Pumping Lemma para linguagens regulares

- Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem regular que é aceita por um DFA M com k estados. Se $w \in \mathcal{L}$, com $|w| \geqslant k$, então w por ser escrita como $w = xyz$, com $|xy| \leqslant k$, $|y| > 0$ e $xy^iz \in \mathcal{L}$, $\forall\, i \geqslant 0$.
- Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem infinita regular. Existe um inteiro $p \in \mathbb{N}^+$ (tamanho crítico ou *pumping length*), tal que toda cadeia $w \in \mathcal{L}$, com comprimento $|w| \geqslant p$, pode ser escrita como $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$, $|y| > 0$ e $xy^iz \in \mathcal{L}$, $\forall\, i \geqslant 0$.

$\mathcal{L}_1 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = u1^{|u|_0},\ u \in \Sigma^*\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = u1^m$, com $u = 0^p$ e $m = |u|_0 = p$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_1$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^p$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^2z = xyyz = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}1^p = 0^{p+j}1^p \in \mathcal{L}_1$. Contudo, $w' = u1^m$, com $u = 0^{p+j}$ e $m = p$, ou seja, $|u|_0 = p + j > m = p$ e $w' \notin \mathcal{L}_1$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_1$ não é regular.

$\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^mu,\ |u|_0 \leqslant m,\ m \in \mathbb{N}^+,\ u \in \Sigma^*\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p10^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^mu$, com $m = p$ e $u = 10^p$, ou seja, $|u|_0 = p$ e $w \in \mathcal{L}_2$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}10^p$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-i-j}1^p = 0^{p-j}10^p \in \mathcal{L}_2$, ou seja, $w' = 0^m0^n10^p$, com $m + n = p - j$ e $u = 0^n10^p$. Contudo, para todo $1 \leqslant m \leqslant p - j$, tem-se que $|u|_0 = n + p > m = p - j$ e $w' \notin \mathcal{L}_2$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_2$ não é regular.

$\mathcal{L}_3 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 1^5u,\ 2 \cdot |w|_0 = 3 \cdot |w|_1,\ u \in \Sigma^*\}$

- Seja a cadeia $w = 1^51^{2p+1}0^{3p+9} = 1^{2p+6}0^{3p+9}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 1^5u$, com $u = 1^{2p+1}0^{3p+9}$, $|u|_0 = 3p + 9$, $|u|_1 = 2p + 6$ e $2 \cdot |w|_0 = 3 \cdot |w|_1$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_3$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 1^{2p+6-i-j}0^{3p+9}$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 1^i1^{2p+6-i-j}1^{3p+9} = 1^{2p+6-j}0^{3p+9} \in \mathcal{L}_3$. Contudo, $w' = 1^5u'$, com $u' = 1^{2p+1-j}0^{3p+9}$, e $w' \notin \mathcal{L}_3$, pois $2|w|_0 \neq 3 \cdot |w|_1$ já que $3(5 + 2p + 1 - j) = 6p + 18 - j < 2(3p + 9) = 6p + 18$ para todo $1 \leqslant j \leqslant p$). Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_3$ não é regular.

$\mathcal{L}_4 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = uv,\ |u|_1 \geqslant |u|_0 + 4,\ u, v \in \Sigma^*\}$

$\mathcal{L}_5 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = uv,\ |u| = |v|,\ |v|_1 \geqslant 1,\ u, v \in \Sigma^*\}$

- Seja a cadeia $w = 0^{p-1}110^{p-1}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($u = 0^{p-1}1$, $v = 10^{p-1}$, $|u| = |v|$ e $|v|_1 = 1$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_5$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$, $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$, podem ocorrer dois casos:
  a) $z = 0^{p-1-i-j}110^{p-1} \Rightarrow w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-1-i-j}110^{p-1} = 0^{p-1-j}110^{p-1}$. Contudo, como $w' = u'v'$ e $|u'| = |v'|$, então $(p-1-j)+1+1+(p-1) = 2t$, $t \in \mathbb{N}^+$ e $t \leqslant p$, ou seja,

$j = 2(p-t)$. Mas, como $j > 0$, então $j \geqslant 2$ e para que $|u'| = |v'|$ tem-se, necessariamente, que $|v'|_1 = 0$. Logo, $w' \notin \mathcal{L}_5$.

b) $z = 10^{p-1} \Rightarrow w' = xy^0z = xz = 0^i10^{p-1} = 0^i10^{p-1}$. Contudo, como $w' = u'v'$, $|u'| = |v'|$ e $i < 1 + (p-1) = p$, tem-se novamente que, necessariamente, $|v'|_1 = 0$. Logo, $w' \notin \mathcal{L}_5$.

Portanto, dadas as contradições apresentadas, a linguagem $\mathcal{L}_5$ não é regular.

$\mathcal{L}_6 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = uv,\ |u| \geqslant |v|,\ v = r1s,\ u, r, s \in \Sigma^*\}$

$\mathcal{L}_7 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = uv^Rv,\ u \in \Sigma^*,\ v \in \Sigma^+\}$

$\mathcal{L}_8 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = u0v,\ |w| = 2 \cdot k + 1,\ |u| = |v|,\ k \in \mathbb{N},\ u, v \in \Sigma^+\}$

- Seja a cadeia $w = 1^p01^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($u = v = 1^p$, $|u| = |v| = p|$ e $|w| = 2 \cdot p + 1$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_8$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 1^{p-i-j}01^p$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 1^i1^{p-i-j}01^p = 1^{p-j}01^p \in \mathcal{L}_8$. Contudo, como há apenas uma ocorrência do símbolo 0 em w', então obrigatoriamente $u = 1^{p-j}$ e $v = 1^p$, ou seja, $|u| \neq |v|$ e $w' \notin \mathcal{L}_8$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_8$ não é regular.

$\mathcal{L}_9 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = cuc,\ c \in \Sigma,\ u \in \Sigma^+,\ |w|_0 = |w|_1\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^{p+1}0$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0u0$, $u = 0^{p-1}1^{p+1}$ e $|w|_0 = |w|_1 = p + 1$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_9$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^{p+1}0$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^2z = xyyz = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}1^{p+1}0 = 0^{p+j}1^{p+1}0 \in \mathcal{L}_9$. Contudo, como $|w'|_0 = p + j + 1$ e $|w'|_1 = p + 1$, tem-se que $|w'|_0 \neq |w'|_1$ e $w' \notin \mathcal{L}_9$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_9$ não é regular.

$\mathcal{L}_{10} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| = 3 \cdot |w|_0\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^{2p}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($|w|_0 = p$ e $|w| = 3p = 3|w|_0$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{10}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^{2p}$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^2z = xyyz = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}1^{2p} = 0^{p+j}1^{2p} \in \mathcal{L}_{10}$. Contudo, como $|w'|_0 = p + j$ e $|w'| = 3p + j < 3|w'|_0 = 3(p + j)$, então $w' \notin \mathcal{L}_{10}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{10}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{11} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 \neq |w|_1\}$

$\mathcal{L}_{12} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 = 2 \cdot |w|_1\}$

- Seja a cadeia $w = 0^{2p}1^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($|w|_1 = p$ e $|w|_0 = 2p = 2|w|_1$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{12}$). Segundo o *Pumping*

Lemma, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{2p-i-j}1^p$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{2p-i-j}1^p = 0^{2p-j}1^p \in \mathcal{L}_{12}$. Contudo, como $|w'|_1 = p$ e $|w'|_0 = 2p - j < 2|w'|_1 = 2p$, então $w' \notin \mathcal{L}_{12}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{12}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{13} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_{101} = |w|_{010}\}$

$\mathcal{L}_{14} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n,\ m \neq n \text{ e } 2 \cdot m \neq n,\ m,n \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^{2p!+p}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n0^q$, com $m = p$, $n = 2p!+p$, $m \neq n$ e $2 \cdot m \neq n$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{14}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^{p!+p}$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^{\frac{2p!}{j}+1}z = 0^i(0^j)^{\frac{2p!}{j}+1}0^{p-i-j}1^{2p!+p} = 0^{2p!+p}1^{2p!+p} \in \mathcal{L}_{14}$. Contudo, como $w' = 0^{m'}1^{n'}$, com $m' = n' = 2p! + p$, tem-se que $w' \notin \mathcal{L}_{14}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{14}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{15} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n,\ 3 \cdot m \leqslant n \leqslant 5 \cdot m,\ m,n \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^{3p}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n$, com $m = p$ e $3m = n < 5m$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{15}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^{3p}$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^2z = xyyz = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}1^{3p} = 0^{p+j}0^{3p} \in \mathcal{L}_{15}$. Contudo, como $w' = 0^{m'}1^{n'}$, $m' = p + j$ e $n' = 3p$, tem-se que $w' \notin \mathcal{L}_{15}$, pois $n' = 3p < 3m' = 3(p + j)$ já que $j > 0$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{15}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{16} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = (01)^n0^n,\ n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}_{17} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = (01)^m0^n,\ n \geqslant 2 \cdot m,\ m,n \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = (01)^p0^{2p}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = (01)^m0^n$, com $m = p$ e $n = 2m = 2p$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{17}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$ e $|xy| \leqslant p$, então xy é subcadeia de $(01)^p$ e três casos devem ser considerados:
  a) y começa com 0 e termina com 0 $\Rightarrow w' = xy^0z = xz = u0^{2p}$, u contém 110 como subcadeia e $w' \notin \mathcal{L}_{17}$;
  b) y começa com 1 e termina com 1 $\Rightarrow w' = xy^0z = xz = u0^{2p}$, u contém 00 como subcadeia e $w' \notin \mathcal{L}_{17}$; e
  c) y começa e termina com símbolos diferentes $\Rightarrow y = (10)^j$ ou $y = (01)^j$, $j > 0$ e $2 \leqslant |y| \leqslant p$, $w' = xy^2z = xyyz = (10)^{p+j}0^{2p} \notin \mathcal{L}_{17}$ ($w' = (01)^m1^n$, com $m = p + j$ e $n = p < 2n = 2(p + j)$).

  Portanto, dadas as contradições nos três casos, a linguagem $\mathcal{L}_{17}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{18} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 110(10)^n0^{n-1},\ n \in \mathbb{N}\}$

- Inicialmente, note-se que $110(10)^n0^{n-1} = 1(10)^{n+1}0^{n-1} = 1(10)^n100^{n-1} = 1(10)^n10^n$. Assim, seja a cadeia $w = 1(10)^p10^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w \in \mathcal{L}_{18}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$ e $|xy| \leqslant p$, então xy é subcadeia de $1(10)^p$ e três casos devem ser considerados:
  a) y começa com 0 e termina com 0 $\Rightarrow$ para $w' = xy^0z$, pelo menos uma subcadeia 10 é excluída, $w' = 1(10)^k10^p$, com $0 \leqslant k < p$, e $w' \notin \mathcal{L}_{18}$;
  b) y começa com 1 e termina com 1 $\Rightarrow$ para $w' = xy^0z$, pelo menos uma subcadeia 10 também é excluída e três casos podem ocorrer (i) $w' = (10)^p10^p$, (ii) $w' = 0(10)^{k'}10^p$, com $0 \leqslant k' < p$ e (iii) $w' = 1(10)^{k''}10^p$, com $0 \leqslant k'' < p$; com $w' \notin \mathcal{L}_{18}$ nos três casos; e
  c) y começa e termina com símbolos diferentes $\Rightarrow y = (10)^j$ ou $y = (01)^j$, $j > 0$ e $2 \leqslant |y| \leqslant p$, $w' = xy^2z = xyyz = 1(10)^{p+j}10^p \notin \mathcal{L}_{18}$.

  Portanto, dadas as contradições nos três casos, a linguagem $\mathcal{L}_{18}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{19} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^m0^n,\ m,n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}_{20} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^p,\ m+p \leqslant n,\ m,n,p \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}_{21} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^q,\ n \neq m+q,\ m,n,q \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^{p!+2p}0^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n0^q$, com $m = q = p$ e $n = p!+p \neq m+q = 2p$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{21}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^{p!+2p}0^p$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^{\frac{p!}{j}+1}z = 0^i(0^j)^{\frac{p!}{j}+1}0^{p-i-j}1^{p!+2p}0^p = 0^{p!+p}1^{p!+2p}0^p \in \mathcal{L}_{21}$. Contudo, como $w' = 0^{m'}1^{n'}0^{q'}$ com $m' = p!+p$, $q = p$ e $n' = p!+2p = m'+q'$, tem-se que $w' \notin \mathcal{L}_{21}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{21}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{22} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^q,\ m \neq q,\ m,n,q \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p10^{p!+p}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n0^q$, com $m = p$, $n = 1$ e $q = p!+p \neq m = 2$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{22}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}10^{p!+p}$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^{\frac{p!}{j}+1}z = 0^i(0^j)^{\frac{p!}{j}+1}0^{p-i-j}10^{p!+p}0^p = 0^{p!+p}10^{p!+p} \in \mathcal{L}_{22}$. Contudo, como $w' = 0^{m'}1^{n'}0^{q'}$, com $m' = q' = p!+p$, tem-se que $w' \notin \mathcal{L}_{22}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{22}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{23} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^q,\ q = 2\cdot(m+n),\ m,n,q \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^p0^{4p}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n0^q$, com $m = n = p$ e $q = 2(m+n) = 4p$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{23}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^p0^{4p}$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-i-j}1^p0^{4p} = 0^{p-j}1^p0^{4p} \in \mathcal{L}_{23}$. Contudo, como $w' = 0^{m'}1^{n'}0^{q'}$, $m' = p-j$ e $n' = p$, tem-se que $w' \notin \mathcal{L}_{23}$, pois $q' = 4p \neq 2(m'+n') = 4p-2j$, já que $j > 0$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{23}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{24} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^q,\ m > 5,\ n > 3,\ q \leqslant n,\ m,n,q \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^6 1^{p+3} 0^{p+3}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^q$, com $m = 6$ e $n = q = p+3$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{24}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$ e $|xy| \leqslant p$, então xy é subcadeia de $0^6 1^{p+3}$ e três casos devem ser considerados:
  a) y começa com 0 e termina com 0 $\Rightarrow w' = xy^0z = xz = 0^{6-j}1^{p+3}0^{p+3}$, $6-j \leqslant 5$ pois $j > 0$ e $w' \notin \mathcal{L}_{24}$;
  b) y começa com 1 e termina com 1 $\Rightarrow w' = xy^0z = xz = 1^6 1^{p+3-j}0^{p+3} = 0^{m'}1^{n'}0^{q'}$, $n' = p+3-j < q' = p+3$ pois $j > 0$ e $w' \notin \mathcal{L}_{24}$; e
  c) y começa com 0 termina com 1 $\Rightarrow y = 0^{j_1}1^{j_2}$, $j_1, j_2 > 0$, $j_1 + j_2 \leqslant p$, $w' = xy^0z = xz = 0^{6-j_1}1^{p+3-j_2}0^{p+3} \notin \mathcal{L}_{24}$ ($w' = 0^{m'}1^{n'}0^{q'}$, com $m' = 6-j_1 \leqslant 5$ e $n' = p+3-j_2 < q' = p+3$).

  Portanto, dadas as contradições nos três casos, a linguagem $\mathcal{L}_{24}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{25} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^q,\ m \leqslant 2 \cdot n$ ou $n \leqslant 3 \cdot q,\ m,n,q \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^{2p}1^p0^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n0^q$, com $m = 2p = 2n = 2p$ e $n = p < 3q = 3p$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{25}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{2p-i-j}1^p0^p$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^2z = xyyz = 0^i0^j0^j0^{2p-i-j}1^p0^p = 0^{2p+j}1^p0^p \in \mathcal{L}_{25}$. Contudo, como $w' = 0^{m'}1^{n'}0^{q'}$, $m' = 2p+j$ e $n' = p$, tem-se que $w' \notin \mathcal{L}_{25}$, pois $m' = 2p+j > 2n' = 2p$, já que $j > 0$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{25}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{26} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^p,\ m = 1 \Rightarrow n = p,\ m,n,p \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}_{27} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^{m+n}0^n,\ m+n > 0,\ m,n \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^{2p}0^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^{m+n}0^n$ com $m = n = p$ e $m+n > 0$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{27}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^{2p}0^p$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-i-j}1^{2p}0^p = 0^{2p-j}1^{2p}0^p \in \mathcal{L}_{27}$. Contudo, como $|w'|_1 = 2p$ e $|w'|_0 = 2p - j < |w'|_1 = 2p$, então $w' \notin \mathcal{L}_{27}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{27}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{28} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^{m-n},\ m > n,\ m,n \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^{2p}1^p0^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n0^{m-n}$ com $m = 2p$, $n = p$ e $m > n$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{28}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{2p-i-j}1^p0^p$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^2z = xz = 0^i0^j0^j0^{2p-i-j}1^p0^p = 0^{2p+j}1^p0^p \in \mathcal{L}_{28}$. Contudo, como $w' = 0^m1^n0^p$ com $m = 2p+j$ e $n = p$, então $m - n = p + j > p$ e $w' \notin \mathcal{L}_{28}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{28}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{29} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^p1^q,\ m = 2 \cdot q,\ n = p,\quad m,n,p,q \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}_{30} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n01^{m+1},\ m,n \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p101^{p+1}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n01^{m+1}$ com $m = p$ e $n = 1$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{30}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}101^{p+1}$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-i-j}101^{p+1} = 0^{p-j}101^{p+1} \in \mathcal{L}_{30}$. Contudo, como $w' = 0^{m'}1^{n'}01^{p+1}$ com $m' = p - j$, $n' = 1$ e $j > 0$, então $p + 1 > m' + 1 = p - j + 1 < p + 1$ e $w' \notin \mathcal{L}_{30}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{30}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{31} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = (01)^n0^m(01)^n,\ m < 3,\ m,n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}_{32} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = (01)^n(01^{m_n})^n,\ m_n, n \in \mathbb{N}^+\}$

- Seja a cadeia $w = (01)^p(01)^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = (01)^m(01)^n$, com $m = n = p$ e $m_n = 1$, $1 \leqslant n \leqslant p$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{32}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$ e $|xy| \leqslant p$, então xy é subcadeia de $(01)^p$ e três casos devem ser considerados:
  a) y começa com 0 e termina com 0 $\Rightarrow w' = xy^0z = xz = u(01)^p$, u contém 110 como subcadeia e $w' \notin \mathcal{L}_{32}$;
  b) y começa com 1 e termina com 1 $\Rightarrow w' = xy^0z = xz = u(01)^p$, u contém 00 como subcadeia e $w' \notin \mathcal{L}_{32}$; e
  c) y começa e termina com símbolos diferentes $\Rightarrow y = (10)^j$ ou $y = (01)^j$, $j > 0$ e $2 \leqslant |y| \leqslant p$, $w' = xy^2z = xz = (01)^{p+j}(01)^p \notin \mathcal{L}_{32}$.

  Portanto, dadas as contradições nos três casos, a linguagem $\mathcal{L}_{32}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{33} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 1^m(01)^n(10)^n,\ m \geqslant 4,\ m,n \in \mathbb{N}^+\}$

$\mathcal{L}_{34} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m10^n10^q \text{ ou } w = 0^n10^{2n},\ m,n,q \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p10^{2p}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^n10^{2n}$ com $n = p$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{34}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}10^{2p}$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-i-j}10^{2p} = 0^{p-j}10^{2p} \in \mathcal{L}_{34}$. Contudo, como $w' = 0^{n'}10^{n''}$ com $n' = p - j$, $n'' = 2p$ e $j > 0$, então $n'' = 2p > 2n' = 2(p - j)$ e $w' \notin \mathcal{L}_{34}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{34}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{35} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^n10^{2n}$ ou $w = 1^n01^{3n},\ n \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p10^{2p}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^n10^{2n}$ com $n = p$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{35}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}10^{2p}$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-i-j}10^{2p} = 0^{p-j}10^{2p} \in \mathcal{L}_{35}$. Contudo, como $w' = 0^{n'}10^{n''}$ com $n' = p-j$, $n'' = 2p$ e $j > 0$, então $n'' = 2p > 2n' = 2(p-j)$ e $w' \notin \mathcal{L}_{35}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{35}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{36} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^q1^r0^s1^t,\ m+q+r+t = n+s,\ m,n,q,r,s,t \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^p010^31$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n0^q1^r0^s1^t$ com $m = n = p$, $q = r = t = 1$ e $s = 3$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{36}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^p010^31$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-i-j}1^p010^31 \in \mathcal{L}_{36}$. Contudo, como $w' = 0^{m'}1^{n'}0^{q'}1^{r'}0^{s'}1^{t'}$ com $m = p-j$, $n' = p$, $q' = r' = t' = 1$ e $s' = 3$, então $m'+q'+r'+t' = p+3-j < n'+s' = p+3$ e $w' \notin \mathcal{L}_{36}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{36}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{37} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0^m1^n0^q1^r0^s1^t,\ m+q+r = n+s+t,\ m,n,q,r,s,t \in \mathbb{N}\}$

- Seja a cadeia $w = 0^p1^p$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares ($w = 0^m1^n0^q1^r0^s1^t$ com $m = n = p$, $q = r = s = t = 0$, ou seja, $w \in \mathcal{L}_{37}$). Segundo o *Pumping Lemma*, dado que $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $z = 0^{p-i-j}1^p010^31$ ($i = |x|$, $j = |y|$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$), então $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-i-j}1^p \in \mathcal{L}_{37}$. Contudo, como $w' = 0^{m'}1^{n'}0^{q'}1^{r'}0^{s'}1^{t'}$ com $m = p-j$, $n' = p$, $q' = r' = s' = t' = 0$, então $m'+q'+r' = p-j < n'+s'+t' = p$ e $w' \notin \mathcal{L}_{37}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{37}$ não é regular.