Calcul Numeric – Tema #6

Ex. 1 Să se implementeze în Matlab algoritmul "Metoda gradientului conjugat" conform sintaxei

$[x] = \textbf{GradConj}(A, b)$

și să se testeze în cazul unui sistem compatibil determinat $Ax = B$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^3$. Să se afișeze soluția sistemului.

Ex. 2 Să se implementeze în Matlab algoritmul "Metoda rotațiilor" conform sintaxei

$[\lambda] = \textbf{MetRot}(A, \varepsilon)$

și să se testeze în cazul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ \varepsilon = 10^{-5}$$

Să se compare cu valorile proprii exacte.

Ex. 3 Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ să se calculeze $A^{(1)}$ și $a_{ii}^{(1)}$, $i \in \overline{1,3}$. Să se evalueze erorile $\left|\lambda_i - \alpha_i^{(2)}\right|$, $i \in \overline{1,3}$ unde $\lambda_3 \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$ sunt valorile proprii exacte ale matricei A și $\alpha_3^{(1)} \geq \alpha_2^{(1)} \geq \alpha_1^{(1)}$ sunt elementele de pe diagonala principală a matricei $A^{(1)}$.

Ex. 4 Fie sistemul $Ax = b$, unde $A = (a_{i,j})_{i,j\in\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ sunt date conform formulelor:

$$\begin{aligned} & a_{i,i} = 2, \ i = \overline{1,n} \\ & a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1, \ i = \overline{1,n-1} \\ & a_{i,j} = 0, \ \text{altfel} \\ & b_i = i, \ i \in \overline{1,n} \end{aligned}$$

sau echivalent

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix}$$

Presupunem că matricea A este simetrică și pozitiv definită. Să se aplice metoda gradientului connjugat pentru rezolvarea sistemului $Ax = b$ conform sintaxei

$[x, N] = \textbf{MetGradConj2}(A, b, \varepsilon)$

unde x este soluția aproximativă, iar N este numărul de iterații necesare pentru obținerea soluției aproximative cu eroarea impusă, ε.

Să se testeze pentru $n \in \{20, 50, 100\}$, $\varepsilon = 10^{-10}$. Condiția de oprire este $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_2 < \varepsilon$.