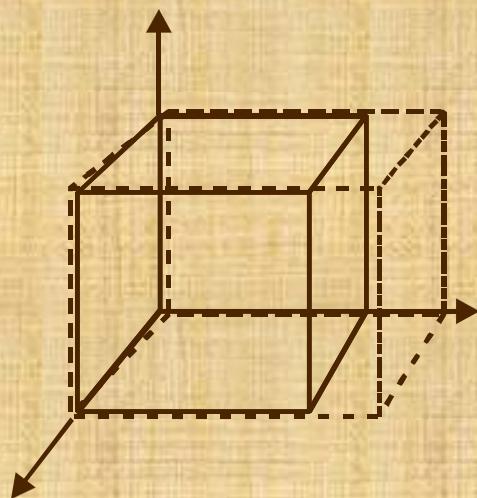
$$\varepsilon_{zz} \equiv \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{yz} \equiv \varepsilon_{zy} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\theta_z \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Bu denklemler üç tür deformasyona işaret ederler ;

1. Hacimsel değişim, genleşme veya daralma (ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz})
2. Şekil değişimi (ϵ_{xy} , ϵ_{yx} , ϵ_{xz} , ϵ_{zx} , ϵ_{yz} , ϵ_{zy})
3. Dönme (θ_x , θ_y , θ_z)



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

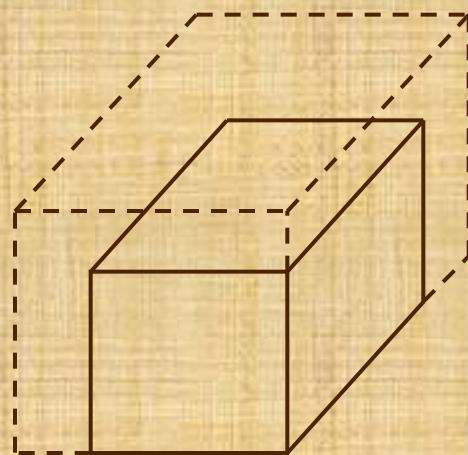
Dilatasyon

Dilatasyon; birim hacime tekabül eden hacim artmasıdır;

$$\Delta = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V}$$

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$



STRESS

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

STRAIN

$$\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\sigma = E\epsilon$$

Hooke Kanunu