

CALCUL NUMERIC – TEMA #1

Ex.1 Folosind metoda biseecției pentru $k = 2$ să se aproximeze manual soluția ecuației $8x^3 + 4x - 1 = 0$ din intervalul $[0, 1]$. Să se evalueze eroarea de aproximare.

Ex.2 Fie ecuația $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$

- Să se construiască în Matlab graficul funcției $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ pe intervalul $[0, 4]$;
- Să se scrie un program în Matlab prin care se va calcula soluția aproximativă c_{100} prin metoda biseecției pentru fiecare interval în parte: 1. $[0, 1]$; 2. $[1, 3, 2]$; 3. $[3, 2, 4]$;
- Să se construiască punctele $(c_{100}, f(c_{100}))$ calculate la b. în același grafic cu graficul funcției.

Ex.3

- Să se construiască în Matlab graficele funcțiilor $y = e^x - 2$ și $y = \cos(e^x - 2)$;
- Să se implementeze în Matlab metoda biseecției pentru a calcula o aproximare a soluției ecuației $e^x - 2 = \cos(e^x - 2)$ cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$ pe intervalul $x \in [0, 5; 1, 5]$.

Ex.4 Să se găsească o aproximare a valorii $\sqrt{3}$ cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$.

Ex.5 * Fie $f \in C^2([a, b])$. Presupunem că $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ (f are o soluție dublă) și $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b] \setminus \{x^*\}$. De asemenea, $f''(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, atunci $\exists m, M > 0$ astfel încât $m \leq |f''(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$. Presupunem în plus că M este astfel încât $M < 2m$. Să se arate că dacă x_0 este astfel încât $|x^* - x_0| \leq h = \min\{x^* - a, b - x^*, \frac{m}{M}\}$, atunci șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ construit cu metoda Newton-Raphson rămâne în $[a, b]$ este convergent la x^* și convergența este liniară.

Indicație: Se urmărește demonstrația teoremei de convergență și se va dezvolta în serie Taylor funcția f' în vecinătatea punctului x_k iar dezvoltarea se va scrie în x^* .

Ex. 6 Fie ecuația $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$. Se știe că ecuația are soluție unică pe intervalul $[0; 2, 5]$. Justificați de ce șirul generat de metoda Newton - Raphson nu converge la soluția din intervalul dat, dacă valoarea de pornire este $x_0 = 2$. Alegeți o valoare pentru $x_0 \in [0; 2, 5]$, astfel încât șirul construit de metoda N-R să converge la soluția din intervalul dat.

Ex. 7 Să se rezolve Ex. 3 prin metoda Newton-Raphson în aceleași condiții, alegând o valoare x_0 din intervalul dat. Să se calculeze prin ambele metode (biseecției și Newton-Raphson) numărul de iterații necesar pentru obținerea erorii impuse. Criteriul de oprire este $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

Obs.: Exercițiile cu * sunt de complexitate ridicată și studenții care rezolvă aceste tipuri de exemple primesc 10 puncte bonus la examen.