TEMA 11:

MOVIMIENTO OSCILATORIO

OBJETIVOS

1. **Estudiar el movimiento oscilatorio de un sistema**.
   Pérdida de la posición de equilibrio estable.

   Cinemática y dinámica del movimiento con *aceleración proporcional al desplazamiento respecto del equilibrio*.

   - Movimiento armónico simple (M.A.S)
   - Oscilaciones amortiguadas
   - Oscilaciones forzadas

2. **Repaso de los conceptos de Mecánica**

EJEMPLOS

- Balanceo de un barco
- Amortiguación de un coche
- Péndulo de un reloj
- Vibración de las cuerdas de un instrumento musical

- Moléculas de aire en las ondas sonoras
- Corrientes eléctricas en radio y televisión

EJERCICIOS

FÍSICA GENERAL

Ejercicios. Tema 11. Oscilaciones.

ZTF-FCT

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

1. Una caja se encuentra sobre una plataforma que vibra a razón de 2 oscilaciones por segundo. El coeficiente de rozamiento estático entre la plataforma y la caja es 0.5. ¿Cuál es la máxima amplitud con la que puede vibrar la plataforma para que la caja no resbale? Si la vibración de la plataforma fuera vertical y de amplitud 25 mm, ¿cuál sería la frecuencia máxima del oscilador, para que la caja no se separe de la plataforma?

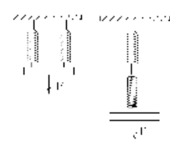
2. Una partícula resbala sin rozamiento hacia adelante y hacia atrás, entre los dos planos inclinados de la figura.

   a) Encontrar el periodo del movimiento, si la altura inicial es h_0.

   b) ¿Es un movimiento oscilatorio? ¿Es armónico simple?

3. Supongamos que la elongación en el equilibrio de un muelle al que se le ha suspendido una masa m es l. Demostrar que si se perturba el sistema, obtenemos el mismo movimiento que el de un péndulo simple de longitud l.

4. Obtener la constante recuperadora del sistema formado por dos muelles de constantes k_1 y k_2, cuando los muelles se colocan en serie y cuando se colocan en paralelo (ver figura).



5. Una masa de 2 kg está unida al extremo de un muelle. La longitud propia del muelle es 8 cm, pero cuando la masa se sitúa encima del muelle, la longitud del muelle es 5 cm. Desde esta posición de equilibrio, se le da un golpe hacia abajo y la partícula empieza a oscilar con una velocidad de 0.3 m/s.

   a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la masa?

   b) ¿Cuánto tiempo necesita la masa para alcanzar la altura máxima por primera vez?

   c) ¿Estará el muelle sin comprimir en algún instante?

   d) ¿Cuál debe ser la velocidad incial de la partícula para que el muelle esté sin comprimir en algún instante?

6. Una masa unida a un muelle horizontal oscila con un periodo de 4 s. Si suspendemos la masa del mismo muelle, pero ahora en posición vertical y sin oscilar, ¿cuál es la elongación del muelle?

7. Una masa de 40 g realiza un movimiento armónico simple de periodo T=0.32 s . ¿Cuál es la amplitud del movimiento si la fuerza máxima que produce el movimiento vale 10 N?

8. Un bloque de densidad relativa ρ_r tiene forma de paralelepípedo de dimensiones a, b y c. El bloque está sobre agua, siendo el lado de longitud a el vertical. Desde su posición de equilibrio, se le da un pequeño golpe. Comprobar que el movimiento es armónico y calcular la frecuencia angular de la oscilaciones. Ignorar el rozamiento. Ayuda: Escribir la segunda Ley de Newton para describir el movimiento del bloque.

9. Cuando una masa de 2 kg se suspende de un muelle vertical lo alarga 10 cm. Unimos la masa al mismo muelle y se pone sobre una mesa horizontal y sin rozamiento, fijando el extremo del muelle que no tiene la masa a un punto fijo. Separamos la masa 5 cm de su posición de equilibrio y la soltamos cuando t=0.

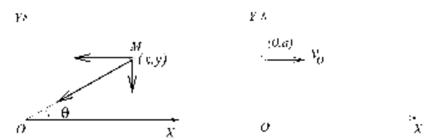
   a) Obtener la amplitud, frecuencia angular, frecuencia y periodo.

   b) Calcular la velocidad máxima de la masa. ¿Cuándo ocurre?

   c) Unimos una masa de 2 kg a un muelle de características similares pero se separa 10 cm de su posición de equilibrio. ¿Cuál de las dos masas llegará antes a su posición de equilibrio? ¿Por qué?

   d) Separamos de nuevo la masa de su posición de equilibrio 3 cm y se suelta con una velocidad inicial de -25 cm/s, ¿cuál es la amplitud de las oscilaciones y la fase inicial?

10. Una masa M está sometida a 3 fuerzas: La primera es perpendicular al eje OY y vale $k_1 x$. La segunda es perpendicular al eje OX y vale $k_1 y$. La tercera está dirigida a Oy vale $k_2 r$, donde r es la distancia al origen de coordenadas. k_1 y k_2 son valores constantes. Si la posición inicial de la masa es $(0,a)$ y su velocidad incial, v_0, es paralela al eje OX, encontrar:

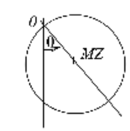


   a) El tipo de movimiento y su periodo

   b) Las ecuaciones paramétricas del movimiento (posición y velocidad en cualquier instante)

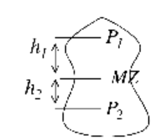
   c) La ecuación de la trayectoria. ¿Qué tipo de curva es?

11. El anillo de la figura de masa m y radio R, se suspende del punto O y realiza pequeñas oscilaciones en el plano vertical. ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones?



12. Una barra pesada está suspendida del punto O y realiza pequeñas oscilaciones en la vertical alrededor de un eje perpendicular que pasa por O. ¿Cuál debe ser la distancia x indicada en el dibujo, para que el periodo de las oscilaciones sea mínimo?

13. Un objeto plano tiene momento de inercia I respecto del eje perpendicular que pasa por su centro de masas. Cuando oscila alrededor del punto P_1 (ver figura) su periodo es T. Al otro lado del centro de masas, puede encontrarse otro punto, P_2, respecto del cual el periodo de oscilación también es T. Demostrar que la distancia entre los puntos P_1 y P_2 es $gT^2/(4\pi^2)$.



14. El periodo de un péndulo simple vale 2,5 s cuando realiza pequeñas oscilaciones. En un momento dado la amplitud del movimiento vale 2º. A causa del rozamiento, la amplitud va disminuyendo hasta que al cabo de 10 oscilaciones la amplitud vale 1,5º. Obtener el factor de amortiguamiento.

15. El tiempo de relajación de una oscilador amortiguado se define como: $\tau = 1/(2\gamma)$, donde γ es el factor de amortiguamiento. ¿Cules son las unidades del tiempo de relajación? ¿Cuál es el cambio en la amplitud del oscilador al cabo de un tiempo τ?

Resultados

1. *a*) x$\leq 0,031$ m; *b*) ν_{max}=3,16 s^{-1}
2. $T = \frac{4}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h_o}{g}}$
4. $K_{par} = k_1 + k_2$; $\frac{1}{K_{ser}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
5. a)h_{max} =17 mm, b)=0.26 s, d)0,54 m/s
6. x= 3,97 m
7. A=65 cm
8. $\omega = \sqrt{g/(\rho_r a)}$
9. a)A=5 cm, f=1.58 Hz, $T = 0,6347$ s b) v_{max}=0.495 m/s, t=0.158 s d) φ= 2.26 rad, A=3.91 cm
11. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$; $(I = 2MR^2)$
12. $x = l\frac{3+\sqrt{3}}{6}$; $(I = \frac{1}{12}ml^2 + m(x - l/2)^2))$
14. γ=0,0115 s^{-1}
15. 0,606

OSCILACIONES ARMÓNICAS EN 1D

CINEMÁTICA (tema 3)

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = A\omega\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

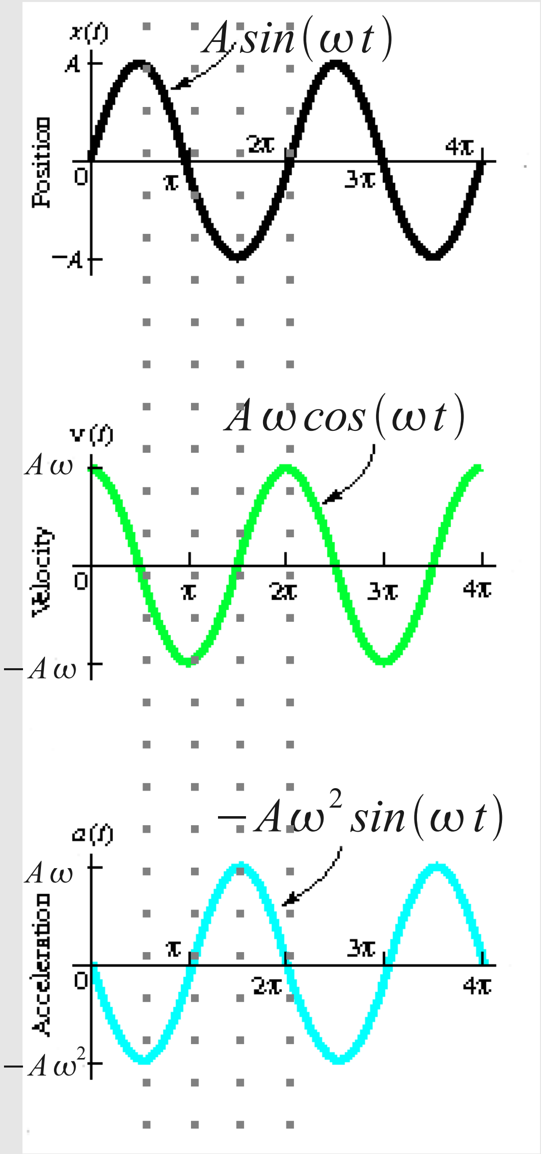
$$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi + \pi)$$
$$a = -\omega^2 x$$

Amplitud: A

Periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Frecuencia: $\nu = \dfrac{1}{T}$

Fase de movimiento: $\omega t + \varphi$

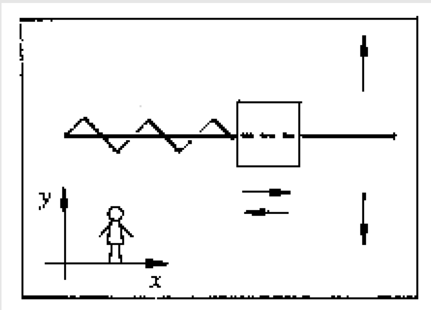


$x=-A$		$x=0$		$x=+A$
$v=0$		$v=\pm\omega A$		$v=0$
$a=+\omega^2 A$	$\rightarrow$	$a=0$	$\leftarrow$	$a=-\omega^2 A$
$-A$		0		$+A$

$$\boxed{\begin{gathered} v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \\ a = -\omega^2 x \end{gathered}}$$

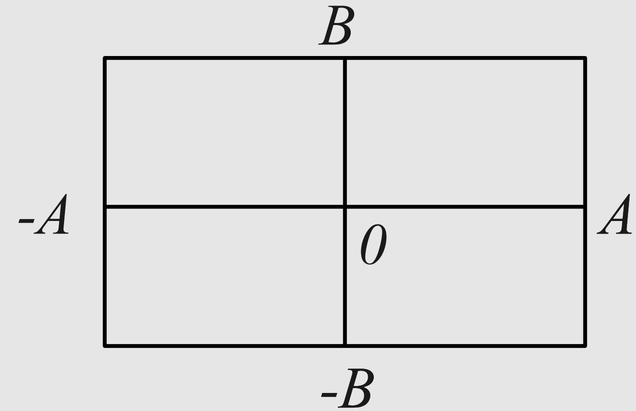
OSCILACIONES ARMÓNICAS EN 2D

Composición de dos M.A.S de direcciones perpendiculares con la misma ω



$$x = A\sin(\omega t)$$
$$y = B\sin(\omega t + \varphi)$$

¿Cuál es la trayectoria de la partícula?



$$\boxed{\varphi = 0}$$

$$x = A\sin(\omega t)$$
$$y = B\sin(\omega t)$$
$$y = \frac{B}{A}x$$

$$\boxed{\varphi = \pi}$$

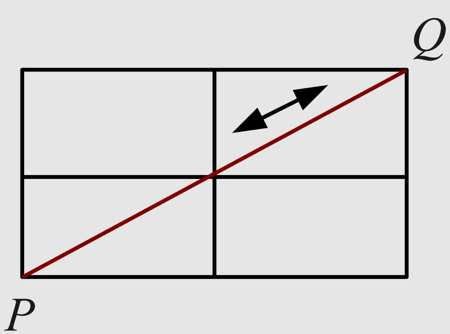
$$x = A\sin(\omega t)$$
$$y = -B\sin(\omega t)$$
$$y = -\frac{B}{A}x$$
$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$
$$r = (A^2 + B^2)^{1/2}\sin(\omega t)$$

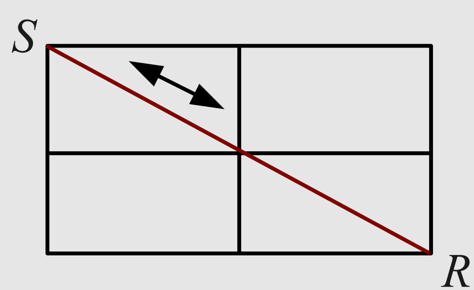
$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$$

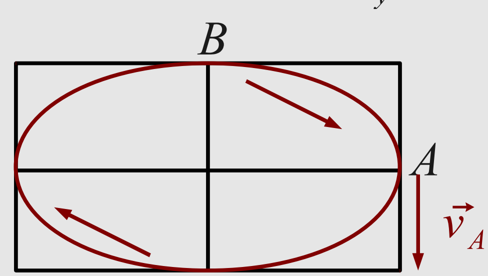
$$x = A\sin(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

$$\boxed{\varphi = \frac{3\pi}{2}}$$ Ejercicio

$$x = A \Rightarrow \sin(\omega t) = 1 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}$$
$$v_x = A\omega\cos(\omega t) = 0$$
$$v_y = -B\omega\sin(\omega t) < 0$$



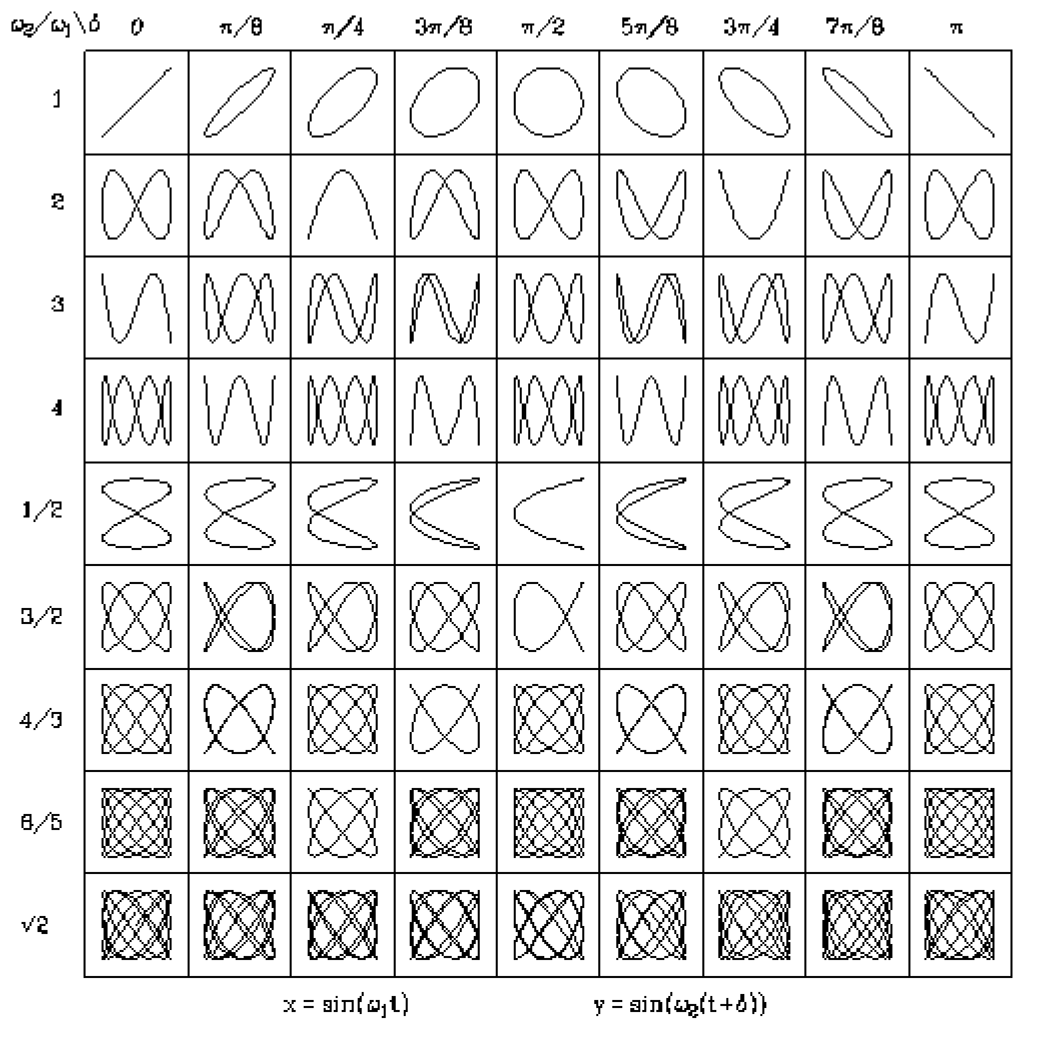




¿Qué ocurre si $A=B$?

Composición de dos M.A.S de direcciones perpendiculares

Diagramas de Lissajous



DINÁMICA

Sea una partícula de masa m

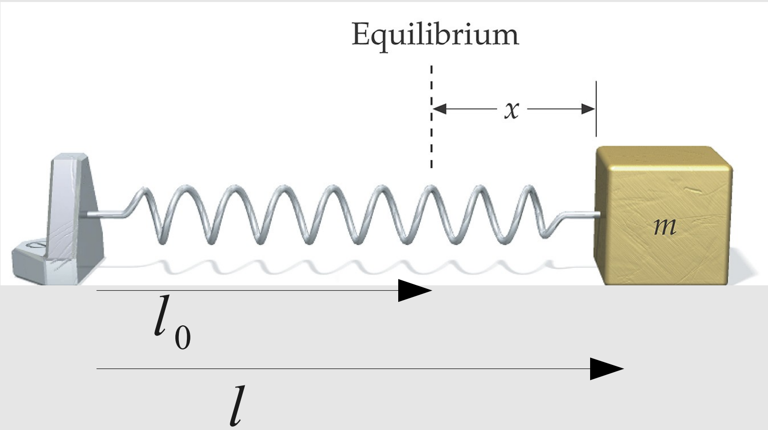
$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a = -\omega^2 x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Ecuación diferencial del M.A.S

1.- Masa unida a un muelle



Fuerza recuperadora:

$$F = -kx \qquad x = l - l_0$$

$$-kx = ma$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

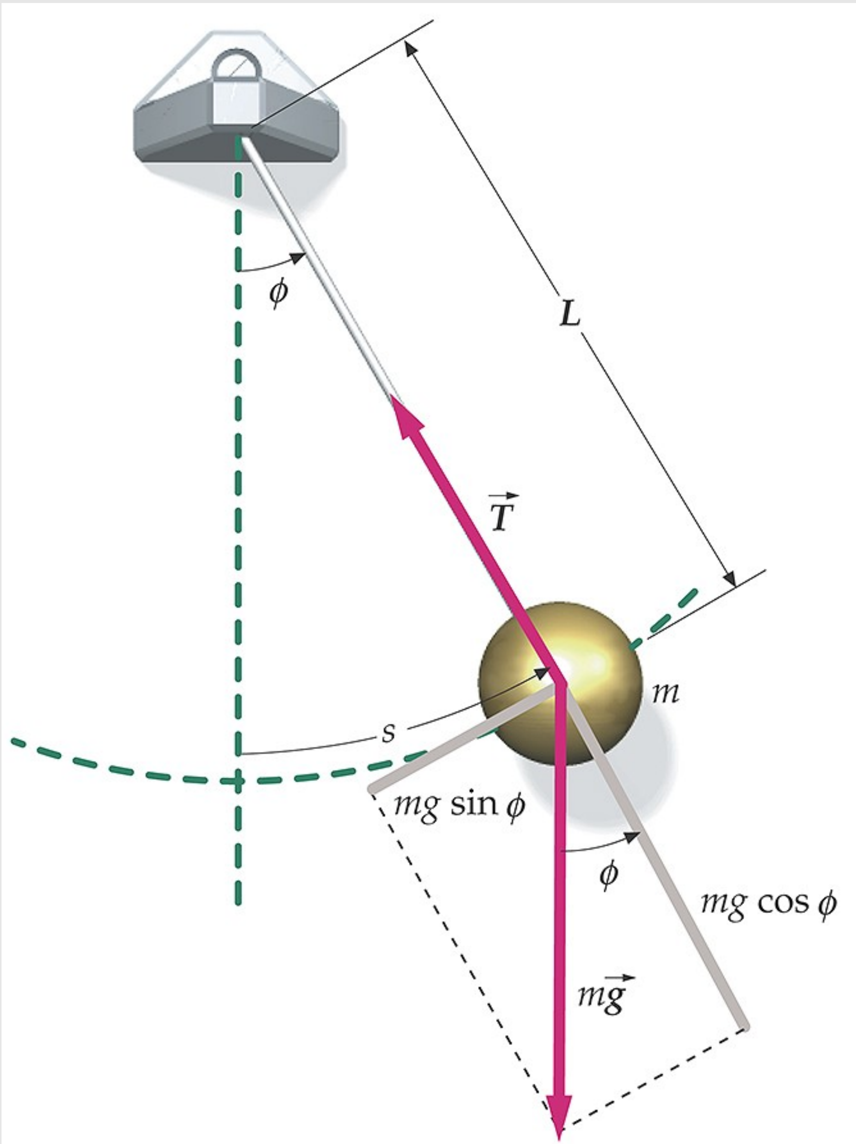
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Oscilador armónico

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Ejercicios 1-12

2.- Péndulo simple



$$\begin{cases} F_\tau = -mg\, sin\,\phi = m\, a_\tau \\ a_\tau = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = L \dfrac{d^2\phi}{dt^2} \end{cases}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L} sin\,\phi = 0$$

No es armónico

Para pequeñas oscilaciones $\sin\phi \approx \phi$

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\phi = 0}$$

Oscilador armónico

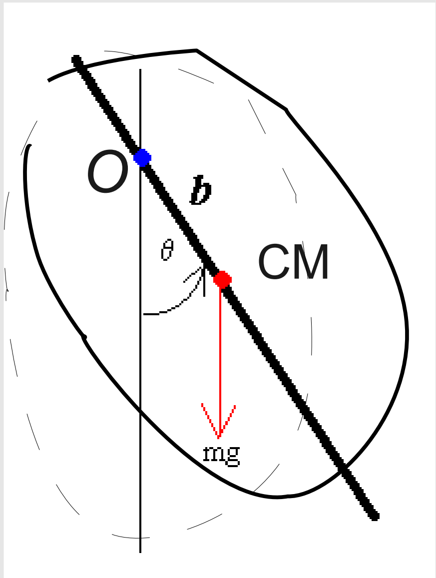
$$\omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{L/g}$$

Ejercicio 3

Práctica de ordenador: Péndulo de Foucault

3.- Péndulo físico (tema 8)

Sólido rígido que realiza pequeñas oscilaciones alrededor de un eje que **NO** pasa por el CM



$$M = I\,\alpha = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

I : Momento de inercia respecto de O

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad M = -m\,g\,b\sin\theta$$

$$-m\,g\,b\sin\theta = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m\,g\,b}{I}\sin\theta = 0$$

No es armónico

Oscilaciones de pequeña amplitud: $\sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{m\,g\,b}{I}\theta = 0}$$

Oscilador armónico

$$\omega^2 = \frac{m\,g\,b}{I} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}}$$

Ejercicios 11-13

I : momento de inercia respecto de O
b: distancia del CM al eje de giro

ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO

Partícula sometida a $F = -kx$ conservativa (tema 6)

Energía potencial: $E_p = \frac{1}{2} k x^2$

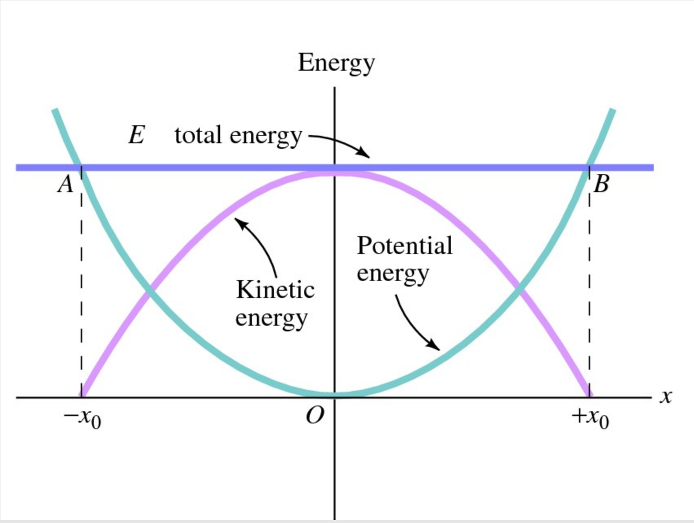
Energía cinética:

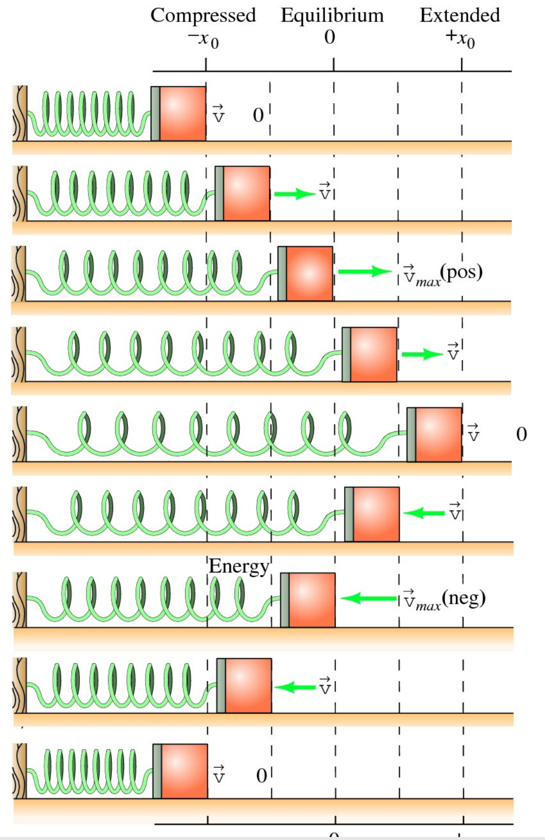
$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \qquad E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Energía mecánica: $E = \frac{1}{2} k A^2$

constante



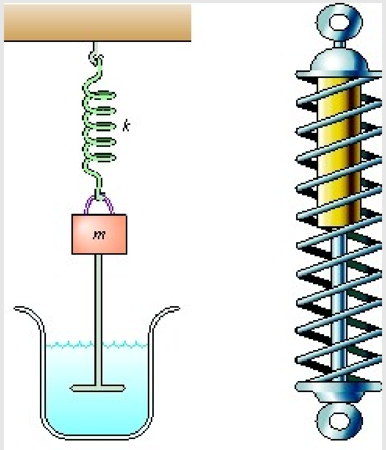


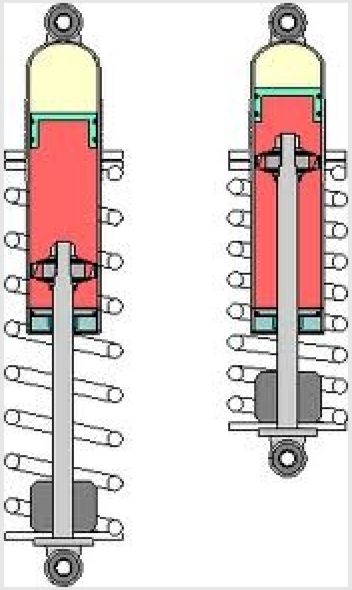
M.A.S – No se detiene

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Debido al rozamiento la energía (y la amplitud) del movimiento se reduce hasta detenerlo.

Amortiguadores de coche





Fuerza de rozamiento: $F_{amortiguamiento} = -\lambda v$

$$\Sigma F = -kx - \lambda v = m \frac{d^2 x}{d t^2}$$

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} + \lambda \frac{d x}{d t} + kx = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \dfrac{\lambda}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{array} \right.$$

$\gamma = \frac{\lambda}{2m}$ Factor de amortiguamiento $[\gamma] = T^{-1}$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Frecuencia fundamental del oscilador

$$\boxed{\frac{d^2 x}{d t^2} + 2\gamma \frac{d x}{d t} + \omega_0^2 x = 0}$$

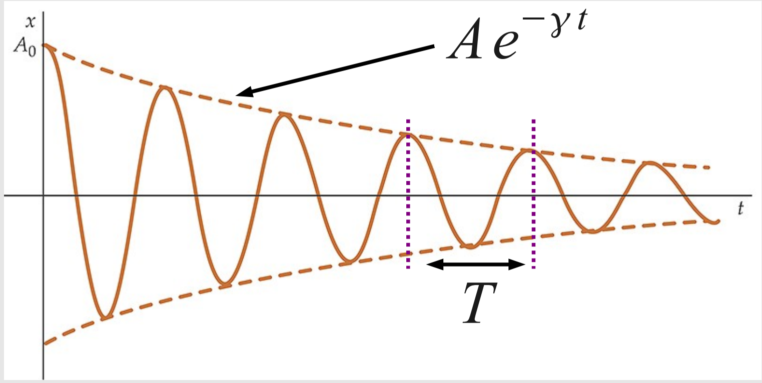
No es armónico

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

a) Amortiguamiento débil $\gamma \ll \omega_0$

$$x=Ae^{-\gamma t}sin(\omega t+\varphi)$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$



Cambio en la amplitud durante 1 T:

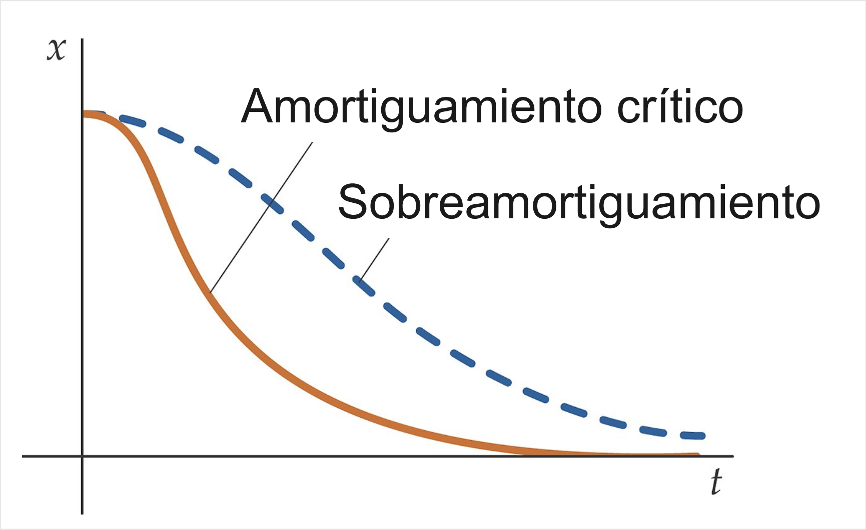
$$\frac{x(t+T)}{x(t)}=\frac{Ae^{-\gamma(t+T)}\sin[\omega(t+T)+\varphi]}{Ae^{-\gamma t}\sin[\omega t+\varphi]}=e^{-\gamma T}$$

b) Amortiguamiento crítico $\gamma=\omega_0$

Vuelve a la posición de equilibrio en el menor tiempo posible sin oscilar

c) Sobreamortiguamiento $\gamma>\omega_0$

El sistema no realiza ninguna oscilación

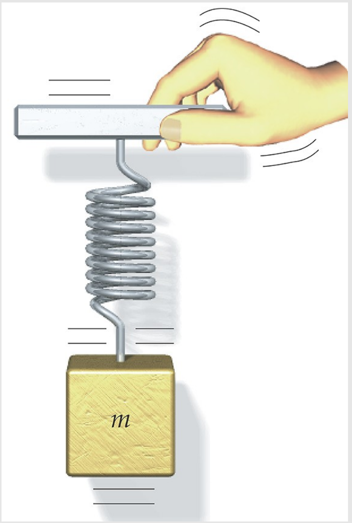


Práctica de ordenador: Oscilador amortiguado

Ejercicios 14-15

OSCILACIONES FORZADAS

Para mantener en funcionamiento un oscilador amortiguado hay que suministrarle energía.



$$F_{impulsora} = F_0 \sin(\omega_i t)$$

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} + \lambda \frac{d x}{d t} + kx = F_0 \sin(\omega_i t)$$

Solución estacionaria $\quad x = A \sin(\omega_i t + \delta)$ → Desfasada

La amplitud depende de F_0 y ω_i

Energía suministrada = disipada

↓

amplitud constante

↓

sistema en régimen estacionario.

$$\boxed{\omega_i \approx \omega_0}$$

RESONANCIA: la amplitud del oscilador es máxima

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Frecuencia natural

Práctica de ordenador: Oscilador forzado

Circuitos RLC (tema 17)

AUTO-TEST en MOODLE

Fisika Orokorra (31)

IDOIA GARCIA DE GURTUBAY GALLIGO barruan da (Irten)

moodle 2011-12 ► 310_GFISIC30_26637_31 ► Galdetegiak ► Oszilazioei buruzko testa ► 1 saiakera

Galdetegia eguneratu

Informazioa | Emaitzak | Aurreikusi | Editatu

Oszilazioei buruzko testa aurreikusi

Hasi berriro

Oharra: zure ikasleek ezin dute eskuratu orain galdetegi hau

1
Puntuak: 1

2,5 kg-ko masa bat 4,50 kN/m konstanteko malguki bati lotu zaio. Malgukia orekatik 10 cm luzatu da eta gero askatu egiten da. Zein da masa+malguki sistemaren energia zinetikoa masa orekatik 5 cm-ra dagoenean?

Aukeratu erantzun bat

- a. 5,6 J
- b. 11 J
- c. 17 J
- d. 14 J
- e. 42 J

2
Puntuak: 1

Higidura harmoniko sinple baten maiztasuna $2{,}6\cdot10^{4}\ s^{-1}$ da. Oszilazioa hasten da (t=0) desplazamendua maximoa denean eta $6{,}5\cdot10^{-3}$ cm balio du. Noiz pasatuko da partikula $x=-2{,}6\cdot10^{-3}$ cm posiziotik lehenengo aldiz?

Aukeratu erantzun bat

- a. $7{,}1\cdot10^{-6}$ s
- b. $1{,}2\cdot10^{-5}$ s
- c. $1{,}1\cdot10^{-4}$ s
- d. $1{,}1\cdot10^{-3}$ s
- e. $4{,}2\cdot10^{-3}$ s

EJERCICIOS

ZTF-FCT

FÍSICA GENERAL

Ejercicios. Tema 11. Oscilaciones.

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

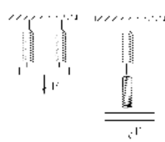
1. Una caja se encuentra sobre una plataforma que vibra a razón de 2 oscilaciones por segundo. El coeficiente de rozamiento estático entre la plataforma y la caja es 0.5. ¿Cuál es la máxima amplitud con la que puede vibrar la plataforma para que la caja no resbale? Si la vibración de la plataforma fuera vertical y de amplitud 25 mm, ¿cuál sería la frecuencia máxima del oscilador, para que la caja no se separe de la plataforma?

2. Una partícula resbala sin rozamiento hacia adelante y hacia atrás, entre los dos planos inclinados de la figura.

   a) Encontrar el periodo del movimiento, si la altura inicial es h_0.
   b) ¿Es un movimiento oscilatorio? ¿Es armónico simple?

3. Supongamos que la elongación en el equilibrio de un muelle al que se le ha suspendido una masa m es l. Demostrar que si se perturba el sistema, obtenemos el mismo movimiento que el de un péndulo simple de longitud l.

4. Obtener la constante recuperadora del sistema formado por dos muelles de constantes k_1 y k_2, cuando los muelles se colocan en serie y cuando se colocan en paralelo (ver figura).



5. Una masa de 2 kg está unida al extremo de un muelle. La longitud propia del muelle es 8 cm, pero cuando la masa se sitúa encima del muelle, la longitud del muelle es 5 cm. Desde esta posición de equilibrio, se le da un golpe hacia abajo y la partícula empieza a oscilar con una velocidad de 0.3 m/s.

   a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la masa?
   b) ¿Cuánto tiempo necesita la masa para alcanzar la altura máxima por primera vez?
   c) ¿Estará el muelle sin comprimir en algún instante?
   d) ¿Cuál debe ser la velocidad incial de la partícula para que el muelle esté sin comprimir en algún instante?

6. Una masa unida a un muelle horizontal oscila con un periodo de 4 s. Si suspendemos la masa del mismo muelle, pero ahora en posición vertical y sin oscilar, ¿cuál es la elongación del muelle?

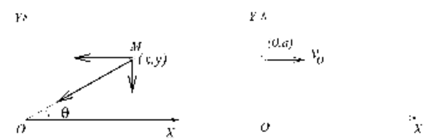
7. Una masa de 40 g realiza un movimiento armónico simple de periodo T=0.32 s . ¿Cuál es la amplitud del movimiento si la fuerza máxima que produce el movimiento vale 10 N?

8. Un bloque de densidad relativa ρ_r tiene forma de paralelepípedo de dimensiones a, b y c. El bloque está sobre agua, siendo el lado de longitud a el vertical. Desde su posición de equilibrio, se le da un pequeño golpe. Comprobar que el movimiento es armónico y calcular la frecuencia angular de la oscilaciones. Ignorar el rozamiento. Ayuda: Escribir la segunda Ley de Newton para describir el movimiento del bloque.

9. Cuando una masa de 2 kg se suspende de un muelle vertical lo alarga 10 cm. Unimos la masa al mismo muelle y se pone sobre una mesa horizontal y sin rozamiento, fijando el extremo del muelle que no tiene la masa a un punto fijo. Separamos la masa 5 cm de su posición de equilibrio y la soltamos cuando t=0.

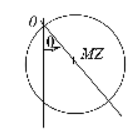
   a) Obtener la amplitud, frecuencia angular, frecuencia y periodo.
   b) Calcular la velocidad máxima de la masa. ¿Cuándo ocurre?
   c) Unimos una masa de 2 kg a un muelle de características similares pero se separa 10 cm de su posición de equilibrio. ¿Cuál de las dos masas llegará antes a su posición de equilibrio? ¿Por qué?
   d) Separamos de nuevo la masa de su posición de equilibrio 3 cm y se suelta con una velocidad inicial de -25 cm/s, ¿cuál es la amplitud de las oscilaciones y la fase inicial?

10. Una masa M está sometida a 3 fuerzas: La primera es perpendicular al eje OY y vale $k_1\,x$. La segunda es perpendicular al eje OX y vale $k_1\,y$. La tercera está dirigida a Oy vale $k_2\,r$, donde r es la distancia al origen de coordenadas. k_1 y k_2 son valores constantes. Si la posición inicial de la masa es $(0,a)$ y su velocidad incial, v_0, es paralela al eje OX, encontrar:



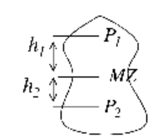
   a) El tipo de movimiento y su periodo
   b) Las ecuaciones paramétricas del movimiento (posición y velocidad en cualquier instante)
   c) La ecuación de la trayectoria. ¿Qué tipo de curva es?

11. El anillo de la figura de masa m y radio R, se suspende del punto O y realiza pequeñas oscilaciones en el plano vertical. ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones?



12. Una barra pesada está suspendida del punto O y realiza pequeñas oscilaciones en la vertical alrededor de un eje perpendicular que pasa por O. ¿Cuál debe ser la distancia x indicada en el dibujo, para que el periodo de las oscilaciones sea mínimo?

13. Un objeto plano tiene momento de inercia I respecto del eje perpendicular que pasa por su centro de masas. Cuando oscila alrededor del punto P_1 (ver figura) su periodo es T. Al otro lado del centro de masas, puede encontrarse otro punto, P_2, respecto del cual el periodo de oscilación también es T. Demostrar que la distancia entre los puntos P_1 y P_2 es $gT^2/(4\pi^2)$.



14. El periodo de un péndulo simple vale 2,5 s cuando realiza pequeñas oscilaciones. En un momento dado la amplitud del movimiento vale 2º. A causa del rozamiento, la amplitud va disminuyendo hasta que al cabo de 10 oscilaciones la amplitud vale 1,5º. Obtener el factor de amortiguamiento.

15. El tiempo de relajación de una oscilador amortiguado se define como: $\tau = 1/(2\gamma)$, donde γ es el factor de amortiguamiento. ¿Cules son las unidades del tiempo de relajación? ¿Cuál es el cambio en la amplitud del oscilador al cabo de un tiempo τ?

Resultados

1. *a*) x$\leq 0,031$ m; *b*) ν_{max}=3,16 s^{-1}

2. $T = \frac{4}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h_o}{g}}$

4. $K_{par} = k_1 + k_2$; $\frac{1}{K_{ser}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

5. a)h_{max} =17 mm, b)=0.26 s, d)0,54 m/s

6. x= 3,97 m

7. A=65 cm

8. $\omega = \sqrt{g/(\rho_r a)}$

9. a)A=5 cm, f=1.58 Hz, $T = 0,6347$ s b) v_{max}=0.495 m/s, t=0.158 s d) φ= 2.26 rad, A=3.91 cm

11. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$; $(I = 2MR^2)$

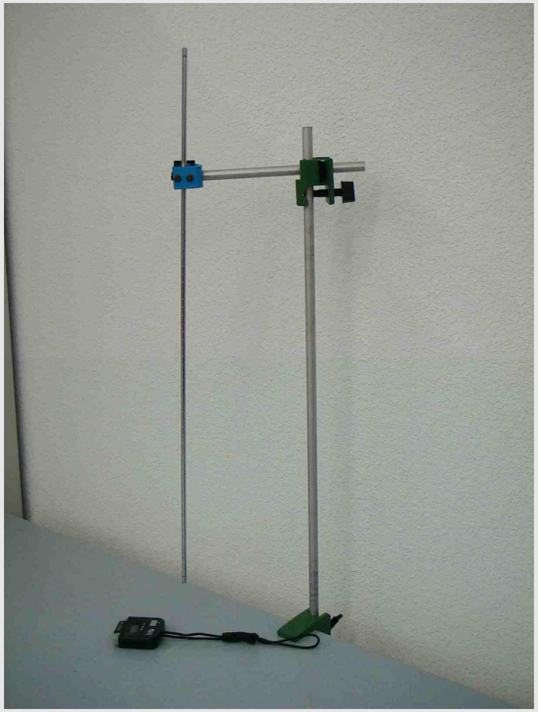
12. $x = l\frac{3+\sqrt{3}}{6}$; $(I = \frac{1}{12}ml^2 + m(x - l/2)^2))$

14. γ=0,0115 s^{-1}

15. 0,606

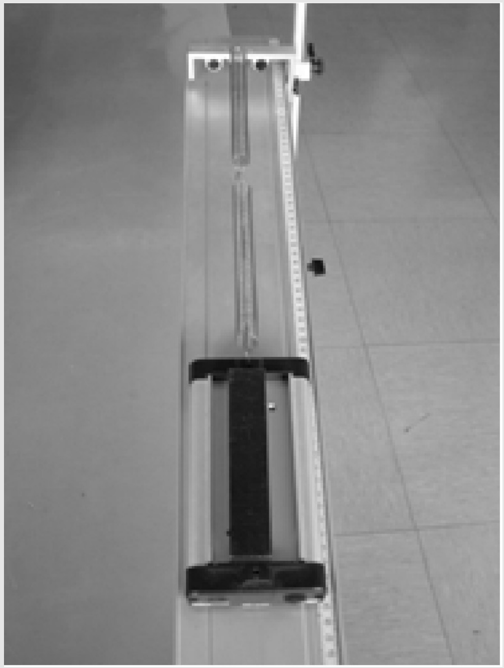
PRÁCTICAS DE LABORATORIO

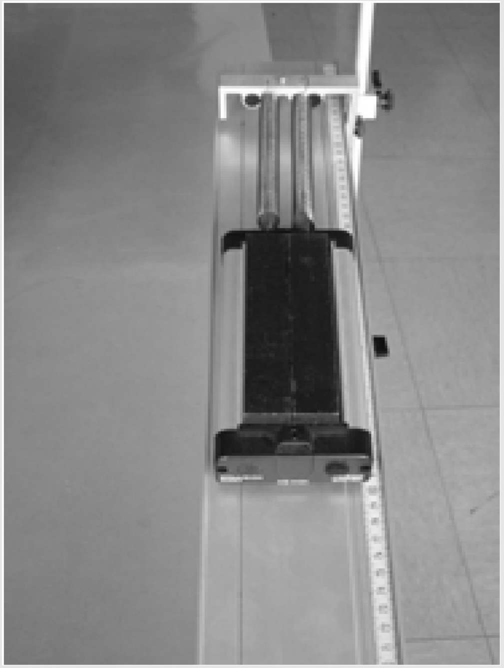
Movimiento armónico simple. Ley de Hooke.



El péndulo físico. Medida de *g*.

Plano inclinado: oscilaciones. Muelles en serie y en paralelo.





El péndulo de Foucault

1. Objetivo

El objetivo de esta práctica es estudiar el efecto de la rotación de la Tierra sobre un péndulo simple. Para ello se plantearán las ecuaciones de movimiento que se integrarán numéricamente y se dibujarán las componentes del vector posición de la lenteja del péndulo en función del tiempo para determinar la velocidad angular del plano de oscilación. También estudiaremos la energía del sistema.

2. Introducción

Sea un péndulo simple de longitud $L = 30$ m en la superficie de la Tierra, con una aceleración de la gravedad en la dirección de la vertical local de módulo $g = 9{,}81$ m/s^2, en un lugar de latitud $\phi = 45°$N.

1. Hacer un esquema del efecto de la aceleración de Coriolis sobre la lenteja del péndulo cuando el péndulo oscila a lo largo de la dirección Norte-Sur en ambos sentidos. Para ello, tomar como eje X la dirección Oeste-Este, como eje Y la dirección Sur-Norte y como eje Z la dirección perpendicular al plano OXY, positiva hacia el cénit.

como eje Z la dirección perpendicular al plano OXY, positiva hacia el cénit.

2. Sea $\Omega = 7{,}292 \times 10^{-5}$ rad/s la velocidad angular de rotación de la Tierra. Demostrar que en la aproximación de ángulo pequeño,[1] las ecuaciones del movimiento de la lenteja del péndulo en el plano OXY vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= u \\
\frac{dy}{dt} &= v \\
\frac{du}{dt} &= -\frac{g}{L}x + 2\Omega\sin\phi v \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{g}{L}y - 2\Omega\sin\phi u,
\end{aligned}$$

donde x e y son las componentes del vector posición de la masa en el plano horizontal y u y v las componentes del vector velocidad

3. Demostrar que la energía del péndulo viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}m(u^2+v^2) + mgL\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{L^2}}\right)$$

[1] En la aproximación de ángulo pequeño su velocidad en la dirección vertical se considera despreciable.

3. Tarea

1. Escribir en python el código que permita integrar el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas.

   a) Para ello definir un array que contenga las variables de estado x, y, u, v y otro array que contenga sus derivadas. Escribir una función que tenga como entrada el array con las variables de estado, el tiempo y las variables auxiliares y como salida sus derivadas según las ecuaciones planteadas arriba. Para ello utilizar el ejemplo el programa `adibidea.py` que se ha analizado en clase.

   b) Definir una función que permita calcular la energía del sistema en cada instante.

   c) Integrar la evolución del sistema durante 24 h, con un valor $\Delta t = 0{,}1$ s utilizando la función del módulo `integratzaile.py`. Este módulo también contiene funciones útiles para abrir, cerrar y almacenar datos en el fichero de salida.

   Utilizar como condiciones iniciales $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0$, $u_0 = 0$ y $v_0 = 0$.

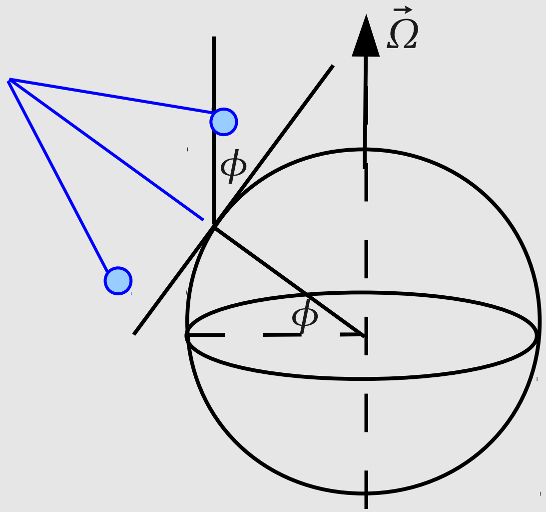
   d) En el fichero de salida escribir t, x, y y E para cada instante.

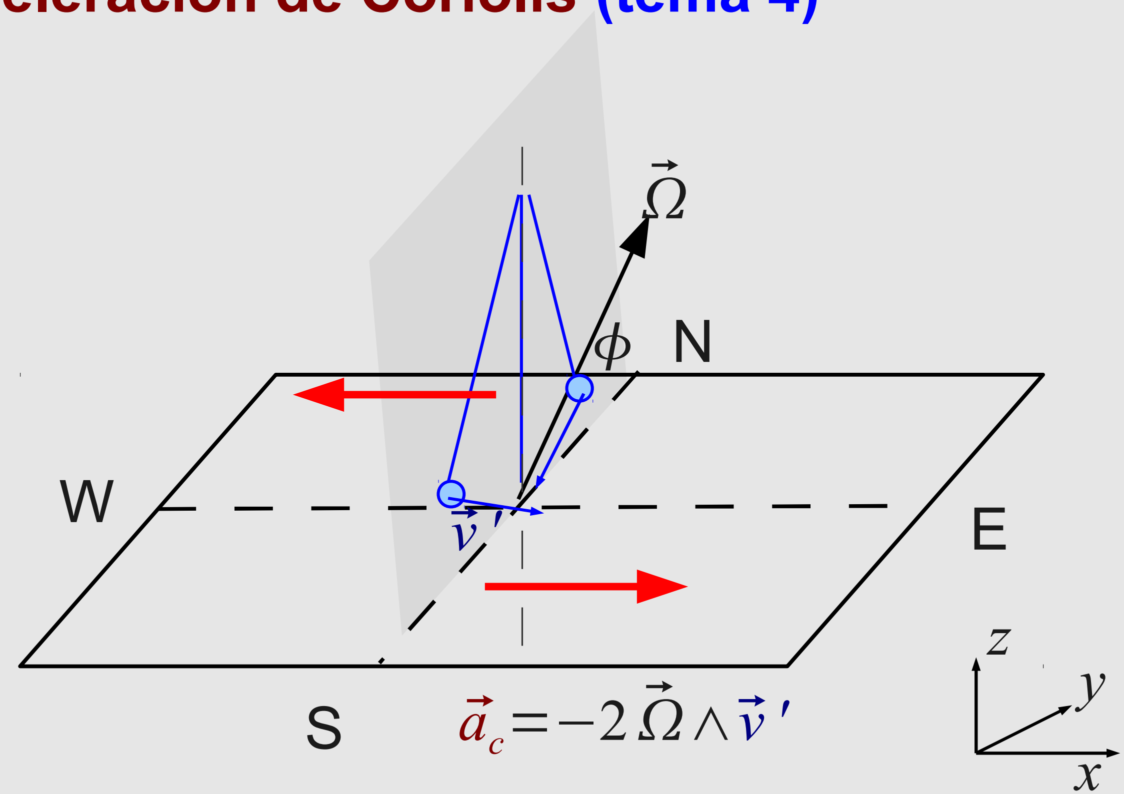
2. Análisis de los resultados

   a) Representar en un diagrama las coordenadas x e y en función de t, lo que dará una idea del giro del plano de oscilación. ¿Es aparente la oscilación del péndulo? Pensar en algún método que permita evaluar de forma aproximada la velocidad angular del plano de oscilación.

   b) Dibujar la energía del sistema en función del tiempo. ¿Debe conservarse la energía de este sistema? ¿Coincide con el resultado obtenido? Volver a integrar el sistema con un paso de tiempo (Δt) más pequeño. ¿Por qué no parece conservarse la energía con el paso de tiempo más grande?

Esquema del efecto de la aceleración de Coriolis (tema 4)





$$\vec{\Omega} = \Omega \cos\phi \,\hat{j} + \Omega \sin\phi \,\hat{k}$$

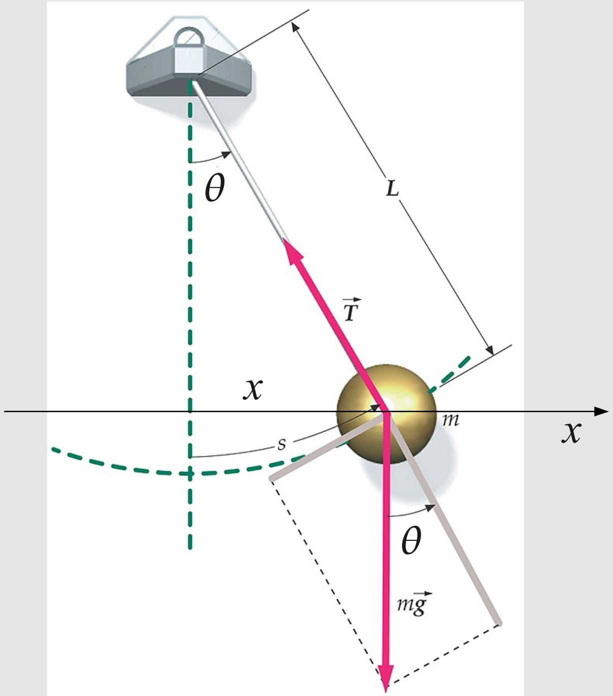
$$\vec{v}\,' = v'_x \hat{i} + v'_y \hat{j} + v'_z \hat{k}$$

$$\vec{a}_c = -2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\,' = 2\,\Omega \cos\phi \, v'_z \hat{i} + 2\,\Omega \cos\phi \, v'_x \hat{k} + \underbrace{2\,\Omega \sin\phi \, v'_y \hat{i} - 2\,\Omega \sin\phi \, v'_x \hat{j}}$$

$$v'_z \approx 0$$

Rotación en el plano *XY*

Ecuaciones de movimiento de la lenteja en el plano *XY*



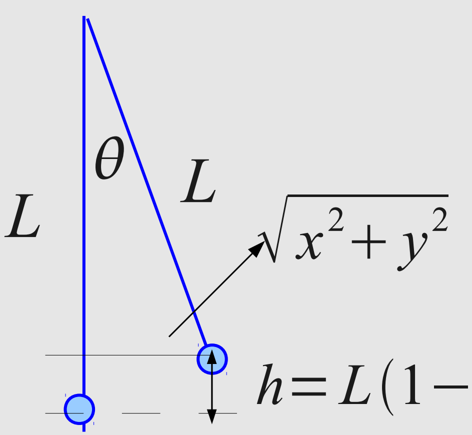
$$-mg\,sin\,\theta = m\,L\,\frac{d^2\theta}{d\,t^2} \qquad sin\,\theta = \frac{x}{L}$$

ángulos pequeños $\quad sin\,\theta \approx \theta \rightarrow x \approx \theta\,L$

$$-mg\,\frac{x}{L} = m\,\frac{d^2\,x}{d\,t^2} \;\rightarrow\; \frac{d^2\,x}{d\,t^2} = \frac{-g}{L}\,x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \\ \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{g}{L}x + 2\,\Omega\,\sin\phi\,v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{g}{L}y - 2\,\Omega\,\sin\phi\,u \end{aligned}}$$

Energía del péndulo



$$h = L(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m(u^2+v^2) + m\,g\,L\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{L^2}}\right)}$$

```python
##############################################
# foucault.py
# Péndulo de Foucault, integrado numéricamente
#
# 2011, Idoia Garcia de Gurtubay
##############################################

import numpy
import math
import integratzaile

def deg2rad(d):
     return d/180.*math.pi

#Función donde definimos las EDO
def deribatuak(x,t,params):
     dxdt=numpy.zeros(len(x),numpy.float64)
     dxdt[0]=x[2]
     dxdt[1]=x[3]
     dxdt[2]=-params['g']/params['L']*x[0]+params['f']*x[3]
     dxdt[3]=-params['g']/params['L']*x[1]-params['f']*x[2]
     return dxdt

#Función para calcular la energía en cada instante
def Energia(X,L,g):
     Ek=0.5*X[2]*X[2]+.5*X[3]*X[3]
     sinTheta=math.sqrt((X[0]*X[0]+X[1]*X[1])/L/L)
     cosTheta=math.sqrt(1.-sinTheta*sinTheta)
     h=L*(1-cosTheta)
     Ep=g*h
     return Ek+Ep
#################################
# Tiempo de integración
orduak=24
# Velocidad angular de la Tierra
omega=7.292e-5
# Latitudea (grados)
deglat=45.
# Cambio a radianes
radlat=deg2rad(deglat)
# Coriolis : 2omega sin(phi)
f=2*omega*math.sin(radlat)
# Párametros del sistema
params={'L':30.,'g':9.81,'Omega':omega,'f':f}
# Condiciones iniciales
X0=[ 0.1 , 0.0 , 0.0 , 0.0 ]
```

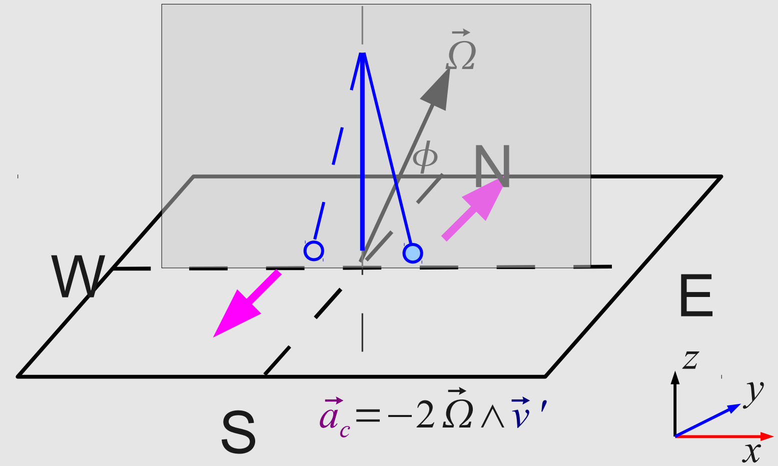
```python
ob_artx=integratzaile.IrekiArtxiboa("foucault.csv")
t0=0.0
t1=orduak*3600. #  t pasado a segundos
deltat=0.01     # paso de tiempo
t=t0
X=X0
npausu=0
while t<t1:
     if (npausu%2000)==0:
          integratzaile.GordeCSV(
                              ob_artx,
                              (t,X[0],X[1],Energia(X,params["L"],params["g"])))
     X=integratzaile.HurrengoBalioa(t,X,deltat,deribatuak,params)
     t=t+deltat
     npausu=npausu+1

integratzaile.ItxiArtxiboa(ob_artx)
```

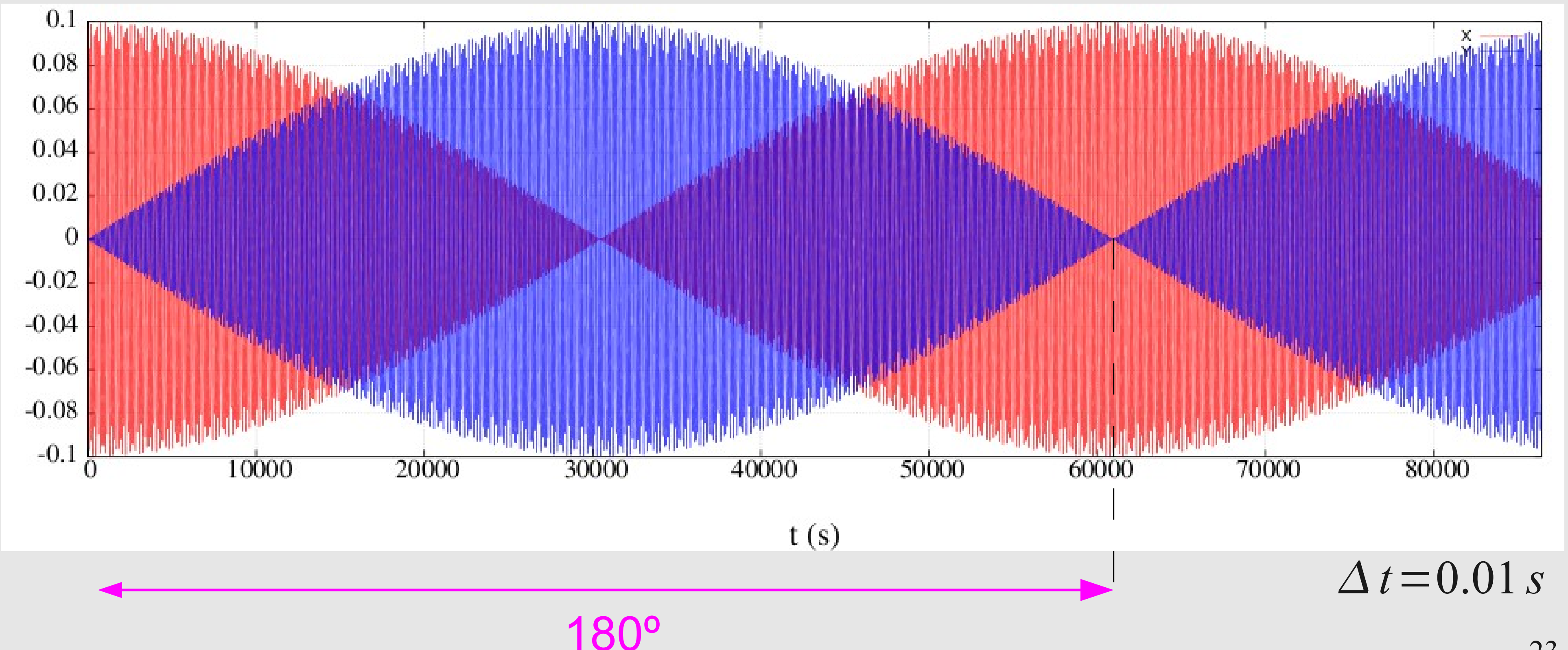
```python
# integratzaile.py
#
# Modulo con funciones:
# - Integratzaile: Meétodo RK4 para la integración de EDO
# - Para abrir/cerrar y guardar ficheros
# 2011, Idoia Garcia de Gurtubay
############################################################
import numpy
N=numpy
###########################################################################
# t : Valor actual del tiempo
# xt : Estado del sistema en el espacio de fases
# dt : Paso de tiempo
# deribatuak : Funcion vectorial con los valores de las ferivadas en cada itte
# params: Para pasar valores auxiliares y parámetros a las derivadas
###############################################################################
def HurrengoBalioa(t,xt,dt,deribatuak,params=None):
        # Derivadas de los puntos intermedios
        ##############################
        k1=deribatuak(xt,t,params)*dt
        k2=deribatuak(xt+k1/2.,t+dt/2.,params)*dt
        k3=deribatuak(xt+k2/2.,t+dt/2.,params)*dt
        k4=deribatuak(xt+k3,t+dt,params)*dt
        # Valor de las derivadas en el instante siguiente
        ###########################
        xtp1=xt+(k1+k4)/6.+(k2+k3)/3.
        return xtp1
# Abrir
def IrekiArtxiboa(izena):
        return open(izena,"w")
#Cerrar
def ItxiArtxiboa(artx_ob):
        artx_ob.close()
#Guardar
def GordeCSV(artx_ob,datuak):
        for d in datuak:
                artx_ob.write(" %g"%(d,))
        artx_ob.write("\n")
```

Análisis de los resultados

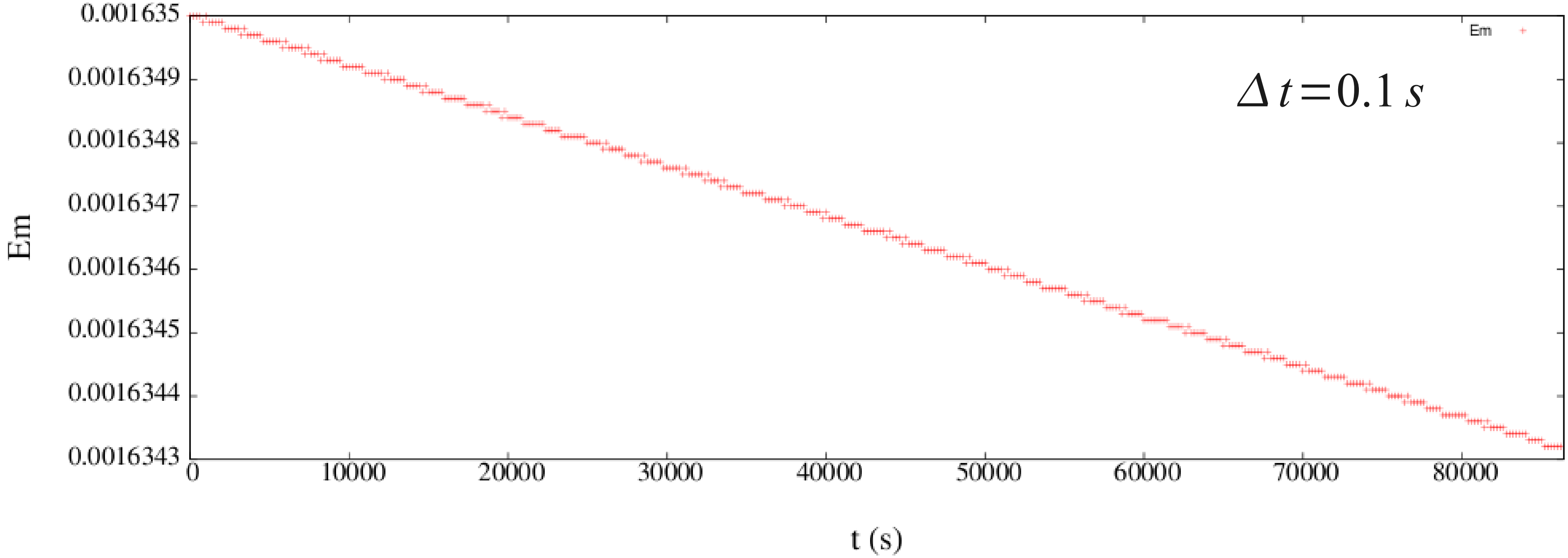
Condiciones iniciales:

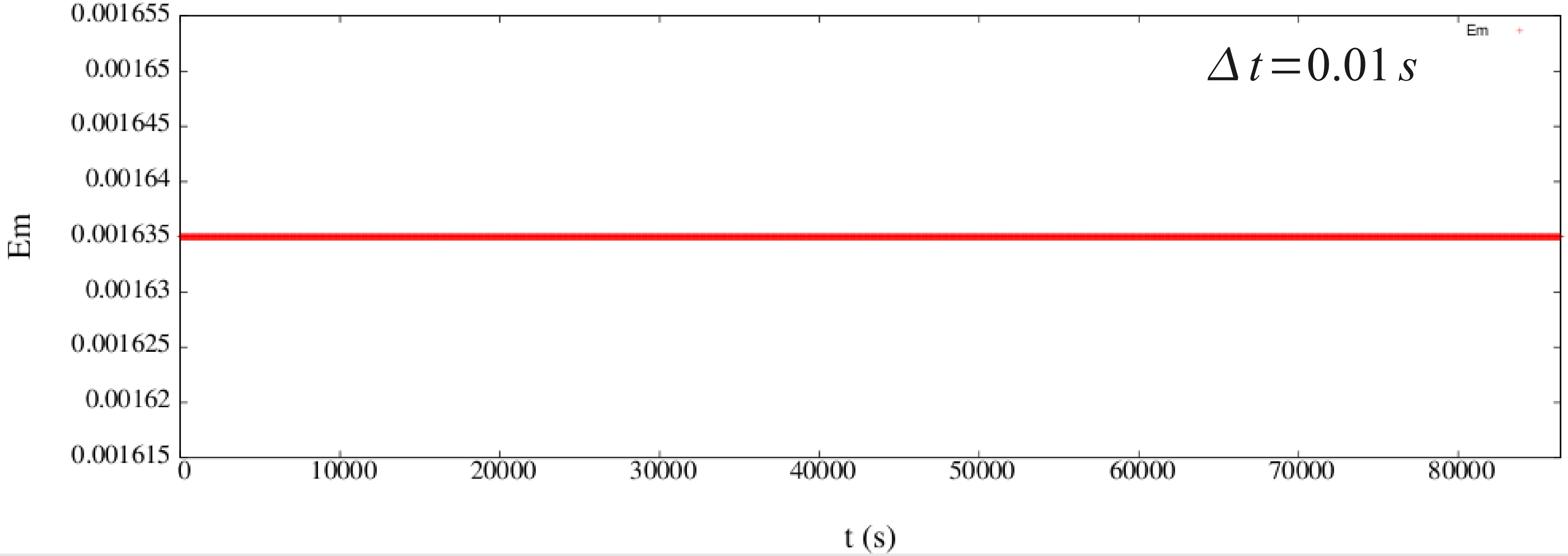
$$x_0 = 0.1 \, ; \, y_0 = 0$$
$$u_0 = 0 \, ; \, v_0 = 0$$





$$\Delta t = 0.01 \, s$$


0.001635
0.0016349
0.0016348
0.0016347
0.0016346
0.0016345
0.0016344
0.0016343
Em
Em
$\Delta t = 0.1\,s$
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
t (s)


0.001655
0.00165
0.001645
0.00164
0.001635
0.00163
0.001625
0.00162
0.001615
Em
Em
$\Delta t = 0.01\,s$
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
t (s)