《传热学》数值计算大作业

二维稳态导热问题的解析解与数值解

姓 名： 刘铭

学 号：2017151613

班 级： 20171516

任课教师： 谭思超

哈尔滨工程大学

核科学与技术学院

2019年10月9日

# 第一题

## 问题描述





设图中，，L1=100.0，L2=80.0

## 一、建立控制方程及定解条件

对上述问题的微分方程及其边界条件为：

x=0，T=T1=tw1

x=L1，T=T1=tw1

y=0，T=T1=tw1

y=L2，T=T2=tw1+tw2\*sin(pi\*x/L1)

该问题的解析解：

通过附件一中C++代码编译运行，将解出的数据通过绘图软件绘制。

## 二、数值离散

区域离散x方向总节点数为N，y方向总节点数为M，区域内任一节点用i,j表示。

## 三、建立代数方程

对于图中所有的内部节点方程可写为：

用i,j节点的二阶中心差分代替上式中的二阶导数，得：



上式整理成迭代形式：



(i=2,3……,N-1)，(j=2,3……,M-1)

## 四、设立迭代初场

补充四个边界上的第一类边界条件得：  (j=1,2,3……,M)

 (j=1,2,3……,M)

 (i=1,2,3……,N)

 (i=1,2,3……,N)

## 五、迭代求解

通过由附件二中C++编写的迭代程序，计算9598次迭代，相对偏差小于代码中所设定的误差最大值.得出的数据通过绘图软件绘制。

## 六、解的分析

将解析解的图形与数值解的图形进行对比，其结果极其相似。

# 第二题

## 问题描述



## 解析解

对上述问题的微分方程及其边界条件为：

x=0，T=T1=tw1

x=L1，T=T1=tw1

y=0，T=T1=tw1

y=L2，T=T2=tw2

该问题的解析解：

其中：

通过附件三中C++代码编译运行，将解出的数据通过绘图软件绘制。

## 数值解

其边界条件为：

x=0，T=T1=tw1

x=L1，T=T1=tw1

y=0，T=T1=tw1

y=L2，T=T2= tw2

对于所有的内部节点方程可写为：

用i,j节点的二阶中心差分代替上式中的二阶导数，得：



上式整理成迭代形式：



(i=2,3……,N-1)，(j=2,3……,M-1)

通过附件四中C++代码编译运行，将解出的数据通过绘图软件绘制。

## 解的分析

解析解的值可能是由于数值过小，计算的结果作图效果不好；数值解的图形比较形象。

# 第三题

## 问题描述



设对流换热系数h=10W/(K\*)，墙壁导热系数a=1000W/(K\*m),壁面温度恒为50℃，环境温度为10℃。

## 解析解

通过计算，肋内温度的解析解为：

通过附件五中C++代码编译运行，将解出的数据通过绘图软件绘制。

计算，得：**Q=-5427.26W/m**

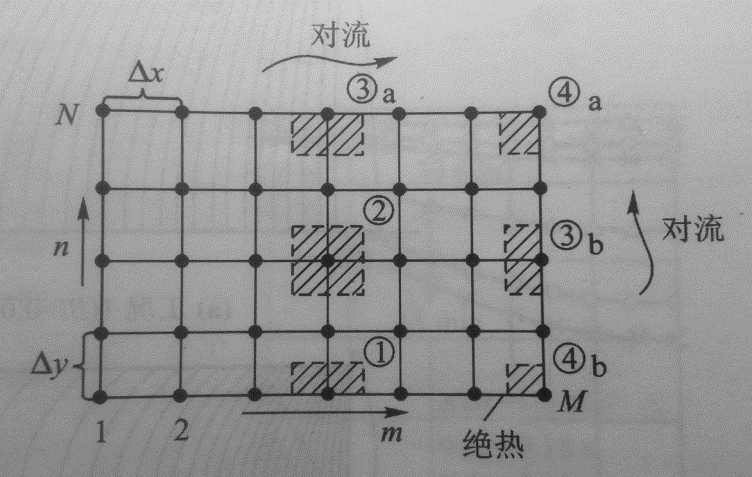
## 数值解

### 2.1 区域离散化

由于对称性，取一半区域研究即可，其网格划分示意图如下：

如图所示，共划分个节点。为后续计算方便，我们将控制步长相等，即：

实现方法是，设定肋片厚度（）及肋片高度（）满足如下条件：



### 2.2 建立节点离散方程

在稳态条件下，我们采用形式简捷的热平衡法对各节点建立离散方程。网格离散化后共形成5类节点，即，对应各节点的离散方程为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ① |  |  |
| ② |  |  |
| ③a |  |  |
| ③b |  |  |
| ④a |  |  |
| ④b |  |  |

通过附件六中C++代码编译运行，将解出的数据通过绘图软件绘制。

计算，得：**Q=-5429.07W/m**

## 解的分析

数值解的误差较大，得出的图形与解析解计算的图形差异较大！

**说明**

**具体数据以及代码已上传至[Github](** <https://github.com/iuming/Heat-Transfer-Learning---Numerical-Calculation>**)**

附件一、问题一解析解代码（C++）

1. #include<bits/stdc++.h>
2. #define pi 3.1415926535
3. #define N 100
4. #define M 100
5. **using** **namespace** std;
6. **int** main()
7. {
8. ofstream fout;
9. **double** L1=100,L2=80,x=0,y=0;
10. **double** tw1=25,tw2=5;
11. **float** len1=L1/(N-1),len2=L2/(M-1);
12. **double** t[M][N],T[M][N];
13. memset(t,0,**sizeof**(t));
14. memset(T,0,**sizeof**(T));
15. **for**(**int** i=0;i<N;i++)
16. {
17. t[i][0]=tw1;
18. t[i][N-1]=tw1+tw2\*sin(pi\*(i-1)/(N-1));
19. }
20. **for**(**int** j=0;j<M;j++)
21. {
22. t[0][j]=tw1;
23. t[M-1][j]=tw1;
24. }
25. **for** (**int** i=1;i<N-1;i++)
26. **for** (**int** j=1;j<M-1;j++)
27. t[i][j]=tw1+tw2\*sin(pi\*(j-1)/(N-1))\*sinh(pi\*(i-1)/(N-1))/sinh(pi\*L2/L1);
28. **for**(**int** j=M-1;j>=0;j--)
29. {
30. **for**(**int** i=0;i<N;i++)
31. fout<<t[i][j]<<',';
32. fout<<endl;
33. }
34. fout.close();
35. **return** 0;
36. }

附件二、问题一数值解代码（C++）

1. #include<bits/stdc++.h>
2. #define N 100
3. #define M 100
4. #define pi 3.1415926535
5. **using** **namespace** std;
6. **int** main()
7. {
8. ofstream fout;
9. fout.open("Problem one data(Numerical Solution).csv");
10. **int** i,j,l,num=1;
11. **float** cha,x,y,x2,y2;
12. **float** t[N][M],a[N][M];
13. memset(t,0,**sizeof**(t));
14. **for**(j=0;j<M;j++)
15. {
16. t[0][j]=25;
17. t[M-1][j]=25;
18. }
19. **for**(i=0;i<N;i++)
20. {
21. t[i][0]=25;
22. t[i][N-1]=25+5\*sin(pi\*i/N);
23. }
24. x=1.0/(N-1);
25. y=1.0/(M-1);
26. cha=1;
27. **while**(cha>1e-6)
28. {
29. **for**(i=0;i<N;i++)
30. **for**(j=0;j<M;j++)
31. a[i][j]=t[i][j];
32. **for**(i=1;i<N-1;i++)
33. **for**(j=1;j<M-1;j++)
34. {
35. x2=pow(x,2);y2=pow(y,2);
36. t[i][j]=0.5\*y2\*(t[i+1][j]+t[i-1][j])/(x2+y2)+0.5\*x2\*(t[i][j+1]+t[i][j-1])/(x2+y2);
37. }
38. cha=0;
39. **for**(i=0;i<N;i++)
40. **for**(j=0;j<M;j++)
41. cha=cha+abs(a[i][j]-t[i][j]);
42. cha=cha/(N\*M);
43. cout<<num++<<' '<<cha<<endl;
44. }
45. l=0;
46. **for**(j=M-1;j>=0;j--)
47. {
48. **for**(i=0;i<N;i++)
49. fout<<t[i][j]<<',';
50. fout<<endl;
51. }
52. fout.close();
53. **return** 0;
54. }

附件三、问题二解析解代码（C++）

1. #include<bits/stdc++.h>
2. #define pi 3.1415926535
3. #define N 100
4. #define M 100
5. **using** **namespace** std;
6. **int** main()
7. {
8. ofstream fout;
9. fout.open("Problem two date(Analytical Solution).csv");
10. **double** L1=3.0,L2=2.0,f=0.0,s=0.0;
11. **double** tw1=25,tw2=5;
12. **float** len1=L1/(N-1),len2=L2/(M-1);
13. **double** t[M][N],T[M][N];
14. memset(t,0,**sizeof**(t));
15. memset(T,0,**sizeof**(T));
16. **for**(**int** i=0;i<N;i++)
17. {
18. t[i][0]=tw1;
19. t[i][N-1]=tw2;
20. }
21. **for**(**int** j=0;j<M;j++)
22. {
23. t[0][j]=tw1;
24. t[M-1][j]=tw1;
25. }
26. **for** (**int** i=1;i<N-1;i++)
27. **for** (**int** j=1;j<M-1;j++)
28. {
29. **int** sum=0;
30. **for** (**int** k=1;k<=99;k++)
31. {
32. s=(2\*k-1)\*pi;
33. f=4/s\*sin(s\*(i-1)\*len1/L1)\*sinh(s\*(j-1)\*len2/L1)/sinh(s\*L2/L1);
34. sum+=f;
35. }
36. t[j][i]=tw1+(tw1-tw2)\*sum;
37. }
38. **for**(**int** j=M-1;j>=0;j--)
39. {
40. **for**(**int** i=0;i<N;i++)
41. fout<<t[i][j]<<',';
42. fout<<endl;
43. }
44. fout.close();
45. **return** 0;
46. }

附件四、问题二数值解代码（C++）

1. #include<bits/stdc++.h>
2. #define N 100
3. #define M 100
4. #define pi 3.1415926535
5. **using** **namespace** std;
6. **int** main()
7. {
8. ofstream fout;
9. fout.open("Problem two data(Numerical Solution).csv");
10. **int** i,j,l,num=1;
11. **float** cha,x,y,x2,y2;
12. **float** t[N][M],a[N][M];
13. **for**(i=0;i<N;i++)
14. **for**(j=0;j<M;j++)
15. t[i][j]=0;
16. **for**(j=0;j<M;j++)
17. {
18. t[0][j]=25;
19. t[M-1][j]=25;
20. }
21. **for**(i=0;i<N;i++)
22. {
23. t[i][0]=25;
24. t[i][N-1]=5;
25. }
26. x=1.0/(N-1);
27. y=1.0/(M-1);
28. cha=1;
29. **while**(cha>1e-6)
30. {
31. **for**(i=0;i<N;i++)
32. **for**(j=0;j<M;j++)
33. a[i][j]=t[i][j];
34. **for**(i=1;i<N-1;i++)
35. **for**(j=1;j<M-1;j++)
36. {
37. x2=pow(x,2);y2=pow(y,2);
38. t[i][j]=0.5\*y2\*(t[i+1][j]+t[i-1][j])/(x2+y2)+0.5\*x2\*(t[i][j+1]+t[i][j-1])/(x2+y2);
39. }
40. cha=0;
41. **for**(i=0;i<N;i++)
42. **for**(j=0;j<M;j++)
43. cha=cha+abs(a[i][j]-t[i][j]);
44. cha=cha/(N\*M);
45. cout<<num++<<' '<<cha<<endl;
46. }
47. **for**(j=M-1;j>=0;j--)
48. {
49. **for**(i=0;i<N;i++)
50. fout<<t[i][j]<<',';
51. fout<<endl;
52. }
53. fout.close();
54. **return** 0;
55. }

附件五、问题三解析解代码（C++）

1. #include<bits/stdc++.h>
2. #define M 42
3. #define N 4
4. #define pi 3.1415926535
5. **using** **namespace** std;
6. **int** main()
7. {
8. ofstream fout;
9. fout.open("Problem three date(Analytical Solution).csv");
10. **double** L1=20.0,L2=1.0,h=10,a=1000,m=0.5,n=0.5,tf=10,tw=50;
11. **double** Bi=h\*L2/2/a;
12. **double** t[M][N],T[M][N];
13. memset(t,0,**sizeof**(t));
14. memset(T,0,**sizeof**(T));
15. **for**(**int** i=2;i<=M;i++)
16. **for**(**int** j=1;j<=3;j++)
17. t[i][j]=30;
18. **for**(**int** j=1;j<=N;j++)
19. t[1][j]=50;
20. **for**(**int** i=2;i<=M;i++)
21. **for**(**int** j=1;j<=N;j++)
22. t[i][j]=tf+(tw-tf)\*((cosh(sqrt(Bi)\*(L1-(i-1)\*0.5)/L2\*2)+sqrt(Bi)\*sinh(sqrt(Bi)\*(L1-(i-1)\*0.5)/L2\*2))/(cosh(sqrt(Bi)\*L1/L2\*2)+sqrt(Bi)\*sinh(sqrt(Bi)\*L1/L2\*2)));
23. **double** Q=(t[2][1]-t[1][1])/m\*n/2\*a+(t[2][3]-t[1][3])/m\*n/2\*a+(t[2][2]-t[1][2])/m\*n\*a;
24. cout<<Q<<endl;
25. **for**(**int** j=1;j<=N-1;j++)
26. {
27. **for**(**int** i=1;i<=M-1;i++)
28. fout<<t[i][j]<<',';
29. fout<<endl;
30. }
31. fout.close();
32. **return** 0;
33. }

附件六、问题三数值解代码（C++）

1. #include<bits/stdc++.h>
2. #define M 42
3. #define N 4
4. #define pi 3.1415926535
5. **using** **namespace** std;
6. **int** main()
7. {
8. ofstream fout;
9. fout.open("Problem three date(Numerical Solution).csv");
10. **double** L1=20.0,L2=1.0,h=10,a=1000,m=0.5,n=0.5,tf=10,tw=50;
11. **double** esp=1.0,Bi=h\*L2/2/a;
12. **double** t[M][N],T[M][N];
13. memset(t,0,**sizeof**(t));
14. memset(T,0,**sizeof**(T));
15. **for**(**int** i=2;i<=M;i++)
16. **for**(**int** j=1;j<=3;j++)
17. t[i][j]=30;
18. **for**(**int** j=1;j<=N;j++)
19. t[1][j]=50;
20. **while**(esp>1e-6)
21. {
22. **for**(**int** i=0;i<N;i++)
23. **for**(**int** j=0;j<M;j++)
24. T[i][j]=t[i][j];
25. **for**(**int** i=2;i<=M-1;i++)
26. {
27. t[i][N]=(n\*a/(m\*2)\*(t[i+1][N]+t[i-1][N])+m\*a/n\*t[i][N-1]+h\*tf\*m)/(n\*a/m+m\*a/n+h\*m);
28. t[i][1]=(n\*a/(m\*2)\*(t[i+1][1]+t[i-1][1])+m\*a/n\*t[i][2]+h\*tf\*m)/(n\*a/m+m\*a/n+h\*m);
29. t[i][2]=0.25\*(t[i-1][2]+t[i+1][2]+t[i][1]+t[i][3]);
30. t[M][2]=(m/2\*a\*t[M][3]/n+m/2\*a\*t[M][1]/n+n\*a\*t[M-1][2]/m+n\*h\*tf)/(m\*a/n+n\*a/m+n\*h);
31. t[M][N]=(n/2\*a\*t[M-1][N]/m+m/2\*a\*t[M][N-1]/n+m/2\*h\*tf+n/2\*h\*tf)/(n/2\*a/m+m/2\*a/n+m/2\*h+n/2\*h);
32. t[M][1]=(n/2\*a/m\*t[M-1][1]+m/2\*a\*t[M][2]/n+m/2\*h\*tf+n/2\*h\*tf)/(n/2\*a/m+m/2\*a/n+m/2\*h+n/2\*h);
33. }
34. esp=0;
35. **for**(**int** i=0;i<N;i++)
36. **for**(**int** j=0;j<M;j++)
37. esp+=abs(T[i][j]-t[i][j]);
38. esp/=(N\*M);
39. }
41. **double** Q=(t[2][1]-t[1][1])/m\*n/2\*a+(t[2][3]-t[1][3])/m\*n/2\*a+(t[2][2]-t[1][2])/m\*n\*a;
42. cout<<Q<<endl;
43. **for**(**int** j=0;j<=N-2;j++)
44. {
45. **for**(**int** i=1;i<=M-1;i++)
46. fout<<t[i][j]<<',';
47. fout<<endl;
48. }
49. fout.close();
50. **return** 0;
51. }