SANDA MICULA   RODICA SOBOLU

MARIA MICULA

A N A L I Z Ă   N U M E R I C Ă

C U

M A P L E

Editura AcademicPress

Cluj-Napoca, 2008

Cuprins

Capitolul 1

Elemente de teoria erorilor

1.1 Introducere

Analiza numerică, o componentă a matematicii aplicate, oferă metode şi procedee de determinare efectivă a soluţiilor numerice ale diverselor probleme, cu o precizie dinainte fixată.

Problemele specifice ce pot fi rezolvate cu ajutorul analizei numerice sunt:

1. Probleme ce sunt modelate prin funcţii de una sau mai multe variabile, dar acestea nu pot fi efectiv determinate, ci se cunosc valori ale lor pentru valori particulare ale argumentului. Se cere, ca pe baza acestora, să se determine, cu aproximaţie, valorile acestor funcţii pe alte noi puncte, valorile derivatelor lor de un anumit ordin, pe puncte date, valorile integralelor lor pe anumite domenii.

Astfel se ajunge la teoria diferenţelor finite şi a diferenţelor divizate, la formulele de interpolare, de derivare şi integrare numerică. Pe baza acestora pot fi elaborate diverse noi procedee de aproximare.

2. De multe ori, în rezolvarea unor probleme se ajunge la sisteme de ecuaţii de diverse tipuri: algebrice, transcendente, diferenţiale, integrale, etc., a căror soluţie exactă nu poate fi determinată. De aceea se face apel la procedee de aproximare.

Un procedeu de aproximare trebuie să posede următoarele caracteristici:

1. Să fie convergent−adică şirul aproximaţiilor succesive să fie convergent către soluţia exactă, pentru a aproxima "cât mai bine" această soluţie.

2. Să fie stabil (să aibă stabilitate), adică variaţii mici ale datelor numerice să aibă ca efect variaţii mici ale soluţiilor aproximative.

Uneori, condiţiile care asigură stabilitatea unei metode de aproximare coincid cu cele care garantează convergenţa sa.

Desigur, importantă este şi "viteza" de convergenţă a unei metode de aproximare.

1.2 Noţiuni de teoria erorilor

Vom considera următoarele exemple:

Exemplul 1.1 *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^2 = 3$$

Soluţie. Soluţia exactă este

$$x = \sqrt{3}$$

iar valoarea aproximativă a soluţiei este

$$x = 1.732...$$

Exemplul 1.2 *Să se calculeze*

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx$$

Soluţie. Se obţine

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

sau valoarea sa aproximativă

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = 1.0986...$$

Exemplul 1.3 *Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele* $(-1, 1)$ *şi* $(2, 3)$.

Soluţie. Se foloseşte ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Se obţine

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{2 + 1}(x + 1) \quad \text{sau} \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

adică o relaţie de forma $f(x) = ax + b$.

Exemplul 1.4 *Se consideră datele*

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	5	13	16	23	33	38	40

Să se specifice natura relaţiei între x şi y.

Soluţie. Se reprezintă grafic aceste puncte (figura 1)

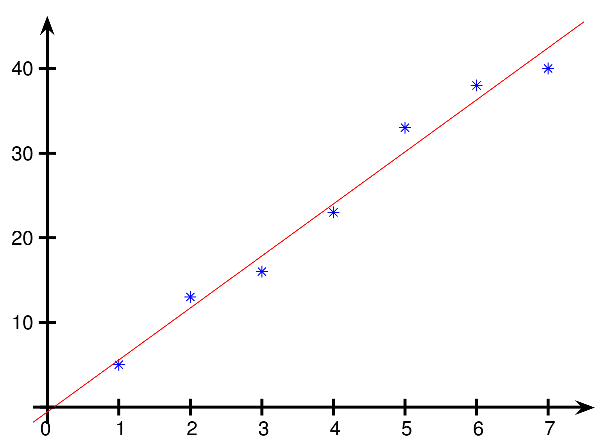


Figura 1. Norul de puncte şi funcţia liniară

Se observă că o dreaptă aproximează "cel mai bine" aceste valori.
Deci legătura între x şi y, pe baza acestor valori, este de forma

$$f(x) = ax + b$$

Din aceste exemple, se vede că, în general, se cere rezolvarea unei probleme de tipul

$$F(x) = y$$

Dacă sunt date x şi F, şi trebuie calculat y, problema se numeşte *problemă directă* sau *problemă de evaluare* (exemplul 1.2).

Dacă sunt date y şi F, şi trebuie determinat x, problema se numeşte *problemă inversă* (exemplul 1.1).

Dacă se dau x şi y, şi trebuie determinat F, problema se numeşte *problemă de identificare* (exemplele 1.3, 1.4).

După cum s-a putut vedea din aceste exemple, soluţiile obţinute sunt valori aproximative, valori afectate de erori, adică de abateri de la soluţiile exacte.

Studiul erorilor şi propagarea lor în calcule sunt probleme importante ale analizei numerice.

In practică, este important să se facă aproximări care să fie afectate de erori neglijabile, adică ele să nu modifice precizia metodei.

1.3 Surse şi tipuri de erori

Se va defini, mai întâi, noţiunea de *aproximaţie*, noţiune ce deja s-a folosit.

Fie $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, o aplicaţie care asociază fiecărui număr $x \in \mathbb{R}$ o submulţime $\mathcal{A}(x)$ a lui $\mathbb{R}$.

Definiţia 1.1 *Fie $x \in \mathbb{R}$. Numărul $x^\star$ se numeşte* **aproximaţie** *a lui $x \in \mathbb{R}$ dacă $x^\star \in \mathcal{A}(x)$.*

Se foloseşte notaţia $x \approx x^\star$. Aplicaţia $\mathcal{A}$ se numeşte *procedeu de aproximare*. Mulţimea $\mathcal{A}(x)$ poate coincide cu $\mathbb{R}$, dar în practică ea este formată din numere ce diferă "puţin" de x.

Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $x^\star \in \mathcal{A}(x)$ o aproximaţie a valorii efective (exacte) x.

Definiţia 1.2 *Numărul*

$$\Delta x = x - x^\star \textit{sau} \quad \Delta x = x^\star - x \tag{1.1}$$

se numeşte **eroarea aproximaţiei** *$x^\star$.*

Dacă $\Delta x > 0$, adică $x - x^\star > 0$, $x^\star$ este *aproximaţie prin lipsă*, iar dacă $\Delta x < 0$, $x^\star$ este *aproximaţie prin adaos*.

De exemplu, pentru numărul $\pi = 3.141592...$, numărul $x^\star = 3.14$ este o aproximaţie prin lipsă, iar $x^\star = 3.142$ este o aproximaţie prin adaos.

Definiţia 1.3 *Valoarea absolută a erorii*

$$|\Delta x| = |x - x^\star| \tag{1.2}$$

se numeşte **eroare absolută**.

Valoarea

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{|x|}, x \neq 0 \tag{1.3}$$

se numeşte **eroare relativă**.

Deoarece, în practică x este necunoscut, se va folosi formula

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{|x^\star|} \tag{1.4}$$

Formula erorii relative poate fi folosită şi sub forma

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} \tag{1.5}$$

Din formula (1.5), rezultă

$$\Delta x = x\delta x \Longrightarrow x^\star - x = x\delta x$$

sau

$$x^\star = (1 + \delta x)x \tag{1.6}$$

formulă des folosită în aplicaţii.
Pentru eroarea absolută şi cea relativă se pot folosi, de asemenea, notaţiile $\Delta x^\star$ şi $\delta x^\star$.

Sursele erorilor pot fi :

- *Modelul matematic al problemei.* De multe ori o problemă este caracterizată de un model matematic "aproximativ", şi de aici rezultă o sursă de erori.

- *Erori umane*: calcule aritmetice, erori de programare, etc.

- *Erori ale datelor iniţiale* (de regulă măsurători).
- *Eroarea calculatorului* dată de reprezentarea în virgulă flotantă a numerelor reale, de rotunjiri, trunchieri, etc.
- *Eroarea metodei de aproximare.*

1.4 Propagarea erorilor

Aici, se vor trata două tipuri de probleme:

1. Să se determine precizia cu care se fac aproximările, ştiind erorile numerelor aproximative cu care se efectuează calculele. Altfel spus, se cere eroarea rezultatului cunoscând eroarea datelor iniţiale.

Mai întâi, reamintim formula lui Taylor pentru funcţiile de o singură variabilă:

$$f(x) = \tag{1.7}$$
$$= f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \cdots$$

Considerăm funcţia de două variabile $f : D \to \mathbb{R}$, $D = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Dezvoltarea sa în serie Taylor în jurul punctului $(x_0, y_0) \in D$ este:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'_x(x_0,y_0) + \frac{y-y_0}{1!}f'_y(x_0,y_0) + \\ & + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''_{x^2}(x_0,y_0) + 2\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{2!}f''_{xy}(x_0,y_0) + \\ & + \frac{(y-y_0)^2}{2!}f''_{y^2}(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''_{x^3}(x_0,y_0) + \\ & + 3\frac{(x-x_0)^2(y-y_0)}{3!}f'''_{x^2y}(x_0,y_0) + 3\frac{(x-x_0)(y-y_0)^2}{3!}f'''_{xy^2}(x_0,y_0) + \\ & + \frac{(y-y_0)^3}{3!}f'''_{y^3}(x_0,y_0) + \cdots \end{aligned} \tag{1.8}$$

Fie (x^*, y^*) valorile aproximative ale valorilor exacte (x, y). Erorile lor absolute sunt:

$$\Delta x = x - x^* \Rightarrow x = x^* + \Delta x$$
$$\Delta y = y - y^* \Rightarrow y = y^* + \Delta y$$

Trebuie calculată eroarea absolută

$$\Delta f = f(x,y) - f(x^*,y^*) \tag{1.9}$$

respectiv eroarea relativă δf.

In formula lui Taylor (1.8) pentru funcţia de două variabile rolul lui x_0 şi y_0 îl vor juca x^* respectiv y^*. Deci

$$\begin{aligned} f(x^*+\Delta x, y^*+\Delta y) &= f(x^*,y^*) + \Delta x f'_x(x^*,y^*) + \Delta y f'_y(x^*,y^*) + \\ &+ \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''_{x^2}(x^*,y^*) + 2\frac{\Delta x \Delta y}{2!} f''_{xy}(x^*,y^*) + \\ &+ \frac{(\Delta y)^2}{2!} f''_{y^2}(x^*,y^*) + \cdots \end{aligned} \tag{1.10}$$

Sau

$$\begin{aligned} f(x^*+\Delta x, y^*+\Delta y) - f(x^*,y^*) &= \Delta x f'_x(x^*,y^*) + \Delta y f'_y(x^*,y^*) + \\ &+ \frac{1}{2!}\Big[(\Delta x)^2 f''_{x^2}(x^*,y^*) + 2\Delta x \Delta y f''_{xy}(x^*,y^*) + \\ &+ (\Delta y)^2 f''_{y^2}(x^*,y^*)\Big] + \cdots \end{aligned} \tag{1.11}$$

Deci

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta x f'_x(x^*,y^*) + \Delta y f'_y(x^*,y^*) + \\ &+ \frac{1}{2!}\Big[(\Delta x)^2 f''_{x^2}(x^*,y^*) + 2\Delta x \Delta y f''_{xy}(x^*,y^*) + \\ &+ (\Delta y)^2 f''_{y^2}(x^*,y^*)\Big] + \cdots \end{aligned} \tag{1.12}$$

Dacă Δx şi Δy sunt mici, atunci $(\Delta x)^2$, $\Delta x \Delta y$, $(\Delta y)^2$ pot fi neglijate.

Se obţine *formula erorii absolute a funcţiei* f sau *eroarea absolută maximă*:

$$\Delta f \simeq \Delta x f'_x(x^*,y^*) + \Delta y f'_y(x^*,y^*) \tag{1.13}$$

Analog pentru funcţia $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A = \{(x,\ y,\ z) | x,\ y,\ z\ \in \mathbb{R}\}$, avem

$$\Delta f \simeq \Delta x f'_x(x^*,y^*,z^*) + \Delta y f'_y(x^*,y^*,z^*) + \Delta z f'_z(x^*,y^*,z^*)$$

In general pentru funcţia de n variabile, se obţine

$$\begin{aligned} \Delta f &\simeq \Delta x_1 f'_{x_1}() + \Delta x_2 f'_{x_2}() + \cdots + \Delta x_n f'_{x_n}() = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f'_{x_i}() \end{aligned} \tag{1.14}$$

Aceasta este *eroarea propagată*.

Pentru eroarea relativă δf avem

$$\begin{aligned}\delta f = \frac{\Delta f}{f} &\simeq \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{f'_{x_i}()}{f} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{d}{dx_i} \ln f() = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \delta x_i \frac{d}{dx_i} \ln f() = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{d}{dx_i} \ln f() \delta x_i \qquad (1.15)\end{aligned}$$

2. Problema inversă este de a stabili precizia care se foloseşte în aproximarea datelor iniţiale pentru ca rezultatul să aibă o precizie dată, dinainte fixată.

Aceasta înseamnă să se determine limitele (marginile) superioare ale erorii absolute şi relative pentru un $\epsilon > 0$ (precizia) dat, fixat.

Rezolvarea acestei probleme se va face cu ajutorul metodei numită *principiul efectelor egale*. Acest principiu presupune că produsele $f'_{x_i} \Delta x_i$ din evaluarea (1.14) a erorii absolute, au aceeaşi contribuţie la producerea acestei erori, adică

$$f'_{x_1} \Delta x_1 = f'_{x_2} \Delta x_2 = \cdots = f'_{x_n} \Delta x_n$$

Atunci formula (1.14) devine

$$\Delta f \simeq n \Delta x_i f'_{x_i}()$$

de unde

$$\Delta x_i \simeq \frac{\Delta f}{n f'_{x_i}} \qquad (1.16)$$

sau

$$|\Delta x_i| \simeq \frac{|\Delta f|}{n |f'_{x_i}|} \qquad (1.16')$$

Pe baza aceluiaşi principiu, din formula (1.15), pentru eroarea relativă, se obţine

$$\delta x_i \simeq \frac{|\delta f|}{n \left| x_i \dfrac{d}{dx_i} \ln f \right|} \qquad (1.17)$$

1.5 Reprezentarea numerelor

O problemă importantă în Analiza numerică este reprezentarea numerelor în calculator şi erorile produse prin această reprezentare.

Majoritatea calculatoarelor folosesc numerele reprezentate în sistemul binar, dar şi în cel zecimal.

Baza unui sistem de numeraţie este numărul de simboluri necesare reprezentării unui număr.

Un număr $r = r_0\, r_1 \cdots r_k$ se poate reprezenta într-un sistem de numeraţie cu baza b, sub forma

$$r = r_0 b^k + r_1 b^{k-1} + \cdots + r_k \tag{1.18}$$

Pentru $b = 2$, simbolurile folosite fiind 0 şi 1, numărul se reprezintă în baza 2 sau în *sistemul binar*.

1.5.1 Conversia numerelor din sistemul zecimal în sistemul binar

Pentru a transforma un număr întreg din sistemul zecimal în cel binar, *se fac împărţiri succesive la* 2 *ale numărului şi câturilor obţinute până când împărţirea la* 2 *nu mai este posibilă*. Succesiunea de cifre binare este formată din ultimul cât diferit de zero şi resturile împărţirilor luate în ordinea inversă obţinerii lor.

Exemplul 1.5 *Să se reprezinte numărul* 2007 *în sistemul binar.*

Soluţie. Reprezentarea binară se obţine după următoarea schemă:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r|r|r|r|r}
2007 & 2 &&&&&&&&& \\
2006 & 1003 & 2 &&&&&&&& \\
1 & 1002 & 501 & 2 &&&&&&& \\
 & 1 & 500 & 250 & 2 &&&&&& \\
 & & 1 & 250 & 125 & 2 &&&&& \\
 & & & 0 & 124 & 62 & 2 &&&& \\
 & & & & 1 & 62 & 31 & 2 &&& \\
 & & & & & 0 & 30 & 15 & 2 && \\
 & & & & & & 1 & 14 & 7 & 2 & \\
 & & & & & & & 1 & 6 & 3 & 2 \\
 & & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 &
\end{array}$$

Deci $2007_{10} = 11111010111_2$.

Numerele fracţionare se transformă din sistemul zecimal în cel binar *înmulţind partea fracţionară cu* 2*, până când aceasta se micşorează (tinzând către zero)*. Dacă se cere numărul de cifre în sistemul binar, atunci partea fracţionară se înmulţeşte cu 2 până se obţine acest număr. Cifrele numărului în sistemul binar sunt date de părţile întregi rezultate în urma înmulţirilor.

Exemplul 1.6 *Să se convertească numărul* 0.578125 *din baza* 10 *în baza* 2.

Soluţie. Schema de calcul este următoarea:

Partea întreagă	Partea fracţionară
	$578125 \cdot 2$
1	$156250 \cdot 2$
0	$312500 \cdot 2$
0	$625000 \cdot 2$
1	$250000 \cdot 2$
0	$500000 \cdot 2$
1	000000

Deci $0.578125_{10} = 0.100101_2$.

Exemplul 1.7 *Să se convertească numărul* 246.39783 *din baza* 10 *în baza* 2.

Soluţie. Se va reprezenta partea întreagă ca în exemplul 1.5, iar cea fracţionară ca în exemplul 1.6.

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r|r}
246 & 2 & & & & & & \\
246 & 123 & 2 & & & & & \\
0 & 122 & 61 & 2 & & & & \\
 & 1 & 60 & 30 & 2 & & & \\
 & & 1 & 30 & 15 & 2 & & \\
 & & & 0 & 14 & 7 & 2 & \\
 & & & & 1 & 6 & 3 & 2 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & 1 &
\end{array}$$

Prin urmare $246_{10} = 11110110_2$.

Pentru partea fracţionară avem:

Partea întreagă	Partea fracţionară
	39783·2
0	79566·2
1	59132·2
1	18264·2
0	36528·2
0	73156·2
1	46312·2
0	93624·2
1	87248·2
1	74496·2
1	48992

Avem $0.39783_{10} = 0.0110010111\cdots_2$.

Deci, $246.39783_{10} = 11110110.0110010111_2$.

Se observă că partea fracţionară rezultată în urma înmulţirilor cu 2 descreşte şi creşte din nou. De aceea ne-am oprit la 10 cifre binare. Dacă se specifică în enunţul problemei un anumit număr de cifre binare, se calculează înmulţirile cu 2, până se realizează acest număr.

1.5.2 Conversia numerelor din sistemul binar în sistemul zecimal

Pentru a transforma un număr din sistemul binar în cel zecimal, se scrie numărul sub forma (1.18) şi se efectuează calculele.

Exemplul 1.8 *Să se convertească numărul* 10011 *din baza* 2 *în baza* 10.

Soluţie.

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 16 + 2 + 1 = 19_{10}$$

Exemplul 1.9 *Să se convertească numărul* 101.100101 *din baza* 2 *în baza* 10.

Soluţie.

$$\begin{aligned} 101.100101_2 &= 1 \cdot 2^2 + \ 0 \cdot 2^1 + \ 1 \cdot 2^0 + \\ &+ 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} = \\ &= 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} = 5 + \frac{37}{64} = 5.578125_{10} \end{aligned}$$

1.5.3 Reprezentarea numerelor în virgulă flotantă

Definiţia 1.4 *Un număr* $r = r_0\, r_1 \cdots r_k$ *în baza* b *(număr par) se reprezintă în* **virgulă flotantă** *sub forma* $r = r_0\, r_1 \cdots r_p \cdot r_{p+1} \cdots r_k \times b^e$.

Cifrele $r_0, r_1, \ldots, r_k$ formează *mantisa* numărului, e - exponentul, iar b - baza.

Pentru ca reprezentarea în virgulă flotantă să fie unică, numerele se scriu sub formă *normalizată*, adică se schimbă reprezentarea lor (nu valoarea) astfel ca $r_0 \neq 0$.

Astfel numerele:

- 1234 în virgulă flotantă poate fi scris sub formele 1.234×10^3, 12.34×10^2, 123.4×10;
- 0.364 poate fi scris sub formele 3.64×10^{-1}, 36.4×10^{-2}, 364.0×10^{-3};
- 0.0725 în formă normalizată este 7.25×10^{-2}.

Reprezentarea în virgulă flotantă poate fi făcută şi în sistemul binar.

Deoarece numerele în sistemul binar se reprezintă cu multe cifre, se impun restricţii asupra numărului de cifre ale mantisei, în funcţie de tipul calculatorului.

Pentru microprocesoarele INTEL, mantisa conţine 24 cifre binare, iar exponentul este cuprins în intervalul $[-126,\ 127]$.

Desigur, prin reprezentarea numerelor în virgulă flotantă se comit erori, care sunt cuprinse în *eroarea maşină* (vezi 1.3).

1.6 Evaluarea preciziei unei aproximaţii cu ajutorul cifrelor semnificative

Definiţia 1.5 *Cifrele semnificative ale unui număr reprezentat în baza* b *sunt oricare din cifrele* $1, 2, \ldots, b - 1$

- *nenule*
- *cele cuprinse între cifre nenule*
- *cele precedate de cel puţin o cifră nenulă*

care intervin în scrierea sa.

Din această definiţie reiese că cifra 0 poate fi cifră semnificativă dacă nu are rolul de a fixa virgula corespunzătoare bazei b sau de a completa locul cifrelor necunoscute sau omise.

Cifra semnificativă cea mai din stânga a unui număr se numeşte *cifra cea mai semnificativă*.

De exemplu,

- numărul 7063 are toate cifrele semnificative
- numărul 0.02340 − ultimele 4 cifre sunt semnificative (zerourile din faţa lui 2 servesc pentru indicarea virgulei zecimale, deci nu sunt cifre semnificative)
- $1.23 \times 10^3 = 1230$ − zero nu este cifră semnificativă, deoarece completează o cifră necunoscută
- $1.230 \times 10^2 = 123$ − zero este cifră semnificativă, fiind precedat de o cifră nenulă.

1.7 Aproximări corecte cu un număr dat de cifre semnificative

Fie numărul $r > 0$ cu următoarea reprezentare în baza 10

$$r = r_0 10^k + r_1 10^{k-1} + \ldots + r_{n-1} 10^{k-n+1} + r_n 10^{k-n} + \ldots$$

Definiţia 1.6 *Numărul*

$$r^* = r_0^* 10^k + r_1^* 10^{k-1} + \ldots + r_{n-1}^* 10^{k-n+1}$$

aproximează numărul r **corect cu** n **cifre semnificative** *dacă*

$$|\Delta r^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{k-n+1} \tag{1.19}$$

Exemplul 1.10 *Să se determine numărul de cifre semnificative cu care numărul* 2.718282 *aproximează corect numărul* $e = 2.71828182\ldots$.

Soluţie. Fie $e^* = 2.718282$. Acesta se poate scrie sub forma

$$e^* = 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + \cdots$$

Prin urmare, $k = 0$. Avem

$$\Delta e^* = e^* - e = 0.00000018 = 0.18 \times 10^{-6} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-6}$$

De unde, comparând cu (1.19), se obţine

$$10^{k-n+1} = 10^{-6} \Rightarrow 0 - n + 1 = -6 \Rightarrow n = 7$$

Deci, numărul 2.718282 aproximează corect numărul $e = 2.71828182\ldots$ cu 7 cifre semnificative.

Aceste aproximări sunt folosite în intocmirea tabelelor de logaritmi (mantisele lor sunt date cu 5 zecimale $-$ 5 cifre semnificative) sau pentru calculul unor funcţii (trigonometrice, Laplace, etc.) pentru diferite valori ale argumentelor lor.

Intre numărul de cifre semnificative şi eroarea relativă există relaţia

$$\delta r^* \leq \frac{1}{r_0^* \times 10^{n-1}} \tag{1.20}$$

r^* fiind aproximaţia corectă cu n cifre semnificative, cu reprezentarea normalizată

$$r^* = r_0^* 10^k + r_1^* 10^{k-1} + \cdots + r_{n-1}^* 10^{k-n+1} \tag{1.21}$$

Intr-adevăr, pentru $r^* > 0$,

$$|\Delta r^*| = |r - r^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{k-n+1} \Rightarrow -\frac{1}{2} \times 10^{k-n+1} \leq r - r^* \leq \frac{1}{2} \times 10^{k-n+1}$$

de unde,

$$r \geq r^* - \frac{1}{2} \times 10^{k-n+1}$$

Dar

$$r^* \geq r_0^* \cdot 10^k$$

Atunci

$$r \geq r_0^* \cdot 10^k - \frac{1}{2} \cdot 10^{k-n+1} = \frac{1}{2} \cdot 10^k (2r_0^* - \frac{1}{10^{n-1}}) \geq \frac{1}{2} \cdot 10^k (2r_0^* - 1)$$

Insă $r_0^* \geq 1$, r^* având forma normalizată.

Avem

$$\left.\begin{array}{ll} r_0^* - 1 & \geq 0 \\ r_0^* & = r_0^* \end{array}\right\} \Rightarrow 2r_0^* - 1 \geq r_0^*$$

Prin urmare

$$r \geq \frac{1}{2} \cdot 10^k r_0^*$$

Dar

$$\delta r^* = \frac{\Delta r^*}{r} \leq \frac{\frac{1}{2}10^{k-n+1}}{r} \leq \frac{\frac{1}{2}10^{k-n+1}}{\frac{1}{2}10^k r_0^*} = \frac{1}{r_0^* 10^{n-1}}$$

Această delimitare poate fi considerată eroarea relativă maximă.

Exemplul 1.11 *Fie* $r^* = 0.0875$ *aproximaţia corectă cu* 3 *cifre semnificative a numărului* r. *Care este eroarea relativă maximă a acestei aproximaţii?*

Soluţie. Numărul r^* se poate scrie sub forma

$$r^* = 8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} = 8.75 \cdot 10^{-2}$$

De unde se vede că r_0^* =8, $n = 3$.

Eroarea relativă maximă este

$$\frac{1}{r_0^* 10^{n-1}} = \frac{1}{8 \cdot 10^2} = \frac{1}{8} \cdot 10^{-2} = 0.125 \cdot 10^{-2} = 0.00125$$

Deci, numărul r poate fi aproximat de numărul $r^* = 0.0875$, cu trei cifre semnificative, cu eroarea relativă maximă de 0.125 %.

1.8 Probleme propuse

1. Să se determine o limită a erorii absolute şi relative când numărul π este aproximat prin 3.14.

2. Să se calculeze eroarea absolută şi cea relativă în aproximarea numărului x prin x^* dacă:

$$\begin{array}{llll} a) & x = \sqrt{2}, \quad x^* = 1.414 & b) & x = 10^\pi, \quad x^* = 1400 \\ c) & x = e^{10}, \quad x^* = 22000 & d) & x = 7!, \quad x^* = 5000 \end{array}$$

3. Să se determine eroarea absolută şi eroarea relativă a volumului unei sfere cu diametrul 3.7 ± 0.04 şi $\pi \simeq 3.14$.

4. Intr-un triunghi ΔABC se dau valorile aproximative pentru $AB = c^* = 8\ cm$, $AC = b^* = 20\ cm$ şi $\widehat{A^*} = \frac{\pi}{6}$. Cu ce eroare absolută trebuie măsurate laturile b, c şi unghiul A, astfel ca aria $S_{\Delta ABC}$ să fie calculată cu o eroare absolută mai mică sau egală cu $0.6\ cm^2$.

5. Semiaxele a şi b ale unei elipse au valorile aproximative de $5\ m$ respectiv $3\ m$. Cu ce precizie trebuie măsurate acestea şi cu ce precizie trebuie considerat numărul π pentru ca aria elipsei să fie obţinută cu eroarea absolută mai mică decât $0.1\ m^2$?

6. Să se cerceteze eroarea absolută în determinarea unui unghi, în radiani, din primul cadran folosind funcţia sin şi tg.

7. Să se convertească numerele:

1^0.	161	5^0.	11010110
2^0.	23456	6^0.	101.010101
3^0.	123.3575	7^0.	100101.0001
4^0.	1259.3359375	8^0.	1010101010101

Capitolul 2

Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii algebrice liniare

Sistemele algebrice liniare pot fi rezolvate prin două categorii de metode:

- Metode exacte (directe) care furnizează soluţia exactă într-un număr finit de paşi (regula lui Cramer, Algoritmul lui Gauss, etc.);
- Metode iterative care aproximează soluţia generând un şir de aproximaţii ce converge către soluţia exactă.

2.1 Eliminarea gaussiană

Se ştie că *algoritmul lui Gauss* de rezolvare a unui sistem algebric de ecuaţii algebrice constă în eliminarea pe rând a necunoscutei x_1 din toate ecuaţiile sistemului începând cu a doua, a lui x_2 începând cu a treia, ş.a.m.d., în ultima ecuaţie rămânând doar x_n. Soluţia se obţine pornind de la ultima ecuaţie. Aceste operaţii pot fi efectuate prin aşa numitele *transformări elementare*.

Vom reaminti algoritmul lui Gauss pe un exemplu.

Exemplul 2.1 *Să se rezolve următorul sistem*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \tag{2.1}$$

Soluţie. Considerăm matricea extinsă a sistemului, pe care o aducem la forma unei matrice triunghiulare superior, aplicând transformări elementare numai pe linii.

Avem

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{2}L_1 + L_2 \to L_2 \qquad -\frac{1}{2}L_2 + L_3 \to L_3$$

$$-\frac{1}{2}L_1 + L_3 \to L_3$$

Prin urmare, sistemul (2.1) are forma:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ \qquad 2x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -\frac{7}{2} \\ \qquad\qquad \frac{1}{4}x_3 = \frac{1}{4} \end{cases} \tag{2.2}$$

de unde, în ordine inversă se obţine soluţia

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \Rightarrow 2x_1 = 3 + 2 - 3 \Rightarrow x_1 = 1 \\ 2x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -\frac{7}{2} \Rightarrow 2x_2 = -\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \\ \frac{1}{4}x_3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

In mod analog, matricea extinsă $\tilde{A}$ poate fi adusă la forma triunghiulară inferior

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$-3L_3 + L_1 \to L_1 \qquad \frac{4}{3}L_2 + L_1 \to L_1$$

Deci,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x_1 & = & \dfrac{1}{3} & \Rightarrow & x_1 = 1 \\[2ex] x_1 + 3x_2 & = & -2 & \Rightarrow & 3x_2 = -2 - 1 & \Rightarrow & x_2 = -1 \\[2ex] x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 & \Rightarrow & x_3 = -1 + 2 & \Rightarrow & x_3 = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Această soluţie s-a obţinut prin substituţie directă.

Se poate concluziona că *eliminarea gaussiană* (algoritmul lui Gauss) presupune parcurgerea a două etape:

1. Se transformă sistemul dat (prin transformări elementare) într-un sistem echivalent triunghiular, determinând matricea extinsă triunghiulară (superior sau inferior).

2. Se rezolvă sistemul triunghiular prin substituţia inversă sau directă.

Să generalizăm aceste rezultate.

Fie sistemul

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \tag{2.5}$$

Matricea sa extinsă se va aduce la forma triunghiulară superior

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} a_{11} \neq 0 & a'_{22} \neq 0 \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}}L_1 + L_2 \to L_2 & -\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}L_2 + L_3 \to L_3 \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{11}}L_1 + L_3 \to L_3 & \end{array}$$

cu

$$\begin{array}{lll} a'_{22} = a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a'_{23} = a_{23} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} & b'_2 = b_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\[2ex] a'_{32} = a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & a'_{33} = a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} & b'_3 = b_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}b_1 \\[2ex] a''_{33} = a'_{33} - \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{23} & b''_3 = b'_3 - \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}b'_2 & \end{array} \tag{2.6}$$

Introducem notaţiile

$$\begin{array}{lll} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} & i = 1,\ j = 1,2,3 & b_1^{(1)} = b_1 \\ a_{ij}^{(2)} = a'_{ij} & i = 2,\ j = 2,3 & b_2^{(2)} = b'_2 \\ a_{ij}^{(3)} = a''_{33} & i = 3,\ j = 3 & b_3^{(3)} = b''_3 \end{array} \tag{2.7}$$

Atunci formulele (2.6) se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij},\ b_i^{(1)} = b_i, \quad i,j = 1,2,3 \ \ a_{11}^{(1)} \neq 0 \\ a_{ij}^{(l+1)} &= a_{ij}^{(l)} - \frac{a_{il}^{(l)}}{a_{ll}^{(l)}} a_{lj}^{(l)}, \quad l = 1,2 \ \ a_{ll}^{(l)} \neq 0 \\ b_i^{(l+1)} &= b_i^{(l)} - \frac{a_{il}^{(l)}}{a_{ll}^{(l)}} b_l^{(l)}, \quad l = 1,2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sistemul (2.5) devine

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}^{(1)} x_1 & + & a_{12}^{(1)} x_2 & + & a_{13}^{(1)} x_3 & = & b_1^{(1)} \\ & & a_{22}^{(2)} x_2 & + & a_{23}^{(2)} x_3 & = & b_2^{(2)} \\ & & & & a_{33}^{(3)} x_3 & = & b_3^{(3)} \end{array} \tag{2.9}$$

Soluţia sistemului (2.9) este

$$x_3 = \frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}},\ x_2 = \frac{b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3}{a_{22}^{(2)}},\ x_1 = \frac{b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3}{a_{11}^{(1)}}$$

Matricea A a sistemului (2.9) a fost adusă la forma triunghiulară superior:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

ale cărei elemente sunt date de (2.8).

Ea poate fi adusă şi la forma triunghiulară inferior.

In cazul general al unui sistem de n ecuaţii cu n necunoscute, formulele (2.8) devin

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij},\ b_i^{(1)} = b_i, \quad i,j = 1,2,\ldots,n \quad a_{11}^{(1)} \neq 0 \\ a_{ij}^{(l+1)} &= a_{ij}^{(l)} - \frac{a_{il}^{(l)}}{a_{ll}^{(l)}} a_{lj}^{(l)}, \quad l = 1,2,\ldots,n-1 \;\; a_{ll}^{(l)} \neq 0 \\ b_i^{(l+1)} &= b_i^{(l)} - \frac{a_{il}^{(l)}}{a_{ll}^{(l)}} b_l^{(l)}, \quad l = 1,2,\ldots,n-1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Elementul $a_{ll}^{(l)} \neq 0$, $l = 1,2,\ldots,n-1$ se numeşte *pivot*. Dacă pe parcursul aplicării algoritmului lui Gauss, la un anumit pas p, $a_{pp}^{(p)} = 0$, se poate face schimbarea a două linii între ele în aşa fel încât elemnetul $a_{rp}^{(p)} \neq 0$.

Astfel de schimbări se fac şi dacă pivotul este nenul, pentru că un pivot mic (faţă de numerele de pe coloana sa) poate produce erori de rotunjire mari. De aceea, este indicat să se aleagă ca pivot elementul din aceeaşi coloană (de sub diagonală) care are cea mai mare valoare absolută. Această tehnică se numeşte *pivotare maximală*.

Există şi alte moduri de alegere a pivotului, care reduc erorile.

Dacă matricea A are rangul $p-1$, forma triunghiulară superior a matricei extinse este:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,p-1}^{(1)} & a_{1p}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,p-1}^{(2)} & a_{2p}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_{p-1,p-1}^{(p-1)} & a_{p-1,p}^{(p-1)} & \cdots & a_{p-1,n}^{(p-1)} & b_{p-1}^{(p-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_p^{(p)} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n^{(n)} \end{array} \right)$$

Dacă $b_i^{(p)} = 0$, $i = \overline{p,n}$, sistemul este *compatibil nedeterminat*, iar dacă $b_i^{(p)} \neq 0$ sistemul este *incompatibil*.

Prin urmare, eliminarea gaussiană permite nu numai rezolvarea sistemelor, ci şi discutarea lor.

2.2 Rezolvarea matriceală a sistemelor liniare

Sistemul (2.5) poate fi scris sub forma matriceală

$$A \cdot x = b \tag{2.12}$$

unde

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} && \text{este matricea coeficienţilor sistemului} \\
x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} && \text{este matricea necunoscutelor sistemului} \\
b &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} && \text{este matricea termenilor liberi}
\end{aligned}$$

Dacă matricea A este nesingulară ($|A| \neq 0$), ea admite matricea inversă A^{-1}, care are proprietatea

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$$

unde I_3 este *matricea unitate* de ordin 3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inmulţind relaţia (2.12) la stânga cu A^{-1}, se obţine

$$A^{-1}(A \cdot x) = A^{-1} \cdot b, \quad A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

de unde

$$x = A^{-1} \cdot b \tag{2.13}$$

Pentru a rezolva sistemul sub formă matriceală, trebuie mai întâi determinată matricea inversă A^{-1}. Aceasta poate fi găsită şi prin eliminare gaussiană, şi anume, matricea A va fi adusă la matricea unitate de acelaşi ordin efectuând transformări elementare numai pe linii, iar aplicând aceleaşi operaţii matricei unitate, aceasta se transformă în inversa matricei A.

Exemplul 2.2 *Să se determine matricea inversă matricei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluţie. Avem

$$
\begin{aligned}
&(A|I_3) = \\
&= \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \\
&\qquad \begin{array}{c} -L_1 + L_2 \to L_2 \\ 2L_1 + L_3 \to L_3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} -L_2 + L_1 \to L_1 \\ -3L_2 + L_3 \to L_3 \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right) \\
&\qquad \begin{array}{c} \frac{1}{2}L_3 + L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{2}L_3 \to L_3 \end{array}
\end{aligned}
$$

Deci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exemplul 2.3 *Să se rezolve sistemul*

$$A \cdot x = b$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Soluţie. Se foloseşte formula (2.13). Se calculează, mai întâi, inversa matricei A.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2+L_1\to L_1 \\ -\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{2L_3\to L_3 \\ -L_3+L_2\to L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{-2L_3+L_1\to L_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{2}L_2\to L_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Deci

$$A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_2 = & -1 \\ x_3 = & 1 \end{cases}$$

Această metodă nu este eficientă din punctul de vedere al numărului de operaţii necesare calculului matricei inverse.

In continuare, se va arăta un nou procedeu de rezolvare a sistemelor liniare, care necesită mai puţine operaţii.

2.3 Factorizarea LU

Procedeul de rezolvare a sistemelor liniare va fi construit cu ajutorul înmulţirii matricelor.

S-a văzut că o matrice pătratică nesingulară A poate fi adusă la forma triunghiulară superior sau inferior.

Matricea triunghiulară superior se va nota cu U (de la *upper* – superior), iar cea triunghiulară inferior cu L (de la *lower* – inferior), adică

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Are loc următoarea teoremă

Teorema 2.1 *Dacă matricea A este nesingulară, ea se poate scrie sub forma*

$$A = L \cdot U \tag{2.15}$$

cu L şi U date de (2.14).

Acest procedeu poartă numele de *factorizare LU* a lui A sau *descompunerea matricei A în produsul LU*.

Factorizarea LU permite o altă modalitate de rezolvare a sistemelor liniare. Rezolvarea sistemului $A \cdot x = b$ este echivalentă cu rezolvarea sistemului $LUx = b$, care cu notaţia $Ux = y$ este echivalentă cu rezolvarea a două sisteme

$$Ly = b \tag{2.16}$$

$$Ux = y \tag{2.17}$$

Soluţia sistemului (2.16) se determină prin substituţie directă, iar a sistemului (2.17) prin substituţie inversă.

Descompunerea LU a unei matrice nesingulare nu este unică. Prin alegeri convenabile ale matricelor L şi U, această descompunere poate fi unică.

Astfel, dacă

- elementele l_{ii} de pe diagonala principală a matricei L se iau egale cu 1, se obţine *factorizarea Doolittle*;

- elementele u_{ii} de pe diagonala principală a matricei U se iau egale cu 1, se obţine *factorizarea Crout*.

Indiferent de tipul factorizării, etapele rezolvării unui sistem liniar $A \cdot x = b$ sunt:

1. Determinarea matricelor L şi U;
2. Rezolvarea sistemului $Ly = b$ prin substituţie directă;
3. Rezolvarea sistemului $Ux = y$ prin substituţie inversă.

In continuare se va utiliza factorizarea Doolittle. Se va ilustra modul de determinare a matricelor L şi U pentru matricea de ordinul $3 \cdot 3$.

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Se introduc notaţiile

$$v = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad w = (a_{12} \;\; a_{13}) \;\; A' = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Atunci matricea A se poate scrie astfel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ v & A' \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Să calculăm expresia $A' - \dfrac{v}{a_{11}} w$:

$$\begin{aligned} A' - \frac{v}{a_{11}} w &= \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{a_{21}}{a_{11}} \\ \\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} \end{pmatrix} (a_{12} \;\; a_{13}) = \\ &= \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ \\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & \dfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ \\ a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.21}$$

S-a văzut în paragrafele anterioare că, pentru a aduce această matrice la forma triunghiulară superior, se fac, mai întâi elemente nule pe prima coloană folosind operaţiile:

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}L_1 + L_2 \to L_2 \ \text{ respectiv } \ -\frac{a_{31}}{a_{11}}L_1 + L_3 \to L_3 \tag{2.22}$$

Se obţine

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \\ 0 & a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

In această etapă matricea U are forma

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \\ 0 & a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

In factorizarea Doolittle matricea L este

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Să calculăm produsul

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \\ 0 & a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} + a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} + a_{23} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \\
a_{31} & \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} + a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} + a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}
\end{pmatrix} = A
$$

Prin urmare, matricele L şi U date de (2.25) respectiv (2.24) pot fi scrise sub forma

$$
L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{v}{a_{11}} & I_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ 0 & A' - \dfrac{v}{a_{11}}w \end{pmatrix}
$$

Ţinând seama de (2.21), matricea (2.23) are forma

$$
A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ 0 & A' - \frac{v}{a_{11}}w \end{pmatrix} \tag{2.26}
$$

care cu notaţiile (2.7) devine

$$
A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{2.27}
$$

Adaptând notaţiile (2.19) avem

$$
v' = a_{32}^{(2)} \quad w' = a_{23}^{(2)} \quad A'' = a_{33}^{(2)} \tag{2.28}
$$

Matricea (2.27) prin transformarea

$$
-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2 + L_3 \to L_3 \tag{2.29}
$$

devine

$$
A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} - \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{13} \end{pmatrix} \tag{2.30}
$$

Se observă că

$$A'' - \frac{v'}{a_{22}^{(2)}} w' \;=\; a_{33}^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{13} \;=\; a_{33}^{(3)}$$

Atunci

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Prin urmare,

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & w' \\ 0 & 0 & A'' - \dfrac{v'}{a_{22}^{(2)}} w' \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

iar

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Se poate concluziona că factorizarea Doolittle presupune partiţionarea matricei A astfel

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ v & A' \end{pmatrix}$$

care se scrie ca produs de două matrice, conform schemei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ v & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{v}{a_{11}} & I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ 0 & A' - \dfrac{v}{a_{11}} w \end{pmatrix}$$

Matricea $A' - \frac{v}{a_{11}} w$ se descompune la rândul ei în acelaşi mod.

In cazul general, avem

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ v & A' \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{a_{11}} & I_{n-1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & w \\ 0 & A' - \frac{v}{a_{11}} w \end{pmatrix}$$

Se continuă descompunerea matricei $A' - \frac{v}{a_{11}} w$, în acelaşi mod, până când matricea obţinută nu se mai poate partiţiona (devine un scalar).

Matricea $A' - \frac{v}{a_{11}} w$ se numeşte *complementul Schur*.

Exemplul 2.4 *Să se factorizeze LU următoarea matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 10 \\ 2 & 10 & -6 & 8 \\ 5 & 11 & 22 & 21 \end{pmatrix}$$

Soluţie.

–

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 10 \\ 2 & 10 & -6 & 8 \\ 5 & 11 & 22 & 21 \end{array} \qquad a_{11} = 1, \quad w = (2 \ \ 1 \ \ 3), \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{v}{a_{11}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 10 & -6 & 8 \\ 11 & 22 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A' - \frac{v}{a_{11}} w = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 10 & -6 & 8 \\ 11 & 22 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} (2 \ \ 1 \ \ 3) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 10 & -6 & 8 \\ 11 & 22 & 21 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ 1 & 17 & 6 \end{pmatrix}$$

$-$

$$\begin{array}{c|c|cc}
1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline
3 & -1 & 3 & 1 \\ \cline{2-4}
2 & 6 & -8 & 2 \\
5 & 1 & 17 & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a'_{11} = -1, \quad w' = (3 \;\; 1), \quad v' = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \dfrac{v'}{a'_{11}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \\
A'' = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$A'' - \frac{v'}{a'_{11}} w' = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 17 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} (3 \;\; 1) = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 20 & 7 \end{pmatrix}$$

$-$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline
3 & -1 & 3 & 1 \\ \cline{2-4}
2 & -6 & 10 & 8 \\ \cline{3-4}
5 & -1 & 20 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a''_{11} = 10, \quad w'' = 8, \; v'' = 20, \; \dfrac{v''}{a''_{11}} = 2, \; A''' = (7) \\
A''' - \dfrac{v''}{a''_{11}} w'' = 7 - 2 \cdot 8 = -9
\end{array}$$

$-$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline
3 & -1 & 3 & 1 \\ \cline{2-4}
2 & -6 & 10 & 8 \\ \cline{3-4}
5 & -1 & 2 & -9
\end{array}
\quad \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Verificare:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 10 \\ 2 & 10 & -6 & 8 \\ 5 & 11 & 22 & 21 \end{pmatrix} = A$$

Exemplul 2.5 *Să se rezolve sistemul*

$$A \cdot x = b$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ -6 & -1 & 10 & 10 \\ -2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Soluţie. Se vor parcurge următoarele etape:

1. Determinarea matricelor L şi U.

–

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 4 & 4 & 1 & 3 \\ -6 & -1 & 10 & 10 \\ -2 & 1 & 8 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_{11} = 2, \quad w = (1\ -1\ -2), \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \\ A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 10 & 10 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \ \dfrac{v}{a_{11}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} A' - \frac{v}{a_{11}} w &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 10 & 10 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} (1\ -1\ -2) = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

–

$$\begin{array}{r|r|rr} 2 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \cline{3-4} -3 & 2 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a'_{11} = 2, \quad w' = (3\ \ 7), \ v' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ A'' = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \ \dfrac{v'}{a'_{11}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A'' - \frac{v'}{a'_{11}} w' = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (3\ \ 7) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

–

$$\begin{array}{r|r|r|r} 2 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \cline{3-4} -3 & 1 & 4 & -3 \\ \cline{4-4} -1 & 1 & 4 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a''_{11} = 4, \quad w'' = -3, \quad v'' = 4, \quad A''' = (-5), \quad \dfrac{v''}{a''_{11}} = 1 \\ A''' - \dfrac{v''}{a''_{11}} w'' = -5 - 1 \cdot (-3) = -2 \end{array}$$

–

$$\begin{array}{r|r|r|r} 2 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 7 \\ \cline{3-4} -3 & 1 & 4 & -3 \\ \cline{4-4} -1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se poate verifica uşor că $L \cdot U = A$.

2. Rezolvarea sistemului $L \cdot y = b$

$$L \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & & & & & & \\ 2y_1 & + & y_2 & & & & \\ -3y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & \\ -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot y = b \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & & & & & & \\ 2y_1 & + & y_2 & & & & \\ -3y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & \\ -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 & & & & & & & = & 2 & \Rightarrow & y_1 = 2 \\ 2y_1 & + & y_2 & & & & & = & 4 & \Rightarrow & y_2 = 0 \\ -3y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & -5 & \Rightarrow & y_3 = 1 \\ -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 & \Rightarrow & y_4 = 2 \end{cases}$$

3. Rezolvarea sistemului $U \cdot x = y$

$$U \cdot x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 & \Rightarrow & x_1 = -\dfrac{19}{8} \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 0 & \Rightarrow & x_2 = \dfrac{17}{4} \\ & & & & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 1 & \Rightarrow & x_3 = -\dfrac{1}{2} \\ & & & & & - & 2x_4 & = & 2 & \Rightarrow & x_4 = -1 \end{cases}$$

2.4 Valori proprii ale unei matrice

Fie A o matrice pătratică.

Definiţia 2.1 *Numărul* λ *se numeşte* **valoare proprie** *a matricei* A*, iar matricea coloană* v *−* **vector propriu** *dacă satisfac relaţia*

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0 \tag{2.34}$$

Ecuaţia (2.34) poate fi scrisă sub forma:

$$(\lambda I - A)v = 0, \quad v \neq 0 \tag{2.35}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aceasta conduce la următorul sistem linear omogen:

$$\begin{array}{ccccccccc} (\lambda - a_{11})v_1 & + & a_{12}v_2 & + & \cdots & a_{1n}v_n & = & 0 \\ a_{21}v_1 & + & (\lambda - a_{22})v_2 & + & \cdots & a_{2n}v_n & = & 0 \\ \cdots & . & \cdots & . & \cdots & \cdots & . & . \\ a_{n1}v_1 & + & a_{n2}v_2 & + & \cdots & (\lambda - a_{nn})v_n & = & 0 \end{array} \tag{2.36}$$

care are soluţie nebanală deoarece $v \neq 0$. Atunci determinantul sistemului este egal cu zero, adică

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.37}$$

$f(\lambda)$ se numeşte *polinomul caracteristic* al matricei A. Rădăcinile acestui polinom sunt valorile proprii ale matricei A. Pentru fiecare valoare proprie λ_i se vor obţine vectorii proprii corespunzători din sistemul (2.36).

Exemplul 2.6 *Să se determine valorile şi vectorii proprii ai matricei*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 13 & -16 \\ 13 & -10 & -13 \\ -16 & 13 & -7 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

Soluţie. Sistemul (2.36) corespunzător matricei A este

$$\begin{array}{rcrcrcl} (\lambda + 7)v_1 & - & 13v_2 & + & 16v_3 & = & 0 \\ -13v_1 & + & (\lambda + 10)v_2 & + & 13v_3 & = & 0 \\ 16v_1 & - & 13v_2 & + & (\lambda + 7)v_3 & = & 0 \end{array} \tag{2.39}$$

cu polinomul caracteristic corespunzător

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+7 & -13 & 16 \\ -13 & \lambda+10 & 13 \\ 16 & -13 & \lambda+7 \end{vmatrix} = 0$$

Avem

$$\underset{C_1+C_2+C_3 \to C_1}{\begin{vmatrix} \lambda+7 & -13 & 16 \\ -13 & \lambda+10 & 13 \\ 16 & -13 & \lambda+7 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} \lambda+10 & -13 & 16 \\ \lambda+10 & \lambda+10 & 13 \\ \lambda+10 & -13 & \lambda+7 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+10)\underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\begin{vmatrix} 1 & -13 & 16 \\ 1 & \lambda+10 & 13 \\ 1 & -13 & \lambda+7 \end{vmatrix}} = (\lambda+10)\begin{vmatrix} 1 & -13 & 16 \\ 0 & \lambda+23 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-9 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+10)(\lambda+23)(\lambda-9) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -10, \ \ \lambda_2 = -23, \ \ \lambda_3 = 9$$

Vectorii proprii se obţin astfel:
$\underline{\lambda = -10}$

$$\begin{cases} -3v_1 - 13v_2 + 16v_3 = 0 \\ -13v_1 + 13v_3 = 0 \\ 16v_1 - 13v_2 - 3v_3 = 0 \end{cases}, P = \begin{vmatrix} -3 & -13 \\ -13 & 0 \end{vmatrix} = -169 \neq 0$$

$$\frac{v_1}{\begin{vmatrix} -13 & 16 \\ 0 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{-v_2}{\begin{vmatrix} -13 & 16 \\ -13 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{v_3}{\begin{vmatrix} -13 & -13 \\ -13 & 0 \end{vmatrix}} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{-169} = \frac{-v_2}{169} = \frac{v_3}{-169} = k \ \Rightarrow$$

$$v_1 = -169k, \ \ v_2 = -169k, \ \ v_3 = -169k \ \Rightarrow k = \frac{1}{-169} \ \Rightarrow \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -23}$

$$\begin{cases} -16v_1 - 13v_2 + 16v_3 = 0 \\ -13v_1 - 13v_2 + 13v_3 = 0 \\ 16v_1 - 13v_2 - 16v_3 = 0 \end{cases} \quad P = \begin{vmatrix} -16 & -13 \\ -13 & -13 \end{vmatrix} = 39 \neq 0$$

$$\frac{v_1}{\begin{vmatrix} -13 & 16 \\ -13 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{-v_2}{\begin{vmatrix} -16 & 16 \\ -13 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{v_3}{\begin{vmatrix} -16 & -13 \\ -13 & -13 \end{vmatrix}} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{39} = \frac{-v_2}{0} = \frac{v_3}{39} = k \ \Rightarrow$$

$$v_1 = 39k, \ \ v_2 = 0, \ \ v_3 = 39k \ \Rightarrow k = \frac{1}{39} \ \Rightarrow \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 9}$

$$\begin{cases} 16v_1 - 13v_2 + 16v_3 = 0 \\ -13v_1 + 19v_2 + 13v_3 = 0 \\ 16v_1 - 13v_2 + 16v_3 = 0 \end{cases} \quad P = \begin{vmatrix} 16 & -13 \\ -13 & 19 \end{vmatrix} = 135 \neq 0$$

$$\frac{v_1}{\begin{vmatrix} -13 & 16 \\ 19 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{-v_2}{\begin{vmatrix} 16 & 16 \\ -13 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{v_3}{\begin{vmatrix} 16 & -13 \\ -13 & 19 \end{vmatrix}} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{-473} = \frac{-v_2}{416} = \frac{v_3}{135} = k \ \Rightarrow v_1 = -473k, \ v_2 = -416k,$$

$$v_3 = 135k \ \ \Rightarrow \ k = -1 \ \Rightarrow \ v = \begin{pmatrix} 473 \\ 416 \\ -135 \end{pmatrix}$$

Există şi alte metode de calcul al valorilor proprii ale unei matrice. Dacă matricele au forme speciale (diagonale, tridiagonale, simetrice), calculul valorilor proprii se face cu uşurinţă.

2.5 Metode iterative

O alternativă la metodele exacte de rezolvare a sistemelor liniare o constituie *metodele iterative* (aproximative). Aici, vor fi tratate două astfel de metode.

2.5.1 Metoda lui Jacobi

Această metodă este cunoscută şi sub numele de metoda *substituţiilor simultane*.

Fie următorul sistem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \tag{2.40}$$

Din prima ecuaţie se exprimă x_1, din a doua x_2, din a treia x_3:

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x_1 & = & \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\[2ex] x_2 & = & \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\[2ex] x_3 & = & \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{array} \right. \tag{2.41}$$

Fie $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\[2ex] x_2^{(0)} \\[2ex] x_3^{(0)} \end{pmatrix}$ o soluţie iniţială aproximativă a soluţiei exacte x.

Aceasta se înlocuieşte în (2.41) şi se obţine

$$\left\{ \begin{array}{ccl} x_1^{(1)} & = & \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right) \\[2ex] x_2^{(1)} & = & \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}\right) \\[2ex] x_3^{(1)} & = & \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}\right) \end{array} \right.$$

In general, avem

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right) \end{cases} \tag{2.42}$$

Aceasta este *metoda iterativă a lui Jacobi* (Gauss $-$ Jacobi) în $k+1$ paşi.

Se continuă procedeul până când se obţin două aproximaţii succesive $x_i^{(k+1)} \simeq x_i^{(k)}$.

Dacă se cere dinainte eroarea cu care trebuie calculată soluţia aproximativă $x^{(k)}$, metoda se aplică de atâtea ori cât este necesar pentru a obţine această precizie.

De regulă soluţia iniţială se ia $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dacă nu se specifică altă soluţie.

Formulele (2.42) pot fi scrise sub forma

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1,2,3$$

sau în cazul general

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{2.43}$$

2.5.2 Metoda Gauss $-$ Seidel

Această metodă este cunoscută şi sub numele de *metoda substituţiilor succesive*.

Prin această metodă, în formulele de recurenţă se folosesc noile valori iterative ale necunoscutelor, adică

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right) \end{cases} \tag{2.44}$$

Metoda Gauss - Seidel este mai rapid convergentă decât metoda Jacobi.

Formulele (2.44) pot fi scrise sub forma

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, 3$$

In general avem

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.45}$$

Aplicarea metodelor sub forma (2.43) sau (2.45) este greoaie. De aceea, acestea se vor prezenta sub formă matriceală.

Fie sistemul

$$A \cdot x = b, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matricea A se va scrie sub forma

$$A = N - P$$

unde N este o matrice nesingulară, a cărei inversă se poate calcula uşor.

Matricea A trebuie să fie nesingulară şi elementele a_{ii} de pe diagonala principală să fie nenule.

Sistemul devine

$$(N-P)x = b \Rightarrow Nx - Px = b \Rightarrow Nx = Px + b$$

de unde rezultă

$$x = N^{-1}Px + N^{-1}b \tag{2.46}$$

Atunci metoda iterativă este definită de relaţia

$$x^{(k+1)} = N^{-1}Px^{(k)} + N^{-1}b, \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{2.47}$$

După modul de alegere a matricei N, respectiv P, se obţin metodele iterative.

Astfel

- Dacă

$$N = D, \quad P = L + U \Rightarrow A = D - L - U$$

unde

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obţine *metoda lui Jacobi*, iar relaţia (2.47) devine

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \tag{2.48}$$

- Dacă

$$N = D - L, \quad P = U$$

se obţine *metoda lui Gauss - Seidel*

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b \tag{2.49}$$

matricele D, L şi U fiind cele de mai sus.

2.6 Eroarea în rezolvarea sistemelor liniare

In rezolvarea sistemelor liniare prin metodele specificate intervin *erori de rotunjire* în operaţiile aritmetice, care conduc la erori în calculul soluţiei sistemului.

Fie $\hat{x}$ soluţia calculată a sistemului

$$A \cdot x = b \tag{2.50}$$

Diferenţa

$$r = b - A \cdot \hat{x} \tag{2.51}$$

se numeşte *eroare reziduală* în aproximarea lui b cu $A \cdot \hat{x}$.

Dacă $\hat{x}$ este soluţia exactă atunci $r = 0$.

Ţinând seama de (2.50), eroarea reziduală (2.51) devine

$$r = Ax - A\hat{x} = A(x - \hat{x}) \tag{2.52}$$

Fie $e = x$ - $\hat{x}$ eroarea absolută a lui $\hat{x}$. Atunci

$$Ae = r \tag{2.53}$$

adică eroarea absolută e satisface un sistem liniar cu aceeaşi matrice A a coeficienţilor ca şi sistemul (2.51).

Pentru a analiza convergenţa metodelor iterative, se consideră sistemele (2.46) şi (2.47), care se scad.

Se obţine

$$e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} = N^{-1}P(x - x^{(k)}) = N^{-1}Pe^{(k)}$$

sau

$$e^{(k+1)} = N^{-1}Pe^{(k)} \tag{2.54}$$

formula de recurenţă a erorilor paşilor iteraţiei.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 2.2 *Metoda iterativă* (2.47) *este convergentă dacă şi numai dacă valorile proprii* λ *ale matricei* $N^{-1}P$ *satisfac condiţia* $|\lambda| < 1$.

Teorema asigură faptul că $e^{(k+1)} \to 0$.

Dacă se cere calculul soluţiei aproximative cu o eroare ϵ precizată, metoda se aplică până când $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \epsilon$.

Exemplul 2.7 *Fie sistemul $A \cdot x = b$ unde*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Să se determine o soluţie aproximativă a sistemului folosind metoda lui Jacobi cu 6 paşi.

Soluţie. Se va verifica mai întâi dacă metoda este convergentă, aplicând teorema (2.2).

Cum forma matriceală a metodei lui Jacobi este

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

se vor calcula valorile proprii ale matricei $D^{-1}(L+U)$.

Deci

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2}L_1 \to L_1, \ \frac{1}{2}L_2 \to L_2, \ \frac{1}{2}L_3 \to L_3$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad L+U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic corespunzător matricei $D^{-1}(L+U)$ este

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$-L_3 + L_1 \to L_1$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 0, \ \ \lambda_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \ |\lambda| < 1 \ \Rightarrow \ \text{ metoda este convergentă}$$

Se observă că soluţia exactă este $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Se porneşte cu soluţia iniţială

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avem

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1+x_2}{2} \\ x_2 = \frac{x_1+x_3}{2} \\ x_3 = \frac{1+x_2}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} = 0 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(2)} = \frac{3}{4} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2} \\ x_3^{(2)} = \frac{3}{4} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(3)} = \frac{3}{4} \\ x_2^{(3)} = \frac{3}{4} \\ x_3^{(3)} = \frac{3}{4} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(4)} = \frac{7}{8} \\ x_2^{(4)} = \frac{3}{8} \\ x_3^{(4)} = \frac{7}{8} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(5)} = \frac{15}{16} \\ x_2^{(5)} = \frac{7}{8} \\ x_3^{(5)} = \frac{15}{16} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(6)} = \frac{15}{16} = 0.9375 \\ x_2^{(6)} = \frac{15}{16} = 0.9375 \\ x_3^{(6)} = \frac{15}{16} = 0.9375 \end{array}$$

Observaţia 2.1 *Toate problemele din acest capitol sunt rezolvate şi cu Maple în capitolul* 7.

2.7 Probleme propuse

1. Să se rezolve următoarele sisteme liniare folosind metoda eliminării a lui Gauss

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$c)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad d)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad f)\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \quad h)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$$

2. Să se rezolve sistemele $Ax = b$ prin metoda matriceală dacă:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Să se factorizeze LU următoarele matrici:

$a)\;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\;\; A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

4. Să se rezolve sistemele $Ax = b$, folosind factorizarea LU a matricei A, dacă

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 29 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Să se determine valorile şi vectorii proprii ale matricelor:

$a)\;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad b)\;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 36 \\ 36 & 23 \end{pmatrix} \quad c)\;\; A = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$d)\;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad e)\;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 5 & -2 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$f)\;\; A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad g)\;\; A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

6. Să se rezolve următoarele sisteme, cu metoda lui Jacobi, pornind de la soluţia iniţială nulă, cu eroarea ≤ 0.00005:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & -2 \\ 10 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 34 \\ 43 \\ 54 \\ 75 \end{pmatrix}$$

$$d)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

7. Să se rezolve sistemele din problema 4 cu metoda Gauss - Seidel, pornind cu soluţia iniţială nulă, până când $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq 10^{-3}$.

Capitolul 3

Rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor neliniare

Problema care se pune este de a determina rădăcinile ecuaţiei

$$f(x) = 0, f : I \to \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Fie α o *rădăcină izolată* a ecuaţiei (3.1), adică există un interval $[a,\ b]$ care conţine numai această rădăcină. Prin urmare, $f(\alpha) = 0$.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 3.1 Prima teoremă a lui Bolzano-Cauchy. *Dacă funcţia $f\ : [a,\ b]\ \to\ \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,\ b]$ şi $f(a)f(b) < 0$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a,\ b)$ pentru care $f(c) = 0$.*

Geometric acest lucru este evident. Dacă o curbă continuă trece de o parte şi alta a axei Ox, având semne diferite la capetele intervalului, ea intersectează această axă cel puţin o dată.

Asupra funcţiei f se impun următoarele condiţii:

1. Funcţia f şi derivatele sale f' şi f'' sunt continue pe $[a,\ b]$;

2. Valorile funcţiei f la capetele intervalului sunt de semne diferite, adică $f(a)\ f(b)\ <\ 0$;

3. Derivatele f' şi f'' păstrează un semn constant în tot intervalul $[a,\ b]$.

Condiţiile 1 şi 2 asigură existenţa rădăcinii α a ecuaţiei (3.1) (vezi teorema 3.1).

Din condiţia 3, deoarece f' îşi păstrează semnul plus sau minus pe întregul interval $[a,\ b]$, rezultă că funcţia f creşte sau descreşte, şi deci se va anula o singură dată, adică rădăcina α este izolată.

De asemenea, condiţia 3 asigură faptul că funcţia f nu numai că are aceeaşi direcţie (în sus sau în jos după semnul lui f'), dar este numai convexă sau numai concavă (după cum f'' este pozitivă respectiv negativă).

Cu uşurinţă se poate constata că aceste condiţii sunt întotdeauna îndeplinite pentru ecuaţiile algebrice.

Cele patru situaţii posibile corespunzătoare semnelor derivatelor de ordinul întâi şi doi ale funcţiei f sunt ilustrate grafic în figura 1.

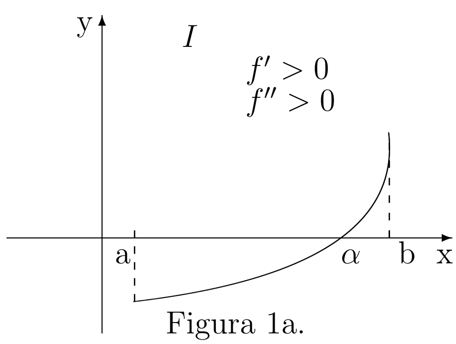


Figura 1a.

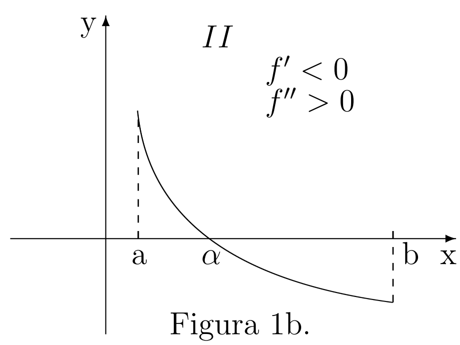


Figura 1b.

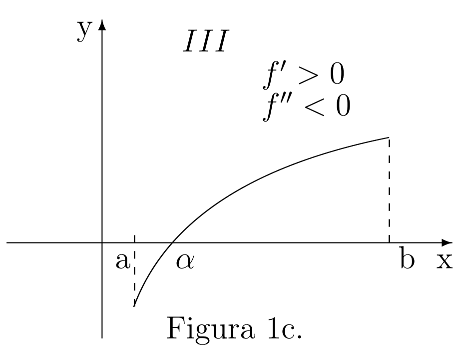


Figura 1c.

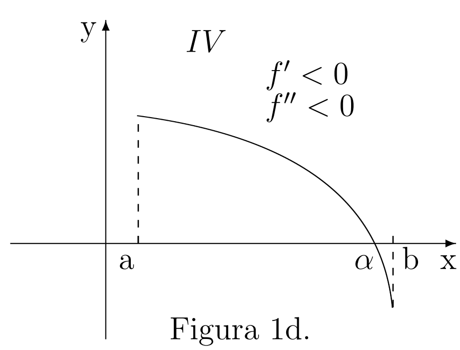


Figura 1d.

Există mai multe metode aproximative de rezolvare a ecuaţiei (3.1).

3.1 Metoda înjumătăţirii

Această metodă se bazează pe teorema lui Bolzano − Cauchy (vezi teorema 3.1).

Metoda constă în împărţirea succesivă a intervalului $[a,\ b]$ în jumătăţi de subintervale care conţin rădăcina ecuaţiei, determinând semnul funcţiei în punctele de diviziune.

Presupunem că $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, şi că α este rădăcina aproximativă a ecuaţiei $f(x) = 0$, adică $f(\alpha) = 0$, cu precizia ϵ.

Fie $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Dacă $f(c) = 0$, atunci $c = \dfrac{a+b}{2}$ este rădăcină a ecuaţiei (3.1).

Dacă $f(c) \neq 0$, atunci pot avea loc situaţiile:

1. $f(c) > 0$, deci $f(a) \cdot f(c) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left[a,\ \dfrac{a+b}{2}\right]$;

2. $f(c) < 0$, deci $f(c) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left[\dfrac{a+b}{2},\ b\right]$.

In fiecare caz se ajunge la un nou interval, cu care se procedează la fel, luând mijlocul acestuia, ş.a.m.d..

Intervalul $[a,\ b]$ are lungimea $b - a$, iar intervalele $\left[a,\ \dfrac{a+b}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a+b}{2},\ b\right]$ au lungimea $\dfrac{b\ -\ a}{2}$.

Notăm intervalul $[a,\ b]$ cu $[a_1,\ b_1]$, intervalul $\left[a,\ \dfrac{a+b}{2}\right]$ (sau $\left[\dfrac{a+b}{2},\ b\right]$) cu $[a_2,\ b_2]$, ş.a.m.d..

Prin urmare,

- intervalul $[a_1,\ b_1]$ are lungimea $b - a$, $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

- intervalul $[a_2,\ b_2]$ are lungimea $\dfrac{b\ -\ a}{2}$, $c_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$

- intervalul $[a_3,\ b_3]$ are lungimea $\dfrac{b\ -\ a}{2^2}$, $c_3\ =\ \dfrac{a_3+b_3}{2}$
- intervalul $[a_n,\ b_n]$ are lungimea $\dfrac{b\ -\ a}{2^{n-1}}$, $c_n\ =\ \dfrac{a_n+b_n}{2}$

Procedând în acelaşi mod cu intervalul $[a_n,\ \ b_n]$, se obţine intervalul $[a_{n+1},\ b_{n+1}]$, care are lungimea

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b-a}{2^n}$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=c$$

Numărul c va fi valoarea aproximativă a rădăcinii α.

Se poate concluziona că etapele *metodei înjumătăţirii* sunt:

1. Se defineşte $c\ =\ \dfrac{a+b}{2}$;
2. Dacă $|b\ -\ c|<\epsilon\Rightarrow\alpha=c$, procesul se opreşte;
3. Dacă $f(c)\cdot f(b)<0\Rightarrow a$ se înlocuieşte cu c, în caz contrar b se înlocuieşte cu c;
4. Se repetă etapele $1\ -\ 3$ până când $|b\ -\ c|<\epsilon$.

3.2 Analiza erorii metodei înjumătăţirii

Conform etapelor metodei înjumătăţirii rădăcina aproximativă α aparţine intervalului $[a_n,\ c_n]$ sau intervalului $[c_n,\ b_n]$, $c_n\ =\ \dfrac{a_n+b_n}{2}$.

Atunci

$$|\alpha-c_n|\le c_n-a_n=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n=\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^n}$$

Deci

$$|\alpha-c_n|\le\frac{b-a}{2^n}\tag{3.2}$$

Se poate determina numărul de iteraţii necesare pentru ca

$$|\alpha - c_n| < \epsilon$$

Intr-adevăr, deoarece

$$|\alpha \; - \; c_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

este suficient ca

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon \Rightarrow 2^n \geq \frac{b-a}{\epsilon} \Rightarrow n \ln 2 \geq \ln \frac{b-a}{\epsilon}$$

De unde

$$n \geq \frac{\ln \dfrac{b-a}{\epsilon}}{\ln 2} \tag{3.3}$$

Exemplul 3.1 *Să se rezolve ecuaţia*

$$2^x = 4x$$

cu precizia $\epsilon = 0.013$.

Soluţie. Pentru a vedea câte rădăcini are ecuaţia, se introduc notaţiile $g(x) = 2^x$ şi $h(x) = 4x$ şi se reprezintă grafic aceste funcţii în acelaşi sistem de axe de coordonate.

Punctele în care se intersectează graficele indică rădăcinile ecuaţiei.

Funcţia g este o funcţie exponenţială, iar $y = 4x$ este ecuaţia unei drepte ce trece prin origine, al căror grafic este uşor de trasat.

Pentru un desen mai riguros, se vor considera câteva puncte prin care trece graficul fiecăreia.

x	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$
$g(x)$	0	1	2	4	8	16	$+\infty$

x	0	1	2	3	4
$h(x)$	0	4	8	12	16

Se observă că $x = 4$ este rădăcina exactă a ecuaţiei. Graficele celor două funcţii sunt date în figura 2. Se vede că cele două grafice trec prin punctul $(4,\ 16)$ şi se intersectează într-un punct care are abscisa în intervalul $(0,\ 1)$.

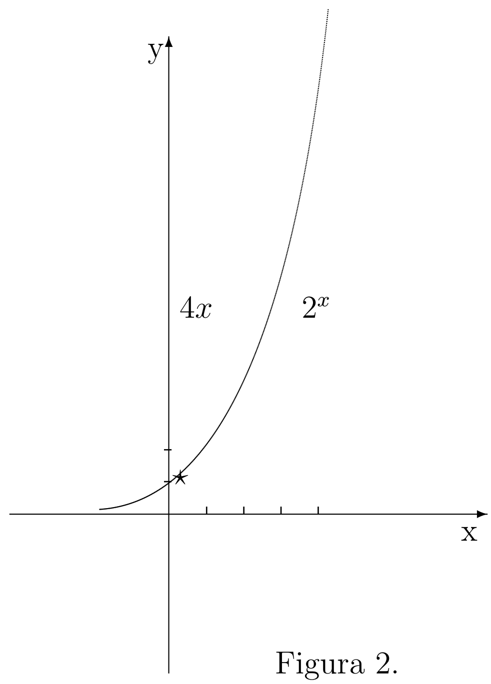


Figura 2.

Prin urmare, ecuaţia

$$f(x) = 2^x - 4x$$

are rădăcina exactă $x = 4$ şi una aproximativă în intervalul $(0,\ 1)$.

Funcţia $f(x) = 2^x - 4x$ îndeplineşte condiţiile:

1. este continuă în intervalul $[0,\ 1]$;

2. are semne diferite la capetele intervalului $[0,\ 1]$ $(f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0)$;

3. derivata sa de ordinul întâi este negativă pe intervalul $[0,\ 1]$ $(f'(x) = 2^x \ln 2 - 4 < 2\ln 2 - 4 < 0)$;

4. derivata sa de ordinul doi este pozitivă în intervalul $[0,\ 1]$ $(f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 > 0)$.

Deci, funcţia f satisface toate condiţiile din teorema lui Bolzano - Cauchy.

Vom calcula numărul de paşi (iteraţii) necesari pentru a avea precizia cerută, folosind formula (3.3).

$$n \geq \frac{\ln \dfrac{1}{0.013}}{\ln 2} = \frac{4.3428}{0.6931} = 6.26$$

Deci $n = 7$.

Avem

$$\begin{array}{llll}
f(0) > 0 & c_1 = \dfrac{1}{2} & f(c_1) = -0.59 < 0 & \Rightarrow \alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \\[2ex]
& c_2 = \dfrac{1}{4} & f(c_2) = 0.19 > 0 & \Rightarrow \alpha \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) \\[2ex]
& c_3 = \dfrac{3}{8} & f(c_3) = -0.21 < 0 & \Rightarrow \alpha \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{8}\right) \\[2ex]
& c_4 = \dfrac{5}{16} & f(c_4) = -0.01 < 0 & \Rightarrow \alpha \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{16}\right) \\[2ex]
& c_5 = \dfrac{9}{32} & f(c_5) = 0.09 > 0 & \Rightarrow \alpha \in \left(\dfrac{9}{32}, \dfrac{5}{16}\right) \\[2ex]
& c_6 = \dfrac{19}{64} & f(c_6) = 0.04 > 0 & \Rightarrow \alpha \in \left(\dfrac{19}{64}, \dfrac{5}{16}\right) \\[2ex]
& c_7 = \dfrac{39}{128} & f(c_7) = 0.02 > 0 & \Rightarrow \alpha \in \left(\dfrac{39}{128}, \dfrac{5}{16}\right)
\end{array}$$

Rădăcina aproximativă este $\alpha = c_8 = \dfrac{79}{256} = 0.3086$.

3.3 Metoda coardei

Fie α rădăcina aproximativă a ecuaţiei

$$f(x) = 0 \text{ în intervalul } [x_0, x_1]$$

care trebuie determinată cu precizia ϵ.

Presupunem că funcţia f îndeplineşte condiţiile specificate la începutul capitolului.

Considerăm situaţia din figura 1a.

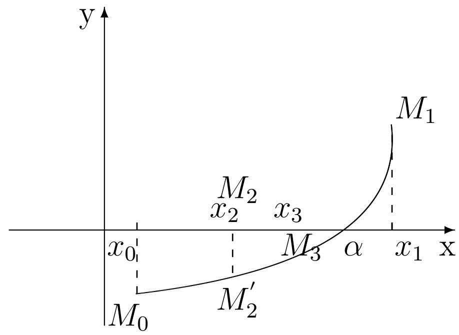


Figura 3.

Luăm punctele $M_0(x_o,\ f(x_0))$ şi $M_1(x_1,\ f(x_1))$ pe curba $y = f(x)$. Coarda (secanta) M_0M_1 taie axa Ox în punctul $M_2(x_2,\ 0)$.

Panta dreptei M_1M_0 este

$$m_{M_1M_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \tag{3.4}$$

iar a dreptei M_1M_2

$$m_{M_1M_2} = \frac{-f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{3.5}$$

Deoarece punctele M_0, M_1, M_2 sunt coliniare, dreptele M_1M_0 şi M_1M_2 au aceeaşi pantă.

Atunci

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

de unde

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \tag{3.6}$$

Fie $M_2'(x_2,\ f(x_2))$ proiecţia punctului M_2 pe curbă. Se face acelaşi raţionament pentru coarda M_1M_2', deci pentru intervalul $(x_2,\ x_1)$, adică x_1 ia locul lui x_0, x_2 al lui x_1. Această coardă va tăia axa Ox în punctul $M_3(x_3,\ 0)$.

Se obţine o nouă aproximaţie a rădăcinii α

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2)$$

Continuând acest procedeu se obţine următoarea formulă iterativă

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \tag{3.7}$$

cunoscută sub numele de *metoda coardei (secantei, părţilor proporţionale)*, deoarece arcul de curbă $\widehat{M_0M_1}$ a fost aproximat prin coarda M_0M_1.

Procesul se încheie când $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$.

3.4 Analiza erorii metodei coardei

Se consideră intervalul $[x_n, \alpha]$, în care funcţia f satisface cerinţele teoremei *creşterilor finite* (teorema lui Lagrange).

Conform acestei teoreme există cel puţin un punct $c \in (x_n, \alpha)$, astfel ca

$$f(x_n) - f(\alpha) = (x_n - \alpha) f'(c)$$

sau

$$f(x_n) = (x_n - \alpha) f'(c)$$

de unde

$$x_n - \alpha = \frac{f(x_n)}{f'(c)} \tag{3.8}$$

Deoarece derivatele funcţiei f sunt continue pe intervalul $[x_n, \alpha]$, derivata de ordinul întâi îşi atinge minimul.

Fie

$$m = \min_{x \in (x_n, \alpha)} f'(x)$$

Atunci

$$x_n - \alpha \leq \frac{f(x_n)}{m} \tag{3.9}$$

sau

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \tag{3.10}$$

Aceasta dă precizia valorii aproximative x_n calculate pentru rădăcina α a ecuaţiei (3.1).

Observaţia 3.1 *S-a considerat coarda M_1M_2' şi nu coarda M_0M_2' pentru că aceasta taie axa Ox în punctul C care se îndepărtează de punctul A în care curba taie axa Ox (figura 4).*

Pentru a se evita o astfel de situaţie este suficient ca *semnul funcţiei f în capătul din care se duce coarda să fie acelaşi cu semnul derivatei a doua $f''(x)$.*

Intr-adevăr cazul din figura 4 corespunde situaţiei I din figura 1a., când $f''(x) > 0$, iar $f(x_0) < 0$ şi $f(x_1) > 0$. Prin urmare toate coardele vor fi duse din punctul de abscisă x_1 (M_1).

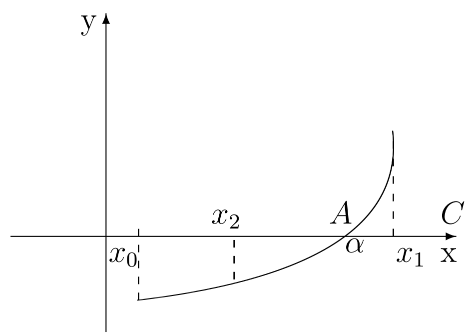


Figura 4.

La fel se procedează dacă funcţia este ca în cazul IV din figura 1d.

Dacă funcţia f este ca în cazul II sau III, atunci toate coardele vor fi duse din punctul de abscisă x_0.

Exemplul 3.2 *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

cu precizia $\epsilon = 0.01$.

Soluţie. Se reprezintă grafic funcţia

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$$

Avem

$$f(0) = -7, \lim_{x \to \pm\infty} = \pm\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4, \ f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, \ x_2 = 2,$$

x		$-\frac{2}{3}$		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$f''(x) = 6x - 4,\ f''(x) = 0\ \Rightarrow x = 2/3,\quad \begin{array}{c|ccc} x & & \frac{2}{3} & \\ \hline f''(x) & - & 0 & + \end{array}$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		0		$\dfrac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{159}{27}$	$\searrow$	-7	$\searrow$	-10	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Din graficul dat în figura 5, se vede că $\alpha \in (3,\ 4)$.

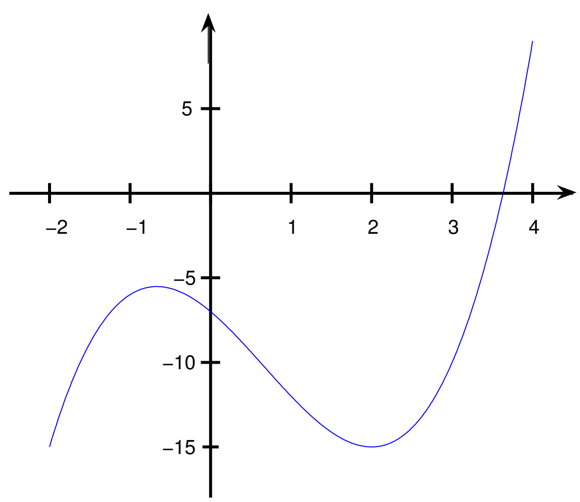


Figura 5.

Intr-adevăr

$$f(3) = -10 < 0,\ f(4) = 9 > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3) = 11 \\ f'(4) = 28 \\ f'(x) > 0, x \in (3, 4) \end{array}\right\} \Rightarrow \min_{x \in (3,\ 4)} f'(x) = 11$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0, x \in (3, 4) \\ f(4) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ au acelaşi semn } \Rightarrow x_1 = 4$$

Conform formulei (3.7), avem

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 4 - \frac{4-3}{f(4)-f(3)} f(4) \simeq 3.53, \quad f(x_2) = -2.05, \quad \frac{|f(x_2)|}{11} > 0.01 \\
x_3 &= 3.53 - \frac{4-3.53}{f(4)-f(3.53)} f(3.53) \simeq 3.62, \quad f(x_3) = -0.25, \quad \frac{|f(x_3)|}{11} > 0.01 \\
x_4 &= 3.62 - \frac{4-3.62}{f(4)-f(3.62)} f(3.62) \simeq 3.63, \quad f(x_4) = -0.04, \quad \frac{|f(x_4)|}{11} < 0.01
\end{aligned}
$$

Deci, $\alpha \in (3.63;\ 4) \Rightarrow \alpha - 3.63 \leq 0.004 \Rightarrow \alpha \simeq 3.634$

3.5 Metoda tangentei

Procedeul este acelaşi ca la metoda coardei, dar aici arcul de curbă se aproximează cu tangenta la curbă.

Considerăm intervalul $(x_0,\ x_1)$, în care ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcina α, ce va fi determinată cu eroarea ϵ.

Presupunem satisfăcute condiţiile $1 - 3$ pentru funcţia f, şi că graficul ei arată ca în figura 6.

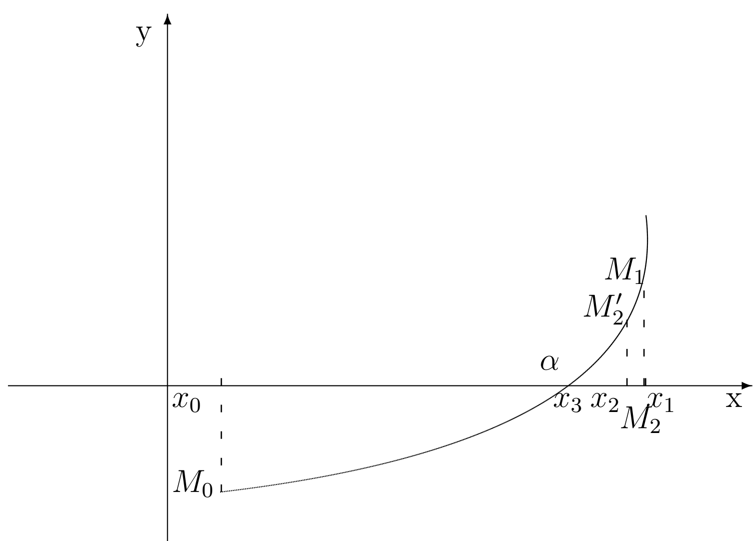


Figura 6.

Se duce tangenta la curbă în punctul $M_1(x_1,\ f(x_1))$. Aceasta taie axa

Ox în punctul $M_2(x_2,\ 0)$.

Panta dreptei M_1M_2 este

$$m_{M_1M_2} = \frac{-f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{3.11}$$

Dar, se ştie din interpretarea geometrică a derivatei unei funcţii într-un punct, că aceasta este panta tangentei la curbă în acel punct.

Prin urmare,

$$m_{M_1M_2} = f'(x_1) \tag{3.12}$$

Din (3.11) şi (3.12), rezultă

$$f'(x_1) = \frac{-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

sau

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Perpendiculara pe axa Ox din punctul $M_2(x_2,\ 0)$ taie curba în punctul M_2'.

Ducând tangenta la curbă în punctul M_2', care taie axa Ox în punctul de abscisă x_3, şi făcând acelaşi raţionament ca pentru tangenta din punctul M_1, se obţine

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Continuând acest procedeu, se ajunge la următoarea formulă iterativă

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.13}$$

care defineşte *metoda lui Newton* sau *metoda tangentei*.

Procedeul iterativ (3.13) se aplică până când $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$.

3.6 Analiza erorii metodei tangentei

Deoarece $\alpha \in (x_n,\ x_{n+1})$, pe acest interval se aplică *teorema creşterilor finite* şi se obţine

$$\alpha - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(c)},\ c \in (x_n,\ \alpha)$$

sau

$$|\alpha - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m},\ m = \min_{x\in(x_n,\, \alpha)} f'(x) \tag{3.14}$$

Pentru a obţine rădăcina aproximativă cu eroarea ϵ, este suficient ca

$$\frac{|f(x_n)|}{m} \le \epsilon$$

Observaţia 3.2 *Metoda tangentei converge mai rapid decât metoda coardei.*

Observaţia (3.1) este valabilă şi în cazul metodei tangentei, cu recomandările corespunzătoare.

Exemplul 3.3 *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

cu precizia $\epsilon = 0.01$.

Soluţie. Este aceeaşi ecuaţie ca şi cea din exemplul 3.2. Graficul funcţiei

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$$

este dat în figura 5. Se ştie că $\alpha \in (3,\ 4)$, şi că funcţia f satisface condiţiile $1 - 3$.

Conform formulei (3.13) avem

$$\begin{aligned}
x_2 &= 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} \simeq 3.68,\ \ f(x_2) = 1.03,\ \ \frac{|f(x_2)|}{11} > 0.01\\
x_3 &= 3.68 - \frac{f(3.68)}{f(3.68)} = 3.68 - 0.047 \simeq 3.633,\\
&\quad f(x_3) = -0.042,\ \ \frac{|f(x_3)|}{11} = 0.0038 < 0.01
\end{aligned}$$

deci $\alpha = 3.633$.

Observaţia 3.3 *Exemplele şi problemele din acest capitol sunt rezolvate şi cu Maple, în capitolul* 7.

3.7 Probleme propuse.

1. Folosind metoda înjumătăţirii:

   a) să se aproximeze soluţia reală a ecuaţiei

   $$x^3 + x - 1 = 0$$

   cu precizia 0.01.

   b) să se aproximeze soluţia reală a ecuaţiei

   $$x^3 + x - 4 = 0$$

   cu precizia 10^{-3}.

   c) să se determine numărul de iteraţii necesare pentru o precizie de 10^{-4} a soluţiei aproximative a ecuaţiei

   $$x^3 - x - 1 = 0$$

   Să se calculeze această soluţie.

2. Folosind metoda coardei:

   a) să se aproximeze soluţia reală a ecuaţiei

   $$x^3 + x - 1 = 0$$

   cu precizia 0.01.

   b) să se determine o soluţie aproximativă a ecuaţiei

   $$2x^3 - x^2 - 7x - 7 = 0$$

   cu precizia 0.01.

3. Folosind metoda tangentei:

   a) să se aproximeze soluţia reală a ecuaţiei

   $$x^3 + x - 1 = 0$$

   cu precizia 0.01.

   b) să se rezolve ecuaţia $x \lg x = 1$ cu precizia $\epsilon = 10^{-4}$.

c) ştiind că ecuaţia

$$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$$

are două rădăcini reale, una între -11 şi -10 iar a doua între 9 şi 10, să se calculeze aceste rădăcini cu o precizie de 10^{-5}.

d) să se aproximeze soluţiile reale ale ecuaţiei

$$2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$$

cu precizia $\epsilon = 0.001$.

e) să se aproximeze soluţiile reale ale ecuaţiei

$$x^4 - x - 1 = 0$$

cu precizia $\epsilon = 10^{-7}$.

Capitolul 4

Aproximarea funcţiilor

4.1 Metoda celor mai mici pătrate

In ştiinţele experimentale măsurarea diferitelor mărimi fizice se face inexact, aproximativ, cu anumite erori. Aceasta se poate datora unor greşeli umane şi/sau cel mai adesea aparatelor cu care se fac măsurătorile, ele având stabilită (din fabricaţie) o anumită toleranţă.

Scopul propus este de a obţine relaţii între valorile empirice (măsurate) cu valori minime ale erorilor care intervin.

Fie x şi y două mărimi variabile. Ne interesează o relaţie de forma

$$y = f(x) \tag{4.1}$$

Alegând pentru x valorile distincte $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$, se măsoară valorile corespunzătoare ale lui y, notate cu $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$. Determinarea funcţiei f se face ţinând seama de forma *norului de puncte* $(x_i,\ y_i)$, astfel încât eroarea produsă să fie cât mai mică.

Fie $e_i = f(x_i) - y_i$ erorile de măsurare, şi E eroarea totală. Această eroare poate fi exprimată în mai multe feluri.

Eroarea se poate calcula sub forma

$$E = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2}$$

Aceasta se numeşte *eroarea medie pătratică*, iar funcţia care o minimizează se numeşte *aproximarea medie pătratică* a datelor $\{(x_i,\ y_i)\}$.

Considerând eroarea sub forma

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \tag{4.2}$$

şi cerând *minimizarea* expresiei (4.2), se determină funcţia f prin aşa numita *metoda celor mai mici pătrate*.

Aici se va trata doar metoda celor mai mici pătrate.

Dacă funcţia f este liniară, adică

$$f(x) = a \cdot x + b \tag{4.3}$$

atunci se cere minimul funcţiei

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

Aceasta este o problemă de extreme ale unei funcţii de două variabile.

Prin urmare

$$\begin{array}{rcllcl} F'_a & = & 2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i, & \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i & = & 0 \\ F'_b & = & 2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i), & \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) & = & 0 \end{array}$$

de unde rezultă

$$\begin{array}{lclcl} a\sum\limits_{i=i}^{n} x_i^2 & + & b\sum\limits_{i=i}^{n} x_i & = & \sum\limits_{i=i}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=i}^{n} x_i & + & nb & = & \sum\limits_{i=i}^{n} y_i \end{array} \tag{4.4}$$

Acesta este un sistem liniar de două ecuaţii cu două necunoscute, care are soluţie unică, deoarece determinantul sistemului are valoarea $n\sum\limits_{i=i}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=i}^{n} x_i)^2 \neq 0$. Mai mult $n\sum\limits_{i=i}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=i}^{n} x_i)^2 > 0$, întrucât valorile x_i sunt distincte.

Intr-adevăr

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{\sum x_i}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i \frac{\sum x_i}{n} + \frac{(\sum x_i)^2}{n^2} \right) =$$

$$= \sum x_i^2 - 2\sum x_i \frac{\sum x_i}{n} + n\frac{(\sum x_i)^2}{n^2} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = \frac{1}{n}\left(n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right)$$

Dacă funcţia f este pătratică, adică de forma

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \tag{4.5}$$

atunci se cere minimul funcţiei

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

Parametrii a, b şi c se determină din sistemul

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + \ nc &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned} \tag{4.6}$$

obţinut prin impunerea condiţiei ca derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei F în raport cu parametrii a, b şi c, să fie egale cu zero.

4.2 Interpolarea funcţiilor

Problema care se pune poate fi formulată astfel:

Fiind date $n + 1$ puncte distincte – numite noduri – x_i din $[a, b]$, $i = \overline{0, n}$ şi valorile $f(x_i)$ ale funcţiei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ necunoscută, să se determine un polinom $P(x)$ de grad minim care satisface condiţiile

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n} \tag{4.7}$$

numite *condiţii de interpolare*.

Acest polinom aproximează funcţia f.

Există mai multe tipuri de polinoame de interpolare, în conformitate cu condiţiile de interpolare impuse.

De asemenea, interpolarea poate fi realizată nu numai cu polinoame, ci şi cu ajutorul unor alte clase de funcţii: funcţii trigonometrice, funcţii exponenţiale, funcţii spline, etc.

4.2.1 Polinomul de interpolare al lui Lagrange

Se ştie că pentru $n+1$ noduri, polinomul de interpolare al lui Lagrange are gradul n şi este dat de formula

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) \tag{4.8}$$

unde

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \tag{4.9}$$

sunt *polinoamele fundamentale ale lui Lagrange*.

Acestea au următoarea proprietate:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad i = j \\ 0 & \text{dacă} \quad i \neq j \end{cases}$$

Ele pot fi scrise şi sub o altă formă.

Introducem notaţia

$$u(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_i)\cdots(x-x_n) \tag{4.10}$$

care este un polinom de gradul $n+1$ de forma

$$u(x) = x^{n+1} + A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0 \tag{4.11}$$

Se vede că $u(x_i) = 0$, $i = \overline{0,n}$, deci polinomul $u(x)$ are $n+1$ rădăcini.

Se foloseşte notaţia

$$u_i(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n) \tag{4.12}$$

care, ţinând seama de (4.10), devine

$$u_i(x) = \frac{u(x)}{x-x_i}, \quad x \neq x_i$$

Dar

$$\lim_{x\to x_i}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = \lim_{x\to x_i}\frac{u(x)}{x-x_i} \Rightarrow$$

$$(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) = \lim_{x\to x_i}\frac{u(x)}{x-x_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_i(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{u(x) - u(x_i)}{x - x_i} = u'(x_i) \tag{4.13}$$

Deci

$$l_i(x) = \frac{u(x)}{u'(x_i)(x - x_i)} = \frac{u_i(x)}{u'(x_i)} = \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} \tag{4.14}$$

iar polinomul de interpolare al lui Lagrange (4.8) poate fi scris şi sub forma

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} f(x_i) \tag{4.15}$$

Formula de interpolare a lui Lagrange este

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x) \tag{4.16}$$

unde $L_n(x)$ este dat de (4.8) sau (4.15) şi $R_n(x)$ este *restul* sau *termenul complementar* al formulei.

4.2.2 Eroarea formulei de interpolare Lagrange

Eroarea E este dată, în cazul formulei de interpolare a lui Lagrange, de

$$E = f(x) - L_n(x), \quad x \in [a, b],\ x \neq x_i,\ x \text{ fixat}$$

Ţinând seama de (4.16), se obţine

$$E = R_n(x) \tag{4.17}$$

Presupunem că funcţia f admite derivate pe $[a, b]$ până la ordinul $n + 1$ inclusiv.

Se consideră funcţia auxiliară

$$\varphi(z) = f(z) - L_n(z) - Ku(z) \tag{4.18}$$

unde K este o constantă în raport cu z.

Funcţia φ este derivabilă până la ordinul $n + 1$ inclusiv şi se anulează pe nodurile x_i, $i = \overline{0, n}$, deoarece $f(x_i) = L_n(x_i)$ şi $u(x_i) = 0$. Deci, ea are $n + 1$ rădăcini.

Constanta K se determină astfel ca pentru $z = x$, $x \neq x_i$, x fixat, să avem $\varphi(x) = 0$.

Deci, φ are $n + 2$ rădăcini: $x, x_0, \cdots, x_n$.

Dacă în (4.18) z se înlocuieşte cu x, se obţine

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - Ku(x)\\ \varphi(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow K = \frac{f(x) - L_n(x)}{u(x)} \tag{4.19}$$

$u(x) \neq 0$, deoarece $x \neq x_i$, unde $u(x_i) = 0$.

Se aplică teorema lui Rolle:

Dacă f este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $f(a) = f(b)$, atunci există $c \in (a,b)$ astfel ca $f'(c) = 0$.

Funcţia φ se anulează în $x, x_0, \ldots, x_n$, $n+2$ rădăcini, care definesc $n+1$ intervale.

Aplicând teorema lui Rolle pe fiecare interval (condiţiile teoremei fiind îndeplinite, $\varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$, ş.a.m.d.) rezultă că derivata φ' are $n+1$ rădăcini.

Putem considera, acum, noi intervale $[c_0,\ c_1],\ \cdots\ ,[c_{n-1},\ c_n]$, pe care să aplicăm teorema lui Rolle pentru funcţia $\varphi\,'$. Rezultă că $\varphi\,''$ are n rădăcini.

Prin urmare,

$$\begin{array}{rccl}
\varphi & \text{are} & n+2 & \text{rădăcini}\\
\varphi\,' & \text{are} & n+1 & \text{rădăcini}\\
\varphi\,'' & \text{are} & n & \text{rădăcini}\\
\cdots & & \cdots & \\
\varphi^{\,(n+1)} & \text{are} & 1 & \text{rădăcină}
\end{array}$$

Fie $\xi \in [a,b]$ pentru care $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Din (4.18) avem

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - L_n^{(n+1)}(z) - Ku^{(n+1)}(z) \tag{4.20}$$

Dar $L_n^{(n+1)}(z) = 0$, deoarece $L_n(x)$ este polinom de gradul n.

Din (4.11), rezultă că

$$u^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

Deci, (4.20) devine

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K(n+1)!$$

iar pentru $z = \xi$, avem

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)!$$

de unde

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{4.21}$$

deoarece $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Ţinând seama de (4.19), relaţia (4.21) devine

$$\frac{f(x) - L_n(x)}{u(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

sau

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} u(x) \tag{4.22}$$

adică

$$E = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} u(x), \quad \xi \in [a,b] \tag{4.23}$$

Dacă

$$\max_{z \in [a,b]} |f^{(n+1)}(z)| = M_{n+1}$$

şi deoarece

$$|u(x)| = |x - x_0||x - x_1| \dots |x - x_n| < (b-a)^{n+1}, \quad (x - x_i < b - a)$$

rezultă următoarea evaluare a erorii formulei de interpolare Lagrange:

$$|E| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \tag{4.24}$$

4.3 Diferenţe divizate

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabilă pe $[a,b]$, şi $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$, $n+1$ noduri distincte.

Se numeşte *diferenţă divizată* de ordinul întâi a funcţiei f în punctele x_0 şi x_1 expresia

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Aceasta se notează astfel:

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{4.25}$$

Se poate considera că $[x_0; f] = f(x_0)$ este diferenţa divizată de ordinul 0 în punctul x_0.

Atunci (4.25) se poate scrie sub forma

$$[x_0, x_1; f] = \frac{[x_1; f] - [x_0; f]}{x_1 - x_0} \tag{4.26}$$

Diferenţa divizată de ordinul 2 pe nodurile x_0, x_1, x_2, se defineşte astfel:

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{[x_1, x_2; f] - [x_0, x_1; f]}{x_2 - x_0} \tag{4.27}$$

In general, pentru $n+1$ noduri, diferenţa divizată de ordinul n, va fi

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_n; f] - [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0} \tag{4.28}$$

Să scriem sub o altă formă diferenţa divizată de ordinul n.

Pornim de la diferenţa divizată de ordinul 2 dată în (4.27), care pe baza relaţiei (4.25) ia forma

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{f(x_0)}{u_0(x_0)} + \frac{f(x_1)}{u_1(x_1)} + \frac{f(x_2)}{u_2(x_2)} = \sum_{i=0}^{2} \frac{f(x_i)}{u'(x_i)} = \sum_{i=0}^{2} \frac{f(x_i)}{u_i(x_i)}$$

Prin urmare,

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{u'(x_i)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{u_i(x_i)} \tag{4.29}$$

Pentru calculul diferenţelor divizate se poate folosi o schemă de calcul, pe care o exemplificăm pentru 5 noduri.

Observaţia 4.1 *Numitorul diferenţelor divizate este diferenţa dintre nodurile necomune ale diferenţelor de la numărător.*

Observaţia 4.2 *Diferenţele divizate* $[x_0, x_1, \cdots, x_n; f]$ *sunt cele încadrate în dreptunghiuri.*

$$
\begin{array}{lllll}
x_0\ f(x_0) & & & & \\
 & \backslash & & & \\
 & \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \boxed{[x_0,x_1;f]} & & & \\
 & / & \backslash & & \\
x_1\ f(x_1) & & \frac{[x_1,x_2;f]-[x_0,x_1;f]}{x_2-x_0} = \boxed{[x_0,x_1,x_2;f]} & & \\
 & \backslash & / & \backslash & \\
 & \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = [x_1,x_2;f] & & \frac{[x_1,x_2,x_3;f]-[x_0,x_1,x_2;f]}{x_3-x_0} = \boxed{[x_0,x_1,x_2,x_3;f]} & \\
 & / & \backslash & / & \backslash \\
x_2\ f(x_2) & & \frac{[x_2,x_3;f]-[x_1,x_2;f]}{x_3-x_1} = [x_1,x_2,x_3;f] & & \frac{[x_1,x_2,x_3,x_4;f]-[x_0,x_1,x_2,x_3;f]}{x_4-x_0} = \boxed{[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4;f]} \\
 & \backslash & / & \backslash & / \\
 & \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = [x_2,x_3;f] & & \frac{[x_2,x_3,x_4;f]-[x_1,x_2,x_3;f]}{x_4-x_1} = [x_1,x_2,x_3,x_4;f] & \\
 & / & \backslash & / & \\
x_3\ f(x_3) & & \frac{[x_3,x_4;f]-[x_2,x_3;f]}{x_4-x_2} = [x_2,x_3,x_4;f] & & \\
 & \backslash & / & & \\
 & \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} = [x_3,x_4;f] & & & \\
 & / & & & \\
x_4\ f(x_4) & & & &
\end{array}
$$

Schema de calcul al diferenţelor divizate pe 5 noduri

Diferenţele divizate pentru noduri multiple pot fi exprimate cu ajutorul derivatelor funcţiei f, în felul următor:

$$[x_0, x_0; f] = \lim_{x_0 \to x_1} [x_0, x_1; f] = \lim_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

$$[x_0, x_0, x_0; f] = \frac{[x_0, x_0; f] - [x_0, x_0; f]}{x_0 - x_0} = \frac{f'(x_0) - f'(x_0)}{x_0 - x_0} =$$
$$= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0} = f''(x_0)$$

In general, pentru diferenţa divizată de ordinul n pe nodul x_0, multiplu de ordinul $n + 1$, avem relaţia

$$[x_0, x_0, \cdots, x_0; f] = f^{(n)}(x_0) \tag{4.30}$$

4.3.1 Diferenţe finite

Dacă nodurile x_i sunt echidistante, adică $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h, \ldots$, $x_i = x_{i-1} + h = x_0 + ih$, $h > 0$ pasul diviziunii, atunci expresia

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) \tag{4.31}$$

sau

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) \tag{4.32}$$

se numeşte *diferenţă finită* de ordinul întâi.

Diferenţa finită de ordinul doi va fi:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x_i) &= \Delta(\Delta f(x_i)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) = f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - \\ &- f(x_{i+1}) + f(x_i) = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i) \end{aligned}$$

In general, formula de recurenţă a diferenţelor finite este

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i) \tag{4.33}$$

Diferenţele finite $\Delta f(x_i)$, date în formulele (4.31) $-$ (4.33) se numesc *diferenţe finite progresive* (diferenţe înainte).

Expresia

$$\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_i - h) = f(x_i) - f(x_{i-1}) \tag{4.34}$$

se numeşte *diferenţă finită regresivă* (diferenţă înapoi).

Intre diferenţele divizate şi diferenţele finite există formule de legătură (pentru noduri echidistante).

Să stabilim aceste formule.

Fie diferenţa divizată de ordinul întâi pe nodurile x_{i+1} şi x_i, unde $x_{i+1} = x_i + h$.

Avem

$$[x_i, x_{i+1}; f] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f(x_i)}{h} = \frac{1}{h}\Delta f(x_i)$$

Considerăm diferenţa divizată de ordinul doi pe 3 noduri, x_i, x_{i+1} şi x_{i+2}, cu $x_{i+1} = x_i + h$, $x_{i+2} = x_i + 2h$.

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}; f] - [x_i, x_{i+1}; f]}{x_{i+2} - x_i} =$$

$$= \frac{\frac{1}{h}\Delta f(x_{i+1}) - \frac{1}{h}\Delta f(x_i)}{2h} = \frac{1}{2!h^2}\Delta^2 f(x_i)$$

In general, pentru $k+1$ noduri, avem

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}; f] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_i) \tag{4.35}$$

Calculul diferenţelor finite se face după o schemă asemănătoare celei a diferenţelor divizate. Se va exemplifica acest calcul pentru patru noduri.

$$
\begin{array}{ccccccc}
f(x_0) & & & & & & \\
 & \backslash & & & & & \\
 & & \underbrace{f(x_1)-f(x_0)}_{\Delta f(x_0)} & & & & \\
 & / & & \backslash & & & \\
f(x_1) & & & & \underbrace{\Delta f(x_1)-\Delta f(x_0)}_{\Delta^2 f(x_0)} & & \\
 & \backslash & & / & & \backslash & \\
 & & \underbrace{f(x_2)-f(x_1)}_{\Delta f(x_1)} & & & & \underbrace{\Delta^2 f(x_1)-\Delta^2 f(x_0)}_{\Delta^3 f(x_0)} \\
 & / & & \backslash & & / & \\
f(x_2) & & & & \underbrace{\Delta f(x_2)-\Delta f(x_1)}_{\Delta^2 f(x_1)} & & \\
 & \backslash & & / & & & \\
 & & \underbrace{f(x_3)-f(x_2)}_{\Delta f(x_2)} & & & & \\
 & / & & & & & \\
f(x_3) & & & & & &
\end{array}
$$

4.4 Polinomul de interpolare al lui Newton

Formularea problemei este aceeaşi ca şi în cazul interpolării cu ajutorul polinomului lui Lagrange. De asemenea, şi condiţiile de interpolare sunt aceleaşi, dar forma polinomului interpolator este diferită.

Fie $N_n(x)$ polinomul de gradul n care interpolează funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pe nodurile x_i, $i = \overline{0, n}$, adică

$$N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n} \tag{4.36}$$

In continuare se va deduce forma polinomului de interpolare al lui Newton.

Considerăm nodurile x_0 şi x_1. Polinomul de interpolare al lui Lagrange pe aceste noduri are gradul întâi şi este de forma

$$L_1(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1)$$

Vom scrie sub altă formă acest polinom.

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1) = \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_0)}_{} -$$

$$-\underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)}=f(x_0)+(x-x_0)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=$$

$$=f(x_0)+(x-x_0)[x_0,x_1;f]$$

Deci

$$N_1(x)=L_1(x)=f(x_0)+(x-x_0)[x_0,x_1;f] \tag{4.37}$$

Pentru a obţine polinomul de interpolare al lui Newton de gradul doi pe nodurile x_0, x_1, x_2 se procedează astfel:

- Se consideră următoarele diferenţe divizate

$$\begin{aligned}
[x,x_0;f] &= \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\\
[x,x_0,x_1;f] &= \frac{[x_0,x_1;f]-[x,x_0;f]}{x_1-x}\\
[x,x_0,x_1,x_2;f] &= \frac{[x_0,x_1,x_2;f]-[x,x_0,x_1;f]}{x_2-x}
\end{aligned}$$

- Se înmulţesc relaţiile de mai sus, prima cu $(x-x_0)$, a doua cu $(x-x_0)(x-x_1)$, iar a treia cu $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$$(x-x_0)[x,x_0;f]=f(x)-f(x_0)$$

$$(x-x_0)(x-x_1)[x,x_0,x_1;f]=-(x-x_0)[x_0,x_1;f]+(x-x_0)[x,x_0;f]$$

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x,x_0,x_1,x_2;f]=-(x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2;f]+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)[x,x_0,x_1;f]$$

- Se adună aceste relaţii membru cu membru

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x,x_0,x_1,x_2;f]=f(x)-f(x_0)-(x-x_0)[x_0,x_1;f]-$$
$$-(x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2;f]$$

sau

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)[x_0,x_1;f]+(x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2;f]+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x,x_0,x_1,x_2;f]$$

Deci

$$f(x) = P_2(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x, x_0, x_1, x_2; f]$$

unde

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2; f]$$

Se verifică acum condiţiile de interpolare pe cele trei noduri:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= P_2(x_0) = f(x_0) \\
f(x_1) &= P_2(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1) \\
f(x_2) &= P_2(x_2) = f(x_0) + (x_2 - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \\
&+ (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\frac{[x_1, x_2; f] - [x_0, x_1; f]}{x_2 - x_0} = \\
&= f(x_0) + (x_2 - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + (x_2 - x_1)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \\
&- (x_2 - x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \\
&= f(x_0) + f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) = f(x_2)
\end{aligned}$$

Polinomul de interpolare fiind unic, rezultă că $P_2(x) = N_2(x)$, şi deci

$$N_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2; f] \quad (4.38)$$

iar restul este

$$R_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x, x_0, x_1, x_2; f] \quad (4.39)$$

Considerăm acum patru noduri x_0, x_1, x_3 şi x_4. Polinomul de interpolare al lui Newton, pe aceste noduri, are gradul trei, şi se obţine procedând ca în cazul polinomului de gradul doi $N_2(x)$.

Avem

$$\begin{aligned} [x, x_0; f] &= \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \\ [x, x_0, x_1; f] &= \frac{[x_0, x_1; f] - [x, x_0; f]}{x_1 - x} \\ [x, x_0, x_1, x_2; f] &= \frac{[x_0, x_1, x_2; f] - [x, x_0, x_1; f]}{x_2 - x} \\ [x, x_0, x_1, x_2, x_3; f] &= \frac{[x_0, x_1, x_2, x_3; f] - [x, x_0, x_1, x_2; f]}{x_3 - x} \end{aligned} \tag{4.40}$$

Inmulţind prima relaţie (4.40) cu $(x - x_0)$, a doua cu $(x - x_0)(x - x_1)$, a treia cu $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$, a patra cu $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, şi adunându-le membru cu membru, se obţine

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\,[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)\,[x, x_0, x_1; f] + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,[x_0, x_1, x_2, x_3; f] + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\,[x, x_0, x_1, x_2, x_3; f] \end{aligned} \tag{4.41}$$

de unde

$$\begin{aligned} N_3(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\,[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)\,[x, x_0, x_1; f] + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,[x_0, x_1, x_2, x_3; f] \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$R_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\,[x, x_0, x_1, x_2, x_3; f] \tag{4.43}$$

Se observă că

$$N_2(x) = N_1(x) + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2; f]$$

$$N_3(x) = N_2(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3; f]$$

Atunci

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})[x_0, x_1, \cdots, x_n; f] \tag{4.44}$$

sau

$$\begin{aligned} N_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2; f] + \ldots + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\,[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] \end{aligned} \tag{4.45}$$

Polinomul $N_n(x)$ dat de (4.45) se numeşte *polinomul de interpolare al lui Newton.*

Formula de interpolare a lui Newton este

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x) \tag{4.46}$$

cu $N_n(x)$ dat de formula (4.45) şi restul $R_n(x)$

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\,[x, x_0, x_1, \ldots, x_n; f] \tag{4.47}$$

Observaţia 4.3 *Polinomul de interpolare al lui Newton coincide cu polinomul de interpolare al lui Lagrange, doar forma lor este diferită.*

Polinomul de interpolare al lui Newton poate fi scris sub o formă simplificată dacă se folosesc notaţiile:

$$D_0 = f(x_0),\; D_i = [x_0, x_1, \cdots, x_i; f] \tag{4.48}$$

Atunci, formulele (4.37), (4.38), (4.42) vor avea forma:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= D_0 + (x - x_0)D_1 \\ N_2(x) &= D_0 + (x - x_0)D_1 + (x - x_0)(x - x_1)D_2 = \\ &= D_0 + (x - x_0)[D_1 + (x - x_1)D_2] \\ N_3(x) &= D_0 + (x - x_0)D_1 + (x - x_0)(x - x_1)D_2 + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)D_3 = \\ &= D_0 + (x - x_0)[D_1 + (x - x_1)D_2 + (x - x_1)(x - x_2)D_3] = \\ &= D_0 + (x - x_0)\{D_1 + (x - x_1)[D_2 + (x - x_2)D_3]\} \end{aligned}$$

In general,

$$N_n(x) = D_0 + (x - x_0)[D_1 + (x - x_0)[D_2 + \ldots + \tag{4.49}$$

$$+ (x - x_{n-2})[D_{n-1} + (x - x_{n-1})D_n]\ldots]$$

Polinomul de interpolare al lui Newton mai poate fi scris şi cu ajutorul diferenţelor finite, dacă nodurile sunt echidistante.

Să deducem formula corespunzătoare.

Convenim că

$$f(x_0) = \Delta^0 f(x_0) \;\text{ şi }\; x_i = x_{i-1} + h = x_0 + ih$$

Atunci polinomul $N_1(x)$ devine, ţinând seama de (4.35):

$$N_1(x) = \Delta^0 f(x_0) + \frac{(x - x_0)\Delta f(x_0)}{1!h}$$

sau cu notaţia $\dfrac{x - x_0}{h} = \mu$

$$N_1(x) = \Delta^0 f(x_0) + \frac{\mu}{1!}\Delta f(x_0) = C_\mu^0 \Delta^0 f(x_0) + C_\mu^1 \Delta f(x_0) = \sum_{k=0}^{1} C_\mu^k \Delta^k f(x_0)$$

Pentru $N_2(x)$, avem:

$$N_2(x) = \Delta^0 f(x_0) + \frac{\mu}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{\mu(\mu - 1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) = \sum_{k=0}^{2} C_\mu^k \Delta^k f(x_0)$$

In general, obţinem:

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_\mu^k \Delta^k f(x_0) \tag{4.50}$$

Aceasta este forma polinomului de interpolare al lui Newton cu ajutorul diferenţelor finite progresive.

4.5 Eroarea în interpolarea prin polinomul lui Newton

Considerăm formula de interpolare a lui Newton (4.46)

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x)$$

Vom scrie sub altă formă această formulă, folosind notaţiile (4.10) − (4.12) introduse la polinomul de interpolare Lagrange.

Pentru nodurile $t, x_0, x_1, \ldots, x_n$, $t \neq x_i$, $i = \overline{0, n}$, introducem notaţiile:

$$v(x) = (x-t)(x-x_0)\ldots(x-x_n) = (x-t)u(x) \tag{4.51}$$

$$v_t(x) = \frac{v(x)}{x-t} = u(x) \;\Rightarrow\; v_t(t) = u(t) \tag{4.52}$$

$$v_i(x) = \frac{v(x)}{x-x_i} = \frac{(x-t)u_i(x)}{x-x_i} = (x-t)u(x),\; v_i(x_i) = (x_i-t)u_i(x_i) \tag{4.53}$$

Formula (4.32) corespunzătoare nodurilor $t, x_0, x_1, \ldots, x_n$ este:

$$\begin{aligned}
[t, x_0, \cdots, x_n; f] &= \frac{f(t)}{v_t(t)} + \frac{f(x_0)}{v_0(x_0)} + \frac{f(x_1)}{v_1(x_1)} + \cdots + \frac{f(x_n)}{v_n(x_n)} = \\
&= \frac{f(t)}{u(t)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{v_i(x_i)} = \frac{f(t)}{u(t)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i-t)u_i(x_i)} = \\
&= \frac{f(t)}{u(t)} - \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(t-x_i)u_i(x_i)}
\end{aligned}$$

de unde

$$\frac{f(t)}{u(t)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(t-x_i)u_i(x_i)} + [t, x_0, x_1, \ldots, x_n; f]$$

sau

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{u(t)f(x_i)}{(t-x_i)u_i(x_i)} + [t, x_0, x_1, \ldots, x_n; f]u(t) = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i(t)f(x_i)}{u_i(x_i)} + [t, x_0, x_1, \ldots, x_n; f]u(t)
\end{aligned}$$

care prin înlocuirea lui t cu x devine

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} f(x_i) + [x, x_0, x_1, \ldots, x_n; f]u(x)$$

Dar, conform formulei (4.15)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} f(x_i) = L_n(x)$$

Deci

$$f(x) - L_n(x) = [x, x_0, \ldots, x_n; f]u(x) \tag{4.54}$$

Insă $f(x) - L_n(x) = E$ din polinomul lui Lagrange, care conform formulei (4.24) este

$$E = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} u(x), \quad \xi \in [a, b]$$

Prin urmare

$$[x, x_0, \ldots, x_n; f]u(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} u(x)$$

sau

$$[x, x_0, \ldots, x_n; f] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{4.55}$$

Pe de altă parte,

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = [x, x_0, \ldots, x_n; f]u(x) \tag{4.56}$$

Deci, eroarea în interpolarea prin polinomul lui Newton este

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_i)}{(n+1)!} u(x),\ \xi_i \in [a, b] \text{ sau } \min\{x_i\} \le \xi_i \le \max\{x_i\} \tag{4.57}$$

aceeaşi cu cea din interpolarea Lagrange.

Relaţia (4.55) poate fi scrisă şi sub forma

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m; f] = \frac{f^{(m)}(c)}{m!} \tag{4.58}$$

dacă $n + 1 = m$, $t = x_m$, $\min\{x_i\} \le c \le \max\{x_i\}$.

Această formulă este cunoscută ca o *formulă de medie pentru diferenţe divizate*.

Exemplul 4.1 *Să se găsească valoarea aproximativă* $e^{0.826}$ *folosind polinomul de interpolare liniară pe baza valorilor funcţiei* $f(x) = e^x$ *din tabelul:*

x	e^x
0.80	2.225541
0.81	2.247908
0.82	2.270500
0.83	2.293319

Să se evalueze eroarea produsă.

Soluţie. Intrucât se specifică în problemă că se va folosi polinom de gradul întâi, avem nevoie de doar 2 noduri. Cum $0.826 \in (0.82; 0.83)$ le vom considera doar pe acestea din tabelul valorilor lui e^x.

Dacă nu se cerea în problemă interpolare liniară şi se preciza eroarea cerută consideram 3,4,... noduri până se obţinea precizia cerută.

Considerăm polinomul de interpolare Lagrange

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

unde

$$x_0 = 0.82, \quad f(x_0) = 2.270500$$

$$x_1 = 0.83, \quad f(x_1) = 2.293319$$

$$x_1 - x_0 = 0.83 - 0.82 = 0.01, \quad f(x_1) - f(x_0) = 0.022819$$

$$L_1(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x + \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

$$L_1(x) = \frac{0.022819}{0.01} x + \frac{0.00399342}{0.01} = 2.2819x + 0.399342$$

$$L_1(0.826) = 2.2841914$$

Valoarea exactă a lui $e^{0.826}$ este

$$e^{0.826} = 2.2841638$$

cu 8 zecimale exacte.

$$e^{0.826} - L_1(0.826) = -0.0000276$$

Dar

$$e^x - L_1(x) = \frac{u(x)}{2!} f''(c), \min\{x_i\} \le c \le \max\{x_i\}, u(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

adică

$$e^x - P_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} e^{c_x}, \quad x_0 < x < x_1$$

$$e^x - P_1(x) = -\frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2} e^{c_x}$$

Dar

$$(x_1 - x)(x - x_0) = -x^2 + (x_1 + x_0)x - x_0 x_1$$

care are rădăcinile x_0 şi x_1 şi maximul pentru $x = \dfrac{x_1 + x_0}{2}$.

Deoarece $x_0 < x_1 \ \Rightarrow \ x_0 < c_x < x_1$.

Atunci avem

$$\frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2} e^{x_0} \le |e^x - L_1(x)| \le \frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2} e^{x_1}$$

Fie $h = x_1 - x_0$

$$\max_{x_0 \le x \le x_1} \frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2} = \frac{\left(x_1 - \dfrac{x_1 + x_0}{2}\right)\left(\dfrac{x_1 + x_0}{2} - x_0\right)}{2} = \frac{h^2}{8}$$

Cum e^x se consideră pentru $x \in [0, 1]$ $e^{x_1} \le e$, $x_1 \in [0, 1] \ \Rightarrow$

$$|e^x - L_1(x)| \le \frac{h^2}{8} e, \quad 0 \le x_0 \le x \le x_1 \le 1.$$

Prin urmare

$$|e^x - L_1(x)| \le \frac{0.01^2}{8} \cdot 2.72 = 0.0000340$$

adică

$$| - 0.0000276| < 0.0000340$$

deci interpolarea liniară este potrivită.

De fapt, acum s-a justificat modul de calcul al valorilor unei funcţii (logaritmice, exponenţiale, trigonometrice) dată tabelar într-un punct intermediar celor existente în tabel, şi anume

$$\begin{array}{l} 0.82\ldots 2.270500 \\ 0.83\ldots 2.293319 \\ \hline 0.01\ldots 0.022819 \\ 0.006\ldots x \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{0.022819 \cdot 0.006}{0.01} = 0.0136914$$

$$\begin{array}{c} 2.270500 \\ 0.0136914 \\ \hline 2.2841914 \end{array}$$

$$\Rightarrow\ e^{0.826} \approx 2.2841914 = P_1(0.826)$$

Exemplul 4.2 *Pentru funcţia* $f(x) = \cos \pi x$, *pe nodurile* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, *să se determine:*

a) Polinomul de interpolare al lui Lagrange ;

b) Polinomul de interpolare al lui Newton. Să se găsească termenul complementar.

Soluţie.

x_i	0	1/3	1/2
$f(x_i)$	1	1/2	0

având 3 noduri $\Rightarrow$ polinomul de interpolare are gradul 2.

a)

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x) f(x_i),\ l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\ l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$l_0(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(0-\frac{1}{3}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)} = \frac{x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 6x^2 - 5x + 1$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{3}-0\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)} = \frac{x^2 - \frac{x}{2}}{-\frac{1}{18}} = -18x^2 + 9x$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)} = \frac{x^2 - \frac{x}{3}}{\frac{1}{12}} = 12x^2 - 4x$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
l_0(x)f(x_0) & = & 6x^2 & - & 5x & + & 1 \\
l_1(x)f(x_1) & = & -9x^2 & + & \frac{9}{2}x & & \\
l_2(x)f(x_2) & = & & & 0 & & \\
\hline
L_2(x) & = & -3x^2 & - & \frac{1}{2}x & + & 1
\end{array}$$

b) Polinomul de interpolare al lui Newton corespunzător este:

$$N_2(x) = f(x_0) + (x-x_0)[x_0, x_1; f] + (x-x_0)(x-x_1)[x_0, x_1, x_2; f]$$

Se vor calcula mai întâi diferenţele divizate

$$\begin{array}{cccc}
0 & 1 & & \\
 & & \dfrac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{3}} = \boxed{-\frac{3}{2}} & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & & \dfrac{-3+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}-0} = \boxed{-3} \\
 & & \dfrac{0-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = -3 & \\
\frac{1}{2} & 0 & &
\end{array}$$

$$N_2(x) = f(x_0) + (x-x_0)(-\frac{3}{2} + (x-x_0)(x-x_1)(-3) =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x - 3x\left(x - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + x = -3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = L_2(x)$$

Pentru calculul lui $R_2(x)$ se va folosi formula (4.57)

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}u(x) \;\Rightarrow\; R_2(x) = \frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3!}f^{(3)}(\xi),$$

$$R_2(x) = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{5}{36}x^2 + \frac{x}{36}\right)f^{(3)}(\xi),\; 0 \le \xi \le \frac{1}{2}$$

Exemplul 4.3 *Să se utilizeze formula de interpolare Lagrange pentru a aproxima* $\sqrt{113}$ *cu 2 zecimale exacte.*

Soluţie. Funcţia care trebuie aproximată este $f(x) = \sqrt{x}$.

Se consideră pătratele perfecte apropiate de 113:

$$81, 100, 121, 144$$

pentru ca valorile funcţiei pe noduri să se poată calcula uşor.

Să vedem dacă 3 noduri sunt suficiente pentru a obţine precizia cerută. Numărul 81 fiind mai îndepărtat de 113 ca 144, se vor folosi nodurile

$$x_0 = 100, \qquad x_1 = 121,\;\; x_2 = 144$$

$$f(x_0) = 10,\;\; f(x_1) = 11,\;\; f(x_2) = 12$$

Polinomul de interpolare Lagrange va fi de gradul 2.

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x) f(x_i)$$

Să vedem dacă acesta va aproxima pe $\sqrt{113}$ cu 2 zecimale exacte. Se calculează restul

$$R_2(x) = \frac{(x-100)(x-121)(x-144)}{3!}f'''(\xi), \quad 100 \le \xi \le 144$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

Funcţia f''' este descrescătoare, atunci

$$\max f'''(\xi) = \max f'''(100), |f'''(\xi)| \le \frac{3}{8}100^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}10^{-5}$$

Deci

$$|R_2(113)| \leq \frac{(113-100)(113-121)(113-144)}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}$$

$$\approx 2.64 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5} = 2.64 \cdot 10^{-3} = 0.264 \cdot 10^{-2} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

$\Rightarrow$ conform formulei (1.19), că polinomul de interpolare Lagrange care aproximează cu 2 zecimale exacte pe $\sqrt{113}$ este de gradul doi.

Prin urmare $\sqrt{113} = 10.63$.

4.6 Polinomul de interpolare al lui Hermite

Pentru o aproximare mai exactă, problema interpolării se poate formula astfel: să se determine polinomul de interpolare care, pe nodurile de interpolare $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,N}$, să ia valori egale cu valorile funcţiei iar derivatele sale să ia valori egale cu valorile derivatelor funcţiei de un anumit ordin. Aceasta înseamnă că nodurile x_i sunt noduri multiple de ordin egal cu ordinul derivatelor specificate în condiţiile de interpolare.

Fie

$$\begin{array}{lll} x_0 & \text{cu ordinul de multiplicitate} & m_0+1 \\ x_1 & \text{cu ordinul de multiplicitate} & m_1+1 \\ & \vdots & \\ x_n & \text{cu ordinul de multiplicitate} & m_n+1 \end{array}$$

şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ indefinit derivabilă.

Se pune problema de a determina un polinom $P(x)$ de grad minim astfel ca

$$\left.\begin{array}{rcl} P(x_i) & = & f(x_i) \\ P^{(j)}(x_i) & = & f^{(j)}(x), \quad j = \overline{1,m_i} \end{array}\right\}$$

adică

$$P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = \overline{0,m_i},\ i = \overline{0,n} \tag{4.59}$$

Notăm cu $\sum_{i=0}^{n}(m_i+1) = m+1$. Atunci, polinomul care satisface condiţiile de interpolare (4.59) are gradul m. Acesta este *polinomul lui Hermite*, care se notează $H_m(x)$, şi care satisface următoarele condiţii de interpolare:

$$H_m^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \tag{4.60}$$

Formula de interpolare a lui Hermite este

$$f(x) = H_m(x) + R_m(f) \tag{4.61}$$

restul fiind dat de o formulă asemănătoare cu (4.57) dar $u(x)$ are altă expresie.

Forma generală a polinomului lui Hermite este complicată, de aceea se vor trata cazuri particulare.

1. Dacă toţi $m_i = 0$, $i = \overline{0,n}$ $\Rightarrow$ nodurile sunt distincte şi avem formula de interpolare a lui Lagrange.

2. Considerăm nodurile x_0 simplu şi x_1 dublu. Să se determine polinomul lui Hermite corespunzător.

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 & m_0 + 1 = 1 \\ x_1 & m_1 + 1 = 2 \end{array}\right\} m + 1 = 3 \ \Rightarrow \ \text{polinomul are gradul 2.}$$

Acesta este de forma $H_2(x) = ax^2 + bx + c$.

Condiţiile de interpolare sunt

$$\left\{\begin{array}{lcl} H_2(x_0) & = & f(x_0) \\ H_2(x_1) & = & f(x_1) \\ H_2'(x_1) & = & f'(x_1) \end{array}\right.$$

de unde rezultă sistemul

$$\left\{\begin{array}{rcccccl} ax_0^2 & + & bx_0 & + & c & = & f(x_0) \\ ax_1^2 & + & bx_1 & + & c & = & f(x_1) \\ 2ax_1 & + & b & & & = & f'(x_1) \end{array}\right.$$

a cărui soluţie este

$$a = \frac{[x_1, x_1; f] - [x_0, x_1; f]}{x_1 - x_0} = [x_0, x_1, x_1; f]$$

$$b = [x_0, x_1; f] - (x_1 + x_0)[x_0, x_1, x_1; f]$$

$$c = f(x_0) - x_0[x_0, x_1; f] + x_0 x_1 [x_0, x_1, x_1; f]$$

Se obţine

$$H_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_1; f] \tag{4.62}$$

Dacă nodul x_0 este dublu iar x_1 simplu, polinomul de interpolare Hermite corespunzător este

$$H_2(x) = f(x_1) + (x - x_1)[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_0, x_1; f]$$

Determinarea polinomului de interpolare Hermite în acest mod este destul de greoaie, mai ales pentru un polinom de grad superior. De aceea, se va folosi polinomul de interpolare al lui Newton, adaptându-l condiţiilor de interpolare specificate.

Considerăm polinomul $N_2(x)$ dat de (4.38)

$$N_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2; f]$$

în care nodul x_2 este înlocuit cu x_1 (acesta fiind nod dublu). Se obţine

$$H_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_1; f]$$

Restul se obţine din (4.39) în acelaşi mod şi are forma

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)^2$$

In continuare, pentru determinarea polinomului de interpolare Hermite se va folosi polinomul de interpolare al lui Newton adaptat condiţiilor de interpolare specificate.

3. Dacă se consideră un singur nod x_0 multiplu de ordin $n + 1$, formula de interpolare a lui Hermite este formula lui Taylor.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n(f) \quad (4.63)$$

cu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (4.64)$$

4. Fie

$$\left.\begin{array}{lll} x_0 & \text{nod simplu} & m_0 + 1 = 1 \\ x_1 & \text{nod dublu} & m_1 + 1 = 2 \\ x_2 & \text{nod simplu} & m_2 + 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow m + 1 = 4$$

deci polinomul are gradul 3, $H_3(x)$.

Acesta trebuie să satisfacă următoarele condiţii de interpolare:

$$H_3(x_0) = f(x_0),\ H_3(x_1) = f(x_1),\ H_3'(x_1) = f\,'(x_1),\ H_3(x_2) = f(x_2)$$

Se consideră polinomul N_3 din formula (4.42), în care nodul x_2 este înlocuit cu x_1 şi nodul x_3 cu x_2, se obţine polinomul

$$\begin{aligned} H_3(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\,[x_0, x_1; f] + (x - x_0)(x - x_1)\,[x_0, x_1, x_1; f] + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)^2\,[x_0, x_1, x_1, x_2; f] \end{aligned} \quad (4.65)$$

iar restul corespunzător este

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2) \tag{4.66}$$

5. Fie

$$\left.\begin{array}{lll} x_0 & \text{nod dublu} & m_0+1=2 \\ x_1 & \text{nod dublu} & m_1+1=2 \end{array}\right\} m_0+m_1+2=4 \;\Rightarrow\; m+1=4$$

Polinomul de interpolare are gradul 3, $H_3(x)$.

Pentru a determina acest polinom, care satisface condiţiile de interpolare

$$H_3(x_0)=f(x_0),\ H_3'(x_0)=f'(x_0),\ H_3(x_1)=f(x_1),\ H_3'(x_1)=f'(x_1)$$

considerăm polinomul $N_3(x)$ din (4.42), în care nodul x_1 este înlocuit cu x_0, nodurile x_2 şi x_3 cu x_1.

Se obţine

$$\begin{aligned} H_3(x) &= f(x_0)+(x-x_0)\,[x_0,x_0;f]+(x-x_0)^2\,[x_0,x_0,x_1;f]+ \\ &+ (x-x_0)^2(x-x_1)\,[x_0,x_0,x_1,x_1;f] \end{aligned} \tag{4.67}$$

iar restul corespunzător este

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \tag{4.68}$$

4.7 Interpolarea cu ajutorul funcţiilor spline

In interpolarea prin polinoame se poate întâmpla ca diferenţa dintre valorile funcţiei f şi valorile polinomului de interpolare înafara nodurilor x_i să fie foarte mare. Ideea de a alege mai multe noduri şi de a construi un polinom de grad mai înalt nu elimină acest neajuns.

Prin urmare, polinomul nu este cel mai potrivit instrument de aproximare a unei funcţii date, deşi existenţa şi unicitatea sa se pot uşor stabili, iar calculul valorii sale în orice punct nu prezintă dificultăţi.

De aceea, s-a pus problema găsirii unei alte funcţii de interpolare, care să înlăture acest neajuns al polinoamelor de interpolare.

Funcţia de interpolare care are proprietatea de a converge către funcţia continuă pe care o interpolează este aşa numita *funcţie spline*.

Aceasta este o funcţie segmentar polinomială, în cazul cel mai simplu, segmentele de polinoame racordându-se în noduri, împreună cu un anumit număr de derivate ale acestora.

Din punct de vedere istoric, noţiunea de funcţie spline îşi are originea încă în matematica antică. Termenul de funcţie "spline" (denumirea unui instrument folosit pentru a desena o curbă netedă) a fost utilizat, pentru prima dată de către I. J. Schoenberg în anul 1946, dar pasul decisiv în problematica funcţiilor spline l-a făcut în anul 1964 prin descoperirea relaţiei dintre funcţiile spline de interpolare şi cele mai bune formule de aproximare.

Teoria funcţiilor spline a fost dezvoltată într-un mare număr de direcţii, obţinându-se rezultate remarcabile. Se poate vorbi despre şcoli de funcţii spline, dintre care se pot aminti şcoala americană, şcoala franceză, şcoala rusă, şcoala germană, etc.

O contribuţie substanţială la dezvoltarea şi îmbogăţirea teoriei funcţiilor spline a adus-o şcoala românească de funcţii spline reprezentată prin şcoala clujeană de matematică.

4.7.1 Funcţii spline cubice

Cele mai utilizate funcţii spline sunt funcţiile spline cubice.

Fie nodurile $x_i \in [a, b]$ $i = \overline{1, n}$ şi funcţia $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ continuă, care trebuie aproximată.

Definiţia 4.1 *Funcţia* $s : \ [a,\ b] \ \to \mathbb{R}$ *se numeşte funcţie spline cubică, dacă satisface următoarele condiţii:*

1. *funcţia s este un polinom de gradul* 3 *pe fiecare interval* $(x_i,\ x_{i+1})$, $i = \overline{1, n}$;
2. *funcţiile s, s', s'' sunt continue pe intervalul* $[a,\ b]$.

Se poate arăta că această funcţie are proprietatea de a minimiza integrala $\int\limits_a^b [s''(x)]^2 dx$.

Condiţia 1. este echivalentă cu cerinţa ca funcţia s în intervalul $(x_i,\ x_{i+1})$ să fie soluţia ecuaţiei $s^{IV} = 0$.

Definiţia 4.2 *O funcţie spline cubică s se numeşte funcţie spline cubică de interpolare pentru valorile y_i, dacă*

$$s(x_i) = y_i,\ i = \overline{1, n} \tag{4.69}$$

4.7.2 Construcţia funcţiei spline cubice de interpolare

Există mai multe procedee de calcul al funcţiei spline cubice de interpolare:

I. utilizând mărimile m_i (pante)

$$s'(x_i) = m_i,\ i = \overline{1, n} \tag{4.70}$$

II. utilizând mărimile M_i (momente)

$$s''(x_i) = M_i,\ i = \overline{1, n} \tag{4.71}$$

Dacă se impune condiţia

$$s''(x_1) = s''(x_n) = 0$$

funcţia s se numeşte *funcţie spline cubică naturală*.

Indiferent de procedeul de calcul folosit funcţia spline obţinută este unică, în condiţiile specificate.

In continuare se vor construi funcţiile spline cubice prin fiecare din cele două procedee.

I. Se va determina funcţia $s : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ care îndeplineşte condiţiile:

1. pe fiecare subinterval $[x_i,\ x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n}$ funcţia $s(x)$ este un polinom de gradul 3, $p_i(x)$
2. $s'(x_i) = m_i$, $i = \overline{1, n}$
3. $s(x_i) \ = y_i$, $i = \overline{1, n}$

Polinomul $p_i(x)$ este definit de condiţiile

$$p_i(x_i) = y_i,\ p'(x_{i+1}) = m_i,\ p_i(x_{i+1}) = y_{i+1},\ p'(x_{i+1}) = m_{i+1} \tag{4.72}$$

Acesta este polinomul de interpolare Hermite pe nodurile duble x_i şi x_{i+1}. El are forma (4.67), care adaptat condiţiilor de interpolare (4.72) devine

$$\begin{aligned} H_3(x) &= f(x_i) + (x - x_i)\,[x_i, x_i; f] + (x - x_i)^2\,[x_i, x_i, x_{i+1}; f] + \\ &+ (x - x_i)^2(x - x_{i+1})\,[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}; f] \end{aligned}$$

unde

$$[x_i, x_i; f] = f'(x_i) = m_i$$

$$[x_i, x_{i+1}; f] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$
$$[x_i, x_i, x_{i+1}; f] = \frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} - \frac{m_i}{x_{i+1} - x_i}$$
$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+1}; f] = \frac{m_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$
$$[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}; f] = \frac{m_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2} - 2\frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} + \frac{m_i}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

Prin urmare,

$$p_i(x) = H_3(x) = y_i + m_i(x - x_i) + \left(3\frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x - x_i)^2 +$$
$$+\left(-2y_{i+1} - y_i(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{m_{i+1} + m_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x - x_i)^3 \qquad (4.73)$$

Condiţia 2 din definiţia 4.1 pentru derivata a doua este echivalentă cu condiţia

$$p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad (4.74)$$

care conduce la următorul sistem liniar de $n - 2$ ecuaţii cu necunoscutele m_i

$$(x_{i+2} - x_{i+1})\, m_i + 2\,(x_{i+2} - x_i)\, m_{i+1} + (x_{i+1} - x_i)\, m_{i+2} = \qquad (4.75)$$
$$= 3\left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}}\,(x_{i+1} - x_i) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\,(x_{i+2} - x_{i+1})\right],\ i = \overline{1, n-2}$$

Pentru ca acest sistem să aibă soluţie unică, mai trebuie impuse două condiţii, care pot fi sub diferite forme. Aici, se vor impune condiţiile

$$m_1 = m_n,\ m_2 = m_{n-1} \qquad (4.76)$$

Cu valorile m_i calculate din (4.75) şi (4.76) se obţine funcţia spline cubică de interpolare:

$$s_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) + \left(3\frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x - x_i)^2 +$$
$$+\left(-2y_{i+1} - y_i(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{m_{i+1} + m_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x - x_i)^3 \qquad (4.77)$$

Eroarea interpolării cu funcţiile spline cubice este

$$E(x) = s_i(x) - p_i(x) = R_3(x)$$

cu $R_3(x)$ dat de (4.68)

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2,\ \xi \in (a,\ b)$$

Deci

$$E(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2,\ \xi \in (a,\ b)$$

sau

$$E(x) \leq \frac{(b-a)^2}{4} \cdot \frac{(b-a)^2}{4} \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \leq \frac{M_4 h^4}{384} \tag{4.78}$$

cu $h = b - a$, $M_4 = \max\limits_{\xi \in (a,b)} f^{(4)}(\xi)$.

II. Se vor folosi mărimile M_i.

Trebuie determinată funcţia spline cubică care verifică următoarele condiţii

1. pe fiecare subinterval $[x_i,\ x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n}$ funcţia $s(x)$ este un polinom de gradul 3, $p_i(x)$
2. $s''(x_i) = M_i$, $i = \overline{1, n}$
3. $s(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, n}$

Se va deduce expresia funcţiei $s(x)$ ce satisface condiţiile de mai sus pornind de la faptul că aceasta este polinom de gradul trei şi deci, derivata sa de ordinul doi va avea gradul întâi.

Fie $s_i(x)$ funcţia spline cubică ce satisface condiţiile $1 - 3$ pe intervalul $[x_i,\ x_{i+1}]$.

Avem

$$s_i''(x) = ax + b$$

cu condiţiile

$$s_i''(x_i) = M_i,\ s_i''(x_{i+1}) = M_{i+1}$$

Mărimile a şi b se determină din sistemul

$$\begin{cases} ax_i & + & b & = & M_i \\ ax_{i+1} & + & b & = & M_{i+1} \end{cases}$$

Se obţine

$$s_i''(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} M_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} M_{i+1} \tag{4.79}$$

Prin integrarea relaţiei (4.79) se obţine

$$s_i'(x) = -\frac{(x_{i+1} - x)^2}{2(x_{i+1} - x_i)} M_i + \frac{(x - x_i)^2}{2(x_{i+1} - x_i)} M_{i+1} + C_1 \tag{4.80}$$

care integrată conduce la

$$s_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6(x_{i+1} - x_i)} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6(x_{i+1} - x_i)} M_{i+1} + C_1 x + C_2 \tag{4.81}$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile de interpolare

$$s_i(x_i) = y_i,\ s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

Avem

$$C_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(M_{i+1} - M_i\right)$$

$$C_2 = \frac{y_i x_{i+1} - x_i y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(M_i x_{i+1} - M_{i+1} x_i\right)$$

Funcţia spline cubică este

$$\begin{aligned} s_i(x) = {} & \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6(x_{i+1} - x_i)} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6(x_{i+1} - x_i)} M_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x}{6(x_{i+1} - x_i)} \left[6y_i - M_i (x_{i+1} - x_i)^2\right] + \\ & + \frac{x_{i+1} - x}{6(x_{i+1} - x_i)} \left[6y_{i+1} - M_{i+1} (x_{i+1} - x_i)^2\right] \end{aligned} \tag{4.82}$$

Condiţia $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$ conduce la următorul sistem de $n - 2$ ecuaţii cu n necunoscute M_i

$$\begin{aligned} & (x_{i+2} - x_{i+1})\, M_i + 2\,(x_{i+2} - x_i)\, M_{i+1} + (x_{i+1} - x_i)\, M_{i+2} = \\ & = 6 \left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right),\ i = \overline{1, n-2} \end{aligned} \tag{4.83}$$

Se pot adăuga condiţii suplimentare la capetele intervalului, de forma

$$M_1 = M_n = 0$$

Cu aceste condiţii sistemul (4.83) are soluţie unică.

Exemplul 4.4 *Să se calculeze funcţia spline cubică care interpolează datele*

x_i	1	2	4	5
y_i	3	5	9	10

folosind momentele M_i.

Soluţie. Având 4 ($n = 4$) noduri, sistemul (4.83) devine

$$\begin{array}{llllllll} i=1, & M_1 & + & 6M_2 & + & 2M_3 & & & = & 0 \\ i=2, & & & 2M_2 & + & 6M_3 & + & M_4 & = & -6 \end{array}$$

care cu condiţia $M_1 = M_4 = 0$, are soluţia

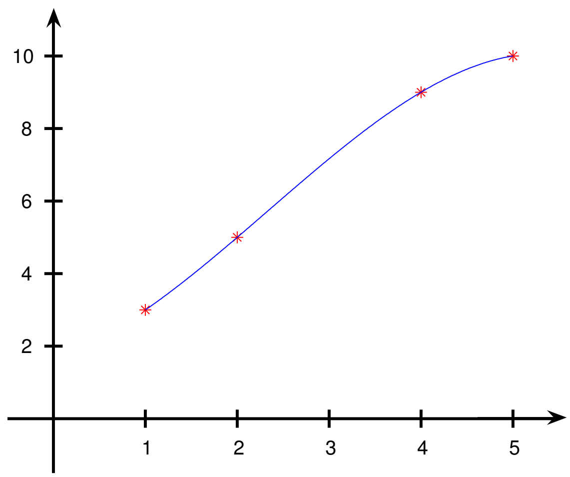
$$M_1 = 0,\ M_2 = \frac{3}{8},\ M_3 = -\frac{9}{8},\ M_4 = 0$$

Inlocuind aceste valori în (4.82), se obţine funcţia spline cubică cerută

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{3x^2}{16} + \dfrac{17x}{8} + 1, & x \in [1,2] \\[2ex] -\dfrac{x^3}{8} + \dfrac{15x^2}{16} - \dfrac{x}{8} + \dfrac{5}{2}, & x \in [2,4] \\[2ex] \dfrac{3x^3}{16} - \dfrac{45x^2}{16} + \dfrac{119x}{8} - \dfrac{35}{2}, & x \in [4,5] \end{cases}$$

Graficul acestei funcţii este dat în figura de mai jos.

Observaţia 4.4 *Toate problemele tratate în acest capitol sunt rezolvate şi cu Maple în capitolul* 7.



4.8 Probleme propuse

1. Să se determine funcţia care aproximează următoarele date:

a)

x_i	0.5	1.5	2	3	3.5	4.5	5	6	7	8
y_i	5	5.8	5.8	6.8	6.9	7.6	7.8	8.2	9.2	9.9

b)

x_i	-5	-3	-1	1	3	5
y_i	4.8	3.0	2.0	2.8	3.2	10

c)

x_i	0.78	1.56	2.34	3.12	3.81
y_i	2.50	1.20	1.12	2.25	4.28

d)

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	8.536	10.736	11.133	12.546	13.88	16.24	17.21

2. Urmărindu-se creşterea în timp a unui altoi, s - au obţinut datele din tabel:

x_i	1	3	4	6	8
y_i	1.4	2.3	2.5	3.6	4.1

unde x este numărul zilelor, iar y creşterea în centimetri. Să se determine funcţia care le aproximează.

3. Să se găsească valoarea aproximativă pentru $e^{0.865}$ şi $e^{\frac{5}{6}}$ folosind polinomul de interpolare liniară pe baza valorilor funcţiei $f(x) = e^x$ din exemplul 4.1. Să se evalueze eroarea produsă.

4. Pentru funcţia $f(x) = \sin \pi x$, pe nodurile $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{6}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, să se determine:

   a) polinomul de interpolare al lui Lagrange;

   b) polinomul de interpolare a lui Newton.

   Să se găsească termenul complementar.

5. Să se scrie polinomul de interpolare a lui Newton pentru următoarele date

x_i	5	7	11	13	21
$f(x_i)$	50	392	1452	2366	9702

   Să se calculeze $N_4(6.42)$.

6. Ştiind că $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $f(1) = -1$, iar $|f'''| < 1$, să se aproximeze $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ şi să se evalueze eroarea comisă.

7. Fiind dată tabela de logaritmi cu 7 zecimale pentru numere mai mari ca 1000, din 10 în 10 să se scrie logaritmii numerelor întregi de la 1000 până la 1010.

8. Folosind formula de interpolare Lagrange liniară să se afle eroarea comisă la calculul valorii funcţiei $f(x) = \arcsin x$ în punctul $x = 0.5335$ dacă $x_0 = 0.5330$ şi $x_1 = 0.5340$.

9. Să se determine polinomul $p(x)$ care satisface următoarele condiţii de interpolare

$$p(0) = -1,\ p(1) = -1,\ p\,'(1) = 4$$

10. Să se calculeze diferenţele divizate ale funcţiei $f(x) = e^x$ pe nodurile $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 =0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$.

11. Pentru funcţia $f(x) = \sin x$ când $0 \leq x \leq 1.58$ cu pasul $h = 0.01$ să determine eroarea în cazul

    a) interpolării liniare;

    b) interpolării pătratice.

12. Dacă funcţia $f(x) = \sin x$ când $0 \leq x \leq 1.6$ este aproximată prin interpolare pătratică cât de mic trebuie să fie pasul h ca eroarea de interpolare să fie mai mică decât 10^{-6}?

13. Să se determine funcţia spline cubică de interpolare a datelor

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

folosind pantele m_i.

14. Să se evalueze eroarea comisă în interpolarea prin funcţia spline cubică determinată în problema precedentă.

15. Să se determine funcţia spline cubică de interpolare a datelor

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 3 & 5 \\ \hline y_i & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

folosind momentele M_i.

16. Se dă următoarea funcţie spline cubică

$$s(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Este ea funcţie spline cubică şi pe intervalul [0, 2]?

17. Este următoarea funcţie

$$s(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ -x^3 + 9x^2 - 22x + 17, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

funcţie spline cubică naturală pe intervalul [1, 3]?

Capitolul 5

Integrarea şi derivarea numerică

5.1 Metode de integrare numerică

Se pune problema calculului integralei definite

$$\int_a^b f(x)dx \tag{5.1}$$

unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$.

Se ştie că această integrală poate fi calculată aplicând formula lui Leibniz-Newton

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{5.2}$$

dacă există primitiva F sau dacă se poate determina această primitivă, deci pentru o clasă restrânsă de funcţii.

De aceea, pentru calculul integralei (5.1) se apelează la metode de calcul aproximativ, numite *metode de integrare numerică* sau de **cuadratură**.

Prin urmare, o problemă de integrare numerică urmăreşte determinarea aproximativă, pe cale numerică, a valorii integralei definite (5.1).

Calculul valorii aproximative a integralei (5.1) se face, în principiu, pornind de la un număr finit de valori cunoscute ale funcţiei f de integrat.

Majoritatea metodelor de integrare numerică aproximează funcţia de integrat printr-un polinom, întotdeauna uşor de integrat, apoi se aplică formula

(5.2), fie pe întregul interval $[a, b]$, fie pe subintervale ale acestuia obţinute prin împărţirea intervalului $[a, b]$ de nodurile x_i, de regulă echidistante.

O formulă de cuadratură va fi de forma generală

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R(f) \tag{5.3}$$

unde $A_i \in \mathbb{R}$ sunt coeficienţii formulei şi $R(f)$ reprezintă restul sau eroarea formulei.

Formula (5.3) are gradul de exactitate N dacă $R(x^j) = 0$, $j = \overline{0, N}$ dar $R(x^{N+1}) \neq 0$.

Cele mai utilizate metode de integrare numerică sunt: metoda dreptunghiurilor, metoda trapezelor şi metoda lui Simpson.

5.2 Metoda dreptunghiurilor

Se va deduce formula dreptunghiurilor considerând un singur nod din $[a, b]$ şi anume mijlocul acestui interval, adică $\dfrac{a+b}{2}$.

Se dezvoltă funcţia f în serie Taylor în vecinătatea nodului $\dfrac{a+b}{2}$,

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{x - \dfrac{a+b}{2}}{1!} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2}{2!} f''(\xi) \tag{5.4}$$

$\xi \in (a, b)$.

De fapt, funcţia f este aproximată prin polinomul de interpolare Hermite cu un singur nod dublu (formula lui Taylor).

Avem

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \\ &+ \frac{1}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi) dx =\end{aligned}$$

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\Bigg|_a^b+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=$$

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_a^b=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}$$

adică

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi),\ \xi\in(a,b) \tag{5.5}$$

numită *formula de cuadratură a dreptunghiurilor* cu un nod şi gradul de exactitate $N=1$, care este şi maxim pentru un nod.

Se ştie că, din punct de vedere geometric, integrala definită (5.1) reprezintă aria porţiunii plane cuprinsă între graficul funcţiei $f(x)$, axa Ox şi dreptele $x=a$ şi $x=b$ (figura 1).

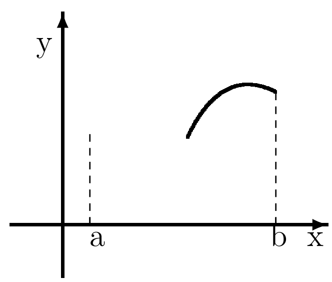


Figura 1.

Această arie este aproximată de $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, aşa cum rezultă din formula (5.5), adică

$$\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{5.6}$$

Aceasta înseamnă că porţiunea haşurată în figura 1 a fost înlocuită cu un dreptunghi de bază $b-a$ şi înălţime $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (figura 2).

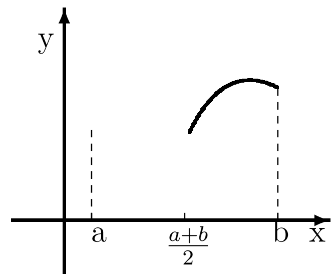


Figura 2.

Cum aria unui dreptunghi este egală cu produsul dintre bază şi înălţime, în cazul nostru $(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, formula (5.6) ne arată că aria porţiunii haşurate din figura 1 este aproximată cu aria dreptunghiului din figura 2, de unde provine şi numele formulei.

Această interpretare geometrică este o cale rapidă de obţinere a formulei dreptunghiurilor, dar evaluarea restului, deci a erorii de aproximare, este imposibil de făcut.

Pentru a obţine o aproximare mai precisă a integralei, se împarte intervalul $[a,b]$ în n subintervale date de nodurile echidistante x_i, $i=\overline{0,n}$, fiecare subinterval $[x_i,x_{i+1}]$ având lungimea $\dfrac{b-a}{n}$.

In acest caz integrala (5.1) devine

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx \qquad (5.7)$$

Pentru fiecare integrală $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ din (5.7) se aplică formula dreptunghiurilor (5.5), adică

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{i+1}-x_i)f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^3}f''(\xi_i), \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \qquad (5.8)$$

Dar

$$x_{i+1}-x_i = \frac{b-a}{n},\ x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n} = a + \frac{b-a}{n},$$

$$x_2 = x_1 + \frac{b-a}{b} = 2\frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \frac{a + i\frac{b-a}{n} + a + (i+1)\frac{b-a}{n}}{2} = a + (2i+1)\frac{b-a}{2n}$$

Astfel (5.8) devine

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{b-a}{n} f\left(a + (2i+1)\frac{b-a}{2n}\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi_i) \tag{5.9}$$

In fine

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + (2i+1)\frac{b-a}{2n}\right] + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \tag{5.10}$$

unde

$$f''(\xi) = \frac{f''(\xi_0) + \ldots + f''(\xi_n)}{n},\ \ \xi \in (a,b)$$

Acest procedeu de obţinere a formulei (5.10) derivă din raţionamentul care conduce la noţiunea de integrală definită, când aria porţiunii plane este dată de suma ariilor dreptunghiurilor formate în urma divizării intervalului de integrare.

5.3 Metoda trapezelor

Pentru obţinerea acestei metode se procedează la fel ca în metoda dreptunghiurilor aproximând funcţia de integrat cu polinomul de interpolare Lagrange pe 2 noduri.

Cele două noduri se iau tocmai capetele intervalului.

Se ştie că polinomul de interpolare al lui Lagrange pe 2 noduri are gradul întâi, el fiind de forma

$$L_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

iar formula de interpolare corespunzătoare este

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b), \quad \xi \in (a,b) \tag{5.11}$$

Prin urmare

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a)dx + \int_a^b \frac{x-a}{b-a} f(b)dx + \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx \tag{5.12}$$

dar

$$\int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a)dx = \frac{f(a)}{a-b}\cdot\frac{(x-b)^2}{2}\bigg|_a^b = -\frac{f(a)}{(a-b)}\cdot\frac{(a-b)^2}{2} = \frac{b-a}{2}f(a)$$

$$\int_a^b \frac{x-a}{b-a} f(b)dx = \frac{f(b)}{b-a}\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{f(b)}{b-a}\cdot\frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b-a}{2}f(b)$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b - (a+b)\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b + abx\bigg|_a^b = -\frac{(b-a)^3}{6}$$

Formula trapezului (5.12) este

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in (a,b) \tag{5.13}$$

Formulei trapezului i se poate da următoarea interpretare geometrică (figura 3).

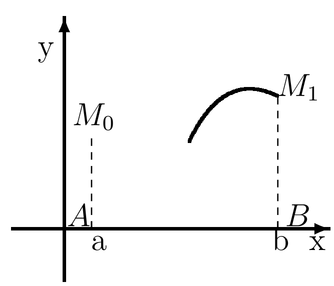


Figura 3.

Polinomul de interpolare fiind de gradul întâi, funcţia $f(x)$ este aproximată de dreapta M_0M_1, $M_0(a, f(a))$, $M_1(b, f(b))$, iar integrala sa definită este aproximată de aria trapezului AM_0M_1B.

Se consideră acum, ca şi la metoda dreptunghiurilor, cazul în care intervalul $[a,b]$ se împarte în n subintervale $[x_i, x_{i+1}]$, $x_i \in [a,b]$, $i=\overline{0,n}$ de aceeaşi lungime $\dfrac{b-a}{n}$, $x_i = x_0 + i\dfrac{b-a}{n}$.

Avem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx \tag{5.14}$$

Aplicăm fiecărei integrale formula trapezului (5.13).

Considerăm integrala

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx &= \frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] - \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} f''(\xi_i) = \\ &= \frac{b-a}{2n}[f(x_i)+f(x_{i+1})] - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_{i+1}) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Scriem formula (5.15) pentru $i=\overline{0,n-1}$

$$i=0, \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[f(a)+f(x_1)] - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_1),\ \xi_0 \in [a, x_1]$$

$$i=1, \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[f(x_1))+f(x_2] - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_2),\ \xi_2 \in [x_1, x_2]$$

$$i=2, \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[f(x_2)+f(x_3)] - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_3),\ \xi_3 \in [x_2, x_3]$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$i=n-2, \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[f(x_{n-2})+f(x_{n-1})] - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_{n-1}), \xi_{n-1} \in [x_{n-2}, x_{n-1}]$$

$$i=n-1, \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[f(x_{n-1})+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_n),\ \xi_{n-1} \in [x_{n-1}, x_n]$$

Adunând membru cu membru aceste relaţii se obţine

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{2n}[f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(b)]- \\ &- \frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi), \xi\in[a,b] \qquad (5.16)\end{aligned}$$

unde

$$f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+\cdots+f''(\xi_n)}{n} \qquad (5.17)$$

Aceasta este *formula trapezelor.*

Observaţia 5.1 *Formula dreptunghiurilor şi cea a trapezelor au gradul de exactitate 1* ($R(x^2)\neq 0$).

5.4 Formula lui Simpson

Se consideră nodurile $x_0=a$, $x_1=x_2=\frac{a+b}{2}$, $x_3=b$. (Nodul $\frac{a+b}{2}$ este dublu). Atunci polinomul de interpolare Hermite corespunzător va avea gradul 3 şi este de forma

$$\begin{aligned}H_3(x) &= f(x_0)+(x-x_0)[x_0,x_1;f]+(x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_1;f]+ \\ &+ (x-x_0)(x-x_1)^2[x_0,x_1,x_1,x_3;f] \qquad (5.18)\end{aligned}$$

iar eroarea cu care $H_3(x)$ aproximează funcţia $f(x)$ este

$$R_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_3)}{4!}f^{(4)}(\xi) \qquad (5.19)$$

Prin urmare,

$$f(x)=H_3(x)+R_3(x) \qquad (5.20)$$

Atunci

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b H_3(x)dx+\int_a^b R_3(x)dx \qquad (5.21)$$

Să calculăm integralele din membrul doi al relaţiei (5.21)

$$
\begin{aligned}
\int_a^b H_3(x)dx &= \int_a^b f(x_0)dx + \int_a^b (x-x_0)[x_0,x_1;f]dx + \\
&+ \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_1;f]dx + \qquad (5.22)\\
&+ \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)^2[x_0,x_1,x_1,x_3;f]dx
\end{aligned}
$$

Mai întâi exprimăm diferenţele divizate ţinând seama de faptul că $x_0 = a$, $x_1 = x_2 = \dfrac{a+b}{2}$, $x_3 = b$, $x_1 - x_0 = x_3 - x_1 = \dfrac{b-a}{2}$.

$$
\begin{array}{cccccc}
a & f(a) & & & & \\
 & & & \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{b-a}{2}} & & \\
\frac{a+b}{2} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) & & & \frac{\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{\frac{(b-a)^2}{4}} & \\
 & & & f'\left(\frac{a+b}{2}\right) & & \frac{f(b)-(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{(b-a)^3}{4}} \\
\frac{a+b}{2} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) & & & \frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{(b-a)^2}{4}} & \\
 & & & \frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}} & & \\
b & f(b) & & & &
\end{array}
$$

Trebuie calculate următoarele integrale:

$$
\int_a^b (x-x_0)dx = \int_a^b (x-a)dx = \left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b = \frac{(b-a)^2}{2}
$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)dx &= \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx = \\
= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t\left(t+\frac{b-a}{2}\right)dt &= \frac{2}{3}\cdot\frac{(b-a)^3}{2^3} = \frac{(b-a)^3}{12} \\
\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)^2dx &= \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \\
= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^2\left(t+\frac{b-a}{2}\right)dt &= \frac{b-a}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{12} = \frac{(b-a)^4}{24}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

cu substituţia

$$x-\frac{a+b}{2}=t,\ x=t+\frac{a+b}{2},\ dx=dt$$

Avem

$$\int_a^b f(x_0)dx = (b-a)f(a)$$

$$\int_a^b (x-x_0)\left[x_0,x_1;f\right]dx = (b-a)\left[f(\frac{a+b}{2})-f(a)\right]$$

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_1;f]dx = \frac{b-a}{3}\left[\frac{b-a}{2}f'(\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2})+f(a)\right]$$

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)^2[x_0,x_1,x_1,x_3;f]dx = \frac{(b-a)[f(b)-(b-a)f'(\frac{a+b}{2})-f(a)]}{6}$$

Deci

$$\int_a^b H_3(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \tag{5.24}$$

Formula lui Simpson devine

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]+\int_a^b R_3(f)dx \tag{5.25}$$

5.5 Evaluarea erorii formulei lui Simpson

Din (5.19) avem

$$\begin{aligned}\int_a^b R_3(f)dx &= \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_3)}{4!} f^{(4)}(\xi)dx \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_3)dx\end{aligned}$$

Ţinând seama de substituţia folosită pentru calculul integralelor (5.23), se obţine

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_3)dx = \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx =$$

$$= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^2 \left[t^2 - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2\right] dt = -\frac{2(b-a)^5}{15\cdot 2^4} = -\frac{(b-a)^5}{120}$$

Avem

$$\int_a^b R_3(f)dx = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\frac{(b-a)^5}{120} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \tag{5.26}$$

Se obţine

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \tag{5.27}$$

Observaţia 5.2 *Dintre cele trei metode prezentate, formula lui Simpson este cea mai bună metodă de integrare numerică având gradul de exactitate* 3.

Se poate pune problema determinării formulei lui Simpson considerând un polinom de interpolare pe 3 noduri, deci de gradul 2. Se vor obţine aceiaşi coeficienţi ai formulei dar se va constata că restul, fiind polinom de gradul 3, va fi egal cu zero. De aceea, s-a folosit polinomul de interpolare al lui Hermite.

5.6 Derivarea numerică

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $[a, b]$. Se pune problema determinării unei funcţii care să aproximeze derivata (derivatele) funcţiei $f(x)$ pe (a, b) sau pe un subinterval al acestuia.

Aproximarea numerică a derivatelor se foloseşte când funcţia f este dată tabelar sau când expresia sa este foarte complicată.

Se pot obţine formule de derivare numerică pe două căi:

− folosind interpolarea prin polinoame şi derivând formula de interpolare pentru f;

− folosind dezvoltarea în serie Taylor.

5.6.1 Metoda interpolativă de derivare numerică

Considerăm formula de interpolare a lui Newton

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x) \tag{5.28}$$

pe nodurile x_i echidistante, $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$.

Polinomul de interpolare al lui Newton exprimat cu ajutorul diferenţelor finite (vezi (4.50)) are forma

$$N_n(x) = f(x_0) + \frac{\mu}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \cdots +$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0), \ \mu = \frac{x - x_0}{h}$$

Restul $R_n(x)$ are forma (vezi (4.57))

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_i)}{(n+1)!}u(x), \xi_i \in [a, b] \text{ sau } \min\{x_i\} \le \xi_i \le \max\{x_i\} \tag{5.29}$$

Atunci, relaţia (5.28) devine

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\mu}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \cdots +$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0) + R_n(x) \tag{5.30}$$

sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\mu}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{\mu^2-\mu}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{\mu^3-3\mu^2+2}{3!}\Delta^3 f(x_0) +$$
$$+ \frac{\mu^4-6\mu^3+11\mu^2-6\mu}{4!}\Delta^4 f(x_0) + \cdots$$

Deoarece

$$f'(x) = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h}\cdot\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}\mu}$$

rezultă

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) + \frac{2\mu-1}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{3\mu^2-6\mu+2}{6}\Delta^3 f(x_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{4\mu^3-18\mu^2+22\mu-6}{24}\Delta^4 f(x_0) + \cdots\right] + R_n'(x) \tag{5.31}$$

Analog

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h}\cdot\frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}\mu}$$

Atunci

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f(x_0) + (\mu-1)\Delta^3 f(x_0) + \frac{6\mu^2-18\mu+11}{12}\Delta^4 f(x_0) + \ldots\right] +$$
$$+ R_n''(x) \tag{5.32}$$

Continuând acest procedeu se pot obţine derivate de ordin oarecare.

Se poate evalua eroarea comisă, pornind de la relaţia (5.35), care poate fi scrisă sub forma

$$R_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$$

Deoarece

$$R_n'(x) = \frac{\mathrm{dR}_n(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dR}_n(x)}{\mathrm{d}\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h}\cdot\frac{\mathrm{dR}_n(x)}{\mathrm{d}\mu}$$

avem

$$R_n'(x) = \frac{\mathrm{d}[\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)]}{\mathrm{d}x}f^{(n+1)}(\xi) \tag{5.33}$$

Analog se poate obţine $R_n''(x)$.

In cazul în care nodurile x_{i-1}, x_i, x_{i+1} sunt în relaţia $x_{i-1} = x_i - h$, $x_{i+1} = x_i + h$, ecuaţiile (5.31) − (5.32) devin

$$f'(x) = \frac{1}{2h^2}\left\{2(x-x_i)\left[f(x_i-h)-2f(x_i)+f(x_i+h)\right]-\right.$$

$$\left.-\,h\left[f(x_i-h)-f(x_i+h)\right]\right\}+\left[3(x-x_i)^2-h^2\right]\frac{f'''(\xi)}{3!} \qquad (5.34)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_i-h)-2f(x_i)+f(x_i+h)\right]+h(x-x_i)f^{(3)}(\xi) \qquad (5.35)$$

Valorile derivatelor de ordinul întâi şi doi în punctul x_i sunt

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[f(x_i+h)-f(x_i-h)\right]-\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi) \qquad (5.36)$$

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_i-h)-2f(x_i)+f(x_i+h)\right] \qquad (5.37)$$

5.6.2 Metoda dezvoltării în serie Taylor

Fie nodurile x_{i-1}, x_i, x_{i+1} echidistante, unde $x_{i-1} = x_i - h$, $x_{i+1} = x_i + h$.

Ne propunem să deducem o formulă aproximativă pentru derivatele de ordinul întâi şi doi în nodul x_i, cunoscând valorile funcţiei pe nodurile x_{i-1}, x_i, x_{i+1}.

Considerăm dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei f în jurul punctului x_i

$$f(x) = f(x_i)+\frac{x-x_i}{1!}f'(x_i)+\frac{(x-x_i)^2)}{2!}f''(x_i)+\frac{(x-x_i)^3)}{3!}f'''(x_i)+$$

$$+\frac{(x-x_i)^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

Scriem această formulă pentru $x = x_{i+1}$ respectiv $x = x_{i-1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i+h) = f(x_i)+\frac{h}{1!}f'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f'''(\xi_i) \qquad (5.38)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i-h) = f(x_i)-\frac{h}{1!}f'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f'''(\eta_i) \qquad (5.39)$$

unde $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Scăzând aceste relaţii membru cu membru, se obţine

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2hf\,'(x_i) + \frac{h^3}{3!}\,[f\,'''(\xi_i) + f\,'''(\eta_i)]$$

de unde

$$f\,'(x_i) = \frac{1}{2h}\,[f(x_i + h) - f(x_i - h)] - \frac{h^2}{12}\,[f\,'''(\xi_i) + f\,'''(\eta_i)] \tag{5.40}$$

Deci, valoarea derivatei funcţiei f în punctul x_i poate fi aproximată prin expresia

$$f\,'(x_i) = \frac{1}{2h}\,[f(x_i + h) - f(x_i - h)] \tag{5.41}$$

cu eroarea

$$R\,'(x_i) = \frac{h^2}{12}\,[f\,'''(\xi_i) + f\,'''(\eta_i)] \tag{5.42}$$

Dacă se adună membru cu membru relaţiile (5.38) şi (5.39) se obţine expresia aproximativă pentru derivata a doua

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}\,[f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)] \tag{5.43}$$

cu eroarea

$$R\,''(x_i) = \frac{h}{6}\,[f\,'''(\xi_i) - f\,'''(\eta_i)] \tag{5.44}$$

Observaţia 5.3 *Prin ambele metode se obţin aceleaşi expresii aproximative pentru derivatele de ordinul întâi şi doi ale unei funcţii.*

Exemplul 5.1 *Să se calculeze $f\,'(55)$ pentru funcţia $f(x) = \log x$ ale cărei valori în trei puncte sunt date în tabelul de mai jos:*

x_i	50	55	60
$f(x_i)$	1.6990	1.7404	1.7782

Soluţie. Se foloseşte formula (5.41)

$$f\,'(x_i) = \frac{1}{2h}\,[f(x_i + h) - f(x_i - h)] - \frac{h^2}{12}\,[f\,'''(\xi_i) + f\,'''(\eta_i)]$$

unde $x_i = 55$, $x_i - h = 50$, $x_i + h = 60$, $h = 5$.

Se obţine

$$f'(55) \simeq \frac{1}{10}\left[f(60) - f(50)\right] = 0.00792$$

Prin calcul direct avem

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} \Rightarrow f'(55) = 0.00789$$

Exemplul 5.2 *Sunt date valorile funcţiei f (necunoscută) în tabelul*

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x_i)$	2.463	2.487	2.513	2.541	2.563

Să se calculeze $f'(0.2)$ şi $f''(0.3)$.

Soluţie. Se folosesc formulele (5.31) şi (5.32), în care $h = 0.1$, $\mu = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{x - 0.1}{0.1}$.

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) + \frac{2\mu - 1}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{3\mu^2 - 6\mu + 2}{6}\Delta^3 f(x_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{4\mu^3 - 18\mu^2 + 22\mu - 6}{24}\Delta^4 f(x_0)\right]$$

Se vor calcula mai întâi diferenţele finite, conform schemei:

$$\begin{array}{ccccccccc}
2.463 & & & & & & & & \\
 & \diagdown & & & & & & & \\
 & & \boxed{0.024} & & & & & & \\
 & \diagup & & \diagdown & & & & & \\
2.487 & & & & \boxed{0.002} & & & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & & \\
 & & 0.026 & & & & \boxed{0.000} & & \\
 & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
2.513 & & & & 0.002 & & & & \boxed{-0.008} \\
 & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\
 & & 0.028 & & & & -0.008 & & \\
 & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & & \\
2.541 & & & & 0.002 & & & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & & & & \\
 & & 0.022 & & & & & & \\
 & \diagup & & & & & & & \\
2.563 & & & & & & & &
\end{array}$$

Atunci

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(0.024 + \frac{2\mu - 1}{2} \cdot 0.002 - \frac{4\mu^3 - 18\mu^2 + 22\mu - 6}{24} \cdot 0.008\right), \mu = 1$$

Deci

$$f'(0.2) = \frac{1}{0.1}\,(0.024 + 0.001 - 0.0007) \simeq 0.243$$

Pentru calculul derivatei a doua se obţine

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left(0.002 - \frac{6\mu^2 - 18\mu + 11}{12} \cdot 0.008\right),\ \mu = 2, \Rightarrow f''(0.3) = 0.267$$

Observaţia 5.4 *Problemele din acest capitol sunt rezolvate şi cu Maple în capitolul* 7*.*

5.7 Probleme propuse

1. Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4+x}$ cu o eroare $\leq \frac{1}{5000}$ utilizând formula dreptunghiurilor.

2. Să se calculeze $\int\limits_1^9 \sqrt{x}dx$ cu o aproximaţie de 10^{-3} folosind formula dreptunghiurilor.

3. Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$

   a) utilizând metoda dreptunghiurilor şi a trapezelor, împărţind intervalul $[0,1]$ în 5 părţi egale ($n = 5$). Să se exprime eroarea.

   b) utilizând formula trapezelor, cu o eroare $\leq 10^{-3}$.

4. Folosind metoda trapezelor să se calculeze valoarea aproximativă şi erorile pentru următoarele integrale:

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, $n = 12$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}dx$, $n = 6$.

5. Să se calculeze $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$ cu o aproximaţie de 0.001 folosind formula trapezelor.

6. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Simpson valoarea aproximativă a integralei $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x}$ de unde să se deducă valoarea aproximativă a lui $\ln 3$.

7. Să se calculeze $\int\limits_1^2 \ln x dx$ cu o aproximaţie de 10^{-3} folosind formula lui Simpson.

8. Să se calculeze $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ aplicând formula lui Simpson. Să se evalueze eroarea.

9. Să se calculeze $f''(0.5)$ pentru funcţia $f(x)$ ale cărei valori sunt date în tabelul de mai jos:

x_i	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x_i)$	7.3891	7.4633	7.5383	7.6141	7.6909

pentru $h = 0.1$ şi $h = 0.2$.

Capitolul 6

Rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale

Metodele cunoscute de rezolvare aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale se pot împărţi în două categorii: *metode discrete* şi *metode globale*.

Metodele discrete de rezolvare numerică a ecuaţiilor diferenţiale furnizează valori aproximative ale soluţiei în anumite puncte discrete date apriori, de obicei echidistante, ale variabilei independente. Dacă se cere valoarea aproximativă a soluţiei într-un punct ce nu s-a dat dinainte, este necesară reaplicarea metodei sau interpolarea valorilor cunoscute apropiate.

Metodele globale care conduc la determinarea unei funcţii continue ce aproximează soluţia pe un interval, elimină dezavantajele metodelor discrete. Soluţiile aproximative globale sunt astfel determinate încât să aibă calităţi asemănătoare cu cele ale soluţiei exacte.

Unele dintre acestea au ca bază tehnica dezvoltării în serie Taylor, altele se bazează pe ideea de a căuta soluţia aproximativă sub forma unei sume finite sau infinite de polinoame algebrice, de polinoame trigonometrice, exponenţiale, etc.

Un număr mare de lucrări abordează problema determinării unor soluţii aproximative globale care să fie funcţii *spline*, construite în mod convenabil.

Evident, între metodele discrete şi metodele globale există o strânsă legătură.

Ideea rezolvării aproximative a problemei cu condiţii iniţiale:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{6.1}$$

unde $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, prin metode de tip Runge-Kutta aparţine lui C.

Runge, care a dat în anul 1895 procedeul ce-i poartă numele, având ordinul de exactitate egal cu trei.

Pentru a găsi soluţia y^* care aproximează soluţia exactă $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, se aplică funcţiei y formula lui Taylor într-un punct $x \in [a, b]$.

Avem

$$y(x) = \tag{6.2}$$

$$= y(x_0) + \sum_{i=1}^{3} \frac{(x-x_0)^i}{i!} y^{(i)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^4}{4!} y^{(4)}(x_0 + \theta(x-x_0)), x_0 \in (a, b), 0 < \theta < 1$$

unde $y^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$ se calculează din ecuaţia diferenţială (6.1). Astfel, derivând succesiv ambii membri ai ecuaţiei (6.1), se obţine

$$y' = f,\ y'' = f'_x + y'f'_y,\ y''' = f''_{x^2} + 2f''_{xy}y' + f''_{y^2}y'^2 + f'_y y'',$$

$$y^{(4)} = f'''_{x^3} + 3f''_{x^2y}y' + 3f'''_{xy^2}y'^2 + f'''_{y^3}y'^3 + 3f''_{y^2}y'y'' + 3f''_{xy}y'' + f'_y y'''$$

Calculul acestor coeficienţi este în general foarte dificil, iar în cazul în care funcţia f este complicată, această metodă este practic inutilizabilă.

Runge propune o altă modalitate de determinare a acestor coeficienţi, care simplifică în mare măsură calculele şi anume, valoarea aproximativă a soluţiei exacte în punctul x să fie calculată cu ajutorul formulei:

$$y^*(x) = y(x_0) + \frac{h}{6}\left[k_1(x) + 4k_2(x) + k_4(x)\right] \tag{6.3}$$

unde

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f(x_0 + h, y_0 + hk_1)$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3)$$

iar $h = x - x_0$.

Are loc

Teorema 6.1 *Primii patru termeni din dezvoltarea soluţiei aproximative y^* din* (6.3)*, după puterile lui h, coincid cu primii patru termeni din formula* (6.2)*.*

Procedeul lui Runge (6.3) are ordinul de exactitate trei şi necesită patru substituţii (numărul valorilor care se calculează pentru funcţia f) în ecuaţia diferenţială dată.

Runge a mai dat un procedeu de ordinul patru de exactitate care necesită patru substituţii în ecuaţia diferenţială.

Kutta a arătat că pentru a obţine procedee de ordinele al doilea, al treilea şi al patrulea de exactitate sunt necesare respectiv două, trei şi patru substituţii în ecuaţia diferenţială dată.

Pentru obţinerea de procedee de un ordin q de exactitate, pentru $q > 4$ sunt necesare mai mult de q substituţii în ecuaţia diferenţială.

A. Huta a dat procedee de ordinul 6 de exactitate cu 8 substituţii în ecuaţia diferenţială.

Generalizând proprietatea care intervine în procedeul lui Runge-Kutta, D.V. Ionescu [13], în anul 1954, a indicat o metodă care permite obţinerea de procedee de orice ordin de exactitate dorit, folosind formulele de cuadratură, alese în mod convenabil. Aceste procedee necesită însă mai multe substituţii în ecuaţia diferenţială decât procedeele amintite mai sus. Astfel pentru obţinerea unui procedeu de ordinul patru de exactitate, prin metoda indicată de D.V. Ionescu, trebuie să se calculeze şapte valori ale funcţiei f.

E. Fehlberg obţine în anii 1958-1960 procedee de tip Runge-Kutta de ordin înalt de exactitate folosind puţine substituţii. Astfel, transformând ecuaţia diferenţială dată, se deduc procedee de tip Runge-Kutta de ordinul şase de exactitate care necesită doar trei substituţii în ecuaţia diferenţială transformată. Aceste rezultate au fost extinse şi la ecuaţii diferenţiale de ordin superior.

A. Coţiu [9], urmând metoda lui Runge, stabileşte procedee de ordin înalt de exactitate de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi şi superior, a sistemelor de ecuaţii diferenţiale, care necesită un număr foarte mic de substituţii în ecuaţia diferenţială transformată. De exemplu, pentru un procedeu de ordinul şapte de exactitate sunt necesare numai două substituţii în ecuaţia diferenţială. In acest sens s-au dat două generalizări ale transformării lui E. Fehlberg, ceea ce permite transformarea în mod convenabil a ecuaţiei diferenţiale date.

Rezolvarea numerică a problemei (6.1), constă în determinarea unui şir de valori aproximative y_i^*, $i = 1, 2, \ldots$, ale valorilor exacte y_i ale soluţiei y, plecând de la o valoare iniţială y_0 cunoscută. Diferenţa dintre valoarea adevărată şi valoarea aproximativă reprezintă *eroarea totală* pe pasul de calcul în care se include eroarea de aproximare, datorată metodei folosite, eroarea de rotunjire, datorită limitei de cifre semnificative cu care lucrează calculatorul şi eroarea de propagare, care apare datorită erorii din paşii anteriori. De aceea prezintă un interes deosebit studiul erorii unei metode de aproximare.

In concluzie rezultă că metodele Runge-Kutta prezintă o mare aplicabilitate la rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale, integrale şi integro-diferenţiale, şi se pare că sunt superioare altor metode de rezolvare numerică mai ales din următoarele motive:

– nu necesită valori suplimentare de pornire (sunt metode cu autopornire), adică pentru calculul unei noi aproximante este suficientă cunoaşterea soluţiei într-un singur punct anterior;

– pasul de integrare h poate fi ales în mod convenabil, la nevoie el putând fi schimbat pe parcursul procedeului de calcul;

– aceste metode produc o aproximaţie globală, netedă, a soluţiei exacte şi a derivatelor acestora;

– sunt de cele mai multe ori stabile, prin urmare convergente.

Aplicarea metodelor de tip Runge-Kutta conduce întotdeauna la rezolvarea unui sistem algebric, în general, neliniar, şi dificultatea rezolvării acestui sistem stabileşte de cele mai multe ori dacă metoda este avantajoasă sau nu din punct de vedere practic. Pentru fiecare aproximantă este necesară evaluarea funcţiei din membrul al doilea al ecuaţiei în mai multe puncte, ceea ce conduce la o mărire a timpului de calcul, fapt ce constituie uneori un dezavantaj al acestor metode.

6.1 Procedee Runge - Kutta pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul I

Fie următoarea problemă cu condiţii iniţiale

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(a) = y_0 \tag{6.4}$$

unde $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$ este o funcţie care îndeplineşte condiţiile ce asigură existenţa şi unicitatea soluţiei $y : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Considerăm nodurile $x_j = a + jh$, $h = \dfrac{b-a}{m}$, $j = \overline{0, m}$, în intervalul $[a, b]$.

Fie procedeul de aproximare cu un pas

$$y^*_{j+1} = y^*_j + h\widehat{\phi}(x_j, y^*_j, h), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{6.5}$$

unde

$$\widehat{\phi}(x_j, y_j, h) = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{h^i}{(i+1)!} D^i f(x_j, y_j) \tag{6.6}$$

cu

$$D^i f(x_j, y_j) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x_j, y_j)$$

Acest procedeu este potrivit pentru aplicaţii numai dacă expresiile derivatelor $D^i f(x_j, y_j)$ se pot calcula uşor, ceea ce se întâmplă foarte rar. Avantajul acestui procedeu cunoscut sub numele de "procedeul lui Taylor" constă în faptul că dacă f este derivabilă în mod continuu de un număr suficient de ori, se poate obţine un ordin de convergenţă q dorit.

Ideea lui Runge constă în înlocuirea derivatelor $D^i f(x_j, y_j)$ cu combinaţii liniare ale valorilor lui f luate în r puncte intermediare din intervalul dintre punctele (x_j, y_j) şi (x_{j+1}, y_{j+1}), evitându-se astfel calculele complicate ale derivatelor.

Astfel se ia

$$\phi_r(x, y; h) = \sum_{i=1}^{r} C_i k_i \tag{6.7}$$

unde

$$k_i = f(x + \alpha_i h, y + h \sum_{j=1}^{r-1} \beta_{ij} k_j), \quad i = 1, \ldots, r \tag{6.8}$$

şi

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_{11} = 0, \quad \beta_{ij} = 0, \text{ pentru } i \leq j$$

Parametrii α_i ($\alpha_i \in [0, 1]$), β_{ij}, C_i ($C_i \geq 0$) vor fi astfel determinaţi încât pentru $f \in C^q(G)$ să aibă loc relaţia

$$\phi_r(x, y; h) - \widehat{\phi}(x, y; h) = 0(h^q) \tag{6.9}$$

unde

$$G := \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \ y \in \mathbb{R}^n\}$$

Prin urmare se obţine următorul procedeu explicit Runge-Kutta cu r substituţii

$$y_0^* = y_0, \quad y_{j+1}^* = y_j^* + h\phi_r(x_j, y_j^*; h), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

care are ordinul de convergenţă q (ordinul de exactitate).

Din (6.9), prin egalarea părţii tayloriene a lui ϕ_r şi $\widehat{\phi}$, se obţine un sistem neliniar (şi în general nedeterminat) de ecuaţii pentru determinarea parametrilor α_i, β_{ij}, C_i.

Un procedeu Runge-Kutta este caracterizat (după Butcher [5]) de următoarea schemă:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\alpha_2 & \beta_{21} & & & & \\
\alpha_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
\alpha_r & \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{r,r-1} & \\
\hline
 & C_1 & C_2 & \dots & C_{r-1} & C_r
\end{array} \tag{6.10}$$

Un astfel de procedeu este un *procedeu Runge-Kutta explicit*. Dacă $\beta_{ij} \neq 0$ pentru $i \leq j$ atunci procedeul este *implicit*. Ne vom ocupa în cele ce urmează numai de procedee explicite.

Pentru toate procedeele Runge-Kutta au loc relaţiile

$$\sum_{i=1}^{r} C_i = 1 \quad \text{şi} \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{r-1} \beta_{ij}, \quad i = 2, 3, \dots, r \tag{6.11}$$

In continuare vom considera câteva cazuri speciale de procedee Runge-Kutta.

Vom considera perechea ordonată (q, r) unde q este ordinul procedeului iar r numărul de substituţii. Astfel un procedeu Runge-Kutta va fi notat prin (q, r)-procedeu.

1. Procedeul (1,1) este cel al lui Euler:

$$y_0^* = y_0, \quad y_{j+1}^* = y_j^* + hf(x_j, y_j^*), \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

care pentru $f \in C^1(G)$ are ordinul $q = 1$.

2. Există o infinitate de (2,2)-procedee de forma

$$y_{j+1}^* = y_j^* + h[(1 - \frac{1}{2\alpha_2})f(x_j, y_j^*) + \frac{1}{2\alpha_2} f(x_j + \alpha_2 h, y_j^* + \alpha_2 hf(x_j, y_j^*))], y_j^* = y_j$$

Pentru fiecare alegere a parametrului α_2 se obţine un alt (2,2)-procedeu.

Astfel pentru $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$ se obţine procedeul lui *Euler modificat* ($\beta_{21} = \dfrac{1}{2}$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$), pentru $\alpha_2 = \dfrac{2}{3}$ *procedeul lui Heun* ($\beta_{21} = \dfrac{2}{3}$, $C_1 = \dfrac{1}{4}$,

$C_2 = \frac{3}{4}$) şi pentru $\alpha_2 = 1$ se obţine procedeul lui *Euler îmbunătăţit* ($\beta_{21} = 1$, $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$).
Toate aceste procedee au domeniul de stabilitate mărginit.

3. (3,3)-procedee.

Aceste procedee se obţin procedând ca în cazul general.

Pentru $f \in C^3[G]$, dezvoltând în serie Taylor mărimile k_i, se obţin relaţiile

$$k_1 = f$$

$$k_2 = f + h(\alpha_2 f_x + \beta_{21} f f_y) + h^2\left(\frac{\alpha_2^2}{2} f_{xx} + \alpha_2\beta_{21} f f_{xy} + \frac{1}{2}\beta_{21}^2 f^2 f_{yy}\right) + O(h^3)$$

$$\begin{aligned} k_3 = {} & f + h(\alpha_3 f_x + \beta_{31} f f_y + \beta_{32} f f_y) + h^2\left[\frac{\alpha_3^2}{2} f_{xx} + 3(\beta_{31} + \beta_{32}) f f_{xy} + \right.\\ & \left. + \frac{1}{2}(\beta_{31} + \beta_{32})^2 f^2 + \beta_{32}(\alpha_2 f_x + \beta_{21} f f_y) f_y\right] + O(h^3) \end{aligned}$$

şi

$$\widehat{\phi} = f + \frac{h}{2}(f_x + f f_y) + \frac{h^2}{6}(f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y f_x + f f_y^2) + O(h^3)$$

Din condiţia $\phi_3(x, y; h) - \widehat{\phi}(x, y; h) = O(h^3)$ rezultă următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{array}{rrl rrl} C_1 + C_2 + & C_3 & = 1, & \beta_{21} C_2 + & (\beta_{31} + \beta_{32}) C_3 & = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 \beta_{31} C_2 + & \alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) C_3 & = \frac{1}{3}, & & \alpha_2 \beta_{32} C_3 & = \frac{1}{6} \\ \alpha_2 C_2 + & \alpha_3 C_3 & = \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\alpha_2^2 C_2 + & \frac{1}{2}\alpha_3^2 C_3 & = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}\beta_{21}^2 C_2 + & \frac{1}{2}(\beta_{31} + \beta_{32})^2 C_3 & = \frac{1}{6}, & & \beta_{21}\beta_{32} C_3 & = \frac{1}{6} \end{array} \qquad (6.12)$$

De aici rezultă imediat relaţiile $\alpha_2 = \beta_{21}$ şi $\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}$. Prin urmare avem 4 ecuaţii cu 6 necunoscute, ceea ce înseamnă că se poate obţine o dublă infinitate de (3,3)-procedee.

Pentru următoarea schemă a parametrilor

$$\begin{array}{c|ccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
1 & -1 & 2 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

se obţine clasicul procedeu

$$\begin{aligned}
&k_1 = f(x,y) \\
&k_2 = f(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_1) \qquad (6.13)\\
&k_3 = f(x+h, y-hk_1+2hk_2)
\end{aligned}$$

$$y^*_{j+1} = y^*_j + \frac{h}{6}[k_1(x_j,y^*_j) + 4k_2(x_j,y^*_j) + k_3(x_j,y^*_j)]$$

Următoarea schemă a parametrilor ne conduce la procedeul lui Heun

$$\begin{array}{c|ccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}$$

adică

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x,y) \\
k_2 &= f(x+\frac{1}{3}h, y+\frac{h}{3}k_1) \\
k_3 &= f(x+\frac{2}{3}h, y+\frac{2h}{3}k_2) \qquad (6.14)\\
y^*_{j+1} &= y^*_j + \frac{h}{4}(k_1+3k_3)
\end{aligned}$$

Toate procedeele Runge-Kutta (3,3) au domeniul de stabilitate real $[-2.5, 0]$.

4. (4,4)-procedee.

Dacă $f \in C^4[G]$, pentru determinarea parametrilor α_i, β_{ij}, C_i, din condiţia

$$\phi_4(x, y; h) - \phi(x, y; h) = O(h^4)$$

şi ţinând seama de condiţiile (6.11), se obţine următorul sistem neliniar de 8 ecuaţii cu 10 necunoscute:

$$\begin{array}{rrcl}
C_1 + C_2 + & C_3 + C_4 & = & 1 \\
\alpha_2 C_2 + & \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4 & = & \frac{1}{2} \\
\alpha_2^2 C_2 + & \alpha_3^2 C_3 + \alpha_4^2 C_4 & = & \frac{1}{3} \\
\alpha_2^3 C_2 + & \alpha_3^3 C_3 + \alpha_4^3 C_4 & = & \frac{1}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\alpha_2 \beta_{32} C_3 + (\alpha_2 \beta_{42} + \alpha_3 \beta_{43}) C_4 = & \frac{1}{6} \\
\alpha_2 \alpha_3 \beta_{32} C_3 + (\alpha_2 \beta_{42} + \alpha_3 \beta_{43}) C_4 = & \frac{1}{8} \\
\alpha_2^2 \beta_{32} C_3 + (\alpha_2^2 \beta_{42} + \alpha_3^2 \beta_{43}) C_4 = & \frac{1}{12} \\
\alpha_2 \beta_{32} \beta_{43} C_4 = & \frac{1}{24}
\end{array}$$

Prin urmare avem două familii de procedee Runge-Kutta (4,4).

Amintim următoarele cazuri speciale.

a) Pentru $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$ se obţine cunoscutul procedeu clasic al lui Kutta de ordinul 4

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array} \tag{6.15}$$

Domeniul de stabilitate real al acestui procedeu este $(-2.785, 0)$.

b) Pentru $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_3 = \frac{2}{3}$ se obţine tot un procedeu clasic al lui Kutta cu următoarea schemă a parametrilor

$$
\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}
\tag{6.16}
$$

Domeniul de stabilitate al acestui procedeu este acelaşi cu al procedeului (6.15).

Procedeele Runge-Kutta, considerate până acum aveau ordinul de exactitate q egal cu numărul de substituţii r. Pentru obţinerea de procedee Runge-Kutta de un ordin q de exactitate $q \geq 5$ sunt necesare mai mult de q substituţii.

Astfel Kutta, Nyström, Luther, Butcher [5], Sarafyan, au obţinut (5,6)-procedee Runge-Kutta. Menţionăm câteva dintre aceste procedee.

a) Procedeul lui Kutta are următoarea schemă a parametrilor

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & \\
\frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & & & & \\
1 & \frac{9}{4} & \frac{-20}{4} & \frac{15}{4} & & & \\
\frac{3}{5} & \frac{-76}{100} & \frac{180}{100} & \frac{-52}{100} & \frac{8}{100} & & \\
\frac{4}{5} & \frac{-18}{75} & \frac{60}{75} & \frac{10}{75} & \frac{8}{75} & 0 & \\
\hline
 & \frac{17}{144} & 0 & \frac{100}{144} & \frac{2}{144} & \frac{-50}{144} & \frac{75}{144}
\end{array}
\tag{6.17}
$$

b) Procedeul lui Nyström are următoarea schemă a parametrilor

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & & \\
\frac{2}{5} & \frac{4}{15} & \frac{6}{25} & & & & \\
1 & \frac{1}{4} & -\frac{12}{4} & \frac{15}{4} & & & \\
\frac{2}{3} & \frac{6}{81} & \frac{90}{81} & -\frac{50}{81} & \frac{8}{81} & & \\
\frac{4}{5} & \frac{6}{75} & \frac{36}{75} & \frac{10}{75} & \frac{8}{75} & 0 & \\
\hline
 & \frac{23}{192} & 0 & \frac{125}{192} & 0 & -\frac{81}{192} & \frac{125}{192}
\end{array}
\tag{6.18}
$$

c) Procedeul lui Butcher

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & & & \\
\frac{3}{4} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & \frac{9}{16} & & \\
1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{8}{7} & \\
\hline
 & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90}
\end{array}
\tag{6.19}
$$

6.2 Delimitarea erorii în procedeele Runge-Kutta

Dintre delimitările erorii procedeelor Runge-Kutta amintim în primul rând pe cea dată de Bieberbach. Metoda sa constă în a dezvolta după puterile lui h, atât soluţia exactă y cât şi soluţia aproximativă y^*. Cu ajutorul unor majorări relative la funcţia f şi la derivatele sale parţiale în raport cu x şi y, se evaluează valoarea absolută a diferenţei $y - y^*$.

A. Coţiu urmând ideea lui L. Bieberbach a dat delimitări ale erorii procedeelor (6.14), (6.15), (6.16), (6.17), (6.17).

Fie problema (6.4) şi (x_0, y_0) un punct din domeniul

$$D := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$$

Presupunem că f şi derivatele sale parţiale $\dfrac{\partial^l f}{\partial x^i \partial y^j}$, $i + j = l$, sunt continue în domeniul D.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 6.2 *Dacă funcţia f şi derivatele sale parţiale satisfac în domeniul D, condiţiile*

$$|f(x, y)| \leq N, \quad \left|\frac{\partial^l f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \leq \frac{M}{N^{j-1}}, \quad i + j = l \tag{6.20}$$

unde N şi M sunt două numere pozitive astfel ca

$$aN \leq b, \quad aM \leq 1 \tag{6.21}$$

atunci în intervalul $|x - x_0| \leq a$, avem

a)

$$|y - y^*| < 1.371MN\frac{M^3 - 1}{M - 1}(x - x_0)^4 \tag{6.22}$$

pentru procedeul (6.14)*, în* (6.20) *luând* $0 < l \leq 3$*,*

b)

$$|y - y^*| < 5.37MN\frac{M^4 - 1}{M - 1}(x - x_0)^5 \tag{6.23}$$

pentru procedeul (6.15)*, în* (6.20) *se ia* $0 < l \leq 4$*,* *c)*

$$|y - y^*| < 34.71MN\frac{M^4 - 1}{M - 1}(x - x_0)^5 \tag{6.24}$$

pentru procedeul (6.16)*, iar în* (6.20) $0 < l \leq 4$,

d)

$$|y - y^*| < 6.320MN\frac{M^5 - 1}{M - 1}(x - x_0)^6 \tag{6.25}$$

pentru procedeul (6.17)*, în* (6.20) *se ia* $0 < l \leq 5$,

e)

$$|y - y^*| < 2659MN\frac{M^5 - 1}{M - 1}(x - x_0)^6 \tag{6.26}$$

pentru procedeul (6.18)*, în* (6.20) *se ia* $0 < l \leq 5$.

Exemplul 6.1 *Să se aproximeze soluţia următoarei ecuaţii diferenţiale*

$$y' = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y^2, \quad 1 \leq x \leq 2$$

cu condiţia iniţială $y(1) = 1$, $h = 0.2$, *folosind procedeul Runge-Kutta de ordinul patru* (6.15)

Soluţie. Soluţia exactă a problemei iniţiale de mai sus este $y(x) = \dfrac{x}{1 + \ln x}$. Aceasta se determină lansând comenzile

```
> ec:={diff(y(x), x)=(1/x)*y(x)-(1/x^2)(y(x))^2};
```

$$ec := \{\frac{d}{dx}y(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{(y(x))^2}{x^2}\}$$

```
> ci1:={y(1)=1}:
```

```
> se:=dsolve(ec union ci1, y(x));
```

$$se := y(x) = \frac{x}{ln(x) + 1}$$

Rezolvarea acestei probleme cu procedeul Runge-Kutta de ordinul 4, cu pasul $h = 0.2$ şi condiţia iniţială $y(1) = 1$ se face parcurgând etapele:

```
> s:=dsolve(ec union ci1, type=numeric, method=rkf45);
```

$$s := \mathbf{proc}(rkf45\_x)...\mathbf{end\ proc}$$

```
> y(1)=1:
  h:=0.2:
  for i from 1 to 5 do
  j:=y(1)+h*i:
  print(s(j)):
  od:
```

Soluţia problemei va fi afişată sub forma:

$$[x = 1.2, \quad y(x) = 1.01495151761608016]$$

$$[x = 1.4, \quad y(x) = 1.04753315455022244]$$

$$[x = 1.6, \quad y(x) = 1.08843171552513618]$$

$$[x = 1.8, \quad y(x) = 1.13365325320346533]$$

$$[x = 2.0, \quad y(x) = 1.18123176530316764]$$

Pentru a putea aprecia eroarea comisă în punctul $x = 1.6$ se lansează comenzile de mai jos.

```
> Digits:=10;
> eval(se, x=1.6)- s(1.6)[2];
```

$$y(1.6) - y(x) = 9.71 \cdot 10^{-7}$$

Aceasta înseamnă calculul diferenţei dintre valoarea soluţiei exacte în punctul $x = 1.6$ şi valoarea sa aproximativă calculată prin metoda Runge-Kutta de ordinul 4.

6.3 Formule Runge-Kutta-Fehlberg pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea

$$y'' = f(x, y, y'), \quad f : \mathbb{R}^3 \ni D \to \mathbb{R}, \tag{6.27}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

unde se presupune că f este continuă pe D şi satisface în D condiţiile ce asigură existenţa şi unicitatea soluţiei $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ a problemei.

In locul ecuaţiei diferenţiale (6.27) se foloseşte ecuaţia diferenţială

$$z'' = \varphi(x, y, z') \tag{6.29}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} z(x_0) &= y_0 = z_0 \\ z'(x_0) &= z'_0 = 0 \end{aligned}$$

obţinută prin transformarea

$$y(x) = z(x) + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y''_0 + \ldots + \frac{(x-x_0)^{m+2}}{(m+2)!}y_0^{(m+2)} + \tag{6.30}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\Bigg|_0 (x - x_0)(z - z_0), \quad m \geq 1$$

Funcţia z satisface în plus condiţiile

$$z_0^{(i)} = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, m+2, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)\Bigg|_0 = 0 \tag{6.31}$$

Transformarea (6.30) permite obţinerea unor $(m+5, 3)-$ procedee Runge-Kutta atât pentru soluţia aproximativă z^* cât şi pentru derivata de ordinul întâi a acesteia.

Se foloseşte următoarea schemă

$$z^* = z_0 + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3, \quad z^{*'} = \frac{1}{h}(c'_1k_1 + c'_2k_2 + c'_3k_3)$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{h^2}{2}\varphi(x_0 + \alpha_1 h, z_0, z'_0) \\ k_2 &= \frac{h^2}{2}\varphi(x_0 + \alpha_2 h, z_0 + \beta_0 k_1, z'_0 + \beta_1\frac{k_1}{h}) \\ k_3 &= \frac{h^2}{2}\varphi(x_0 + \alpha_3 h, z_0 + \gamma_0 k_1 + \delta_0 k_2, z'_0 + \gamma_1\tfrac{k_1}{h} + \delta_1\tfrac{k_2}{h}) \end{aligned} \tag{6.32}$$

Se pot stabili $(m+5, 2)-$ procedee $(m \geq 1)$, cu ajutorul unei transformări de tipul (6.30).

Pentru a determina o astfel de transformare se completează condiţiile (6.31) cu condiţiile

$$z^{(m+3)}(x_0) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z'}\right)\Bigg|_0 = 0$$

Aceste condiţii conduc la relaţiile

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\Big|_0 = 0, \ldots, \left(\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\right)\Big|_0 = 0$$

Legătura între funcţiile z şi y este dată de transformarea

$$y(x) = z(x) + (x-x_0)y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0'' + \ldots + \frac{(x-x_0)^{m+3}}{(m+3)!}y_0^{(m+3)} +$$

$$+ A(x-x_0)(z-z_0) + B(x-x_0)^2(z-z_0)$$

unde constantele A şi B sunt date de:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\Big|_0 \\ B &= \frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}\right)\Big|_0 + \frac{1}{2\cdot 2^{\,2}}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\Big|_0^2 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Astfel, integrarea ecuaţiei diferenţiale (6.27) s-a redus la integrarea ecuaţiei diferenţiale (6.29) unde funcţia φ este dată de relaţia

$$\varphi(x,z,z') = \frac{1}{1 + A(x-x_0) + B(x-x_0)^2}\Big\{f(x,y,y') - y_0'' - y_0'''(x-x_0) - \ldots -$$

$$-\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}y_0^{(m+3)} - 2B(z-z_0) - 2[A + B(x-x_0)]z'\Big\} \tag{6.34}$$

iar A şi B sunt date de (6.33).

Pentru calculul numeric al soluţiei z a ecuaţiei diferenţiale (6.29) şi al derivatei sale z', pe nodul $x = x_0 + h$, se folosesc următoarele formule de tip Runge-Kutta

$$\begin{aligned} z^*(x) &= z_0 + c_1k_1(x) + c_2k_2(x) \\ {z^*}'(x) &= z_0' + \frac{1}{h}(c_1'k_1(x) + c_2'k_2(x)) \end{aligned} \tag{6.35}$$

cu

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{h^2}{2}\varphi(x_0 + \alpha_1 h, z_0, z_0') \\ k_2 &= \frac{h^2}{2}\varphi\left(x_0 + \alpha_2 h, z_0 + \beta_0 k_1, z_0' + \beta_1\frac{k_1}{h}\right) \end{aligned}$$

Dezvoltând în serie Taylor într-o vecinătate a nodului x_0, atât soluţia exactă z şi derivata ei z' cât şi soluţia aproximativă z^* şi derivata sa $z^{*'}$ şi ţinând seama că ordinul de exactitate este $m+5$, se obţine un sistem algebric de 6 ecuaţii cu 8 necunoscute.

Prin urmare există o familie de $(m+5,2)-$ procedee Runge - Kutta - Fehlberg.

Dăm câteva exemple de astfel de procedee:

a) $m = 1$, $\alpha_2 = 1$ se obţine procedeul

$$\begin{aligned} z^*(x) &= z_0 + \frac{27}{80}k_1(x) \\ z^{*'}(x) &= z'_0 + \frac{1}{h}\left(\frac{81}{80}k_1(x) + \frac{1}{5}k_2(x)\right) \end{aligned} \tag{6.36}$$

cu

$$k_1 = \frac{h^2}{2}\varphi\left(x_0 + \frac{2}{3}h, z_0, z'_0\right)$$
$$k_2 = \frac{h^2}{2}\varphi\left(x_0 + h, z_0 + \frac{9}{16}k_1, z'_0\right)$$

b) $m = 2$, $\alpha_2 = 1$ se obţine procedeul

$$\begin{aligned} z^*(x) &= z_0 + \frac{7^4}{3\cdot 5^4}k_1(x) \\ z^{*'}(x) &= z'_0 + \frac{1}{h}\left(\frac{7^5}{6\cdot 5^5}k_1(x) + \frac{1}{6}k_2(x)\right) \end{aligned} \tag{6.37}$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{h^2}{2}\varphi\left(x_0 + \frac{5}{7}h, z_0, z'_0\right) \\ k_2 &= \frac{h^2}{2}\varphi\left(x_0 + h, z_0 + \frac{4\cdot 7^3}{5^5}k_1, z'_0\right) \end{aligned}$$

Pentru integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale (6.27) cu condiţiile iniţiale (6.28) s-au dat procedee clasice Runge-Kutta, de ordinul 4 de exactitate pentru soluţia y şi de ordinul 5 de exactitate pentru y'.

Metoda dată de D.V. Ionescu se poate aplica şi pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul 2, permiţând construirea de procedee Runge-Kutta de ordin oarecare de exactitate, dar aplicarea lor necesită calcule laborioase.

Procedeele (6.35) sunt avantajoase pentru că folosesc puţine substituţii şi au acelaşi ordin de exactitate atât pentru soluţie cât şi pentru derivata sa.

6.4 Probleme propuse

I. Să se aproximeze soluţia următoarelor probleme iniţiale, folosind metoda Runge Kutta de ordinul patru:

1. $y' = y - x^2 + 1, \;\; 0 \le x \le 2, \;\; y(0) = 0.5$, cu pasul $h = 0.2$
2. $y' = y + \dfrac{1}{x}y - \dfrac{1}{x^2}y^2, \;\; 1 \le x \le 3, \;\; y(1) = 0$, cu pasul $h = 0.4$
3. $y' = -(y+1)(y+3), \;\; 0 \le x \le 2, \;\; y(0) = -2$, cu pasul $h = 0.4$
4. $y' = -5y + 5x^2 + 2x, \;\; 0 \le x \le 1, \;\; y(0) = \dfrac{1}{3}$, cu pasul $h = 0.2$
5. $y' = xe^{3x} - 2y, \;\; 0 \le x \le 1, \;\; y(0) = 0$, cu pasul $h = 0.1$
6. $y' = 1 + (x-y)^2, \;\; 2 \le x \le 3, \;\; y(2) = 1$, cu pasul $h = 0.1$
7. $y' = 1 + \dfrac{1}{x}y, \;\; 1 \le x \le 2, \;\; y(1) = 2$, cu pasul $h = 0.25$
8. $y' = \cos 2x + \sin 3x, \;\; 0 \le x \le 1, \;\; y(0) = 1$, cu pasul $h = 0.25$

II. Să se aproximeze soluţia următoarelor probleme iniţiale, folosind procedeul lui Fehlberg (6.36) şi (6.37):

1. $y'' = 2y' - y + x, \;\; y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' - 2y' + y = xe^x - x, \;\; y(0) = y'(0) = 0$
3. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x, \;\; y(1) = 1, \;\; y'(1) = 0$

Capitolul 7

Maple

7.1 Introducere în Maple

Aplicaţia **Maple** pune la dispoziţia utilizatorilor un mediu de calcul matematic interactiv relativ uşor de folosit şi bine pus la punct, ce excelează în calculul matematic simbolic şi numeric. **Maple** dispune de un număr foarte mare de funcţii predefinite (aproximativ 3000) cu ajutorul cărora poate executa o serie de task-uri matematice (probleme de algebră, geometrie, analiză matematică, analiză numerică, statistică, fizică, tehnică, etc.). Aplicaţia conţine, de asemenea, facilităţi pentru grafica 2D şi 3D şi pentru generarea animaţiei. **Maple** include şi un limbaj de programere propriu, procedural, cu o sintaxă specifică programării structurate. Pe baza acestuia, utilizatorul are posibilitatea de a elabora programe proprii, de a defini noi funcţii. La nivel de date, Maple poate fi conectat cu alte limbaje de programere (**C**, **Excel**).

Lansarea în execuţie a aplicaţiei **Maple** se efectuează prin comenzi specifice sistemului de operare pe care este instalat. Vom considera în continuare sistemul de operare **Windows**, caz în care lansarea se face astfel:
- prin activarea icon-ului **Maple**
- prin selectarea aplicaţiei **Maple** din directorul în care a fost instalată.

După lansarea în execuţie, sistemul va afişa ”mediul de lucru”, care cuprinde:
- **bara de titlu** ce conţine numele aplicaţiei, numele fişierului (implicit este ”Untitled(1)”-[Server1]);
- **bara de meniuri**;
- **zona de lucru** în care se vor introduce comenzi;

- **paleta de butoane** care include diferite tipuri de componente predefinite (expresii, simboluri, operatori, etc.).

Aplicaţia **Maple10** dispune de două moduri de lucru: *Document Mode* şi *Worksheet Mode*. Implicit, aplicaţia **Maple** deschide un fişier în modul de vizualizare *Document Mode* caracterizat prin:
- spaţiul de lucru care este o foaie albă, "blank page";
- nu se afişează prompterul specific zonei de introducere a datelor;
- nu se afişează mesaje de eroare sau de avertisment;
- formulele matematice sunt introduse în modul standard $2D$, acest mod afişează notaţiile matematice în forma întâlnită în materialele de specialitate, de exemplu $\int sin(x)dx$;
- nu este necesar caracterul ";" la finalul unei comenzi;
- evaluarea unei expresii se realizează tastând "ENTER", rezultatul afişându-se în acest caz pe linia următoare;
- se pot combina formule matematice şi text în aceeaşi linie de comandă, comutarea între modul standard $2D\ Math$ şi modul $Text$ realizându-se prin intermediul tastei *F5*;
- combinaţia simultană de taste "CTRL" şi "=" determină evaluarea unei expresii matematice şi afişarea rezultatului în aceeaşi linie.

Modul de vizualizare *Worksheet Mode* furnizează un spaţiu de lucru în care este activ prompterul " $>$ ", după care se vor introduce instrucţiunile;
- instrucţiunile se vor insera în modul $2D\ Math$ sau $1D\ Math$ (*Maple Input*), de exemplu $\int sin(x)dx$ se va introduce sub forma $(int(sin(x), x))$;
- comutarea între modul $1D\ Math$ şi $2D\ Math$ se realizează tastând *F5*;
- se pot introduce zone de text prin intermediul comenzii *Insert/Text*;
- toate instrucţiunile se termină cu caracterul ";" sau ":";
- evaluarea unei expresii şi afişarea rezultatului pe linia următoare se generează tastând "ENTER";
- scrierea unei comenzi pe mai multe rânduri se obţine selectând simultan combinaţia de taste "SHIFT" şi "ENTER".

Pentru a activa un Worksheet se accesează meniul *File/New/Worksheet Mode*.

Ambele moduri de vizualizare prezintă avantaje, comutarea între ele efectuându-se foarte rapid, astfel: trecerea din *Worksheet Mode* în *Document Mode* se determină prin accesarea meniului *Format/Create Document Block* iar trecerea din *Document Mode* în *Worksheet Mode* se face prin activarea butonului Fiecare mod de vizualizare conţine *zona de output* în care se afişează rezultatele comenzilor executate.

Introducerea expresiilor şi a formulelor în *2D-Math* cu ajutorul paletei de butoane:
- se activează paleta de butoane din meniul *View/Palettes/Arrange Palettes*;
- se selectează cu clic de mouse componenta dorită (expresia, simbolul, operatorul, etc.), iar apoi cu clic stânga apăsat se glisează în foaia de calcul selecţia.

Reguli principale care trebuie respectate la editarea unui document în modul *Worksheet Mode*

1. Oricare intrare se termină cu caracterele ";" sau ":". Caracterul ";" implică afişarea rezultatului pe linia următoare (în zona de *output*). In cazul caracterului ":" rezultatul nu este afişat, el fiind folosit atunci când este vorba de rezultate intermediare. In absenţa celor două caractere, se presupune că linia de comandă se continuă pe linia următoare a documentului.

2. Literele mari şi mici sunt interpretate în **Maple** ca distincte.

3. Nu sunt admise spaţii libere în cadrul semnului de asignare ":=".

4. Parantezele rotunde ( ) sunt utilizate pentru indicarea argumentelor unei funcţii.

5. Parantezele drepte [ ] sunt utilizate pentru indicarea indicilor de liste, tablouri, vectori, matrice.

6. Acoladele { } permit definirea unei structuri de tip mulţime.

7. Dacă o funcţie apelată într-o comandă se află într-o bibliotecă **Maple**, atunci ea trebuie în prealabil încărcată cu comanda **with(nume pachet)**.

8. Dacă se doreşte scrierea unei comenzi pe mai multe rânduri, atunci trecerea forţată la rând nou se face tastând simultan combinaţia de taste **SHIFT** şi **ENTER**. Aceast mod de scriere este utilizat cel mai frecvent în cazul elaborării procedurilor.

Simboluri de bază pentru aritmetica **Maple**

Operaţia	Simbolul **Maple**	Exemplu
Adunare	$+$	$3+5$
Scădere	$-$	$9-3$
Inmulţire	$*$	$2*x$
Impărţire	$/$	$7/3$
Ridicare la putere	** sau ^	$5**6$ sau 5^6
Valoarea absolută	$abs(x)$	$abs(-5)$
Factorial	!	9!

7.1.1 Expresiile în Maple

Expresiile în **Maple** reprezintă secvenţe formate din *operanzi* (variabile, constante, funcţii) şi operatori ($+$, $-$,$*$, $/$,). Ordinea efectuării operaţiilor într-o expresie este cea cunosută: ridicarea la putere, înmulţirea, împărţirea, adunarea şi scăderea. Pentru a fixa ordinea efectuării operaţiilor se recomandă folosirea parantezelor rotunde ( ), parantezele drepte şi acoladele având semnificaţii predefinite în sintaxa aplicaţiei **Maple**.
Exemple:
*Scrierea în **Maple*** *Expresia*

```
> 3*x^2*y-5*z^3;
```

$$3x^2y-5z^3$$

```
> 2^{x+1}-3*y+exp(x);
```

$$2^{x+1}-3ye^x$$

```
> (a+b+c)/(2*a-b+c^2);
```

$$\frac{a+b+c}{2a-b+c^2}$$

7.1.2 Mulţimi

Mulţimea este o structură de date formată dintr-o colecţie neordonată de expresii. Elementele sale sunt incluse între acolade şi fiecare element apare o singură dată. Forma generală a unei mulţimi este:

$$\{expr1, expr2, ..., exprn\}$$

Mulţimea *vidă* se notează prin { }. Operaţia de selectare a unor elemente dintr-o mulţime se realizează cu ajutorul operatorului [ ] sau cu funcţia

op(m), unde m este o structură de tip mulţime. Numărul elementelor unei mulţimi este indicat de funcţia **nops**(m), unde m este o structură de tip mulţime.

Operatorii **Maple** pentru operaţiile cu mulţimi sunt specificaţi în tabelul de mai jos.

Operaţia matematică	Notaţia **Maple**
Reuniunea	**union**
Intersecţia	**intersect**
Diferenţa	**minus**
Apartenenţa la o mulţime	**member**

Inserarea unui element într-o mulţime se efectuează cu operatorul **union** iar eliminarea unui element dintr-o mulţime se realizează cu operatorul **minus**.

Exemple:

*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> m:={x, y, z, t};
```

$$m := \{z,\ x,\ t,\ y\}$$

```
> nops(m);
```

$$4$$

```
> m1:={op(3,m)};
```

$$m1 := \{t\}$$

```
> m2:={u};
```

$$m2 := \{u\}$$

```
> m3:=m union m2;
```

$$m3 := \{z,\ x,\ t,\ y,\ u\}$$

```
> m4:=m minus m1;
```

$$m4 := \{z,\ x,\ y\}$$

```
> m5:=m interset m1;
```

$$m5 := \{t\}$$

7.1.3 Variabile Maple

Pentru ca un şir de caractere să devină variabilă se foloseşte comanda ":="

$$variabila := \text{expresie};$$

aceasta atribuind o valoare variabilei.

In **Maple** există următoarele tipuri de variabile:
a. *variabile legate* - care au primit o valoare în urma unei atribuiri, acestea folosindu-se pentru a nota expresiile;
Exemple:

*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> a:=x^2+4*y^2+1;
```

$$a := x^2 + 4y^2 + 1$$

b. *variabile libere* - utilizate în rolul unor necunosute sau nedeterminate;
c. *variabile globale* - care au valori iniţiale predefinite, dar care pot fi modificate de către utilizator sau de către sistem pe parcursul anumitor operaţii. Cele mai uzuale variabile globale sunt:

Digits	numărul de cifre zecimale
libname	locaţia bibliotecii standard
Order	Ordinul de trunchiere a unei serii
constants	constantele curente definite
lasterror	ultimul mesaj **Error** întâlnit

In **Maple** nu este necesar a declara tipul variabilelor utilizate.

7.1.4 Constante numerice în Maple

Constantele numerice în **Maple** sunt de trei tipuri: *întregi*, *raţionale* şi constante *în virgulă mobilă*.

Constantele întregi sunt şiruri de cifre zecimale (0..9), eventual precedate de semnul + sau -, reprezentînd numere întregi. Numărul maxim de cifre permise nu este mai mare în general de 500000.

Constantele raţionale sunt reprezentate sub forma $\frac{m}{n}$, unde m şi n sunt constante întregi.

Exemple:

Scrierea în ***Maple***	*Rezultatul*
`> 7/9;`	$\frac{7}{9}$
`> -5/10;`	$-\frac{1}{2}$

Constantele în virgulă mobilă sunt reprezentate prin următoarele câmpuri: partea întreagă, punctul zecimal, partea fracţionară, constanta e sau E şi un exponent.

Exemple:

Scrierea în ***Maple***	*Rezultatul*
`> 234.78e-11;`	$2.3478 \cdot 10^{-9}$
`> 3245E21`	$3.245 \cdot 10^{21}$

Expresiile aritmetice cu operanzi constante întregi sau raţionale sunt evaluate exact în **Maple**, rezultatul obţinut fiind o constantă raţională sau o constantă întreagă.

Exemple:

Scrierea în ***Maple***	*Rezultatul*
`> 1/6+ 7/5;`	$\frac{47}{30}$
`> 1/10+9/10;`	1

Dacă o expresie conţine constante întregi, raţionale şi în virgulă mobilă, atunci constantele întregi şi raţionale sunt convertite în virgulă mobilă, rezultatul expresiei fiind în acest caz o constantă în virgulă mobilă.

Exemplu:

*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> 41+2/5+3.4;
```

44.80000000

In scopul evaluării unei expresii în virgulă mobilă, chiar dacă toţi operanzii din expresie sunt întregi sau raţionali, se apelează comanda

evalf*(expresie, n);*

unde *expresie* reprezintă expresia ce trebuie evaluată, iar n este un parametru opţional, care specifică numărul de cifre semnificative. Numărul de cifre semnificative poate fi controlat în **Maple** cu ajutorul variabilei globale **Digits** a cărei valoare implicită este 10.

Exemple:

*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
>evalf(Pi,7);
```

3.141593

```
> evalf(e, 10);
```

2.718281828

```
> evalf(1/6, 5);
```

0.16667

```
> evalf(ln(2)+log10(3));
```

1.70268436

```
> evalf(3*sin(2)+2*sin(3));
```

0.747907287

Aplicaţia **Maple** conţine o întreagă familie de funcţii de evaluare numerică şi algebrică a expresiilor:

1. **eval**(*expr*, $x = x_0$) - evaluează expresia în punctul dat x_0
2. **evalf**(*expr*) - evaluează numeric o expresie care conţine constante (Pi, e, $gamma$) sau funcţii matematice ln, sin, cos, tan, exp,...
3. **evala**(*expr*) - evaluează algebric o expresie
4. **evalb**(*expr*) - evaluează boolean o expresie
5. **evalm**(*expr*) - evaluează matriceal o expresie
6. **evalc**(*expr*) - evaluează o expresie în mulţimea numerelor complexe

Exemple:

*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> eval(x^1-1, x=1/2);
```

$$-\frac{3}{4}$$

```
> evalf(Pi+ln(2));
```

$$3.834739835$$

```
> evala(Divide(x^2-1, x-1));
```

$$true$$

```
> evalb(-5>=0);
```

$$false$$

```
> evalc(I^2+4);
```

$$3$$

Constante matematice uzuale în **Maple**

Constanta	Nume **Maple**
Baza logaritmului natural e	**E**
Unitatea imaginară i ($i^2 = -1$)	**I**
π	**Pi**
∞	**infinity**
$-\infty$	**-infinity**
Constanta lui Euler γ	**gamma**
Valoarea booleană *adevărat*	**true**
Valoarea booleană *false*	**false**

Observaţia 7.1 *a. Constantele matematice nu pot fi folosite drept variabile.*
*b. **Maple** face distincţie între litere mari şi litere mici.*

7.1.5 Funcţii elementare în Maple

Funcţii elementare (predefinite) în **Maple**:

Funcţia	Nume **Maple**
e^x	*exp(x)*
$\ln x$	*ln(x)*
$\log_{10} x$	*log10(x)*
$\sqrt{x}$	*sqrt(x)*
$\sin x$	*sin(x)*
$\cos x$	*cos(x)*
$\tan x$	*tan(x)*
$\arcsin x$	*arcsin(x)*
$\arccos x$	*arccos(x)*
$\text{arctg}\ x$	*arctan(x)*
$\text{arcctg}\ x$	*arccot(x)*

In afara funcţiilor predefinite pe care le conţine **Maple**, aplicaţia permite utilizatorului să definească propriile sale funcţii prin mai multe metode:

1. funcţii definite ca expresii

   nume funcţie := expresie;

   unde *expresie* este expresia analitică ce conţine parametrii şi variabilele. Funcţia definită pe baza acestei sintaxe poate fi evaluată pentru diferite valori ale variabilelor cu ajutorul comenzii **evalf**.

2. funcţii definite cu operatorul "$\rightarrow$",

   nume funcţie := var $\rightarrow$ *expresie;*

   unde *var* reprezintă variabila iar *expresie* este expresia analitică ce conţine parametrii şi variabilele. Pentru a calcula valoarea funcţiei astfel definite într-un anumit punct este suficient a apela numele funcţiei având ca valoare a argumentului punctul respectiv.

Exemplu:
*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> f:=7*x^3-6*x^2+2;
```

$$f := 7x^3 - 6x^2 + 2$$

```
>evalf(f(3/4));
```

$$1.578125$$

```
>g:=(x, y)-> (x^2+y^2)/(1-2*x*y);
```

$$g := (x, y) \to \frac{x^2 + y^2}{1 - 2xy}$$

```
>g(1/2, 3/5);
```

$$1.375$$

Aplicaţia **Maple** dispune de trei componente de bază: *nucleul*, *biblioteca standard* şi aproximativ 40 de *pachete* specializate în rezolvarea unor tipuri de probleme mai complicate (sisteme de ecuaţii, probleme de algebră liniară sau statistică). *Nucleul* este scris în limbajul **C** şi realizează cea mai mare parte a calculelor efectuate de sistem. *Biblioteca de bază* se încarcă automat imediat ce o anumită comandă este apelată, dar dacă acea comandă nu face parte din bibliotecă, utilizatorul trebuie să încarce pachetul care include acea instrucţiune. Orice pachet se încarcă în memorie cu comanda

with(*nume pachet)* :

Sistemul **Maple** include pachete pentru teoria grupurilor (*group* package), pentru geometrie (pachetele *geom3D* şi *geometry*), pentru teoria numerelor (pachetul *numtheory*) şi pentru algebra liniară (pachetele *LinearAlgebra* şi *linalg*). Din cele menţionate anterior rezultă că nu este întotdeauna suficient să se cunoască numele unei comenzi. Uneori ea trebuie încărcată din bibliotecă sau dintr-un pachet. Dacă nu s-a făcut acest lucru iar comanda a fost introdusă, **Maple** nu generează un mesaj de eroare, ci afişează în *zona output*, comanda introdusă în *zona input*. In acest caz trebuie verificată corectitudinea sintaxei comenzii (inclusiv dacă literele mari şi mici se potrivesc), sau trebuie încărcată în memorie biblioteca corespunzătoare comenzii. Informaţii asupra modului corect de introducere a unei comenzi se pot obţine lansând comanda **help**, sub forma următoare:

```
> ? nume comanda
```

In scopul obţinerii unor informaţii generale despre **help** se tastează comanda

```
> ?
```

Pachete ale algebrei liniare

Aplicaţia **Maple** prevede două tipuri de pachete utile pentru a efectua diverse transformări din alegebra liniară: *linalg* şi *LinearAlgebra*. Obiectele de bază cu care operează comenzile acestor pachete sunt matricele, însă noţiunea de matrice din *linalg* nu este echivalentă cu noţiunea de matrice a pachetului *LinearAlgebra*.

Pachetul *LinearAlgebra* oferă rutine pentru construcţia şi manipularea matricelor şi a vectorilor, efectuează operaţii standard cu acestea, afişează rezultatele corespunzătoare şi rezolvă probleme de algebră liniară. Obiectele apelate în cadrul acestui pachet se bazează pe structura **r-table** în timp ce pachetul *linalg* generează matrice cu comanda **matrix()** sau **array()**.
Acest pachet se accesează din meniul *Tools/Tutors/LinearAlgebra* şi dispune de următoarele subrutine: *Eigenvalues*, *Eigenvalues Computation*, *Eigenvector Computation*, *Gauss-Jordan Elimination*, *Linear Systems*, *Linear Transforms*, *Matrix Inverse*, *Solving Linear Systems*.

Pachetul *linalg* conţine comenzi pentru scrierea matricilor şi a vectorilor şi include, de asemenea un număr mare de comenzi pentru efectuarea operaţiilor cu structurile introduse. Matricile se introduc cu comanda

$$\mathbf{matrix}(m, n, L);$$

unde m şi n reprezintă dimensiunile liniilor respectiv a coloanelor, iar L este o listă de elemente algebrice care conţine componentele matricei separate prin caracterul "," şi incluse în paranteze drepte, [ ].

Operaţii aritmetice cu matrice în **Maple**:

Notaţia matematică	Notaţia **Maple**
Adunarea A+B	A+B
Scăderea A-B	A-B
Inmulţirea cu un scalar $c \cdot A$	c*A
Inmulţirea $A \times B$	AB
Ridicarea la putere A ˆ n	A^n
Inversa A ˆ {−1}	A^{-1} sau $1/A$

Pentru calculul inversei unei matrici se poate apela funcţia predefnită

$$\mathbf{inverse}(A);$$

unde A este o matrice pătratică, iar determinantul unei matrrice se calculează cu ajutorul funcţiei

$$\mathbf{det}(A);$$

unde A este o matrice pătratică.

Pachetul *linalg* operează cu matrice la nivel de nume, adică nu pot fi efectuate operaţii asupra elementelor matricelor. In scopul realizării unor astfel de operaţii şi al afişării rezultatelor acestora se apelează comanda **evalm**().

Exemplu:

*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3, 3, [1, -1, 2, 3, 1, 1, 0, 2, 5]);
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

```
> B:=matrix(3, 3, [1, 3, 1, -1, 4, 2, 1, 1, -1]);
```

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
> C:=diag(1$3);
```

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> evalm(A+B);
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

```
> evalm(A&*B);
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 14 & 4 \\ 3 & 13 & -1 \end{pmatrix}$$

```
> evalm(3*B^2);
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 48 & 18 \\ -9 & 45 & 15 \\ -3 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

```
> evalm(A^-1);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

```
> inverse(A);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

```
> det(B);
```

$$-8$$

Proceduri în Maple

Dacă în cadrul unui program o instrucţiune sau un grup de instrucţiuni trebuie executate de mai multe ori pentru date diferite, atunci pentru a evita scrierea în mod repetat, se recurge la utilizarea procedurilor. *Procedura* reprezintă un grup finit de instrucţiuni, variabile şi constante având un scop bine precizat. Procedura în **Maple** are următoarea sintaxă.
nume:=**proc**(param1, param2,...)
local lista declaraţii locale;
global lista declaraţii globale;
options lista de opţiuni;
instrucţiuni
end;

Parametrii care apar în scrierea unor proceduri se numesc **parametri formali**, ei având un rol descriptiv (un parametru formal este o variabilă al cărei nume este cunoscut, dar al cărei conţinut nu este precizat decât în momentul execuţiei). In cadrul listei, parametrii formali sunt separaţi prin virgulă. Dacă se urmăreşte ca procedura să întoarcă o valoare, atunci se utilizează funcţia predefinită

$$\textbf{return}(v);$$

în şirul de instrucţiuni din corpul procedurii. Apelul unei proceduri se face prin intermediul comenzii

nume(*lista parametrii actuali*);

In momentul execuţiei unei proceduri, parametrii actuali înlocuiesc parametrii formali definiţi în declaraţia de procedură.

Exemplul 7.1 *Să se elaboreze în **Maple** o procedură care calculează diferenţa a două numere.*

```
>diferenta:=proc(a, b)
    local rezultat;
    rezultat:=a-b;
    return(rezultat);
 end proc;
```

Procedura descrisă mai sus va fi apelată pentru a calcula diferenţa numerelor 67 şi 49. In momentul apelului, cei doi parametri formali, a, b, vor fi înlocuiţi cu parametrii actuali 67 şi 49, returnându-se diferenţa acestora.

```
> diferenta(67, 49);
```

$$18$$

Instrucţiuni de *decizie* şi *structuri repetitive* în Maple

Instrucţiunea condiţională **if** decide fluxul execuţiei în funcţie de valoarea unei expresii de tip logic. Sintaxa instrucţiunii este următoarea:
if *condiţie* **then** *instrucţiuni 1*
else *instrucţiuni 2*
fi;
Exemplu:
*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> x:=15; y:=10;
```

$$x := 15$$

$$y := 10$$

```
>if (x<y) then
   x
 else
   y
 fi;
```

10

Exisă două instrucţiuni repetitive în **Maple**: **while** şi **for**. Instrucţiunea **while** conţine o expresie care controlează execuţia repetată a unei instrucţiuni sau a unei secvenţe de instrucţiuni şi are următoarea sintaxă:
while *condiţie* **do**
instrucţiuni
od;

Atâta timp cât *condiţie* are valoarea adevărată se execută repetat *instrucţiuni*. Testul pentru evaluarea condiţiei se face înaintea grupului de instrucţiuni care trebuie repetate.

Exemplu:
*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> x:=15; p:=1;
> while x>2 do
    x:=x/2;
    r:=r*x;
  od;
  r;
```

$$x = 15/2 \;\; r = 15/2$$
$$x = 15/4 \;\; r = 225/8$$
$$x = 15/8 \;\; r = 3375/64$$
$$3375/64$$

Instrucţiunea repetitivă **for** este prezentă în **Maple** în două variante. O primă variantă indică execuţia repetată a unui set de instrucţiuni în timp ce unei variabile de control i se atribuie o progresie de valori, de la o valoare iniţială la una finală, cu un anumit ”increment”, atâta timp cât o expresie este adevărată. Sintaxa comenzii în acest caz este:
for *i* **from** *expr1* **by** *expr2* **while** *condiţie* **do**
instrucţiuni
od;

Exemplu:
*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> x:=2;
> for i from 3 to 6 do
  y:=x^i;
  od;
```

$$y := 8$$

$$y := 16$$

$$y := 32$$

$$y := 64$$

In cazul celei de-a doua variante, variabila de control i parcurge toate elementele unei liste sau a unei mulţimi ($expr$). Sintaxa corespunzătoare este:
for i **in** *expr* **do**
instrucţiuni
od;
Exemplu:
*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> for i in (1,4,8) do
  x:=2^i;
  od;
```

$$x := 2$$

$$x := 16$$

$$x := 256$$

7.2 Conversia numerelor din sistemul zecimal în sistemul binar

Funcţia care execută în **Maple** conversia unui număr dintr-o bază în alta are sintaxa

$$\textbf{convert}(n,\ baza_f,\ baza_i);$$

Argumentul n reprezintă numărul scris în baza iniţială, argumentul $baza_i$ se referă la bazele **binary**, **octal**, **hex**. Argumentul $baza_f$ poate fi **binary**, **octal**, **decimal**, **hex**. Dacă numărul n este scris în baza 10, atunci argumentul $baza_i$ nu este necesar.

Exemplul 7.2 *Să se convertesacă în baza 2 următoarele numere:* 161, 1259.3359375.

Soluţie.

```
> convert(161, binary);
```

$$10100001$$

```
> convert(1259.3359375, binary);
```

$$1.1001110101\ 10^{10}$$

Exemplul 7.3 *Să se convertesacă în baza 10 următoarele numere:* 110101110, 101.010101.

Soluţie.

```
> convert( 110101110, decimal, binary);
```

$$214$$

```
> convert( 101.010101, decimal, binary);
```

$$5.328125000$$

7.3 Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii algebrice

7.3.1 Eliminarea gaussiană.

Pentru rezolvarea sistemelor cu **Algoritmul lui Gauss**, aplicaţia **Maple** pune la dispoziţie următoarea comandă:

$$\textbf{GaussianElimination}(A)$$

inclusă în pachetul **LinearAlgebra**. Această comandă returnează matricea triunghiulară superior pentru A, unde A este matricea asociată sistemului.

Exemplul 7.4 *Rezolvaţi sistemul următor cu ajutorul* ***Algoritmului lui Gauss****.*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Soluţie. Pentru rezolvarea acestui sistem prin **Algoritmul lui Gauss** se parcurg etapele:

1. se deschide aplicaţia **Maple** în modul de vizualizare *WorksheetMode* (*File/New/WorksheetMode*);

2. se accesează *Tools/Tutors/LinearAlgebra/GaussianElimination* (Figura Gaussian Elimination);

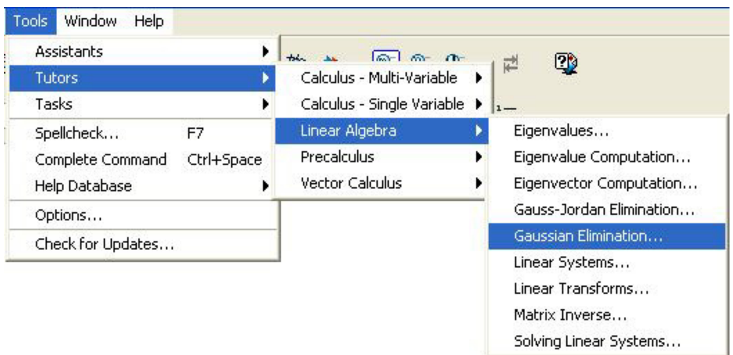


Figura 1. Gaussian Elimination

3. în fereastra deschisă în etapa anterioară se selectează butonul *Edit Matrix* care determină apariţia ferestrei *Matrix Builder* (Figura Matrix Builder);

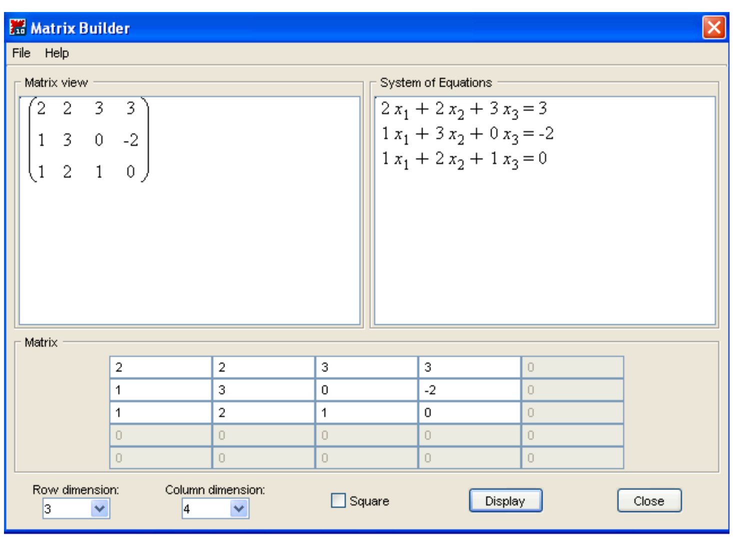


Figura 2. Matrix Builder

4. în fereastra *Matrix Builder* se setează numărul de linii şi numărul de coloane ale matricei extinse asociate sistemului, iar apoi se editează elementele matricei sistemului;

5. se tastează *Display* iar apoi *Close*;

6. se aleg opţiunile *All Steps*, *Solve Sistem* şi *Equations* (Figura All Steps şi Figura Equations);

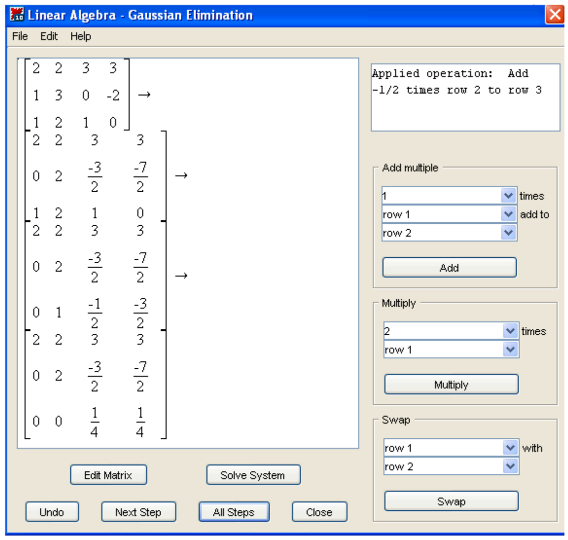


Figura 3. All Steps

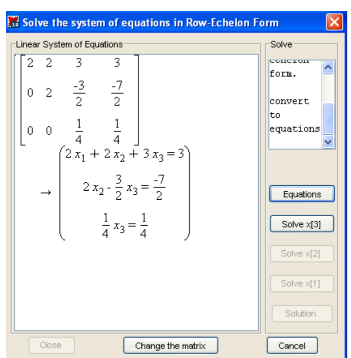


Figura 4. Equations

7. se selectează succesiv *Solve* $x[3]$, *Solve* $x[2]$, *Solve* $x[1]$ iar în final *Solution* (Figura Solution);

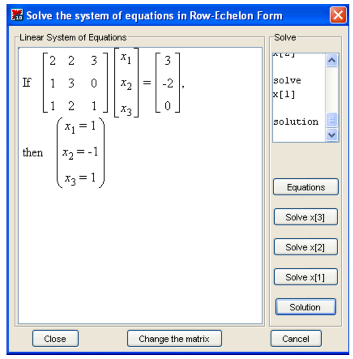


Figura 5. Solution

8. soluţia sistemului va fi afişată în zona de *output* sub forma

```
> Student[LinearAlgebra][GaussianEliminationTutor]()
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observaţia 7.2 *Dacă sistemul care trebuie rezolvat este incompatibil, atunci aplicaţia* ***Maple*** *returnează în cadrul worksheet-ului activ mesajul FAIL.*

7.3.2 Rezolvarea matriceală a sistemelor liniare

Exemplul 7.5 *Să se rezolve în* ***Maple*** *sistemul*

$$A \cdot x = b$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

aplicând metoda matriceală.

Soluţie. Rezolvarea sistemului se face prin parcurgerea etapelor enumerate mai jos:

1. se deschide aplicaţia **Maple** în modul de vizualizare *WorksheetMode* (*File/New/WorksheetMode*);

2. se accesează meniul *Tools/Tutors/LinearAlgebra/Matrix Inverse*;

3. în cadrul ferestrei deschise în pasul precedent se selectează butonul *Edit Matrix* care determină activarea ferestrei *Matrix Builder*;

4. în fereastra *Matrix Builder* se stabileşte numărul de linii şi de coloane ale matricei A asociate sistemului, iar apoi se editează elementele matricei (Figura Matricea Sistemului);

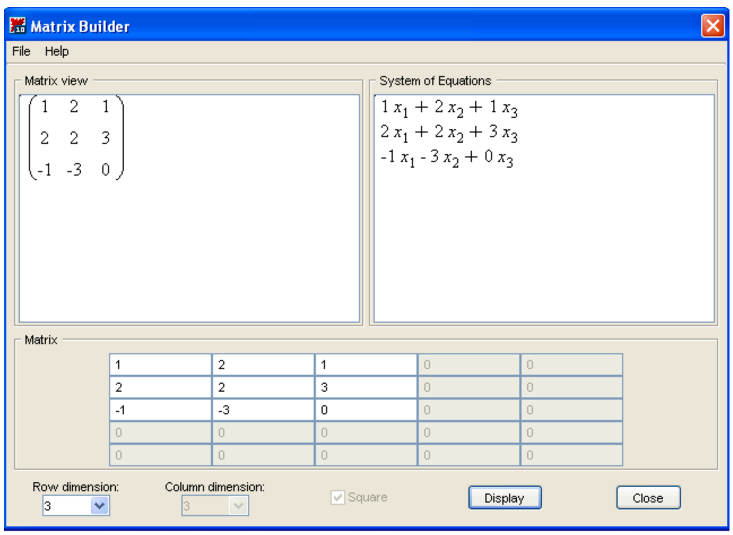


Figura 6. Matricea Sistemului

5. în continuare se apelează butoanele *Display* şi *Close*;

6. prin activarea butoanelor *All Steps* şi *Return the Inverse* (Figura Return Inverse) se va afişa matricea A^{-1} în foaia de calcul astfel:

```
> Student[LinearAlgebra][InverseTutor]();
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

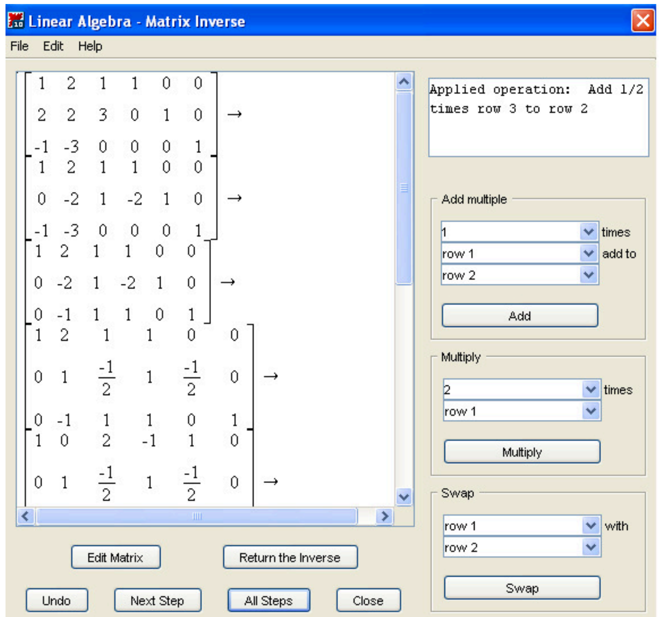


Figura 7. Return Inverse

7. matricea inversă calculată anterior va fi notată *Inversa* prin intermediul instrucţiunii de atribuire;

```
> Inversa:=evalm(%);
```

$$Inversa := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Observaţia 7.3 *Apelând butonul* ***All steps*** *se vor putea urmări toţi paşii parcurşi în aducerea matricei A la forma matricei unitate de ordinul trei prin metoda eliminării gaussiene (*Figura All steps*).*

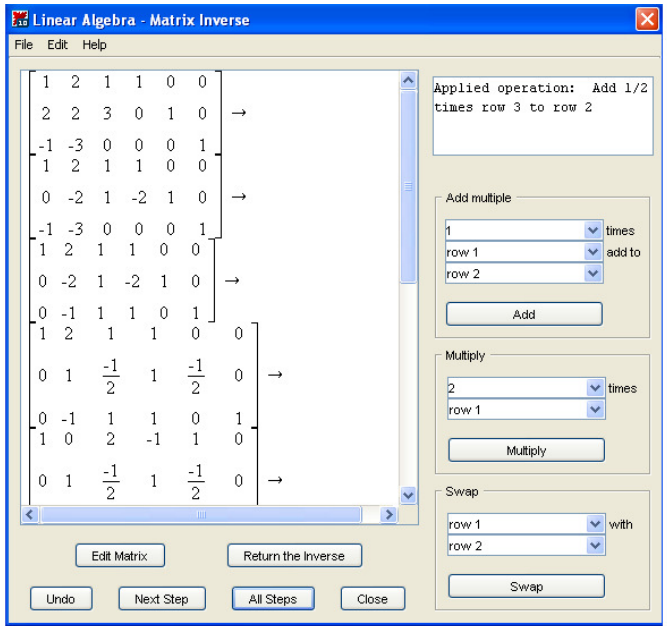


Figura 8. All Steps

8. se introduce matricea termenilor liberi, b;

```
> b:=matrix([3, 1, [3, -2, 0]);
```

$$b := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9. se determină valoarea necunoscutei x aplicând formula

$$x = Inversa \cdot b$$

```
> x:=evalm(Inversa&*b);
```

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.3.3 Factorizarea LU.

Funcţia care efectuează factorizarea **LU** (*Doolittle*) a unei matrice are sintaxa

$$\textbf{LUdecomp}(A,\ L='B',\ U='C');$$

unde A reprezintă o matrice dreptunghiulară, $L='B'$ este o opţiune pentru matricea L iar $U='C'$ este o opţiune pentru matricea U. Funcţia returnează matricea triunghiulară superior U. Utilizarea funcţiei **LUdecomp** trebuie precedată de comanda **with(linalg)**.

Exemplul 7.6 *Să se rezolve în **Maple** sistemul*

$$A\cdot x=b$$

*aplicând **Metoda Doolitle**, unde*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2\\ 4 & 4 & 1 & 3\\ -6 & -1 & 1 & 10\\ -1 & 1 & 8 & 4\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 2\\ 4\\ -5\\ 1\end{pmatrix}\quad x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}.$$

Soluţie. Pentru a afla soluţia sistemului se urmează paşii descrişi în cele ce urmează:

1. se apelează pachetul **linalg**;

```
> with(linalg);
```

2. se introduce matricea A astfel;

```
> A:=matrix(4, 4, [2, 1, -1, -2, 4, 4, 1, 3, -6, -1, 1, 10,
          -1, 1, 8, 4]);
```

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2\\ 4 & 4 & 1 & 3\\ -6 & -1 & 1 & 10\\ -1 & 1 & 8 & 4\end{pmatrix}$$

3. se determină matricea triunghiulară superior U;

```
> LUdecomp(A, L='B', U='C');
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ -6 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

4. matricea obţinută în etapa anterioară se notează cu U;

```
> U:=evalm(C);
```

$$U := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5. matricea triunghiulară inferior returnată prin intermediul matricei B va fi notată cu L;

```
> L:=evalm(B);
```

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. se introduce matricea termenilor liberi b;

```
> b:=matrix([3, 1, [2, 4, 5, 1]);
```

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. se rezolvă sistemul $Ly = b$ prin metoda matriceală, $y = L^{-1}b$;

```
> y:=evalm(L^{-1}&*b);
```

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8. se determină x din ecuaţia $Ux = y$ prin metoda matriceală, $x = U^{-1}y$;

```
> x:=evalm(U^{-1}&*y);
```

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{19}{8} \\ \frac{17}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

7.3.4 Vectori şi valori proprii ale unei matrice.

Valorile proprii ale unei matrice A se calculează cu ajutorul funcţiei predefinite

eigenvals(A);

iar vectorii proprii corespunzători se determină apelând comanda

nullspace$(A - \lambda[\ i\ ])$;

unde $\lambda[\ i\ ]$ reprezintă valoarea proprie. Ambele funcţii trebuie precedate de comanda **with(linalg)**.

Exemplul 7.7 *Să se determine valorile şi vectorii proprii ai matricei*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 13 & -16 \\ 13 & -10 & -13 \\ -16 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

Soluţie. Valorile şi vectorii proprii ai matricei A se calculează parcurgând etapele:

1. se deschide aplicaţia **Maple** în modul de vizualizare *WorksheetMode* (*File/New/WorksheetMode*);

2. se iniţializează pachetul **linalg**;

```
> with(linalg);
```

3. se introduce matricea unitate de ordinul 3 pe care o notăm cu I_3;

```
> I3:=evalm(diag(1$3));
```

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. se introduc elementele matricei A;

```
> A:=matrix(3, 3, [-7, 13, -16, 13, -10, -13, -16, 13, -7]);
```

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 13 & -16 \\ 13 & -10 & -13 \\ -16 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

5. se determină *polinomul caracteristic* asociat matricei A;

```
> polchar:=det(evalm(q*I3-A));
```

$$polchar := q^3 + 24q^2 - 67q - 2070$$

6. se calculează rădăcinile polinomulul caracteristic apelând comanda **solve** $(polchar, q)$ şi se notează cu λ, acestea reprezentând valorile proprii ale matricei A;

```
> lambda:=solve(polchar, q);
```

$$\lambda := 9,\ -10,\ -23$$

7. se calculează vectorul propriu corespunzător fiecărei valori proprii $\lambda = 9$, $\lambda = -10$ şi $\lambda = -23$;

```
> v1:=nullspace(lambda[1]-A);
```

$$v1 := [-\frac{473}{135} \quad -\frac{416}{135} \quad 1]$$

```
> v2:=nullspace(lambda[2]-A);
```

$$v2 := [1 \quad 1 \quad 1]$$

```
> v3:=nullspace(lambda[3]-A);
```

$$v3 := [1 \quad 0 \quad 1]$$

7.4 Metode iterative pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

7.4.1 Metoda lui Jacobi

Exemplul 7.8 *Să se determine o soluţie aproximativă a sistemului $Ax = b$, unde* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *şi* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*, folosind Metoda lui Jacobi cu 6 paşi.*

Soluţie. Pentru rezolvarea sistemului aplicând metoda lui *Jacobi* cu un număr fixat de paşi n se apelează procedura *Jacobi* descrisă mai jos. Deoarece în cadrul procedurii se lucrează cu matrici, în prealabil se iniţializează pachetul **linalg**. Procedura are drept parametri matricea sistemului A, termenii liberi tl, aproximaţia iniţială x_0 a soluţiei şi numărul de iteraţii n. Procedura include şi funcţiile predefinite **nops**, **cat**, **convert** şi **list**. Funcţia **nops** este folosită aici pentru determinarea dimensiunii unei liste şi are sintaxa **nops**(*expr*). Funcţia **cat** execută concatenarea a două sau mai multe expresii conform sintaxei **cat**(*expr1, expr2, ...*). Argumentele *expr1*, *expr2*,... reprezintă expresii de orice tip. Efectul apelării funcţiei constă în generarea unei structuri de tip **string**. Funcţia **convert**(*expr*, **string**) execută conversia unei expresii într-o structură de tip **string**. Structura de tip **list** constă dintr-o secvenţă ordonată de expresii de forma [*expr1*, *expr1*,...,*exprn*]. Elementele unei liste sunt incluse între paranteze drepte [ ] şi îşi păstrează ordinea impusă la generarea listei. Lista fără nici un element se numeşte listă vidă şi se notează prin [ ].

```
> with(linalg):
> Jacobi:=proc(mat, tl, x0, iterations)
      local x, xp, it, i,j, temp,k, matSize;
      xp:= x0;
      it:=1;
      matSize:=nops(x0);
      while it <= iterations do
           for i from 1 by 1 to matSize do
                  temp:= 0;
             for j from 1 by 1 to matSize do
```

```
                if (i <> j) then
                  temp:= temp + mat[i,j]*xp[j];
                end if;
              end do;
              x[i]:= evalf(((tl[i]-temp))/(mat[i,i]));
            end do;
            xp:= copy(x);
            print(cat(‘it = ‘, it));
            print(convert(x,list));
            it:=it+1;
        od;
end proc;
```

Inainte de a apela procedura *Jacobi*, se definesc parametrii actuali: A, tl, x_0 şi numărul de iteraţii n astfel:

```
> A:=matrix(3, 3, [2, -1, 0, -1, 2, -1, 0, -1, 2]);
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
> tl:=[1, 0, 1];
```

$$tl = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> x0:=[1, 0, 1];
```

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> Jacobi(A, tl, x0, 6);
```

$$\begin{aligned}
it &= 1, \quad [\frac{1}{2}, \ 1, \ \frac{1}{2}] \\
it &= 2, \quad [1, \ \frac{1}{2}, \ 1] \\
it &= 3, \quad [\frac{3}{4}, \ 1, \ \frac{3}{4}] \\
it &= 4, \quad [1, \ \frac{3}{4}, \ 1] \\
it &= 5, \quad [\frac{7}{8}, \ 1, \ \frac{7}{8}] \\
it &= 6, \quad [1, \ \frac{7}{8}, \ 1]
\end{aligned}$$

Soluţia aproximativă a sistemului după 6 iteraţii este $[1,\ \frac{7}{8},\ 1]$, adică, $x_1 = 1,\ \ x_2 = \frac{7}{8},\ \ x_3 = 1.$

Exemplul 7.9 *Să se determine o soluţie aproximativă a sistemului $Ax = b$, unde* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *şi* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *cu precizia* $\varepsilon = 0.01$.

Soluţie. Pentru a afla numărul de paşi necesari obţinerii preciziei $\varepsilon = 0.01$ se apelează procedura *JacobiEps* descrisă în cele ce urmează. Procedura are drept parametri matricea sistemului A, termenii liberi tl, aproximaţia iniţială x_0 a soluţiei şi eroarea ε. In cadrul acestei proceduri s-a utilizat funcţia predefinită **norm** care calculează norma unui vector sau a unei matrici. Sintaxa acesteia este **norm**(v, *nume v*). Argumentul *nume v* specifică tipul normei unui vector şi poate fi: un întreg pozitiv k, **frobenius** sau **infinity**. Utilizarea funcţiei **norm** trebuie precedată în mod obligatoriu de comanda **with(linalg)**.

```
> JacobiEps:= proc (mat, tl, x0, eps)
    local x, xp, it, i, j, temp, k, matSize;
    xp:= x0;
    it:= 1;
    matSize:= nops(x0);
    do
     for i from 1 by 1 to matSize do
        temp:= 0;
        for j from 1 by 1 to matSize do
           if i <> j then
              temp:=temp+mat[i, j]*xp[j];
           end if;
        end do;
        x[i]:= evalf((tl[i]-temp)/(mat[i, i]));
    end do;
    if norm(eval(convert(x, list)-convert(xp, list))) <= eps then
       print(cat(`it=`, it));print(convert(x, list));
       break;
    fi;
```

```
     xp:= copy(x);
     print(cat(`it=`,it)); print(convert(x, list));
     it:= it+1;
    od;
    end proc;
```

Se apelează procedura specificându-se parametrii actuali: A, tl, x_0 şi ε.

```
> A:=matrix(3, 3, [2, -1, 0, -1, 2, -1, 0, -1, 2]);
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
> tl:=[1, 0, 1];
```

$$tl = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> x0:=[1, 0, 1];
```

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> JacobiEps(A, tl, x0, 0.01);
```

$$
\begin{aligned}
it &= 1, \quad [\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}] \\
it &= 2, \quad [1,\ \frac{1}{2},\ 1] \\
it &= 3, \quad [\frac{3}{4},\ 1,\ \frac{3}{4}] \\
it &= 4, \quad [1,\ \frac{3}{4},\ 1] \\
it &= 5, \quad [\frac{7}{8},\ 1,\ \frac{7}{8}] \\
it &= 6, \quad [1,\ \frac{7}{8},\ 1] \\
it &= 7, \quad [\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}] \\
it &= 8, \quad [\frac{15}{16},\ 1,\ \frac{15}{16}] \\
it &= 9, \quad [1,\ \frac{15}{16},\ 1] \\
it &= 10, \quad [1,\ \frac{31}{32},\ 1] \\
it &= 11, \quad [\frac{63}{64},\ 1,\ \frac{63}{64}] \\
it &= 12, \quad [1,\ \frac{63}{64},\ 1] \\
it &= 13, \quad [\frac{127}{128},\ 1,\ \frac{127}{128}] \\
it &= 14, \quad [1,\ \frac{127}{128},\ 1].
\end{aligned}
$$

In concluzie, soluţia sistemului se determină cu precizia $\varepsilon = 0.01$ după 14 iteraţii, soluţia aproximativă fiind cea din iteraţia a 14-a, $[1,\ \frac{127}{128},\ 1]$, adică $x_1 = 1,\ \ x_2 = \frac{127}{128},\ \ x_3 = 1.$

Observaţia 7.4 *Se recomandă ca procedurile,* Jacobi *şi* JacobiEps *să fie scrise şi salvate în acelaşi fişier. Ele vor fi precedate în mod obligatoriu de comanda* ***with(linalg)****.*

7.4.2 Metoda lui Gauss-Seidel

Exemplul 7.10 *Să se determine o soluţie aproximativă a sistemului* $Ax = b$, *unde* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *şi* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *folosind Metoda lui Gauss-Seidel cu* 4 *paşi.*

Soluţie. Rezolvarea sistemului cu ajutorul metodei iterative Gauss-Seidel se realizează prin apelul procedurii *GaussSeidel.* Procedura are drept parametri matricea sistemului A, termenii liberi tl, aproximaţia iniţială x_0 a soluţiei şi numărul de iteraţii n.

```
> GaussSeidel:=proc(mat, (tl, x0,)[] iterations)
        local x, xp,it, i, j, temp,k, matSize;
        xp:= x0;
        it:=1;
         matSize:=nops(x0);
         while it <= iterations do
              for i from 1 by 1to matSize do
                  temp:= 0;
                  for j from 1 by 1to matSize do
                    if (i>j) then
                        temp:= temp +mat[i,j]*x[j];
                    end if;
                    if (i<j) then
                        temp:= temp+mat[i,j]*xp[j];
                    end if;
                    end do;
                    x[i]:= evalf(((tl[i]-temp))/(mat[i,i]));
         end do;
         xp:=copy(x);
         print(cat(‘it = ‘, it)); print(convert(x,list));
         it:=it+1;
         od;
         end proc;
```

Se apelează procedura *GaussSeidel* specificându-se parametrii actuali: A, tl, x_0 şi n.

```
> A:=matrix(3, 3, [2, -1, 0, -1, 2, -1, 0, -1, 2]);
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
> tl:=[1, 0, 1];
```

$$tl = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> x0:=[1, 0, 1];
```

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> GaussSeidel(A, tl, x0, 4);
```

$$\begin{aligned} it &= 1, \quad [\frac{1}{2}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{7}{8}] \\ it &= 2, \quad [\frac{7}{8}, \ \frac{7}{8}, \ \frac{15}{16}] \\ it &= 3, \quad [\frac{15}{16}, \ \frac{15}{16}, \ \frac{31}{32}] \\ it &= 4, \quad [\frac{31}{32}, \ \frac{31}{32}, \ \frac{63}{64}] \end{aligned}$$

Soluţia aproximativă a sistemului după 4 iteraţii este, $[\frac{31}{32}, \ \frac{31}{32}, \ \frac{63}{64}]$, adică, $x_1 = \frac{31}{32}$, $x_2 = \frac{31}{32}$, $x_3 = \frac{63}{64}$.

Exemplul 7.11 *Să se determine o soluţie aproximativă a sistemului* $Ax = b$, *unde* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *şi* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *cu precizia* $\varepsilon = 0.01$ *aplicând Metoda Gauss-Seidel.*

Soluţie. Stabilirea numărului de iteraţii necesar determinării soluţiei cu precizia fixată $\varepsilon = 0.01$ se realizează prin apelul procedurii *GaussSeidelEps*, al cărei cod este prezentat mai jos. Procedura are drept parametri matricea sistemului A, termenii liberi tl, aproximaţia iniţială x_0 a soluţiei şi eroarea ε.

```
> GaussSeidelEps:= proc (mat, tl, x0, eps)
    local x, xp, it, i, j,temp, k, matSize;
    xp:= x0;
```

```
     it:= 1;
     matSize := nops(x0);
     do
       for i from 1 by 1 to matSize do
         temp:= 0;
          for j from 1 by 1 to matSize do
            if j < i then
            temp:=temp+mat[i, j]*x[j];
            end if;
            if i < j then
               temp:= temp+mat[i,j]*xp[j];
            end if;
          end do;
          x[i]:= evalf((tl[i]-temp)/(mat[i, i]));
        end do;
       if norm(eval(convert(x, list)-convert(xp, list))) <= eps then
          print(cat(`it=`, it)); print(convert(x, list));
          break;
       fi;
          xp:= copy(x);
          print(cat(`it=`, it));
          print(convert(x, list));
          it:= it+1;
          od;
  end proc;
```

Se apelează procedura *GaussSeidelEps* specificându-se parametrii actuali: A, tl, x_0 şi ε.

```
> A:=matrix(3, 3, [2, -1, 0, -1, 2, -1, 0, -1, 2]);
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
> tl:=[1, 0, 1];
```

$$tl = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> x0:=[1, 0, 1];
```

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> GaussSeidelEps(A, tl, x0, 0.01);
```

$$\begin{aligned}
it &= 1, \quad [\frac{1}{2}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{7}{8}] \\
it &= 2, \quad [\frac{7}{8}, \ \frac{7}{8}, \ \frac{15}{16}] \\
it &= 3, \quad [\frac{15}{16}, \ \frac{15}{16}, \ \frac{31}{32}] \\
it &= 4, \quad [\frac{31}{32}, \ \frac{31}{32}, \ \frac{63}{64}] \\
it &= 5, \quad [\frac{63}{64}, \ \frac{63}{64}, \ \frac{127}{127}] \\
it &= 6, \quad [\frac{127}{128}, \ \frac{127}{128}, \ \frac{255}{256}]
\end{aligned}$$

In concluzie, soluţia sistemului se determină cu precizia $\varepsilon = 0.01$ după 6 iteraţii, soluţia aproximativă fiind cea din iteraţia a 6-a, $[\frac{127}{128}, \ \frac{127}{128}, \ \frac{255}{256}]$, adică, $x_1 = \frac{127}{128}, \ \ x_2 = \frac{127}{128}, \ \ x_3 = \frac{255}{256}$.

Observaţia 7.5 *Metoda Gauss-Seidel este mai rapid convergentă decât metoda Jacobi, aceast lucru observându-se la analiza numărului de iteraţii parcurse pentru a obţine precizia ε dată.*

7.5 Rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor neliniare

In **Maple** ecuaţiile sunt expresii matematice scrise sub foma unor relaţii între anumite variabile şi valori cu ajutorul operatorului ”=”. Variabilele nu au valori explicite şi sunt neasignate. Cei doi membri, stâng şi drept pot fi manipulaţi cu ajutorul comenzilor **lhs** şi **rhs**. **Maple** poate rezolva ecuaţiile algebrice şi transcendente exact sau numeric, sau, poate determina o soluţie simbolică a acestora. In acest scop aplicaţia dispune de o familie de funcţii predefinite, **solve**, care folosesc ca şi parametri ecuaţii. Sintaxa acestor comenzi este

solve*(ecuatie, variabila)*;

sau

solve*(ecuaţii, variabile)*;

Funcţia returnează soluţiile ecuaţiei sub forma unei sevenţe de expresii. Dacă este returnată secvenţa **Null** atunci înseamnă că nu există soluţii sau că soluţia nu a putut fi determinată. Pentru ecuaţiile polinomiale de grad cel mult trei este returnată o secvenţă a soluţiilor exacte, iar pentru cele de grad mai mare sau egal cu patru este utilizată pentru rădăcini reprezentarea **RootOff**. Pornind de la această reprezentare, valorile rădăcinilor pot fi determinate cu ajutorul funcţiei predefinite **all-values**. Valorile rădăcinilor pot fi calculate cu un număr arbitrar de zecimale specificat prin variabila globală **Digits**.
Maple include următoarele comenzi specializate în rezolvarea ecuaţiilor în diverse mulţimi de numere.

1. comanda

   fsolve(*ec, var, opt*);

   rezolvă ecuaţii în virgulă mobilă. Valorile *opt* disponibile acestei comenzi sunt: **complex** (determină aflarea unei soluţii complexe sau a tuturor în cazul ecuaţiilor algebrice), **fulldigits** (asigură menţinerea numărului de zecimale pe parcursul calculelor intermediare), **maxsols=n** (găseşte doar n rădăcini), **var**=a..b (caută rădăcinile numai în intervalul $[a, b]$.

2. comanda

   isolve(*ec, var*);

   calculează rădăcinile întregi ale unei ecuaţii. Argumentul *var* se utilizează pentru a denumi parametri cu valori întregi, în absenţa sa fiind utilizate simbolurile **N1, N2,...**.

3. comanda

   msolve(*ec, var, m*);

   rezolvă ecuaţii modulo m. Implicit, funcţia returnează doar cinci soluţii. Numărul acestora poate fi specificat prin asignarea variabilei globale **MaxSols**. Dacă soluţia este nedeterminată şi dacă este posibil se returnează o familie de soluţii exprimate în funcţie de numele variabilelor sau de parametrii **N1, N2,...**.

4. comanda

   $$\textbf{rsolve}(\textit{ecr, f});$$

   rezolvă ecuaţii şi sisteme de ecuaţii recurente. Argumentul *ecr* conţine o ecuaţie sau un sistem de ecuaţii recurente precum şi valorile iniţiale, iar f este o funcţie necunoscută din ecuaţia *ecr*.

5. comanda

   $$\textbf{dsolve}(\textit{ecd, var, ec});$$

   rezolvă ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare. Argumentul *ecd* este o ecuaţie diferenţială (mulţime de ecuaţii diferenţiale), *var* reprezintă variabila iar *ec* este un parametru opţional ce reprezintă o ecuaţie specială ce poate fi: **type**=*valoare* (**type=exact**, **type=series**, **type=numeric**), **explicit=true** sau **false**, **method**=*valoare* (unde pentru *valoare* există opţiunile **rkf45** sau **dverk78** - pentru metoda numerică Runge - Kutta sau **method=laplace** - specificată în rezolvarea cu metoda transformării Laplace).

Exemple:

*Scrierea în **Maple*** *Rezultatul*

```
> solve(x^5-x^3+3*x^2-2, x);
```

$$RootOf(Z^4 - Z^3 + 3Z^2 - 2)$$

```
> Digits:=2;
> evalf(%);
```

$$-1.5,\ -.78,\ .74 - 1.2I,\ .74 + 1.2I,\ .85$$

```
> fsolve(x^5-x^3+3*x^2-2, x);
```

$$-1.548763013, -.7776285102, .8505264490$$

```
> Digits:=3;
> fsolve(x^5-x^3+3*x^2-2, x, complex);
```

$$-1.55, -.778, .738 - 1.19I, .738 + 1.19I, .851$$

```
> fsolve(x^5-x^3+3*x^2-2, x, 0..1);
```

$$0.85$$

```
> isolve(2*x+3*y=0);
```

$$\{x = -3 * Z1,\ \ y = 2 * Z1\}$$

```
> msolve(x^2)=1, 2);
```

$$\{x = 1\},\ \ \{y = 3\}$$

```
> rsolve({y(i+1)*y(i)-2*y(i+1)+y(i),y(0)}, y);
```

$$-\frac{k}{-2^i - k + 2^i k}$$

```
> dsolve(diff(y(x),x)+3*y(x)=0, y(x));
```

$$y(x) = C1 \cdot e^{-3x}$$

Metoda înjumătăţirii intervalului

Exemplul 7.12 *Să se aproximeze soluţia reală a ecuaţiei* $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$ *cu precizia* $\varepsilon = 0.01$ *folosind metoda înjumătăţirii.*

Soluţie. Pentru a determina intervalul de pornire $[a,\ b]$ în care estimăm că se află soluţia aproximativă a ecuaţiei date considerăm funcţia $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$ şi trasăm graficul acesteia cu ajutorul comenzii

$$\mathbf{plot}(f,\ x_0 \mathrel{..} x_1);$$

unde f este funcţia iar x_0 şi x_1 reprezintă extremităţile intervalului considerat pe axa ox. Dacă al doilea argument al comenzii lipseşte, atunci comanda trasează implicit graficul pe intervalul [-10, 10]. Comanda **plot** trebuie precedată de iniţializarea pachetului **with(plots)**.

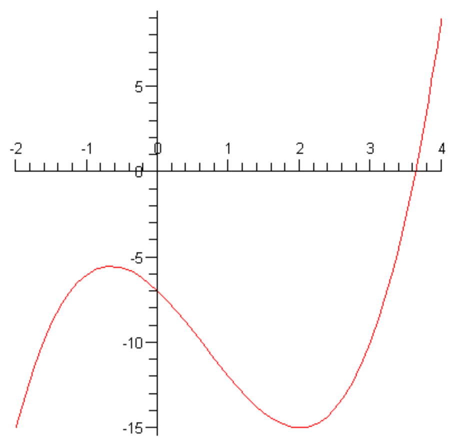


Figura 9. Graficul funcţiei f

Analizând graficul trasat mai sus se deduce că funcţia f admite rădăcini în intervalul $[3, 4]$. Se verifică apoi dacă funcţia f se încadrează în condiţiile teoremei lui Bolzano-Cauchy pe intervalul obţinut. Deoarece în cazul **metodei înjumătăţirii** (bisecţiei) se recurge în fiecare pas la înjumătăţirea intervalului din etapa precedentă se va scrie o procedură recursivă denumită *înjumătăţire* care va afişa la fiecare pas intervalul considerat şi valoarea punctului c care reprezintă mijlocul acelui interval. Procedura are drept parametri funcţia f, capetele intervalului $[a,\ b]$ în care se află rădăcina aproximativă α şi precizia maximă admisă.

```
 > injumatatire:=proc (f, a, b, eps)
      local c, al, bl, n;
      al:= a;
      bl:= b;
      n:=1;
      while n<=round(evalf(((ln(((b-a))/eps)))/(ln(2))))   do
      c:= ((al+bl))/2;
      print(cat(`n=`,n, `, c=`, convert(c,string),
      `, (`, convert(al,string), ` , `, convert(bl, string), `)`));
         if evalf(f(c))*evalf(f(al))<0   then
             bl:= c;
         else
            al:=c;
         fi;
           n:= n+1;
     od;
     c:=((al+bl))/2;
     print(cat(`n=`,n, ` c=`, convert(c,string),
     ` (`, convert(al,string), ` , `, convert(bl, string), `)`));
   end proc;
> f:=x->x^3-2*x^2-4x-7;
```

$$f := x- > x^3 - 2x^2 - 4x - 7$$

```
> injumatatire(f, 3, 4, 0.01);
```

$$
\begin{aligned}
n &= 1,\ c=\frac{7}{2},\quad (3,4)\\
n &= 2,\ c=\frac{15}{4},\ \ (\frac{7}{2},4)\\
n &= 3,\ c=\frac{29}{8},\ \ (\frac{7}{2},\frac{15}{4})\\
n &= 4,\ c=\frac{59}{16},\ \ (\frac{29}{8},\frac{15}{4})\\
n &= 5,\ c=\frac{117}{32},\ (\frac{29}{8},\frac{59}{16})\\
n &= 6,\ c=\frac{233}{64},\ (\frac{29}{8},\frac{117}{32})\\
n &= 7,\ c=\frac{465}{128},\ (\frac{29}{8},\frac{233}{64})\\
n &= 8,\ c=\frac{929}{256},\ (\frac{29}{8},\frac{465}{128}).
\end{aligned}
$$

Metoda coardei

Exemplul 7.13 *Să se aproximeze soluţia reală a ecuaţiei* $x^3-2x^2-4x-7=0$ *cu precizia* $\varepsilon=0.01$ *folosind metoda coardei.*

Soluţie. Similar **metodei înjumătăţirii** se alege intervalul de pornire $[3,4]$, iar apoi se generează recursiv succesiunea de intervale pentru găsirea rădăcinii aproximative α cu precizia ε cerută, prin intermediul procedurii *coarda.* Deoarece în *metoda coardei* intervine minimul derivatei întâi la evaluarea erorii, se scrie în prealabil procedura *minimum* care determină minimul funcţiei f pe intervalul considerat, în condiţiile teoremei Bolzano-Cauchy. In cadrul acestei proceduri s-a utilizat funcţia predefinită **diff** care calculează derivata unei expresii relativ la o variabilă specificată. Sintaxa acestei funcţii este **diff**(*expr, var, $n*). Numărul întreg pozitiv n indică ordinul derivatei.

```
> minimum:= proc (f, a, b)
  local fd1, fd2;
  fd1:= x-> diff(f(x), x);
  fd2:= x->diff(fd1(x), x);
  if  evalf(eval(fd2(x), x = a))>=0 then
      return evalf(eval(fd1(x), x = a));
```

```
   else
       return evalf(eval(fd1(x), x= b);
   fi;
  end proc;
>  f:=x->x^3-2*x^2-4*x-7;
```

$$f := x- > x^3 - 2x^2 - 4x - 7$$

```
> minimum(f, 3, 4);
```

$$11$$

Procedura *coarda* are drept parametri funcţia f, extremităţile intervalului de pornire $(x_0,\ x_1)$ în care se află rădăcina aproximativă α, eroarea maximă admisă ε şi minimul funcţiei pe intervalul ales.

```
> coarda:=proc(f, x0, x1, eps, min)
  local xn, xp, fd1, fd2, pf, alpha;
  fd1:=x->diff(f(x),x);
  fd2:=x->diff(fd1(x),x);
  xp:=x0;
  xn:=x1;
  if evalf(f(xp))*evalf(eval(fd2(x),x=xp))>0 then
     pf:=xp;
  else
     pf:=xn;
  fi;
     xn:=xn-((pf-xp))/(evalf(f(pf))-evalf(f(xp)))*evalf(f(pf));
  while (abs(evalf(f(xn))))/min>=eps do
    xp:= xn;
    xn:=xp-((pf-xp))/(evalf(f(pf))-evalf(f(xp)))*evalf(f(xp));
  print(cat(`(`,convert(xp,string),`,`, convert(xn,string), `)`));
  od;
  alpha:= xp+(abs(evalf(f(xn))))/min;
  print(cat(`alpha = `,convert(alpha,string)));
  end proc;
> f:=x->x^3-2*x^2-4*x-7;
```

$$f := x- > x^3 - 2x^2 - 4x - 7$$

```
> coarda(f, 3, 4, 0.01, 11);
```

$$(3.526315790, 3.616818021)$$

$$(3.616818021, 3.629858244)$$

$$\alpha = 3.620875405$$

Metoda tangentei

Exemplul 7.14 *Să se aproximeze soluţia reală a ecuaţiei* $x^3-2x^2-4x-7=0$ *cu precizia* $\varepsilon = 0.01$ *folosind metoda tangentei.*

Soluţie. Procedura *tangenta* descrisă în cele ce urmează afişează la fiecare pas intervalul în care se află rădăcina aproximativă α iar în final valoarea aproximativă a acesteia calculată cu precizia cerută ε. Procedura are drept parametri funcţia f, extremităţile intervalului de pornire, $(x_0,\ x_1)$, în care se află rădăcina aproximativă α, eroarea maximă admisă ε şi minimul funcţiei pe intervalul ales.

```
> tangenta:= proc (f, x0, x1, eps, min)
  local xn, xp, fd1, fd2,ptan, alpha;
  fd1:=x->diff(f(x),x);
  fd2:=x->diff(fd1(x),x);
  xp:= x0;
  xn:= x1;
     if 0 <evalf(f(xp))*evalf(eval(fd2(x), x = xp)) then
        ptan:= xp;
     else
        ptan:= xn;
     fi;
        xp:= ptan;
     while eps <= abs(evalf(f(xn)))/min do
        xp:= xn;
        xn:= xp-evalf(f(xp))/evalf(eval(fd1(x), x = xp));
     print(cat(‘(‘, convert(xn, string), ‘,‘,convert(xp, string), ‘)‘));
     od;
     alpha:= xn+abs(evalf(f(xn)))/min;
     print(cat(‘alpha =‘, convert(alpha,string)));
     end proc;
> f:=x->x^3-2*x^2-4*x-7;
```

$$f := x- > x^3 - 2x^2 - 4x - 7$$

```
> tangenta(f, 3, 4, 0.01, 11);
```

$$(3.678571429, 4)$$

$$(3.632872549, 3.678571429)$$

$$\alpha = 3.634579334$$

Observaţia 7.6 *In ipoteza că ecuaţia admite mai multe rădăcini, cele trei proceduri descrise anterior pot fi apelate pentru determinarea fiecărei rădăcini în parte.*

Procedurile care descriu **metoda înjumătăţirii**, **metoda coardei**, **metoda tangentei** precum şi procedura *minimum* ce returnează minimul unei funcţii f pe un interval $[a, b]$ pe care f verifică condiţiile teoremei Bolzano-Cauchy, pot fi cumulate într-un modul numit **modul ecuaţii**. Sintaxa unui modul este similară cu cea a unei proceduri, acesta incluzând instrucţiuni declarative, variabile locale, variabile globale, instrucţiuni descriptive. Un modul poate fi privit ca o colecţie de nume de legătura. Aceste nume determină accesul la anumite instrucţiuni **Maple** din afara modulului, care vor fi exportate în cadrul acestuia cu ajutorul comenzii **export**$(e_1, e_2...)$, unde e_1, e_2 reprezintă nume sau tipuri de nume exportate. Clauza **export** din definiţia unui modul este utilizată în scopul declarării unor nume care vor fi disponibile în cadrul acestuia odată ce el va fi instanţiat.

```
>ecuatii:=module()
 export minimum, coarda, tangenta, injumatatire;
 minimum := proc (f, a, b)
   fd1:= x-> diff(f(x), x);
   fd2:= x->diff(fd1(x), x);
   if  evalf(eval(fd2(x), x = a))>=0 then
       return evalf(eval(fd1(x), x = a));
   else
       return evalf(eval(fd1(x), x= b);
   fi;
 end proc;

 coarda:=proc(f, x0, x1, eps)
  fd1:=x->diff(f(x),x);
  fd2:=x->diff(fd1(x),x);
    xp:=x0;
    xn:=x1;
    min:=minimum(f, x0, x1);
  if evalf(f(xp))*evalf(eval(fd2(x),x=xp))>0 then
     pf:=xp;
  else
     pf:=xn;
```

```
 fi;
    xn:=xn-((pf-xp))/(evalf(f(pf))-evalf(f(xp)))*evalf(f(pf));
 while (abs(evalf(f(xn))))/min>=eps do
   xp:= xn;
   xn:=xp-((pf-xp))/(evalf(f(pf))-evalf(f(xp)))*evalf(f(xp));
 print(cat(`(`,convert(xp,string),`,`, convert(xn,string), `)`));
 od;
   alpha:= xp+(abs(evalf(f(xn))))/min;
 print(cat(`alpha = `,convert(alpha,string)));
end proc;

tangenta := proc (f, x0, x1, eps)
  fd1:=x->diff(f(x),x);
  fd2:=x->diff(fd1(x),x);
  xp:= x0;
  xn:= x1;
  min:=minimum(f, x0, x1);
  if 0 <evalf(f(xp))*evalf(eval(fd2(x), x = xp)) then
       ptan:= xp;
  else
       ptan:= xn;
  fi;
       xp:= ptan;
  while eps <= abs(evalf(f(xn)))/min do
       xp:= xn;
       xn:= xp-evalf(f(xp))/evalf(eval(fd1(x), x = xp));
    print(cat(`(`, convert(xn, string), `,`,
    convert(xp, string), `)`));
  od;
    alpha:= xn+abs(evalf(f(xn)))/min;
  print(cat(`alpha = `, convert(alpha,string)));
    end proc;

injumatatire:=proc (f, a, b, eps)
        al:= a;
        bl:= b;
        print(al); print(bl);
        n:=1;
```

```
        while n<=round(evalf(((ln(((b-a))/eps)))/(ln(2))))   do
        c:= ((al+bl))/2;
        print(cat(‘n=‘,n, ‘, c=‘, convert(c,string),
        ‘, (‘, convert(al,string), ‘ , ‘, convert(bl, string), ‘)‘));
        if evalf(f(c))*evalf(f(al))<0   then
               bl:= c;
        else
               al:=c;
        fi;
             n:= n+1;
        od;
        c:=((al+bl))/2;
        print(cat(‘n=‘,n, ‘ c=‘, convert(c,string),
       ‘ (‘, convert(al,string), ‘ , ‘, convert(bl, string), ‘)‘));
    end proc;

end module;
> f:=x->x^3-2*x^2-4*x-7;
> ecuatii:-coarda(f, 3, 4, 0.01);
```

$$(3.526315790, 3.616818021)$$

$$(3.616818021, 3.629858244)$$

$$\alpha = 3.620875405$$

```
>ecuatii:-tangenta(f, 3, 4, 0.01);
```

$$(3.678571429, 4)$$

$$(3.632872549, 3.678571429)$$

$$\alpha = 3.634579334$$

```
>ecuatii:-injumatatire(f, 3, 4, 0.01);
```

$$
\begin{aligned}
n &= 1,\ c = \frac{7}{2}, \quad (3, 4)\\
n &= 2,\ c = \frac{15}{4},\ \ (\frac{7}{2}, 4)\\
n &= 3,\ c = \frac{29}{8},\ \ (\frac{7}{2}, \frac{15}{4})\\
n &= 4,\ c = \frac{59}{16},\ \ (\frac{29}{8}, \frac{15}{4})\\
n &= 5,\ c = \frac{117}{32},\ (\frac{29}{8}, \frac{59}{16})\\
n &= 6,\ c = \frac{233}{64},\ (\frac{29}{8}, \frac{117}{32})\\
n &= 7,\ c = \frac{465}{128},\ (\frac{29}{8}, \frac{233}{64})\\
n &= 8,\ c = \frac{929}{256},\ (\frac{29}{8}, \frac{465}{128}).
\end{aligned}
$$

7.6 Aproximarea funcţiilor

7.6.1 Interpolarea funcţiilor

Interpolare Lagrange

Calculul polinomului de interpolare Lagrange pentru funcţii de o singură variabilă se face folosind funcţia predefinită **interp** cu următoarea sintaxă:

$$\textbf{interp}(x,\ y,\ var);$$

Argumentul x reprezintă un vector care conţine nodurile de interpolare, y este un vector care include valorile funcţiei în nodurile de interpolare, iar var reprezintă numele variabilei.

Exemplul 7.15 *Să se afle polinomul de interpolare al lui Lagrange pentru funcţia* $f(x) = cos\pi x$ *pe nodurile* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Soluţie. Polinomul de interpolare Lagrange se determină astfel:

```
L:=interp([0, 1/3, 1/2], [1, 1/2, 0]);
```

$$L := -3x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

Pentru a afla valoarea polinomului L într-un anumit punct α, se introduce comanda

```
> eval(L, x=alpha);
```

Polinomul de interpolare a lui Newton

Procedura *PolNewton*, definită mai jos, returnează **polinomul de interpolare a lui Newton** şi are drept parametri variabila polinomului y, un vector v ce conţine $n+1$ puncte distincte din domeniul de definiţie al lui f şi funcţia f. Dacă funcţia f este necunoscută, atunci f reprezintă un vector care include valorile corespunzătoare nodurilor alese în v. Deoarece în scrierea polinomului lui Newton de un anumit ordin n intervin diferenţele divizate până la ordinul respectiv, s-a elaborat şi procedura *DifDiv* care calculează recursiv diferenţele divizate până la un ordin n specificat. Procedura *DifDiv* are drept parametri o listă cu punctele diviziunii, numărul de puncte ale diviziunii şi funcţia f. Dacă nu se cunoaşte forma funcţiei f atunci f se consideră a fi vectorul care conţine valorile corespunzătoare nodurilor listei.

```
> DifDiv:= proc (x::list, n::posint, f)
       local x1::list, x2::list,res, v1, v2, f1::list, f2::list;
       if n = 2 then
         if type(f, list) then
         res:= (evalf(f[2])-evalf(f[1]))/(x[2]-x[1]);
         else
         res:=(evalf(f(x[2]))-evalf(f(x[1])))/(x[2]-x[1]);
         end if;
         print(x, n, res);
         return res;
      end if;
      x1:= copy([op(x[1 .. n-1])]);
      x2:= copy([op(x[2 ..n])]);
     if type(f, list) then
        f1:= copy([op(f[1 .. n-1])]);
        f2:=copy([op(f[2 .. n])]);
        v1:= DifDiv(x1, n-1, f1);
        v2:= DifDiv(x2, n-1, f2);
```

```
     else
      v1:= DifDiv(x1, n-1, f);
      v2:= DifDiv(x2, n-1, f);
    end if;
      print(x, n, (v2-v1)/(x[n]-x[1]));
      return (v2-v1)/(x[n]-x[1]);
 end proc;
```

```
> PolNewton:= proc (y, v, n, f)
    local prod, sum, i::posint;
       prod := 1;
    if type(f, list) then
       sum:= evalf(f[1]);
    else
       sum:= evalf(f(v[1]));
    end if;
       print(sum);
    for i to n-1 do
       prod:= prod*(y-v[i]);
    if type(f,list) then
       sum:= sum+prod*DifDiv([op(v[1 .. i+1])], i+1,
              [op(f[1.. i+1])]);
    else
      sum:= sum+prod*DifDiv([op(v[1 .. i+1])], i+1, f);
    end if;
      print(sum);
    end do;
      return sum;
  end proc;
```

Exemplul 7.16 *Să se afle polinomul de interpolare al lui Newton pentru funcţia* $f(x) = cos\pi x$ *pe nodurile* $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

Soluţie. Pentru a determina *polinomul lui Newton de ordinul 2* se calculează mai întâi diferenţele divizate de ordinul 1 şi 2 prin apelul procedurii *DifDiv*.

```
> v:=[0, 1/3, 1/2];
> f:=x->cos(Pi*x);
> DifDiv(v, 3, f);
```

$$[0,\ \frac{1}{3}],\quad 2,\ -\frac{3}{2}$$
$$[\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}],\quad 2,\ \ -3$$
$$[0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}],\quad 3,\ \ -3$$
$$-3$$

Apoi se apelează procedura *PolNewton* astfel

```
> N:=PolNewton(y, v, 3, f);
```

$$N := 1 - \frac{3}{2}y - 3y(y - \frac{1}{3})$$

Pentru a evalua valoarea polinomului lui Newton într-un punct specificat α se introduce comanda

```
> eval(N, y=alpha);
```

Interpolare Spline

Aplicaţia **Maple** dispune de funcţia predefinită **spline** cu ajutorul căreia se determină funcţia spline de gradul unu, doi , trei sau patru. Sintaxa funcţiei este următoarea.

spline$(x,\ y,\ var,\ d)$;

Argumentul x este un vector cu punctele diviziunii, y este un vector cu valorile funcţiei în punctele diviziunii, *var* este numele variabilei din funcţia spline, iar d este un număr întreg pozitiv ce reprezintă gradul polinoamelor ce definesc funcţia *spline* sau un nume predefinit: **linear**, **quadratic**, **cubic**, **quartic**. Utilizarea funcţiei trebuie precedată de comanda **readlib(spline)**.

Exemplul 7.17 *Să se determine funcţia spline de gradul* 1, 2, 3 *care interpolează funcţia* $f(x) = sin\pi x$ *pe nodurile* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Soluţie.

```
> readlib(spline):
> S1:=spline([0, 1/6, 1/2], [0, 1/2, 1], x, linear);
```

$$S1 := \begin{cases} 3x, & x < \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x, & \text{în rest} \end{cases}$$

```
> readlib(spline):
> S2:=spline([0, 1/6, 1/2], [0, 1/2, 1], x, quadratic);
```

$$S2 := \begin{cases} 26x^2, & x < \dfrac{1}{12} \\ -\dfrac{2}{9} + \dfrac{16}{3}x - 6x^2, & x < \dfrac{1}{3} \\ 4x - 4x^2, & \text{în rest} \end{cases}$$

```
> readlib(spline):
> S3:=spline([0, 1/6, 1/2], [0, 1/2, 1], x, cubic);
```

$$S3 := \begin{cases} \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}x, & x < \dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{1}{16} + \dfrac{35}{8}x - \dfrac{27}{4}x^2 + \dfrac{9}{2}x^3, & \text{în rest} \end{cases}$$

```
> readlib(spline):
> S4:=spline([0, 1/6, 1/2], [0, 1/2, 1], x, quartic);
```

$$S4 := \begin{cases} \dfrac{177}{56} - \dfrac{240}{7}x^4, & x < \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{336} + \dfrac{169}{56}x + \dfrac{18}{7}x^2 + \dfrac{144}{7}x^3 + \dfrac{162}{7}x^4, & x < \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{53}{112} + \dfrac{489}{256}x - \dfrac{162}{7}x^2 + \dfrac{216}{17}x^3 - \dfrac{108}{7}x^4, & \text{în rest} \end{cases}$$

Pentru a trasa graficul unei funţii **spline** (de exemplu graficul lui S_2) se scriu comenzile:

```
> with(plots);
> plot(S3, x);
```

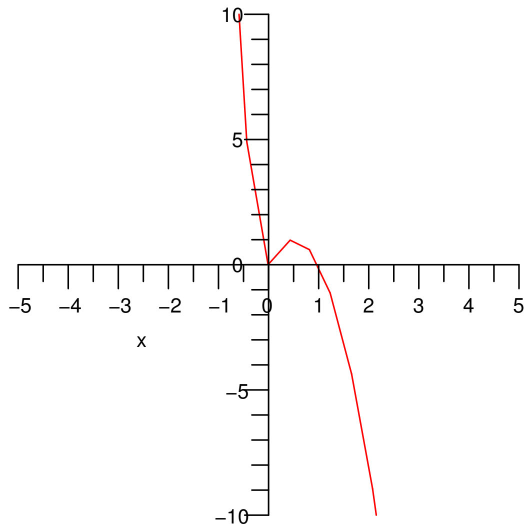


Figura 10. Graficul funcţiei spline de gradul 2

Exemplul 7.18 *Să se calculeze funcţia spline cubică care interpolează datele*

x_i	1	2	4	5
y_i	3	5	9	10

Soluţie.

```
> readlib(spline):
> S3:=spline([1, 2, 4, 5], [3, 5, 9, 10], x, cubic);
```

$$S3 := \begin{cases} 1+\dfrac{17}{18}-\dfrac{3}{16}x^2+\dfrac{1}{16}x^3, & x<2 \\ \dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{15}{16}x^2-\dfrac{1}{8}x^3, & x<4 \\ -\dfrac{35}{2}+\dfrac{119}{8}x-\dfrac{45}{16}x^2+\dfrac{3}{16}x^3, & \text{în rest} \end{cases}$$

7.6.2 Aproximarea prin metoda celor mai mici pătrate

Funcţia care determină polinomul de aproximare prin **metoda celor mai mici pătrate** are sintaxa

$$\textbf{fit}[\textbf{leastsquare}[[lista, ec, par]]](date);$$

Argumentul *lista* conţine, sub forma unei liste, variabilele folosite în expresia curbei de regresie. Argumentul *ec* reprezintă ecuaţia curbei de regresie, care trebuie să fie liniară în coeficienţii necunoscuţi, indicaţi eventual de parametrul *par*.

Argumentul *date* conţine la rândul său o listă de argumente de tip listă cu valori corespondente ale variabilelor. Ordinea listelor trebuie să fie aceeaşi cu cea a variabilelor din argumentul *lista*. Utilizarea funcţiei trebuie precedată de comanda **with(stats):**

Exemplul 7.19 *Să se aproximeze datele de mai jos*

x_i	2	3	4	5
y_i	8	27	64	125

Soluţie.

```
> with(stats):
> fit[leastsquare[[X, Y], Y=a*X^2+b*X+c, {a, b, c}]]
    ([[2, 3, 4, 5], [8, 27, 64, 125]]);
```

$$Y = \frac{21}{2}X^2 - \frac{347}{10}X + \frac{357}{10}$$

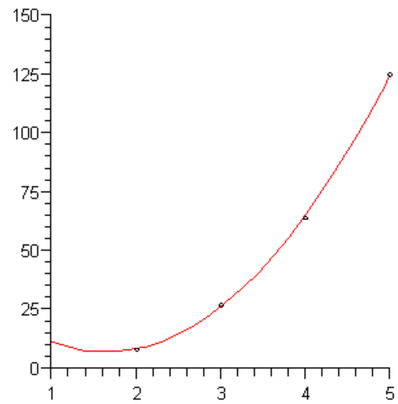


Figura 11. Curba de regresie şi norul de puncte

7.7 Integrarea numerică

7.7.1 Metoda dreptunghiurilor

In acest paragraf sunt elaborate două proceduri pentru calculul valorii aproximative a unei integrale definite folosind **metoda dreptunghiurilor**.Procedura *dreptunghi1* care aproximează o integrală definită are drept parametri funcţia care se integrează, limitele de integrare şi numărul de subintervale de subdiviziune. Procedura returnează valoarea aproximativă a integralei obţinută aplicând **formula dreptunghiurilor**.Procedura *dreptunghi2* este similară, cu deosebirea că în locul numărului de subintervale se introduce un număr pozitiv *eps* care reprezintă eroarea maximă. Deoarece în evaluarea restului formulei dreptunghiurilor intervine maximul derivatei de ordinul doi a funcţiei date f, se crează şi procedura *maximumfdn* care determină maximul derivatei de ordinul n a funcţiei f. Inainte de apelul celor trei proceduri amintite mai sus trebuie iniţializat pachetul **student**.

```
> maximumfdn:= proc (f, a, b, n)
      local fdn, fdnm1, sol;
      if n>0 then
            fdnm1:= x->diff(f(x), x$n);
```

```
      else
            fdnm1:= x->f(x);
      fi;
      fdn:=x->diff(f(x),x$(n+1));
      sol:= fsolve(fdn(x) = 0, x, a..b);
      return max(sol, evalf(eval(fdnm1(x), x = a)),
                 evalf(eval(fdnm1(x), x =b)));
  end proc;

> dreptunghi1:=proc(f,a,b,n)
    local midsum, Rf;
    midsum:=evalf(middlesum(f(x),x=a..b,n));
    Rf:=abs(evalf((b-a)^3/(24*n^2))*maximumfdn(f, a, b, 2));
    print(cat(‘middlesum =‘,convert(midsum,string)));
    print(cat(‘Rf =‘,convert(Rf,string)));
    return cat(‘int~‘,convert(midsum+Rf,string));
  end proc;

> dreptunghi2:= proc (f, a, b, eps)
      local midsum, Rf, n;
      n:= 1;
      Rf:=abs(evalf((b-a)^3/(24*n^2))*maximumfdn(f, a, b, 2));
      while Rf>eps do
        n:= n+1;
      Rf:=abs(evalf((b-a)^3/(24*n^2))*maximumfdn(f, a, b, 2));
      od;
      return cat(‘n=‘, convert(n, string));
  end proc;
```

Exemplul 7.20 *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ *aplicând metoda dreptunghiurilor în cazul* $n = 5$.

Soluţie. Se apelează procedura *dreptunghi1* pentru a calcula $\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ prin împărţirea intervalului $[0, 1]$ în $n = 5$ subintervale.

```
> with(student):
> f:=x->1/(x+1);
> dreptunghi1(f, 0, 1, 5);
```

$$middlesum = .6919078858$$

$$Rf = .3333333334e - 2$$

$$int \sim .6952412191$$

In concluzie, valoarea aproximativă a integralei date este 0.6952412191.

Exemplul 7.21 *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ *cu o eroare* $\leq \frac{1}{1000}$ *aplicând metoda dreptunghiurilor.*

Soluţie. Mai întâi se apelează procedura *dreptunghi2* pentru a determina numărul de iteraţii necesare obţinerii preciziei ε.

```
> with(student):
> f:=x->1/(x+1);
> dreptunghi2(f, 0, 1, 1/1000);
```

$$n = 10$$

Apoi se apelează procedura *dreptunghi1* în cazul $n = 10$ şi se obţine valoarea aproximativă a integralei cu precizia cerută ε.

```
> dreptunghi1(f, 0, 1, 10);
```

$$middlesum = .6928353604$$

$$Rf = .8333333334e - 3$$

$$int \sim .6936686937$$

7.7.2 Metoda Trapezelor

In această secţiune sunt expuse două proceduri **Maple** elaborate în scopul determinării valorii aproximative a unei integrale definite folosind **metoda trapezelor**.Procedura *trapez1* are drept parametri funcţia care se integrează, limitele de integrare şi numărul de subintervale de subdiviziune. Procedura returnează valoarea aproximativă a integralei obţinută aplicând formula trapezelor.Procedura *trapez2* este similară, cu singura deosebire că în locul numărului de subintervale se introduce un număr pozitiv *eps* ce reprezintă eroarea maximă. Deoarece în evaluarea restului formulei trapezelor intervine maximul derivatei de ordinul doi a funcţiei date f, se crează şi procedura *maximumfdn* care determină maximul derivatei de ordinul n a funcţiei f. Inainte de apelul celor trei proceduri amintite mai sus trebuie încărcat pachetul **student**.

```
> maximumfdn:= proc (f, a, b, n)
      local fdn, fdnm1, sol;
      if n>0 then
            fdnm1:= x->diff(f(x), x$n);
      else
            fdnm1:= x->f(x);
      fi;
      fdn:=x->diff(f(x),x$(n+1));
      sol:= fsolve(fdn(x) = 0, x, a..b);
      return max(sol, evalf(eval(fdnm1(x), x = a)),
                 evalf(eval(fdnm1(x), x =b)));
  end proc;

> trapez1:= proc (f, a, b, n)
     local trapez, Rf;
  trapez:=evalf(trapezoid(f(x), x = a .. b, n));
  Rf:=abs(evalf((b-a)^3/(12*n^2))*maximumfdn(f, a, b, 2));
    print(cat(`trapezoid=`, convert(trapez, string)));
    print(cat(`Rf=`, convert(Rf,string)));
    return cat(`int~`, convert(trapez+Rf,string));
 end proc;

> trapez2:= proc (f, a, b, eps)
    local trapez, Rf, n;
```

```
    n:= 1;
    Rf:=abs(evalf((b-a)^3/(12*n^2))*maximumfdn(f, a, b, 2));
    while Rf>eps do
      n:= n+1;
      Rf:=abs(evalf((b-a)^3/(12*n^2))*maximumfdn(f, a, b, 2));
    od;
  return cat(`n=`, convert(n, string));
  end proc;
```

Exemplul 7.22 *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ *aplicând metoda trapezelor pentru* $n = 5$.

Soluţie. Se apelează procedura *trapez1* astfel:

```
> with(student):
> f:=x->1/(x+1);
> trapez1(f, 0, 1, 5);
```

$$trapezoid = .6956349206$$
$$Rf = .6666666666e - 2$$
$$int \sim .7023015873$$

Deci valoarea aproximativă a integralei cerute este 0.7023015873.

Exemplul 7.23 *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ *cu o eroare* $\leq \frac{1}{1000}$ *cu ajutorul metodei trapezelor.*

Soluţie. Se apelează procedura *trapez2* şi se obţin $n = 13$ iteraţii.

```
> with(student):
> f:=x->1/(x+1);
> trapez2(f, 0, 1, 1/1000);
```

$$13$$

Apoi se apelează procedura *trapez1* pentru $n = 13$ şi rezultă valoarea aproximativă a integralei cerute.

```
> trapez1(f, 0, 1, 13);
```

$$trapezoid = .6935167303$$
$$Rf = .9861932938e - 3$$
$$int \sim .6945029236$$

7.7.3 Metoda lui Simpson

Această secţiune include două proceduri **Maple** pentru calculul valorii aproximative a unei integrale definite folosind **Formula lui Simpson**.Procedura *Simpson1* are drept parametri funcţia care se integrează, limitele de integrare şi numărul de subintervale de subdiviziune. Procedura returnează valoarea aproximativă a integralei obţinută aplicând formula lui Simpson. Procedura *Simpson2* diferă de precedenta prin faptul că în locul numărului de intervale se introduce un număr pozitiv *eps* care reprezintă eroarea maximă. Deoarece în evaluarea restului formulei lui Simpson intervine maximul derivatei de ordinul patru a funcţiei date f, se crează şi procedura *maximumfdn* care determină maximul derivatei de ordinul n a funcţiei f. Inainte de apelul celor trei proceduri enumerate mai sus trebuie încărcat pachetul **student**.

```
> maximumfdn:= proc (f, a, b, n)
      local fdn, fdnm1, sol;
      if n>0 then
            fdnm1 := x->diff(f(x), x$n);
      else
            fdnm1 := x->f(x);
      fi;
      fdn:=x->diff(f(x),x$(n+1));
      sol:= fsolve(fdn(x) = 0, x, a..b);
      return max(sol, evalf(eval(fdnm1(x), x = a)),
                 evalf(eval(fdnm1(x), x =b)));
  end proc;

> Simpson1:= proc (f, a, b, n)
     local Simp, Rf;
     Simp:=evalf(simpson(f(x), x = a .. b, n));
     Rf:=abs(evalf((b-a)^5/(2880*n^4))*maximumfdn(f, a, b, 4));
     print(cat(`simpson=`, convert(Simp, string)));
     print(cat(`Rf=`, convert(Rf, string)));
     return cat(`int~`, convert(Simp+Rf, string));
     end proc;

> Simpson2:= proc (f, a, b, eps)
    local Simp, Rf, n;
       n:= 1;
```

```
      Rf:=abs(evalf((b-a)^5/(2880*n^4))*maximumfdn(f, a, b, 4));
   while eps <Rf do
       n:= n+1;
      Rf:=abs(evalf((b-a)^5/(2880*n^4))*maximumfdn(f, a, b, 4));
   od;
   return cat(`n=`, convert(n,string))
 end proc;
```

Exemplul 7.24 *Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Simpson valoarea aproximativă a integralei* $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$ *în cazul* $n = 4$.

Soluţie. Se apelează procedura *Simpson1* după cum urmează:

```
> with(student):
> f:=x->1/(x);
> Simpson1(f, 1, 3, 4);
```

$$simpson = 1.100000000$$

$$Rf = .1041666667e-2$$

$$int \sim 1.101041667$$

In concluzie, valoarea integralei este 1.101041667.

Exemplul 7.25 *Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Simpson valoarea aproximativă a integralei* $\int_1^3 ln(x)dx$ *cu precizia 0.000001.*

Soluţie. Se apelează procedura *Simpson2* şi se determină astfel numărul de iteraţii necesare obţinerii preciziei cerute.

```
> with(student):
> f:=x->ln(x);
> Simpson1(f, 1, 2, 0.000001);
```

$$n = 4$$

Apoi se apelează procedura *Simpson1* considerînd $n = 4$.

```
> Simpson1(f, 1, 2, 4);
```

$$simpson = .3862595628$$

$$Rf = .5086263022e-6$$

$$int \sim 1.3862600714$$

Se obţine astfel valoarea aproximativă a integralei cerute, 1.3862600714.

7.8 Rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale

Procedee Runge-Kutta pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul I

Metodele Runge-Kutta de ordinele 4-5 şi 7-8 sunt implementate în **Maple** în cadrul opţiunii **numeric** a funcţiei predefinite **dsolve**, descrisă în secţiunea **Rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor neliniare.**

Exemplul 7.26 *Să se aproximeze soluţia următoarei ecuaţii diferenţiale*

$$y' = 1 + (x - y)^2, \;\; 2 \le x \le 3$$

cu condiţia iniţială $y(2) = 1$, $h = 0.1$, *folosind procedeul Runge-Kutta de ordinul patru.*

Soluţie. Soluţia exactă a problemei de mai sus este $y(x) = \dfrac{-1 - x + x^2}{-1 + x}$. Aceasta se determină lansând comenzile

```
> ec:={diff(y(x), x)=1+(x-y(x))^2};
```

$$ec := \{\frac{d}{dx}y(x) = 1 + (x - y(x))^2\}$$

```
> ci1:={y(2)=1}:
```

```
> se:=dsolve(ec union ci1, y(x));
```

$$se := y(x) = \frac{-1 - x + x^2}{-1 + x}$$

Rezolvarea acestei probleme cu procedeul Runge-Kutta de ordinul 4, cu pasul $h = 0.1$ şi condiţia iniţială $y(2) = 1$ se face parcurgând etapele:

```
> s:=dsolve(ec union ci1, type=numeric, method=rkf45);
```

$$s := \mathbf{proc}(rkf45\_x)...\mathbf{end\ proc}$$

```
> xi:=2:
  h:=0.1:
  for i from 1 to 5 do
  j:=xi+h*i:
  print(s(j)):
  od:
```

Soluţia problemei va fi afişată sub forma:

$$[x = 2.1, \quad y(x) = 1.19090935959717890]$$

$$[x = 2.2, \quad y(x) = 1.36666696800369048]$$

$$[x = 2.3, \quad y(x) = 1.53076917767251342]$$

$$[x = 2.4, \quad y(x) = 1.68571431372576086]$$

$$[x = 2.5, \quad y(x) = 1.83333359674920038]$$

In parantezele din partea dreaptă primul număr reprezintă nodul în care se calculează soluţia problemei, iar al doilea număr reprezintă valoarea acesteia în nodul respectiv. Pentru a putea aprecia eroarea comisă în punctul $x = 2.4$ se lansează comenzile de mai jos.

```
> Digits:=10;
> eval(se, x=2.4)- s(2.4)[2];
```

$$y(2.4) - y(x) = -2.8 \cdot 10^{-8}$$

Aceasta înseamnă calculul diferenţei dintre valoarea soluţiei exacte în punctul $x = 2.4$ şi valoarea sa aproximativă calculată prin metoda Runge-Kutta de ordinul 4.

7.9 Derivarea numerică

Procedurile *fprim* şi *fsec* returnează valoarea apoximativă pentru derivatele de ordinul I şi II ale unei funcţii f într-un nod specificat x_i, în condiţiile în care sunt cunoscute valorile funcţiei f pe anumite noduri date. Deoarece expresiile celor două derivate depind de diferenţele finite de ordin 1, 2, 3,...etc în nodul x_0 (primul nod dat), s-a elaborat în prealabil procedura *DifFinita* care determină diferenţele finite de ordin specificat prin parametrul k în primul nod dat (acest nod este menţionat în procedură prin parametrul i). Parametrul *fdi* reprezină o listă care include valorile funcţiei f pe nodurile considerate. Procedurile *fprim* şi *fsec* au drept parametri pasul h, $\mu = \dfrac{x - x_0}{h}$ şi lista *fdi*.

```
> DifFinita:=proc(k,i,fdi::list)
    local df;
    if (k=1) then
```

```
        df:=fdi[i+1]-fdi[i];
    else
        df:=DifFinita(k-1,i+1,fdi)-DifFinita(k-1,i,fdi[]);
    end if;
 return df;
 end proc;
```

```
> fprim:= proc (h, mu, fdi)
    local fp;
    fp:= (1/h)*(DifFinita(1, 1, fdi)+(mu-1/2)*DifFinita(2, 1, fdi)+
          (1/2*mu^2-mu+1/3)*DifFinita(3, 1, fdi)+
          (1/6*mu^3-3/4*mu^2+11/12*mu-1/4)*DifFinita(4, 1, fdi));
   return fp;
  end proc;
```

```
> fsec:= proc (h, mu, fdi)
     local fs;
     fs:=(1/h^2)* (DifFinita(2, 1,fdi)+(mu-1)*DifFinita(3, 1, fdi)+
           (1/2*mu^2-3/2*mu+11/12)*DifFinita(4, 1, fdi));
     return fs;
  end proc;
```

Exemplul 7.27 *Să se calculeze* $f\,'(55)$ *pentru funcţia* $f(x) = \log x$ *ale cărei valori în trei puncte sunt date în tabelul de mai jos:*

x_i	50	55	60
$f(x_i)$	1.6990	1.7404	1.7782

Soluţie. Pentru rezolvarea acestei probleme se introduc mai întâi vectorii *xdi* şi *fdi*. Aceştia conţin nodurile date şi valorile funcţiei f pe aceste noduri. Apoi se setează pasul $h = 5$, se calculează μ şi se apelează procedura *DifFinita* pentru a determina diferenţele finite de ordinul I şi II. Procedura *fprim* se va apela pentru a afla polinomul f' notat prin fpx. In continuare se calculează valoarea derivatei fpx pe nodul 55.

```
> xdi:=[50, 55, 60];
```

$$xdi := [50,\ 55,\ 60]$$

```
> fdi:=[1.699, 1.7404, 1.7782];
```

$$fdi := [1.699,\ 1.7404,\ 1.7782]$$

```
> h:=5:
```

```
> mu:=(x-xdi[1])/h;
```

$$\mu := \frac{1}{5}x - 10$$

```
> DifFinita(1, 1, fdi);
```

$$0.0414$$

```
> DifFinita(2, 1, fdi);
```

$$-0.036$$

```
> fpx:=fprim(h, mu, fdi);
```

$$fpx := 0.01584 - 0.000144x$$

```
> eval(fpx, x=55);
```

$$0.00792$$

Exemplul 7.28 *Sunt date valorile funcţiei f (necunoscută) în tabelul*

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x_i)$	2.463	2.487	2.513	2.541	2.563

Să se calculeze $f'(0.2)$ şi $f''(0.3)$.

Soluţie. Rezolvarea acestei probleme presupune mai întâi introducerea vectorilor *xdi* şi *fdi*. Aceştia conţin nodurile date şi valorile funcţiei f pe aceste noduri. Apoi se setează pasul h, se calculează μ şi se apelează procedura *DifFinita* (specificându-se de fiecare dată ordinul dorit pentru diferenţa finită), iar după aceea se apelează procedurile *fprim* şi *fsec*. In final se calculează valoarea derivatelor fpx şi fsx pe nodurile 0.2 respectiv 0.3.

```
> xdi:=[0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5];
```

$$xdi := [0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5]$$

```
> fdi:=[2.463, 2.487, 2.513, 2.541, 2.563];
```

$$fdi := [2.463,\ 2.487,\ 2.513,\ 2.541,\ 2.563]$$

```
> h:=0.1:
```

```
> mu:=(x-xdi[1])/h;
```

$$\mu := 10x - 1$$

```
> DiffFinita(1, 1, fdi);
```

$$0.024$$

```
> DiffFinita(2, 1, fdi);
```

$$0.002$$

```
> DiffFinita(3, 1, fdi);
```

$$0$$

```
> DiffFinita(4, 1, fdi);
```

$$-0.008$$

```
> fpx:=fprim(h, mu, fdi);
```

$$fpx := 0.3033 - 0.5333x - 0.13333(10x-1)^3 + 0.06(10x-1)^2$$

```
> eval(fpx, x=0.2);
```

$$0.2433333334$$

```
> fsx:=fsec(h, mu, fdi);
```

$$fsx := -1.7333 - 0.4(10x-1)^2 + 12x$$

```
> eval(fsx, x=0.3);
```

$$0.266666666$$

Capitolul 8

Soluţiile problemelor propuse

8.1 CAPITOLUL 1

1. Fie $x = \pi = 3.14159$, $x^{*}= 3.14$.

Avem

$$|\Delta x| = |x - x^{*}| \le |3.14159 - 3.14| = 0.00159 \simeq 0.0016$$

$$|\delta x| = \frac{|\Delta x|}{|x^{*}|} \le \frac{0.0016}{3.14} = 0.0005$$

2. $a)$ $x = 1.4141136$, $x^{*} = 1.414$, $|\Delta x| = 2.1356 \times 10^{-4}$, $|\delta x| = 1.51 \times 10^{-4}$
$b)$ $x = 1385.4473$, $x^{*} = 1400$, $|\Delta x| = 14.5527$, $|\delta x| = 1.05 \times 10^{-2}$
$c)$ $x = 22026.466$, $x^{*} = 22000$, $|\Delta x| = 26.4657$, $|\delta x| = 1.202 \times 10^{-3}$
$d)$ $x = 5040$, $x^{*} = 5000$, $|\Delta x| = 40$, $|\delta x| = 7.9365 \times 10^{-3}$

3. Volumul unei sfere este dat de formula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}, \quad d = 2r$$

care este funcţie de π şi d.

Deci,

$$V(\pi, d) = \frac{\pi d^3}{6}$$

Se cunosc $d^{*} = 3.7$, $\pi^{*} = 3.14$ $\Delta d = 0.04$ şi $\Delta\pi = 3.14159 - 3.14 = \simeq 0.0016$.

Trebuie calculate erorile ΔV şi δV conform formulelor (1.14) respectiv (1.15).

Avem

$$\Delta V = \Delta\pi \cdot V'_\pi + \Delta d \cdot V'_d, \quad V'_\pi = \frac{d^3}{6}, \quad V'_d = \frac{\pi d^2}{2}$$

Deci

$$V'_\pi(\pi^*, d^*) = V'_\pi(3.14; 3.7) = \frac{1}{6} \cdot 3.7^3 = 8.44$$
$$V'_d(\pi^*, d^*) = V'_d(3.14; 3.7) = \frac{3.14 \cdot 3.7^2}{2} = 21.49$$

$$\Delta V = 0.0016 \cdot 8.44 + 0.04 \cdot 21.49 = 0.8731$$

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{0.8731}{\frac{1}{6} \cdot 3.14 \cdot 3.7^3} = 0.0329 \simeq 3.3$$

4. Se va folosi principiul efectelor egale, adică formula (1.16)

$$\Delta x_i \simeq \frac{\Delta f}{n f'_{x_i}}$$

unde $n = 3$ şi $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = S_{\Delta ABC}$. Avem

$$S_{\Delta ABC} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}, \quad S(b^*, c^*, \hat{A}^*) = \frac{b^* c^* \sin \hat{A}^*}{2}$$

$$\begin{aligned}
S'_{b^*} &= \frac{c^* \sin \hat{A}^*}{2}, \qquad S'_{b^*} = \frac{8 \sin \frac{\pi}{6}}{2} = 2 \\
S'_{c^*} &= \frac{b^* \sin \hat{A}^*}{2}, \qquad S'_{c^*} = \frac{20 \sin \frac{\pi}{6}}{2} = 5 \\
S'_{\hat{A}^*} &= \frac{b^* c^* \cos \hat{A}^*}{2}, \quad S'_{\hat{A}^*} = \frac{20 \cdot 8 \cos \frac{\pi}{6}}{2} = 40\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta b &= \frac{\Delta S}{3S'_{b^*}} = \frac{0.6}{3\cdot 2} = 0.1\\
\Delta c &= \frac{\Delta S}{3S'_{c^*}} = \frac{0.6}{3\cdot 5} = 0.04\\
\Delta \hat{A} &= \frac{\Delta S}{3S'_{\hat{A}^*}} = \frac{0.6}{3\cdot 40\sqrt{3}} = 0.05\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

5. Se aplică formula (1.16). Aria elipsei este $S = \pi ab$
Deci

$$S(\pi^*, a^*, b^*) = \pi^* a^* b^*, \quad \Delta S = 0.1, \quad \pi^* = 3.14, \quad a^* = 5, \ b^* = 3$$

$$\begin{aligned}
S'_{\pi^*} &= a^* b^*, \quad S'_{\pi^*} = 5\cdot 3 = 15\\
S'_{a^*} &= \pi^* b^*, \quad S'_{a^*} = 3.14\cdot 3 = 9.42\\
S'_{b^*} &= \pi^* a^*, \quad S'_{b^*} = 3.14\cdot 5 = 15.7
\end{aligned}$$

6.

- $f(x) = \sin x, \quad \Delta f \simeq \Delta x^* f'_x = \cos x \Delta x^* \Rightarrow \Delta x^* \simeq \dfrac{\Delta f}{\cos x} = \Delta f \sec x$
- $f(x) = \mathrm{tg} x, \quad \Delta f \simeq \Delta x^* f'_x = \dfrac{1}{\cos^2 x}\Delta x^* \Rightarrow \Delta x^* \simeq \Delta f \cos^2 x$

Avem

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0		1
$\cos x$	1	$\searrow$	0
sec x	1	$\nearrow$	∞

De aici, se vede că

$$\Delta f \sec x > \Delta f \cos^2 x$$

Prin urmare, eroarea produsă folosind funcţia *tg* este mai mică decât cea pentru funcţia *sin* .

7.

1^0. $161_{10} = 10100001_2$.
2^0. $23456_{10} = 101101110100000_2$.
3^0. $125.375_{10} = 1.111011010\ 10_2^6$.
4^0. $1259.3359375_{10} = 1.001110101\ 10_2^{10}$. Soluţia în Maple se obţine folosind instrucţiunea *convert* (1259.3359375*, binary*);
5^0. $11010110_2 = 214_{10}$. Soluţia în Maple se obţine folosind instrucţiunea *convert* (11010110*, decimal, binary*);
6^0. $101.010101_2 = 5.328125000_{10}$
7^0. $100101.0001_2 = 37.06250000_{10}$
8^0. $1010101010101_2 = 5461_{10}$.

8.2 CAPITOLUL 2

1. a) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, sistem compatibil determinat. b) $x_1 = -1 + 3\alpha$, $x_2 = 1 - 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sistem compatibil nedeterminat. c), d), e) Sistem incompatibil. f) $x_1 = -\frac{112}{19}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{202}{19}$, $x_4 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sistem compatibil nedeterminat. g) $x_1 = -7$, $x_2 = \frac{7}{3}$, $x_3 = \frac{17}{3}$, $x_4 = \frac{1}{3}$, sistem compatibil determinat. Soluţia în Maple se obţine prin accesarea *Tools/Tutors/Linear Algebra/Gaussian Elimination* şi urmarea paşilor descrişi în secţiunea **Eliminarea Gaussiană** din Capitolul 7. h) Sistem incompatibil.

2. a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e) Soluţia în Maple se obţine astfel: 1) Se determină inversa matricei A accesând calea *Tools/Tutors/Linear Algebra/Matrix Inverse* şi urmând paşii enumeraţi în secţiunea **Rezolvarea matricelă a sistemelor liniare** din Capitolul 7. Inversa matricei va fi afişată în foaia de lucru activă şi se notează *Inversa* prin intermediul instrucţiunii *Inversa:=evalm*(%);

$$Inversa = \begin{pmatrix} 1/18 & 1/9 & 1/6 & 1/9 \\ 1/9 & -1/18 & 1/9 & -1/6 \\ 1/6 & -1/9 & -1/18 & 1/9 \\ -1/9 & -1/6 & 1/9 & 1/18 \end{pmatrix}$$

2) Se introduce matricea b prin comanda *b:=matrix*(4, 1, [6, 8, 4, −8]);
3) Se obţine soluţia sistemului scriind comanda *x:=evalm*($Inversa\& * b$); de unde rezultă $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. a)

–

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \qquad a_{11} = 2,\ \ w = (2\ \ 3),\ \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \frac{v}{a_{11}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A' - \frac{v}{a_{11}} w = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} (2\ \ 3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

–

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & 2 & 3 \\ \hline 1/2 & 2 & -3/2 \\ \cline{2-3} 1/2 & 1 & -1/2 \end{array} \qquad a'_{11} = 2,\ \ w' = -3/2,\ \ v' = 1,\ \frac{v'}{a'_{11}} = (1/2)$$

$$A'' = (-1/2)$$

$$A'' - \frac{v'}{a'_{11}} w' = \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

–

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & 2 & 3 \\ \hline 1/2 & 2 & -3/2 \\ \hline 1/2 & 1/2 & 1/4 \end{array} \quad \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Verificare:

$$LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\1/2&1/2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&3\\0&2&-3/2\\0&0&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&3&0\\1&2&1\end{pmatrix}=A$$

b)

–

$$\begin{array}{r|ccc}5&7&6&5\\\hline 7&10&8&7\\6&8&10&9\\5&7&9&10\end{array}\qquad a_{11}=5,\;\; w=(7\;\;6\;\;5),\;\; v=\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix},$$

$$A'=\begin{pmatrix}10&8&7\\8&10&9\\7&9&10\end{pmatrix},\;\;\frac{v}{a_{11}}=\begin{pmatrix}7/5\\6/5\\1\end{pmatrix}$$

$$A'-\frac{v}{a_{11}}w=\begin{pmatrix}10&8&7\\8&10&9\\7&9&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7/5\\6/5\\1\end{pmatrix}(7\;\;6\;\;5)=\begin{pmatrix}10&8&7\\8&10&9\\7&9&10\end{pmatrix}-$$
$$-\begin{pmatrix}49/5&42/5&7\\42/5&36/5&6\\7&6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5&-2/5&0\\-2/5&14/5&3\\0&3&5\end{pmatrix}$$

–

$$\begin{array}{c|c|cc}5&7&6&5\\\hline 7/5&1/5&-2/5&0\\\cline{2-4} 6/5&-2/5&14/5&3\\1&0&3&5\end{array}\qquad a'_{11}=1/5,\;\; w'=(-2/5\;\;0),\;\; v'=\begin{pmatrix}-2/5\\0\end{pmatrix},$$

$$A''=\begin{pmatrix}14/5&3\\3&5\end{pmatrix},\;\;\frac{v'}{a'_{11}}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$

$$A''-\frac{v'}{a'_{11}}w'=\begin{pmatrix}14/5&3\\3&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}(-2/5\;\;0)=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$$

–

$$\begin{array}{c|c|c|c}5&7&6&5\\\hline 7/5&1/5&-2/5&0\\\cline{2-4} 6/5&-2&2&3\\\cline{3-4} 1&0&3&5\end{array}\qquad a''_{11}=2,\;\; w''=3,\; v''=3/2,\;\frac{v''}{a''_{11}}=3/2,\; A'''=(5)$$

$$A'''-\frac{v''}{a''_{11}}w''=5-\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{1}{2}$$

–

$$\begin{array}{c|c|c|c}5&7&6&5\\\hline 7/5&1/5&-2/5&0\\\cline{2-4} 6/5&-2&2&3\\\cline{3-4} 1&0&3/2&1/2\end{array}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7/5 & 1 & 0 & 0 \\ 6/5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Verificare:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7/5 & 1 & 0 & 0 \\ 6/5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = A$$

Soluţia în Maple (pct. b) se obţine scriind succesiunea de instrucţiuni:
1) $with(linalg)$:
2) $A := matrix(4,\ 4,\ [5,\ 7,\ 6,\ 5,\ 7,\ 10,\ 8,\ 9,\ 6,\ 8,\ 10,\ 9,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10]);$
3) $LUdecomp(A, L =' B', U =' C');$
4) $U := evalm(C)$; de unde rezultă $U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
5) $L := evalm(B)$; de unde rezultă $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7/5 & 1 & 0 & 0 \\ 6/5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 + y_2 \\ 2y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 4x_2 + 6x_3 \\ 16x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & -3 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 1 \end{array}$$

b)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -2y_1 + 2y_2 + y_3 \\ 3y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3 + y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 2 \\ y_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -2x_3 - x_4 \\ -\frac{1}{2}x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

5. a)

$$\begin{cases} (\lambda - 1)v_1 - 2v_2 = 0 \\ -5v_1 + (\lambda - 4)v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0, \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 - 2v_2 = 0 \\ -5v_1 - 5v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -v_2$$

Fie $v_2 = -1 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} 5v_1 & - & 2v_2 & = & 0 \\ -5v_1 & + & 2v_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow 5v_1 = 2v_2$$

Fie $v_2 = 5 \Rightarrow v_1 = 2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) Soluţia în Maple se obţine scriind succesiunea de instrucţiuni:

1) $with(linalg)$:

2) $I3 := evalm(diag(1\$3))$;

3) $A := matrix(3,\ 3,\ [2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2])$;

4) $polchar := det(evalm(q * I3 - A))$; rezultă $polchar := q^3 - 7q^2 + 14q - 8$

5) $\lambda := solve(polchar,\ q)$; rezultă $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 =,\ \lambda_3 = 4$

6) $v1 := nullspace(\lambda[1] - A)$; rezultă $v_1 := [1,\ -1,\ 1]$

7) $v2 := nullspace(\lambda[2] - A)$; rezultă $v_2 := [-1,\ 0,\ 1]$

8) $v3 := nullspace(\lambda[3] - A)$ rezultă $v_3 := [1,\ 2,\ 1]$.

e)

$$\begin{cases} (\lambda - 1)v_1 & - & 5v_2 & + & 8v_3 & = & 0 \\ -5v_1 & + & (\lambda + 2)v_2 & - & 5v_3 & = & 0 \\ 8v_1 & - & 5v_2 & + & (\lambda - 1)v_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -5 & 8 \\ -5 & \lambda + 2 & -5 \\ 8 & -5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -12,\ \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 8v_1 & - & 5v_2 & + & 8v_3 & = & 0 \\ -5v_1 & + & 11v_2 & - & 5v_3 & = & 0 \\ 8v_1 & - & 5v_2 & + & 8v_3 & = & 0 \end{cases},\ P = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 11 \end{vmatrix} = 63 \neq 0$$

$$\frac{v_1}{\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}} = -\frac{v_2}{\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{v_3}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 11 \end{vmatrix}} = k,\ k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{v_1}{-63} = \frac{-v_2}{0} = \frac{v_3}{63} = k \Rightarrow \begin{cases} v_1 & = & -63k \\ v_2 & = & 0 \\ v_3 & = & 63k \end{cases}, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -12 \Rightarrow \begin{cases} -13v_1 & - & 5v_2 & + & 8v_3 & = & 0 \\ -5v_1 & - & 10v_2 & - & 5v_3 & = & 0 \\ 8v_1 & - & 5v_2 & - & 13v_3 & = & 0 \end{cases}, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 - 5v_2 + 8v_3 = 0 \\ -5v_1 + 5v_2 - 5v_3 = 0 \\ 8v_1 - 5v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases}, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

f) $\lambda_1 = 7, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\lambda_2 = \sqrt{3}, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{3}, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

g) $\lambda_1 = 14, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 4, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_3 = 8, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_4 = 6, \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. După 10 iteraţii se obţin soluţiile:

a)	*b)*
$x_1 = -2412.672068$	$x_1 = -9.792599922\ 10^9$,
$x_2 = -1954.741512$	$x_2 = -7.837306107\ 10^9$.
$x_3 = -9569.784715$	$x_3 = -1.964821360\ 10^8$

7. Se apelează în Maple procedura *JacobiEps* astfel: $JacobiEps(A,\ tl,\ x_0,\ 0.00005)$; ($A$ este matricea asociată sistemului, tl este matricea termenior liberi, x_0 este soluţia iniţială nulă, iar 0.00005 reprezintă precizia.) $\Rightarrow$ după 19 iteraţii se obţine soluţia cu precizia cerută, aceasta fiind: $x_1 = -0.1751799280$, $x_2 = -0.5338226988$, $x_3 = 0.4165691054$, $x_4 = 1.371058764$.

8. Se apelează în Maple procedura *GaussSeidel* astfel: $GaussSeidel(A,\ tl,\ x_0,\ 10)$; $\Rightarrow$ $x_1 = -0.1787121320\ 10^{12}$, $x_2 = 0.8589778685\ 10^{12}$, $x_3 = 3.750500369\ 10^{13}$, $x_4 = -0.9465606985\ 10^{13}$.

9. Se apelează în Maple procedura *GaussSeidelEps* astfel: $GaussSeidelEps(A,\ tl,\ x_0,\ 0.0001)$; $\Rightarrow$ după 18 iteraţii se obţine soluţia cu precizia cerută, aceasta fiind: $x_1 = 1.796755042,\ x_2 = 0.4843319302,$ $x_3 = -0.1562357864.$

8.3 CAPITOLUL 3

1. a) Fie $f(x) = x^3 + x - 1$. Trasând graficul funcţiei f se deduce că rădăcina aproximativă α se află în intervalul $(0, 1)$.

Funcţia f este continuă pe $(0, 1)$.

$$\begin{array}{rcr} f(0) & = & -1 < 0 \\ f(1) & = & 1 > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in (0, 1), f''(x) = 6x > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

Deci funcţia f satisface toate condiţiile teoremei Bolzano-Cauchy.
Se va calcula numărul de paşi (iteraţii) necesari pentru a avea precizia cerută

$$n \geq \frac{\ln \frac{b-a}{\epsilon}}{\ln 2}, n \geq \frac{\ln \frac{1-0}{0,01}}{\ln 2}, n \geq \frac{\ln 100}{\ln 2}, \Rightarrow n \geq 6.64 \Rightarrow 7 \text{ iteraţii}$$

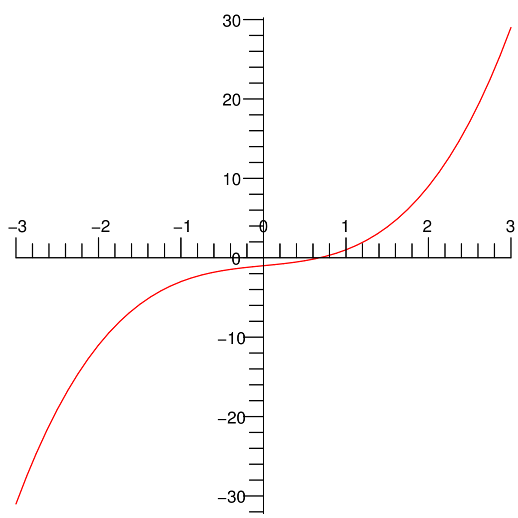


Figura 1. Graficul funcţiei $f(x) = x^3 + x - 1$

Fie α rădăcina aproximativă, $\alpha \in (0, 1)$.

Avem

$$\begin{array}{llll}
f(1) > 0 & c_1 = \dfrac{1}{2} & f(c_1) = -0.37 < 0 & \Rightarrow \alpha \in (\dfrac{1}{2}, 1) \\
 & c_2 = \dfrac{3}{4} & f(c_2) = \quad 0.17 > 0 & \Rightarrow \alpha \in (\dfrac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\
 & c_3 = \dfrac{5}{8} & f(c_3) = -0.13 < 0 & \Rightarrow \alpha \in (\dfrac{5}{8}, \dfrac{3}{4}) \\
 & c_4 = \dfrac{11}{16} & f(c_4) = \quad 0.01 > 0 & \Rightarrow \alpha \in (\dfrac{5}{8}, \dfrac{11}{16}) \\
 & c_5 = \dfrac{21}{32} & f(c_5) = -0.06 > 0 & \Rightarrow \alpha \in (\dfrac{21}{32}, \dfrac{11}{16})
\end{array}$$

$$c_6 = \frac{43}{64} \quad f(c_6) = -0.02 < 0 \quad \Rightarrow \alpha \in (\frac{43}{64}, \frac{11}{16})$$

$$c_7 = \frac{87}{128} \quad f(c_7) = -0.06 < 0 \quad \Rightarrow \alpha \in (\frac{87}{128}, \frac{11}{16})$$

Rădăcina aproximativă este $\alpha = c_8 = \dfrac{175}{256} = 0.6835$.

b) Fie $f(x) = x^3 + x - 4$. Soluţia problemei (în Maple) se obţine parcurgând paşii:
1) $with(plots):$
2) $f := x \to x^3 + x - 4;$
3) $plot(f, \ -3..3)$; se obţine astfel graficul funcţiei f de unde se deduce că ecuaţia admite rădăcini în intervalul $(1, \ 2)$

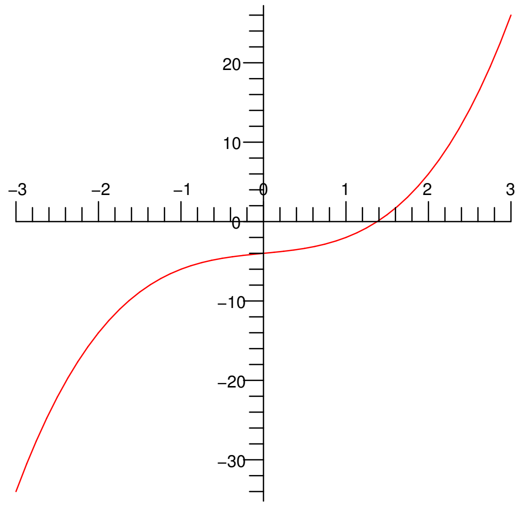


Figura 2. Graficul funcţiei $f(x) = x^3 + x - 4$

4) Se apelează procedura *injumatatire* astfel: $injumatatire(f,\ 1,\ 2,\ 10^{-3})$; de unde rezultă că soluţia aproximativă este $c_8 = \frac{353}{256}$ şi se obţine după 8 iteraţii.
c) $n \geq 14$, $c_{14} = 1.32477$.

2. a) Fie $f(x) = x^3 + x - 1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. $f(1) \cdot f''(1) > 0 \Rightarrow$ punctul fix din care se duc coardele este $x_1 = 1$.

x	0	1
$f''(x)$	+	
$f'(x)$	$\nearrow$	

$\min f'(x) = f'(0) = 1 \Rightarrow m = 1$

$$x_2 = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_0) = 0 - \frac{1-0}{1-(-1)} \cdot (-1) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} \quad \frac{|f(x_2)|}{m} = \frac{3}{8} = 0.375 > 0.01$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} f(x_2) = \frac{1}{2} - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{8}} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{11} = 0.6363$$

$$f(x_3) = f\left(\frac{7}{11}\right) = -0.1059 \quad \frac{|f(x_3)|}{m} = 0.105 > 0.01$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_1 - x_3}{f(x_1) - f(x_3)} f(x_3) = \frac{7}{11} - \frac{1 - \frac{7}{11}}{1 + \frac{141}{1331}} \cdot \left(-\frac{141}{1331}\right) = 0.6711$$

$$f(x_4) = -0.0267 \quad \frac{|f(x_4)|}{m} = 0.0267$$

$$x_5 = x_4 - \frac{x_1 - x_4}{f(x_1) - f(x_4)} f(x_4) = 0.6711 - \frac{1 - 0.6711}{1 + 0.0267} \cdot (-0.0267) = 0.6796$$

$$f(x_5) = -0.00649 \quad \frac{|f(x_5)|}{m} = 0.00649 < 0.01$$

$\Rightarrow \alpha \in (0.6711, 0.6796),\ \alpha \approx 0.6776.$
b) Fie $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x - 7$. Soluţia în Maple se obţine urmând instrucţiunile:
1) $with(plots)$:
2) $f := x \to 2x^3 - x^2 - 7x - 7;$
3) $plot(f,\ -5..5)$; astfel rezultă graficul funcţiei f (figura 3) de unde se deduce că ecuaţia dată admite o rădăcină în intervalul $(2,\ 3)$

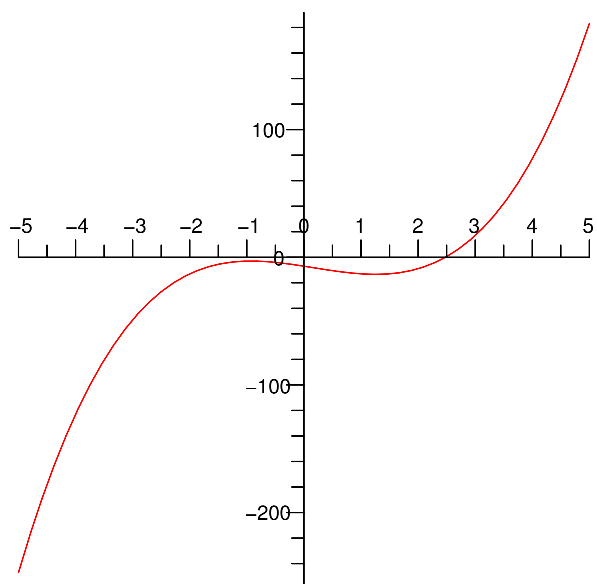


Figura 3. Graficul funcţiei $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x - 7$

4) Se apelează procedura *minimum* astfel: *minimum*$(f,\ 2,\ 3)$; rezultă că minimul lui f pe $(-2,\ 3)$ este 13

5) Se apelează procedura *coarda* astfel: *coarda*$(f,\ 2,\ 3,\ 0.01,\ 13)$; rezultă, după 3 iteraţii, $\alpha \approx 2.475844779$.

3. a) $f(x) = x^3 + x - 1, f(1) \cdot f''(1) > 0 \quad \Rightarrow$ punctul din care se trasează prima tangentă este $x_1 = 1$.

Fie $m = \min f'(x),\ x \in (0,1)$. Atunci $m = 1$.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75;\ f(x_2) = \frac{11}{64} = 0.1718$$

$$\frac{|f(x_2)|}{m} = 0.1718$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{3}{4} - \frac{f\left(\frac{3}{4}\right)}{f'\left(\frac{3}{4}\right)} = 0.75 - \frac{0.1718}{2.6875} = 0.686$$

$$f(x_3) = f(0.6861) = 0.009, \quad \frac{|f(x_3)|}{m} = 0.009 < 0.01$$

Deci $\alpha \in (0.6861, 0.75)$, $\alpha \approx 0.6861 + 0.009 \quad \Rightarrow \alpha \approx 0.6951$.

b) $f(x) = x \cdot \lg x - 1$. Din graficul funcţiei $f(x) = x \cdot \lg x - 1$ se deduce că rădăcina aproximativă α se află în intervalul $(2,3)$.

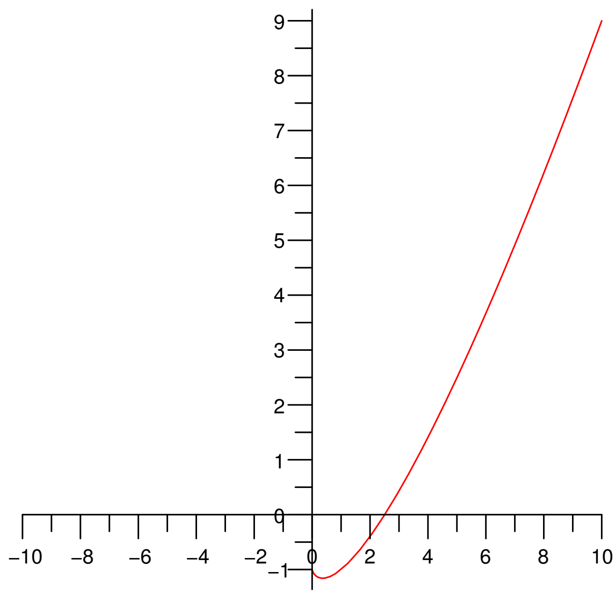


Figura 4. Graficul funcţiei $f(x) = x \cdot \lg x - 1$

Funcţia f este continuă pe $(2,3)$. $f(2) = -0.3979 < 0$, $f(3) = 0.4313 > 0$, $f'(x) = \lg x + \frac{1}{\ln 10} > 0$ pentru $x \in (2,3)$, $f(3) \cdot f''(3) > 0 \quad \Rightarrow$ punctul din care se trasează prima tangentă este $x_1 = 3$.

x	2	3
$f''(x)$	$+$	
$f'(x)$	$\nearrow$	

$\Rightarrow \min f'(x) = f'(2) = 0.735$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 2.5267; f(x_2) = 0.017132; \frac{|f(x_2)|}{m} = 0.023309$$

$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.5267 - \frac{0.017132}{0.8368} = 2.5062; f(x_3) = 0.0000132$$

$$\frac{|f(x_3)|}{m} = 1,8 \cdot 10^{-5} = \frac{0,18}{10^4} = 0.000018 < \epsilon \Rightarrow \alpha \in (2.5062, 2.5267),$$

$\alpha \approx 2.506218$.

c) I. $\alpha \in (-11, -10)$, $a = -11$, $b = -10$

x	-11		-10.5		-10
$f''(x)$		$+$	1317	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

$f'(x) = 4x^3 - 6x + 75 < 0$ pe $(-11, -10)$, $f''(x) = 12x^2 - 6 = 0 > 0$ pe $(-11, -10)$

$\min f'(x) = f'(-11) = -5183 \Rightarrow m = -5183$, $f(-11) \cdot f''(-11) > 0 \Rightarrow x_0 = -11$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -11 - \frac{3453}{-5183} = -10.3338; f(x_1) = 308.1563$$

$$\frac{|f(x_1)|}{m} = \frac{|308.1563|}{-5183} = -0.0594$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -10.2618; f(x_2) = f(-10.2618) = 3.4973$$

$$\frac{|f(x_2)|}{m} = \frac{|3.4973|}{-5183} = -0.000675$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} > -10.260964; f(x_3) = f(-10.260964) = -0.001594$$

$$\frac{|f(x_3)|}{m} = -0.3 \cdot 10^{-6} < 0.00001; \Rightarrow \alpha \in (-10.2618, -10.260964), \alpha \approx -10.2609643$$

II. $\alpha \in [9, 10]$

x	9		9.5		10
$f''(x)$		$+$	1077	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 - 6x + 75 > 0, \\ f''(x) = 12x^2 - 6 > 0 \end{array}\right. \quad x \in (9, 10)$$

$$\min f'(x) = f'(9) = 2937 \Rightarrow m = 2937, f(10) \cdot f''(10) > 0 \Rightarrow x_0 = 10$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 10 - \frac{450}{4015} = 9.88792; f(x_2) = 7.44211; \frac{|f(x_1)|}{m} = 0.002534$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 9.88600325; f(x_2) = 0.002130564; \frac{|f(x_2)|}{m} = 0.000000725$$

$$|x_2 - \alpha| = \alpha - x_2 < 0.00000075 \Rightarrow \alpha \in (9.88792, 9.88600), \alpha \approx 9.889004$$

Aproximarea s-a făcut cu o precizie mai bună decât cea cerută (10^{-6}). d) Din grafic $\Rightarrow \alpha_1 \in (-2, -1)$, $\alpha_2 \in (0, 1)$, $\alpha_3 \in (1, 2)$. Se obţine $\alpha_1 \approx -1.9509$, $\alpha_2 \approx 0.756$, $\alpha_3 \approx 1.694$. e) $\alpha \in (1, 2)$. După 6 iteraţii $\Rightarrow 1.22074 < \alpha < 1.220744$.

e) $f(x) = x^4 - x - 1$. Soluţia în Maple se obţine urmând instrucţiunile:
1) $with(plots)$:
2) $f := x \to x^4 - x - 1$;
3) $plot(f,\ -2..2)$; astfel rezultă graficul funcţiei f (figura 5) de unde se deduce că ecuaţia dată are 2 rădăcini: una în intervalul $(-1,\ 0)$ şi cealaltă în $(1,\ 2)$

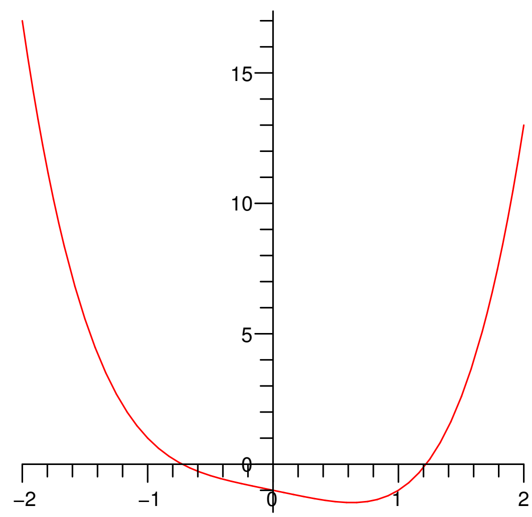


Figura 5. Graficul funcţiei $f(x) = x^4 - x - 1$

4) Se apelează procedura *minimum* astfel: $minimum(f,\ -1,\ 0)$; rezultă că minimul lui f pe $(-1,\ 0)$ este -5
5) Se apelează procedura *minimum* astfel: $minimum(f,\ 1,\ 2)$; rezultă că minimul lui f pe $(1,\ 2)$ este 3
6) Se apelează procedura *tangenta* astfel: $tangenta(f,\ -1,\ 0,\ 10^{-7},\ -5)$; rezultă $\alpha \approx -0.2$
7) Se apelează procedura *tangenta* astfel: $tangenta(f,\ 1,\ 2,\ 10^{-7},\ 3)$; rezultă $\alpha \approx 1.22074$.

8.4 CAPITOLUL 4

1. a) Reprezentarea grafică a punctelor de mai sus este dată în figura 6, de unde se vede că funcţia care aproximează aceste date este liniară $f\,(x; a, b) = ax + b$. Din formula (4.4) se obţine $a = 0.62$ şi $b = 4.64$. Deci funcţia care aproximează aceste date este $f(x) = 0.62x + 4.64$.

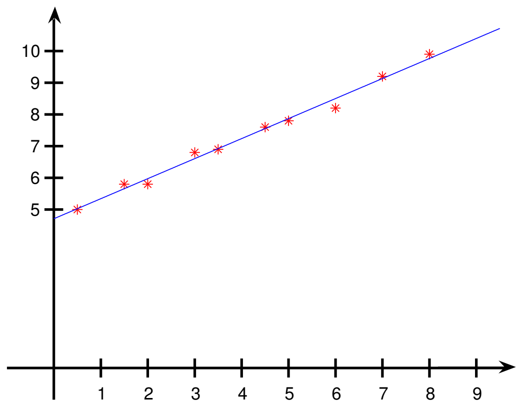


Figura 6. Graficul funcţiei $f(x) = 0.62x + 4.64$.

b) Reprezentând punctele corespunzătoare datelor (figura 7), se constată că ele pot fi aproximate foarte bine cu un arc de parabolă $f(x; a, b, c) = $ $= ax^2 + bx + c$.
Determinarea parametrilor a, b şi c se face din următorul sistem (vezi (4.6)).

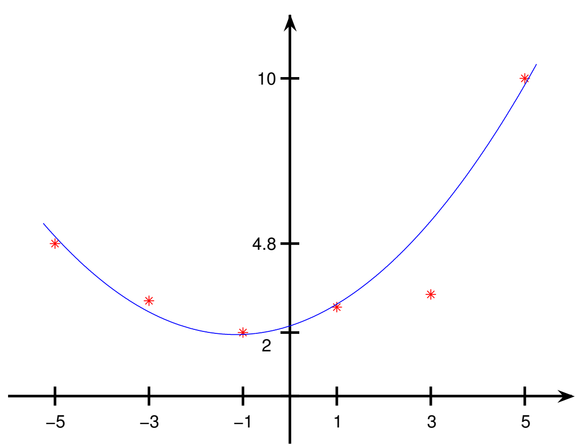


Figura 7. Graficul funcţiei $f(x) = 0.208x^2 + 0.477x + 2.21$

$$\begin{aligned}
a\sum_{i=1}^{6} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{6} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{6} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 y_i \\
a\sum_{i=1}^{6} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{6} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{6} x_i &= \sum_{i=1}^{6} x_i y_i \\
a\sum_{i=1}^{6} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{6} x_i + \ nc &= \sum_{i=1}^{6} y_i
\end{aligned}$$

Se alcătuieşte tabelul:

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
-5	4.8	25	-125	625	-24.0	120
-3	3.0	9	-27	81	-9.0	27
-1	2.0	1	-1	1	2.0	2
1	2.8	1	1	1	2.8	2.8
3	5.2	9	27	81	15.6	46.8
5	10.0	25	125	625	50	250
$\sum_{i=1}^{6} x_i = 0$	27.8	70	0	1414	33.4	448.6

Deci

$$\begin{array}{rcrcl}
1414a & + & 70c & = & 448.6 \\
 & 70b & & = & 33.4 \\
70a & + & c & = & 27.8
\end{array} \Rightarrow a = 0.208, \quad b = 0.477, \quad c = 2.21$$

Ecuaţia parabolei care aproximează aceste date este

$$f(x) = 0.208x^2 + 0.477x + 2.21$$

c) Aceste date sunt aproximate de funcţia (vezi figura 8):

$$f(x) = 1.0023x^2 + 6.8475x + 3.3532$$

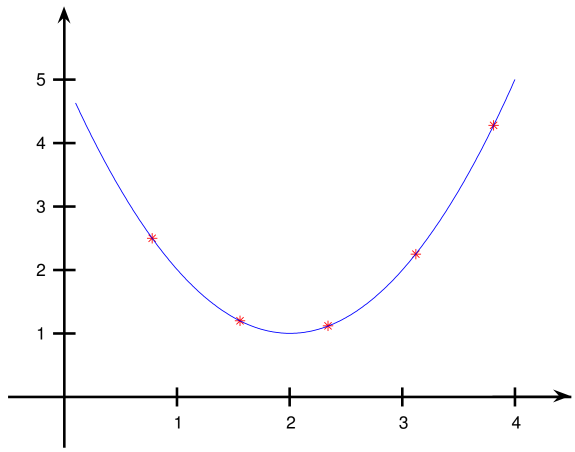


Figura 8. Graficul funcţiei $f(x) = 1.0023x^2 + 6.85x + 3.35$

d) Funcţia care aproximează aceste date este liniară (vezi figura 9).

$$f(x) = 1.4206x + 0.2149$$

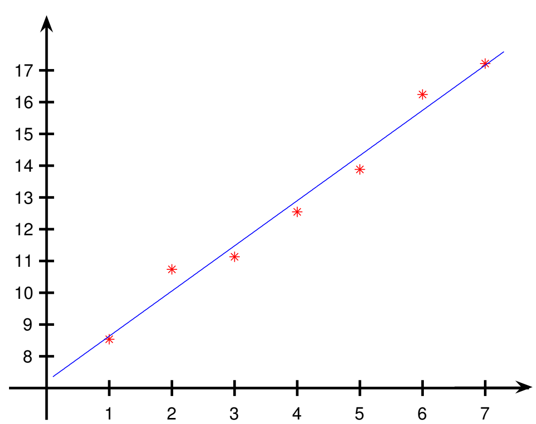


Figura 9. Graficul funcţiei $f(x) = 1.42x + 0.22$

2. Funcţia care aproximează aceste date este pătratică (vezi figura 10).

$$f(x) = -0.0083x^2 + 0.4073x + 0.9188$$

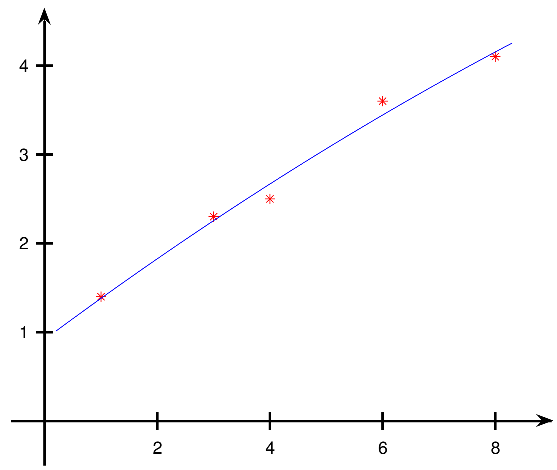


Figura 10. Graficul funcţiei $f(x) = -0.008x^2 + 0.41x + 0.92$

Funcţia f se obţine scriind în Maple instrucţiunile:
1) $with(stats)$:
2) $fit[lastsquare[[X, Y], Y = a * X^2 + b * X + c]]([1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8],$
$[1.4,\ 2.3,\ 2.5,\ 3.6,\ 4.1]]);$

3. Se procedează la fel ca în exemplul 4.1.
Se obţine
$e^{0.865} = 2.375036, \quad e^{\frac{5}{6}} = 2.301002$

4. a)

x_i	0	1/6	1/2
$f(x_i)$	0	1/2	1

$L_2(x) = \sum\limits_{i=0}^{2} l_i(x) f(x_i)$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(0 - \frac{1}{6}\right)\left(0 - \frac{1}{2}\right)} = 12x^2 - 8x + 1$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-0\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)} = -18x^2+9x$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} = 6x^2-x$$

$$L_2(x) = -3x^2+\frac{7}{2}x$$

b) Se vor calcula mai întâi diferenţele divizate

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & & & & \\
 & & \backslash & & & \\
 & & & \dfrac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{6}-0} = \boxed{3} & & \\
 & & / & & \backslash & \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & & & & \dfrac{\frac{3}{2}-3}{\frac{1}{2}-0} = \boxed{-3} \\
 & & \backslash & & / & \\
 & & & \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = \frac{3}{2} & & \\
 & & / & & & \\
\frac{1}{2} & 1 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
N_2(x) &= f(x_0)+(x-x_0)[x_0,x_1;f]+(x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2;f] = \\
&= f(x_0)+(x-x_0)\cdot 3+(x-x_0)(x-x_1)(-3) = 0+3x+x\left(x-\frac{1}{6}\right)(-3) \\
&= -3x^2+3x+\frac{1}{2}x = -3x^2+\frac{7}{2}x = L_2(x)
\end{aligned}$$

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}u(x) \ \Rightarrow R_2(x) = \frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3!}f^{(3)}(\xi),\ 0 \le \xi \le \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sin \pi x,\ f'(x) = \pi \cos \pi x,\ f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x,\ f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x,$$

$f^{IV}(x) = \pi^4 \sin \pi x$

x	0	$\frac{1}{2}$
f^{IV}	$+$	
f'''	$\nearrow$	

$\Rightarrow \max f^{(3)}(\xi) = f^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

5.

$$\begin{array}{llllll}
5 & 150 & & & & \\
 & & \dfrac{392-150}{7-5} = \boxed{121} & & & \\
7 & 392 & & \dfrac{265-121}{11-5} = \boxed{24} & & \\
 & & \dfrac{1452-392}{11-7} = 265 & & \dfrac{32-24}{13-5} = \boxed{1} & \\
11 & 1452 & & \dfrac{457-265}{13-7} = 32 & & \dfrac{1-1}{21-5} = \boxed{0} \\
 & & \dfrac{2366-1452}{13-11} = 457 & & \dfrac{46-32}{21-7} = 1 & \\
13 & 2366 & & \dfrac{917-457}{21-11} = 46 & & \\
 & & \dfrac{9702-2366}{21-13} = 917 & & & \\
21 & 9702 & & & &
\end{array}$$

$$N_4(x) = x^3 + x^2, \quad N_4(6.42) = 305.82$$

Polinomul N_4 se poate obţine în Maple scriind comenzile:

1) $v := [5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 21];$

2) $f := [150,\ 392,\ 1452,\ 2366,\ 9702];$

3) se apelează procedura $PolNewton$ astfel $N := PolNewton(y,\ v,\ 5,\ f); \Rightarrow$
$N := -455 + 121y + 24(y-5)(y-7) + (y-5)(y-7)(y-11)$

4) $eval(N,\ y = 6.42); \Rightarrow\ 305.82.$

6. Se va folosi polinomul de interpolare al lui Lagrange.

$$L_2(x) = -4x^2 + 6x + 2$$

$$R_2(x) = \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3!} f'''(\xi),\ 0 \le \xi \le 1$$

$$\left|R_2\left(\frac{1}{4}\right)\right| \le \left|\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\right| \cdot |f'''(\xi)| = \frac{1}{128} = 0.0078125$$

7. Se va folosi polinomul de interpolare al lui Newton pentru noduri echidistante (vezi (4.50)), sub forma

$$N_3(f;t) = f(x_0) + \frac{t}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)$$

Se formează tabelul diferenţelor finite :

x	f(x)	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
1000	3.0000000			
		0.0043214		
1010	3.0043214		-0.0000426	
		0.0042788		0.0000008
1020	3.0086002		-0.0000418	
		0.0042370		0.0000009
1030	3.0128372		-0.0000409	
		0.0041961		0.0000008
1040	3.0170333		-0.0000401	
		1.0041560		
1050	3.0211893			

$x_0 = 1000, h = 10, \mu = t$

Calculele pot fi făcute după schema

x	t	$t\Delta f$	$\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f$	$\frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f$	N(f;t)
1000	0.0	0.00000000	0.0000000	0.00000000	3.00000000
1001	0.1	0.00043214	0.0000019	0.00000002	3.00004341
1002	0.2	0.00086428	0.0000341	0.00000004	3.00008677
1003	0.3	0.00129642	0.0000447	0.00000005	3.00013009
1004	0.4	0.00172856	0.0000511	0.00000005	3.00017339
1005	0.5	0.00216070	0.0000532	0.00000005	3.00021661
1006	0.6	0.00259284	0.0000511	0.00000005	3.00025980
1007	0.7	0.00302498	0.0000447	0.00000004	3.00030295
1008	0.8	0.00345712	0.0000341	0.00000002	3.00034605
1009	0.9	0.00388926	0.0000191	0.00000001	3.00038912
1010	1.0	0.00432140	0.0000000	0.00000000	3.00043214

8. $f(x) = \arcsin x,\quad f(x_0) = 0.562142,\quad f(x_1) = 0.563325.$
Polinomul de interpolare Lagrange liniar este

$$L_1(x) = 1.2x - 0.0775,\quad R_1(x) = \frac{u(x)}{2} f''(\xi),\ x_0 \le \xi \le x_1$$

$$f(x) = \arcsin x,\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}} > 0 \text{ pentru } x \in [x_0, x_1]$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & x_0 & & x_1 \\ \hline f''' & & + & \\ \hline f'' & & \nearrow & \end{array} \qquad \max f''(\xi) = f''(0.5340) = 0.88$$

$$\Rightarrow |R_1(0.5335)| \le \frac{(0.5335 - 0.5330)(0.5335 - 0.5340)}{2} \cdot 0.88$$

$$\Rightarrow |R_1(0.5335)| \le 0.11 \cdot 10^{-6}$$

9. $H_2(x) = 4x^2$ - $4x$ - 1.

10.

i	$[x_0, \ldots, x_i; f]$
0	1
1	1.107014
2	0.612740
3	0.226104
4	0.062575
5	0.013854

11. Se foloseşte evaluarea restului din formula de interpolare a lui Lagrange.

a) $\sin x - L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{2}(-\sin c_x),\ x_0 \le x, c_x \le x_1,\ |\sin x - L_1(x)| \le \dfrac{h^2}{8}(1) = 1.25 \times 10^{-5}$

b)

$$\sin x - L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}(-\cos c_x),\ x_0 \le x, c_x \le x_2$$

$$|\sin x - L_2(x)| \le \frac{h^3}{9\sqrt{3}}(1) = 6,42 \times 10^{-8}$$

12. Se va folosi evaluarea de la problema precedentă punctul b).

$$|\sin x - L_2(x)| \le \frac{h^3}{9\sqrt{3}}(1) \le 10^{-6}, \Rightarrow h \le (9\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times 10^{-2} = 0.025$$

13. Se vor introduce în Maple instruţiunile:
1) *readlib*(*spline*):
2) $s_3 :=$ *spline*([0, 1, 2], [1, 1, 5], x, *cubic*); $\Rightarrow$

$$s_3 := \begin{cases} 1 - x - x^3, & x < 1 \\ 3 - 7x + 6x^2 - x^3, & \text{în rest} \end{cases}$$

15. Similar problemei 13 $\Rightarrow s_3 := \begin{cases} \frac{115}{32} - \frac{17}{32}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{1}{32}x^3, & x < 3 \\ \frac{169}{32} - \frac{71}{32}x + \frac{15}{32}x^2 - \frac{1}{32}x^3, & \text{în rest} \end{cases}$

16. Da, ea satisfăcând condiţiile de racordare în punctul $x = 1$

$$s(1) = s'(1) = s''(1) = 0$$

17. Avem

$$s(2) = 1,\ s'(2) = 2,\ s''(2) = 6 \Rightarrow \text{este funcţie spline cubică}$$

$$s''(1) = 0,\ s''(3) = 0 \Rightarrow \text{este funcţie spline cubică naturală}$$

8.5 CAPITOLUL 5

1.In Maple se parcurg etapele:
1) $with(stats):$
2) $f := x \to \frac{1}{4+x};$
3) se apelează procedura $dreptunghi2$ astfel: $dreptunghi2(f,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{5000});\ \Rightarrow$ $n = 3$
4) se apelează procedura $dreptunghi1$ astfel:

$$dreptunghi1(f,\ 0,\ 1,\ 3);\ \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{4+x}dx \approx 0.2231842672$$

2. $R(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi),\ \xi \in (a,b),\ |R(f)| \leq \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}|M_2| \leq \epsilon$

$$M_2 = -0.00925,\ \Rightarrow n = 15,\ \int_1^3 \sqrt{x}dx \approx 2.7971220$$

3. a) $n = 5;\ f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f'''(x) = -\frac{6(1+x)^2}{(1+x)^6}$$

x	0 $\quad$ 1
$f'''(x)$	$-$
$f''(x)$	$\searrow$

$$M_2 = \max_{\xi \in (0,1)} f''(\xi) = f''(0) = 2$$

- Cu formula dreptunghiurilor:

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \simeq \frac{1-0}{5}\sum_{i=0}^{4} f\left(0 + (2i+1)\frac{1-0}{2\cdot 5}\right) = 0.69190788$$

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2}|M_2|, |R(f)| \leq \frac{1}{24\cdot 25}\cdot 2 \Rightarrow |R(f)| \leq 0.0033$$

Deci

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = 0.69190788 + 0.0033 = 0.6952078857$$

- Cu formula trapezelor:

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \simeq \frac{1-0}{2\cdot 5}[f(0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+f(1)]$$

$$x_1=\frac{1}{5}, x_2=\frac{2}{5}, x_3=\frac{3}{5}, x_4=\frac{4}{5} \quad R(f)=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)\ |R(f)|\leq 0.0066$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \simeq \frac{1}{10}\left[f(0)+2\left[f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)\right]+f(1)\right]=$$

$$=0.695633 \quad \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = 0.695633+0.0066=0.702 \Rightarrow \ln 2 \simeq 0.702$$

b) Se impune condiţia

$$|R_n(f)|\leq \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{12n^2}\cdot 2 \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow 6n^2 \geq 1000 \quad n\geq 12.9$$

$$n=13,\ x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}=0+i\cdot\frac{1}{13}=\frac{i}{13}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \simeq \frac{1}{26}\left[f(0)+2f\left(\frac{1}{13}\right)+2f\left(\frac{2}{13}\right)+\ldots+2f\left(\frac{12}{13}\right)+f(1)\right]=0.6935$$

4. a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \simeq 0.835648$ b). $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x dx} \simeq 1.4675.$

5. $\displaystyle M_2=\max_{\xi\in(0,1)} f''(\xi)=f''(1)=6e,\ |R(f)|\leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{(1-0)^3}{12n^2}\cdot 6e \leq \frac{1}{100}$

$$\Rightarrow n=12 \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx \simeq 1.47523$$

Soluţia de mai sus se poate determina şi în Maple urmând etapele:
1) $f := x \to e^{x^2}$;
2) se apelează procedura $trapez2$ astfel $trapez2(f,\ 0,\ 1,\ 0.01); \Rightarrow n=12$

3) se apelează procedura $trapez1$ astfel $trapez1(f,\ 0,\ 1,\ 12);\ \Rightarrow$
$\int\limits_0^1 e^{x^2}dx \simeq 1.47523.$

6. $a = 1,\ b = 3,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ f''(x) = \frac{2}{x^3},\ f'''(x) = -\frac{6}{x^4},\ f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{24 \cdot 5x^4}{x^{26}} < 0 \Rightarrow f^{(4)}(x)\text{descrescătoare}$$

x	1	3
$f^{(5)}$	$-$	
$f^{(4)}$	$\searrow$	

$$\Rightarrow |R(f)| = \left|-\tfrac{(3-1)^5}{2880} \cdot 24\right| = \frac{32 \cdot 24}{2880} = 0.26$$

$$\int\limits_1^3 \frac{1}{x}dx \sim \frac{3-1}{6}\left[f(1) + 4f\left(\frac{1+3}{2}\right) + 2f(3)\right] = 1.111$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^3 \frac{1}{x}dx = 1.11 + 0.26 = 1.37$$

7. Pentru a rezolva această problemă în Maple se parcurg etapele:
1) $with(student)$;
2) $f(x) = ln(x)$;
3) se apelează procedura $Simpson2$ astfel $Simpson2(f,\ 1,\ 2,\ 10^{-6});\ \Rightarrow\ n = 4$
4) se apelează procedura $Simpson1$ astfel $Simpson1(f,\ 1,\ 2,\ 4);\ \Rightarrow\ \int\limits_1^2 \ln x dx \simeq 0.3862600714.$

8. $M_4 = \max\limits_{\xi\in(0,1)} f^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(0) = 24,\ |R(f)| \leq 0.00833$

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1-0}{6}\left(\frac{1}{1+0^2} + 4 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+1}\right) = 0.79163$$

9. Se foloseşte formula (5.43). Se obţine

$$f''(0.5) = 0.0800 \text{ pentru } h = 0.1,\ f''(0.5) = 0.0775 \text{ pentru } h = 0.2$$

Soluţia în Maple se obţine astfel:
1) $xdi := [0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7];$
2) $fdi := [7.3891,\ 7.4633,\ 7.5383,\ 7.6141,\ 7.6909];$
3) $h := 0.1;$
4) $\mu := \frac{(x-xdi[1])}{h};$
5) se apelează proedura $DifFinita$ astfel:

1. $DifFinita(1,\ 1,\ fdi);$
2. $DifFinita(2,\ 1,\ fdi);$
3. $DifFinita(3,\ 1,\ fdi);$
4. $DifFinita(4,\ 1,\ fdi);$

3) se apelează procedura $fsec$ astfel: $fsec(h,\ \mu,\ fdi);$
4) $eval(fsec,\ x = 0.5);\ \Rightarrow f''(0.5) = 0.07833$
Pentru $h = 0.2$ se procedează analog.

8.6 CAPITOLUL 6

I.

1. Soluţia exactă a problemei este $y(x) = (x+1)^2 - \dfrac{1}{2}e^x$

x	$y^*(x)$	$y(x)$	$\lvert y^*(x) - y(x)\rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0
0.2	0.8292933	0.8292986	0.0000053
0.4	1.2140762	1.2140877	0.0000114
0.6	1.6489220	1.6489406	0.0000186
0.8	2.1272026	2.1272295	0.0000269
1.0	2.6408226	2.6408591	0.0000364
1.2	3.1798941	3.1799415	0.0000474
1.4	3.7323401	3.7324000	0.0000599
1.6	4.2834095	4.2834838	0.0000743
1.8	4.8150856	4.8151763	0.0000906
2.0	5.3053630	5.3054720	0.0001089

2. Soluţia exactă este $y(x) = x \text{ tg } (\ln x)$

x	$y^*(x)$	$y(x)$
1.4	0.4896842	0.4896817
1.8	1.1994320	1.1994386
2.2	2.2134693	2.2135018
2.6	3.6783790	3.6784753
3.0	5.8738386	5.8741000

3. Soluţia exactă este $y(x) = \dfrac{2}{1+e^{-2x}} - 3$

x	$y^*(x)$	$y(x)$
0.4	-1.6200576	-1.6200510
0.8	-1.3359824	-1.3359632
1.2	-1.1663735	-1.1663454
1.6	-1.0783582	-1.0783314
2.0	-1.0359922	-1.0359724

4. Soluţia exactă este $y(x) = \dfrac{e^{-5x}}{3} + x$

x	$y^*(x)$	$y(x)$
0.2	0.1627655	0.1626265
0.4	0.2052405	0.2051118
0.6	0.3766981	0.3765957
0.8	0.6461896	0.6461052
1.0	1.0023207	1.0022460

7. Soluţia exactă este $y(x) = (lnx + 2)x$ şi se obţine în Maple astfel:

1) $ec := \{diff(y(x),\ x) = 1 + \dfrac{y(x)}{x}\};$

2) $ci1 := y(1) = 2:$

3) $dsolve(ec\, union\, ci1,\ y(x));$

Apoi se aplică Metoda Runge Kutta de ordinul 4 astfel:

4) $s := solve(ec\ union\ ci1,\ type = numeric,\ method = rkf45);$

5) $xi := 1:$

$h := 0.2:$

$for\ i\ from\ 1\ to\ 5\ do;$

$j := xi + h * i:$

$print(s(j)):$

$od:$

Soluţia aproximativă va fi afişată după cum urmează:

$$\begin{array}{ll} x = 1.2 & y(x) = 2.61878563594558456 \\ x = 1.4 & y(x) = 3.27106062872147518 \\ x = 1.6 & y(x) = 3.95200483842328288] \\ x = 1.8 & y(x) = 4.65801470122226302 \\ x = 2.0 & y(x) = 5.38629302176129964 \end{array}$$

Bibliografie

[1] O. Agratini, Ioana Chiorean, Gh. Coman, R. Trîmbiţaş: *Analiză numerică şi teoria aproximării*, vol.III, Presa Univ. Clujeană, 2002.

[2] K. Atkinson: *Elementary Numerical Analysis*, second edition, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1993.

[3] O. A. Blăjină: *MAPLE în matematica asistată de calculator*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2001.

[4] R. L. Burden, J. D. Faires: *Numerical Analysis*, sixth edition, Books/Cole Publishing Company, ITP, 1997.

[5] J. C. Butcher: *On Runge - Kutta processes of high order*, J. Austral. Math. Soc., 4, Part 2, 179-194, 1964.

[6] Gh. Căpăţână, D. Lica, Veronica Marin, Sanda Micula, Narcisa Teodorescu: *Produsul programat Maple în matematici*, Editura Bren, Bucureşti, 2005.

[7] Gh. Coman: *Analiză numerică*, Editura Libris, Cluj-Napoca, 1995.

[8] Gh. Coman, Ioana Chiorean, Teodora Cătinaş: *Numerical Analysis, An Advanced Course*, Presa Universitară Clujeană, 2007.

[9] A. Coţiu: *Stabilirea unor procedee de ordin înalt de exactitate, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale*, An. Şt. Univ. Iaşi, t. VI, 3, 585-598, 1960.

[10] I. Cuculescu: *Analiză numerică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

[11] Gh. Dodescu, M. Toma: *Metode de calcul numeric*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[12] G. M. Fihtenholt: *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.

[13] D. V. Ionescu: *O generalizare a unei proprietăţi care intervine în metoda Runge - Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*, Bul. Şt. Acad. RPR, t. VI, 2, 229-241, 1954.

[14] Gh. Marinescu, L. Badea, ş. a.: *Probleme de analiză numerică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.

[15] Gh. Micula: *Funcţii spline şi aplicaţii*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978.

[16] Maria Micula: *Contribuţii la aproximarea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale, integrale şi integro-diferenţiale*, Teză de doctorat, UBB Cluj-Napoca, 1978.

[17] Maria Micula: *Matematici aplicate în agronomie*, Casa de editură Transilvania Press, Cluj-napoca, 1997.

[18] D. D. Stancu: *Curs şi culegere de probleme de analiză numerică*, lito UBB Cluj-Napoca, 1977.

[19] D. D. Stancu, Gh. Coman, O. Agratini, R. Trîmbiţaş: *Analiză numerică şi Teoria aproximării*, vol. I, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2001.

[20] D. D. Stancu, Gh. Coman, P. Blaga: *Analiză numerică şi Teoria aproximării*, vol. II, Presa Univ. Clujeană, 2002.

[21] J. Stoer, R. Bulirsch: *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag New York, 1980.

Index