Conversão de gramática regular para expressão regular

- **Lema de Arden:**
  Sejam $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$ expressões regulares. Se

  1. $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3$, então $\mathcal{R}_1 = (\mathcal{R}_2)^*\mathcal{R}_3$;
  2. $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$, então $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3(\mathcal{R}_2)^*$.

- Se $G = (V, \Sigma, P, A_1)$, com $V = \{A_1, \ldots, A_n\}$, é uma gramática regular, então a linguagem $\mathcal{L}(G)$ pode ser especificada por meio do seguinte sistema de equações:

$$\mathcal{A}_i = \bigcup_{A_i \to aA_j \,\in\, P} a\mathcal{A}_j \bigcup_{A_i \to a \,\in\, P} a \bigcup_{A_i \to \varepsilon \,\in\, P} \varepsilon.$$

- Esse sistema de equações pode ser resolvido pela sucessiva substituição de variáveis por suas correspondentes equações e/ou uso do Lema de Arden.

  – $\mathcal{A}_1$ é a solução do sistema de equações.
  – A solução é sucinta, mas não única! Sequências diferentes de substituições de variáveis e uso do Lema de Arden resulta em expressões regulares diferentes (equivalentes).

Obs. : As gramáticas G_1 e G_2, relativas a cada uma das linguagens listadas a seguir, foram obtidas a partir do DFA e do NFA, respectivamente, propostos no gabarito da atividade avaliativa AA-7. As variáveis das gramáticas têm a seguinte equivalência com os estados dos autômatos: $S \equiv s_0$, $A \equiv s_1$, $B \equiv s_2$, $C \equiv s_3$, $\ldots$.

$\mathcal{L}_1 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_{01} > 0$ ou $|w|_{10} > 0\}$

$\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ representa um número binário ímpar (sem zeros à esquerda)$\}$

$\mathcal{L}_3 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ representa um número binário e $w \pmod 3 = 1\}$

$\mathcal{L}_4 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ representa um número binário e $w \geqslant 7\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_4$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0S \mid 1A, & C \to 0D \mid 1E, \\ A \to 0B \mid 1C, & D \to 0E \mid 1E, \\ B \to 0D \mid 1D, & E \to 0E \mid 1E \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0\mathcal{R}_1 \cup 1A$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0B \cup 1C$	
	3	$B = 0D \cup 1D$	
	4	$C = 0D \cup 1E$	
	5	$D = 0E \cup 1E$	
	6	$E = 0E \cup 1E \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 0^*1A$	`Lema de Arden`
	2	$A = 0B \cup 1C$	
	3	$B = (0 \cup 1)(0 \cup 1)E$	$I.5 \rightarrow I.3,$ `Fatoração`
	4	$C = (00 \cup 01 \cup 1)E$	$I.5 \rightarrow I.4,$ `Fatoração`
	6	$E = (0 \cup 1)^*$	`Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_1 = 0^*1A$	
	2	$A = 0B \cup 1C$	
	3	$B = (0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1)^*$	$II.6 \rightarrow II.3$
	4	$C = (00 \cup 01 \cup 1)(0 \cup 1)^*$	$II.6 \rightarrow II.4$
IV	1	$\mathcal{R}_1 = 0^*1A$	
	2	$A = 0(0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1)^* \cup 1(00 \cup 01 \cup 1)(0 \cup 1)^*$	$III.3, III.4 \rightarrow III.2$
V	1	$\mathcal{R}_1 = 0^*1(0(0 \cup 1)(0 \cup 1) \cup 1(00 \cup 01 \cup 1))(0 \cup 1)^*$	$IV.2 \rightarrow IV.1,$ `Fatoração`

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_4$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, E, F, G, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l|l} S \rightarrow 0S \mid 1A \mid 1B, & C \rightarrow 1E, & F \rightarrow 0G \mid 1G, \\ A \rightarrow 1C, & D \rightarrow 0F \mid 1F, & G \rightarrow 0G \mid 1G \mid \varepsilon \\ B \rightarrow 0D \mid 1D, & E \rightarrow G, & \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = 0\mathcal{R}_2 \cup 1A \cup 1B$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 1C$	
	3	$B = 0D \cup 1D$	
	4	$C = 1E$	
	5	$D = 0F \cup 1F$	
	6	$E = G$	
	7	$F = 0G \cup 1G$	
	8	$G = 0G \cup 1G \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = 0^*1(A \cup B)$	Lema de arden, Fatoração
	2	$A = 11G$	$I.6 \to I.4 \to I.2$
	3	$B = (0 \cup 1)D$	Fatoração
	5	$D = (0 \cup 1)F$	Fatoração
	7	$F = (0 \cup 1)G$	Fatoração
	8	$G = (0 \cup 1)^*$	Lema de arden
III	1	$\mathcal{R}_2 = 0^*1(A \cup B)$	
	2	$A = 11(0 \cup 1)^*$	$II.8 \to II.2$
	3	$B = (0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1)^+$	$II.8 \to III.7 \to III.5 \to III.3$
IV	1	$\mathcal{R}_2 = 0^*1(11(0 \cup 1)^* \cup (0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1)^+)$	$III.2, III.3 \to III.1$

$\mathcal{L}_5 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém 001 ou $110\}$

$\mathcal{L}_6 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ não contém 001 ou não contém $110\}$

$\mathcal{L}_7 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid$ todo 0 em w é adjacente à esquerda e à direita a um $1\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_7$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to 1A \mid \varepsilon, \\ A \to 0B \mid 1A \mid \varepsilon, \\ B \to 1A \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_1 = 1A \cup \varepsilon$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0B \cup 1A \cup \varepsilon$	
	3	$B = 1A$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 1A \cup \varepsilon$	
	2	$A = (01 \cup 1)A \cup \varepsilon$	$I.3 \to I.2$, `Fatoração`
III	1	$\mathcal{R}_1 = 1A \cup \varepsilon$	
	2	$A = (01 \cup 1)^*$	`Lema de Arden`
IV	1	$\mathcal{R}_1 = 1(01 \cup 1)^* \cup \varepsilon$	$III.2 \to III.1$

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_7$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to A \mid C, & B \to 0A \mid 1B \mid \varepsilon \\ A \to 1B, & C \to 1C \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = A \cup C$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 1B$	
	3	$B = 0A \cup 1B \cup \varepsilon$	
	4	$C = 1C \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = A \cup C$	
	2	$A = 1B$	
	3	$B = 1^*(0A \cup \varepsilon)$	`Lema de Arden`
	4	$C = 1^*$	`Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_2 = A \cup 1^*$	$II.4 \to II.1$
	2	$A = 1^+0A \cup 1^+$	$II.3 \to II.2$, `Fatoração`
IV	1	$\mathcal{R}_2 = A \cup 1^*$	$II.4 \to II.1$
	2	$A = (1^+0)^*1^+$	`Lema de Arden`
V	1	$\mathcal{R}_2 = (1^+0)^*1^+ \cup 1^*$	$IV.2 \to IV.1$

$\mathcal{L}_8 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém as subcadeias 01 e 10$\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_8$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1B, & C \to 0E \mid 1C, \\ A \to 0A \mid 1C, & D \to 0D \mid 1E, \\ B \to 0D \mid 1B, & E \to 0E \mid 1E \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	**Eq.**	**Expressão**	**Ação**
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1B$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0A \cup 1C$	
	3	$B = 0D \cup 1B$	
	4	$C = 0E \cup 1C$	
	5	$D = 0D \cup 1E$	
	6	$E = 0E \cup 1E \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1B$	
	2	$A = 0^*1C$	`Lema de Arden`
	3	$B = 1^*0D$	`Lema de Arden`
	4	$C = 1^*0E$	`Lema de Arden`
	5	$D = 0^*1E$	`Lema de Arden`
	6	$E = (0 \cup 1)^*$	`Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_1 = 0^+1C \cup 1^+0D$	$II.2, II.3 \rightarrow II.1$
	4	$C = 1^*0(0 \cup 1)^*$	$II.6 \rightarrow II.4$
	5	$D = 0^*1(0 \cup 1)^*$	$II.6 \rightarrow II.5$
IV	1	$\mathcal{R}_1 = (0^+1^+0 \cup 1^+0^+1)(0 \cup 1)^*$	$III.4, III.5 \rightarrow III.1,$ `Fatoração`

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_8$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \rightarrow A \mid B, & D \rightarrow 0D \mid 0F, \\ A \rightarrow 0A \mid 0C, & E \rightarrow 0G, \\ B \rightarrow 1B \mid 1D, & F \rightarrow 1G, \\ C \rightarrow 1C \mid 1E, & G \rightarrow 0G \mid 1G \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = A \cup B$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 0A \cup 0C$	
	3	$B = 1B \cup 1D$	
	4	$C = 1C \cup 1E$	
	5	$D = 0D \cup 0F$	
	6	$E = 0G$	
	7	$F = 1G$	
	8	$G = 0G \cup 1G \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = A \cup B$	
	2	$A = 0^+C$	Lema de Arden, Fatoração
	3	$B = 1^+D$	Lema de Arden, Fatoração
	4	$C = 1^+E$	Lema de Arden, Fatoração
	5	$D = 0^+F$	Lema de Arden, Fatoração
	6	$E = 0G$	
	7	$F = 1G$	
	8	$G = (0 \cup 1)^*$	Lema de Arden
III	1	$\mathcal{R}_2 = 0^+C \cup 1^+D$	$II.2, II.3 \to II.1$
	4	$C = 1^+E$	
	5	$D = 0^+F$	
	6	$E = 0(0 \cup 1)^*$	$II.8 \to II.6$
	7	$F = 1(0 \cup 1)^*$	$II.8 \to II.7$
IV	1	$\mathcal{R}_2 = 0^+C \cup 1^+D$	$II.2, II.3 \to II.1$
	4	$C = 1^+0(0 \cup 1)^*$	$III.6 \to III.4$
	5	$D = 0^+1(0 \cup 1)^*$	$III.7 \to III.5$
V	1	$\mathcal{R}_2 = (0^+1^+0 \cup 1^+0^+1)(0 \cup 1)^*$	$IV.4, IV.5 \to IV.1$, Fatoração

$\mathcal{L}_9 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = xyz,$ com $x \in \{0\}^*, |x| = 2k, y \in \{1\}^+$ e $z \in \{0\}^*, |z| = 0$ ou $|z| = 2k' + 1;\ k, k' \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}_{10} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = x0y0z$ com $|y| = 2k$ ou $w = x1y1z$ com $|y| = 2k' + 1;\ x, y, z \in \Sigma^*;\ k, k' \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}_{11} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid$ pelo menos um 0 em w não é seguido de $1\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{11}$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, S\}, \{0,1\}, P, S),\ \text{com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0A \mid 1S, \\ A \to 0B \mid 1S \mid \varepsilon, \\ B \to 0B \mid 1B \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0B \cup 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	
	3	$B = 0B \cup 1B \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = (01 \cup 1)\mathcal{R}_1 \cup 00B \cup 0$	$I.2 \to I.1$, `Fatoração`
	3	$B = (0 \cup 1)^*$	`Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_1 = (01 \cup 1)^*(00B \cup 0)$	`Lema de Arden`
	3	$B = (0 \cup 1)^*$	
IV	1	$\mathcal{R}_1 = (01 \cup 1)^*(00(0 \cup 1)^* \cup 0)$	$III.3 \to III.1$

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{11}$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 0B \mid 1S, & B \to 0C \mid \varepsilon, \\ A \to 1S, & C \to 0C \mid 1C \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 0B \cup 1\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 1\mathcal{R}_2$	
	3	$B = 0C \cup \varepsilon$	
	4	$C = 0C \cup 1C \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = (01 \cup 1)\mathcal{R}_2 \cup 0B$	$I.2 \to I.1$, `Fatoração`
	3	$B = 0C \cup \varepsilon$	
	4	$C = (0 \cup 1)^*$	`Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_2 = (01 \cup 1)^* 0B$	`Lema de Arden`
	3	$B = 0(0 \cup 1)^* \cup \varepsilon$	$II.4 \to II.3$
IV	1	$\mathcal{R}_2 = (01 \cup 1)^*(00(0 \cup 1)^* \cup 0)$	$III.3 \to III.1$

$\mathcal{L}_{12} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ não contém 101 e termina com $1\}$

$\mathcal{L}_{13} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| \geqslant 3$ e o terceiro e o penúltimo símbolos de w não são $1\}$

$\mathcal{L}_{14} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém uma quantidade par da subcadeia $010\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{14}$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \to 0B \mid 1S \mid \varepsilon, & C \to 0D \mid 1C, \\ A \to 0C \mid 1S \mid \varepsilon, & D \to 0D \mid 1E, \\ B \to 0B \mid 1A \mid \varepsilon, & E \to 0S \mid 1C \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	**Eq.**	**Expressão**	**Ação**
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0B \cup 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0C \cup 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	
	3	$B = 0B \cup 1A \cup \varepsilon$	
	4	$C = 0D \cup 1C$	
	5	$D = 0D \cup 1E$	
	6	$E = 0\mathcal{R}_1 \cup 1C$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 0B \cup 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	
	2	$A = 0C \cup 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	
	3	$B = 0^*1A \cup 0^*$	Lema de Arden
	4	$C = 0D \cup 1C$	
	5	$D = 0^*1E$	Lema de Arden
	6	$E = 0\mathcal{R}_1 \cup 1C$	
III	1	$\mathcal{R}_1 = 0B \cup 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	
	3	$B = 0^*10C \cup 0^*11\mathcal{R}_1 \cup 0^*1 \cup 0^*$	$II.2 \to II.3$
	4	$C = 0^+10\mathcal{R}_1 \cup (0^+11 \cup 1)C$	$II.6 \to II.5 \to II.4,$ Fatoração
IV	1	$\mathcal{R}_1 = (0^+11 \cup 1)\mathcal{R}_1 \cup 0^+10C \cup 0^+1 \cup 0^+ \cup \varepsilon$	$III.3 \to III.1$
	4	$C = (0^+11 \cup 1)^*0^+10\mathcal{R}_1$	Lema de Arden
V	1	$\mathcal{R}_1 = (0^+11 \cup 1 \cup 0^+10(0^+11 \cup 1)^*0^+10)\mathcal{R}_1 \cup 0^+1 \cup 0^+ \cup \varepsilon$	$IV.4 \to IV.1,$ Fatoração
VI	1	$\mathcal{R}_1 = (0^+11 \cup 1 \cup 0^+10(0^+11 \cup 1)^*0^+10)^*(0^+1 \cup 0^+ \cup \varepsilon)$	Lema de Arden

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{14}$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l|l|l} S \to A \mid 0C \mid 0E \mid 1S, & E \to 0E \mid 1F, & J \to 0J \mid 1K, \\ A \to B \mid 0A \mid \varepsilon, & F \to 0G, & K \to 0L, \\ B \to 1B \mid \varepsilon, & G \to 0H \mid 0J \mid 1G, & L \to S \mid 0M \mid 1L, \\ C \to 0C \mid 1D, & H \to 0H \mid 1I, & M \to 0M \mid 1N, \\ D \to 1S, & I \to 1G, & N \to 1L \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = A \cup 0C \cup 0E \cup 1\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = B \cup 0A \cup \varepsilon$	
	3	$B = 1B \cup \varepsilon$	
	4	$C = 0C \cup 1D$	
	5	$D = 1\mathcal{R}_2$	
	6	$E = 0E \cup 1F$	
	7	$F = 0G$	
	8	$G = 0H \cup 0J \cup 1G$	
	9	$H = 0H \cup 1I$	
	10	$J = 0J \cup 1K$	
	11	$I = 1G$	
	12	$K = 0L$	
	13	$L = \mathcal{R}_2 \cup 0M \cup 1L$	
	14	$M = 0M \cup 1N$	
	15	$N = 1L$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = A \cup 0C \cup 0E \cup 1\mathcal{R}_2$	
	2	$A = B \cup 0A \cup \varepsilon$	
	3	$B = 1^*$	Lema de Arden
	4	$C = 0^*11\mathcal{R}_2$	$I.5 \to I.4$, Lema de Arden
	6	$E = 0^*10G$	$I.7 \to I.6$, Lema de Arden
	8	$G = 0H \cup 0J \cup 1G$	
	9	$H = 0^*11G$	$I.11 \to I.9$, Lema de Arden
	10	$J = 0^*10L$	$I.12 \to I.10$, Lema de Arden
	13	$L = \mathcal{R}_2 \cup 0M \cup 1L$	
	14	$M = 0^*11L$	$I.15 \to I.14$, Lema de Arden
III	1	$\mathcal{R}_2 = (0^+11 \cup 1)\mathcal{R}_2 \cup 0^+10G \cup A$	$II.4, II.6 \to II.1$
	2	$A = 0^*1^* \cup 0^*$	$II.3 \to II.2$, Lema de Arden
	8	$G = (0^+11 \cup 1)^*0J$	$II.9 \to I.8$, Lema de Arden
	10	$J = 0^*10L$	
	13	$L = (0^+11 \cup 1)^*\mathcal{R}_2$	$II.14 \to I.13$, Lema de Arden
IV	1	$\mathcal{R}_2 = (0^+11 \cup 1)\mathcal{R}_2 \cup 0^+10G \cup 0^*1^* \cup 0^*$	$III.2 \to III.1$
	8	$G = (0^+11 \cup 1)^*0^+10(0^+11 \cup 1)^*\mathcal{R}_2$	
V	1	$\mathcal{R}_2 = (0^+11 \cup 1 \cup 0^+10(0^+11 \cup 1)^*0^+10(0^+11 \cup 1)^*)\mathcal{R}_2 \cup 0^*1^* \cup 0^*$	$IV.8 \to IV.1$
VI	1	$\mathcal{R}_2 = (0^+11 \cup 1 \cup 0^+10(0^+11 \cup 1)^*0^+10(0^+11 \cup 1)^*)^*(0^*1^* \cup 0^*)$	Lema de Arden

$\mathcal{L}_{15} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém uma quantidade par da subcadeia $000\}$

$\mathcal{L}_{16} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 \pmod 3 = 1\}$

$\mathcal{L}_{17} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geqslant 3$ e $|w|_1 \leqslant 2\}$

$\mathcal{L}_{18} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geqslant 3$ ou $|w|_1 = 2,$ e w não contém $11\}$

$\mathcal{L}_{19} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém exatamente uma ocorrência de 00 ou de $11\}$

$\mathcal{L}_{20} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| \geqslant 3$ e o penúltimo símbolo é $0\}$

$\mathcal{L}_{21} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_{00} \geqslant 1$ e $|w|_{11} = 0\}$

$\mathcal{L}_{22} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| \geqslant 2$ e os dois primeiros símbolos de w são iguais aos dois últimos$\}$

$\mathcal{L}_{23} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ não começa com 10, mas termina com 10$\}$

$\mathcal{L}_{24} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém pelo menos um 0 e pelo menos dois 1's$\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{24}$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1B, & C \to 0C \mid 1E, \\ A \to 0A \mid 1C, & D \to 0E \mid 1D, \\ B \to 0C \mid 1D, & E \to 0E \mid 1E \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1B$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0A \cup 1C$	
	3	$B = 0C \cup 1D$	
	4	$C = 0C \cup 1E$	
	5	$D = 0E \cup 1D$	
	6	$E = 0E \cup 1E \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 10C \cup 11D$	$I.3 \to I.1$
	2	$A = 0^*1C$	Lema de Arden
	4	$C = 0^*1E$	Lema de Arden
	5	$D = 1^*0E$	Lema de Arden
	6	$E = (0 \cup 1)^*$	Lema de Arden
III	1	$\mathcal{R}_1 = (0^+1 \cup 10)C \cup 11D$	$II.2 \to II.1$
	4	$C = 0^*1(0 \cup 1)^*$	$II.6 \to II.4$
	5	$D = 1^*0(0 \cup 1)^*$	$II.6 \to II.5$
IV	1	$\mathcal{R}_1 = ((0^+1 \cup 10)0^*1 \cup 11^+0)(0 \cup 1)^*$	$III.4, III.5 \to III.1$

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{24}$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1C \mid 1E, & D \to 0D \mid 1D \mid 1G \\ A \to 0A \mid 1A \mid 1B, & E \to 0E \mid 1E \mid 1F \\ B \to 0B \mid 1B \mid 1G, & F \to 0F \mid 1F \mid 0G \\ C \to 0C \mid 1C \mid 0D, & G \to 0G \mid 1G \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 1C \cup 1E$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 0A \cup 1A \cup 1B$	
	3	$B = 0B \cup 1B \cup 1G$	
	4	$C = 0C \cup 1C \cup 0D$	
	5	$D = 0D \cup 1D \cup 1G$	
	6	$E = 0E \cup 1E \cup 1F$	
	7	$F = 0F \cup 1F \cup 0G$	
	8	$G = 0G \cup 1G \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 1C \cup 1E$	
	2	$A = (0 \cup 1)^*1B$	`Lema de Arden`
	3	$B = (0 \cup 1)^*1G$	`Lema de Arden`
	4	$C = (0 \cup 1)^*0D$	`Lema de Arden`
	5	$D = (0 \cup 1)^*1G$	`Lema de Arden`
	6	$E = (0 \cup 1)^*1F$	`Lema de Arden`
	7	$F = (0 \cup 1)^*0G$	`Lema de Arden`
	8	$G = (0 \cup 1)^*$	`Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 1C \cup 1E$	
	2	$A = (0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*1G$	$II.3 \to II.2$
	4	$C = (0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)^*1G$	$II.5 \to II.4$
	6	$E = (0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*0G$	$II.7 \to II.6$
	8	$G = (0 \cup 1)^*$	
IV	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 1C \cup 1E$	
	2	$A = (0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*$	$III.8 \to III.2$
	4	$C = (0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*$	$III.8 \to III.4$
	6	$E = (0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)^*$	$III.8 \to III.6$
V	1	$\mathcal{R}_2 = 0(0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^* \cup$ $1(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^* \cup$ $1(0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)^*$	$IV.2, IV.4, IV.6 \to IV.1$

$\mathcal{L}_{25} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0u$ e $|w|$ é par ou $w = 1u'$ e $|u'|$ é par, com $u, u' \in \Sigma^*\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{25}$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0A \mid 1B, \\ A \to 0B \mid 1B, \\ B \to 0A \mid 1A \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1B$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0B \cup 1B$	
	3	$B = 0A \cup 1A \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = (0 \cup 10 \cup 11)A \cup 1$	$I.3 \to I.1$, `Fatoração`
	2	$A = ((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*(0 \cup 1)$	$I.3 \to I.2$, `Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_1 = (0 \cup 10 \cup 11)((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*(0 \cup 1) \cup 1$	$II.2 \to II.1$

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{25}$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, E, F, G\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1B \mid 1D, & D \to 1E, \\ A \to 0F \mid 1F, & E \to 0F \mid 1F, \\ B \to 0C, & F \to 0G \mid 1G \mid \varepsilon, \\ C \to 0F \mid 1F, & G \to 0F \mid 1F \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 1B \cup 1D$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 0F \cup 1F$	
	3	$B = 0C$	
	4	$C = 0F \cup 1F$	
	5	$D = 1E$	
	6	$E = 0F \cup 1F$	
	7	$F = 0G \cup 1G \cup \varepsilon$	
	8	$G = 0F \cup 1F$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 10C \cup 11E$	$I.3, I.5 \to I.1$
	2	$A = (0 \cup 1)F$	`Fatoração`
	4	$C = (0 \cup 1)F$	`Fatoração`
	6	$E = (0 \cup 1)F$	`Fatoração`
	7	$F = ((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$	$I.8 \to I.7$, `Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 10C \cup 11E$	
	2	$A = (0 \cup 1)((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$	$II.7 \to II.2$
	4	$C = (0 \cup 1)((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$	$II.7 \to II.4$
	6	$E = (0 \cup 1)((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$	$II.7 \to II.6$
IV	1	$\mathcal{R}_2 = (0 \cup 10 \cup 11)(0 \cup 1)((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$	$III.2, III.4, III.6 \to III.1$, `Fatoração`

$\boldsymbol{\mathcal{L}_{26} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 + |w|_1 = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}}$ **e** $\boldsymbol{w}$ **não contém** $\boldsymbol{10\}}$

$\mathcal{L}_{27} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = xyz,\ x,z \in \{0\}^*,\ y \in \{1\}^+;\ |x|_0 + |z|_0 = 2k,\ |y|_1 = 2k'+1,\ k,k' \in \mathbb{N}\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{27}$:

$$G_1 = (V,\Sigma,P,S) = (\{A,B,C,D,E,F,G,S\},\{0,1\},P,S),\ \text{com:}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1D, & D \to 0F \mid 1E \mid \varepsilon, \\ A \to 0S \mid 1B, & E \to 1D, \\ B \to 0G \mid 1C, & F \to 0G, \\ C \to 1B, & G \to 0F \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	**Eq.**	**Expressão**	**Ação**
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1D$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0\mathcal{R}_1 \cup 1B$	
	3	$B = 0G \cup 1C$	
	4	$C = 1B$	
	5	$D = 0F \cup 1E \cup \varepsilon$	
	6	$E = 1D$	
	7	$F = 0G$	
	8	$G = 0F \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 00\mathcal{R}_1 \cup 01B \cup 1D$	$I.2 \to I.1$
	3	$B = 0G \cup 11B$	$I.4 \to I.3$
	5	$D = 00G \cup 11D \cup \varepsilon$	$I.6, I.7 \to I.5$
	8	$G = 00G \cup \varepsilon$	$I.7 \to I.8$
III	1	$\mathcal{R}_1 = (00)^*(01B \cup 1D)$	Lema de Arden
	3	$B = (11)^*0G$	Lema de Arden
	5	$D = (11)^*(00G \cup \varepsilon)$	Lema de Arden
	8	$G = (00)^*$	Lema de Arden
IV	1	$\mathcal{R}_1 = (00)^*(01B \cup 1D)$	
	3	$B = (11)^*0(00)^*$	$III.8 \to III.3$
	5	$D = (11)^*((00)^+ \cup \varepsilon)$	$III.8 \to III.5$
V	1	$\mathcal{R}_1 = (00)^*(01(11)^*0(00)^* \cup 1(11)^*((00)^+ \cup \varepsilon))$	$IV.3, IV.5 \to IV.1$

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{27}$:

$$G_1 = (V,\Sigma,P,S) = (\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,S\},\{0,1\},P,S),\ \text{com:}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l|l|l} S \to 0A \mid 0B \mid 1E, & D \to 0H \mid 1F, & H \to 0I \mid \varepsilon \\ A \to 0C, & E \to 0I \mid 1G \mid \varepsilon, & I \to 0H \\ B \to 0S \mid 1D, & F \to 1D, & \\ C \to 0A \mid 1E, & G \to 1E, & \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 0B \cup 1E$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 0C$	
	3	$B = 0\mathcal{R}_2 \cup 1D$	
	4	$C = 0A \cup 1E$	
	5	$D = 0H \cup 1F$	
	6	$E = 0I \cup 1G \cup \varepsilon$	
	7	$F = 1D$	
	8	$G = 1E$	
	9	$H = 0I \cup \varepsilon$	
	10	$I = 0H$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = 00C \cup 00\mathcal{R}_2 \cup 01D \cup 1E$	$I.2, I.3 \to I.1$
	4	$C = 00C \cup 1E$	$I.2 \to I.4$
	5	$D = 0H \cup 11D$	$I.7 \to I.5$
	6	$E = 00H \cup 11E \cup \varepsilon$	$I.8, I.10 \to I.6$
	9	$H = 00H \cup \varepsilon$	$I.10 \to I.9$
III	1	$\mathcal{R}_2 = (00)^*(00C \cup 01D \cup 1E)$	Lema de Arden
	4	$C = (00)^*1E$	Lema de Arden
	5	$D = (11)^*0$	Lema de Arden
	6	$E = (11)^*(00H \cup \varepsilon)$	Lema de Arden
	9	$H = (00)^*$	Lema de Arden
IV	1	$\mathcal{R}_2 = (00)^*(((00)^+1 \cup 1E) \cup 01(11)^*0)$	$III.4, III.5 \to III.1$, Fatoração
	6	$E = (11)^*((00)^+ \cup \varepsilon)$	$III.9 \to III.6$
V	1	$\mathcal{R}_2 = (00)^*(((00)^+1 \cup 1)(11)^*((00)^+ \cup \varepsilon) \cup 01(11)^*0)$	$IV.6 \to IV.1$

$\mathcal{L}_{28} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = xcycz,\ c \in \Sigma,\ x,y,z \in \Sigma^*;\ |x| = 2k+1,\ |z| = 2k',\ k,k' \in \mathbb{N};\ |y| = 2\}$

$\mathcal{L}_{29} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém uma, duas ou três ocorrências do símbolo $0\}$

$\mathcal{L}_{30} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = u01^n,\ u \in \Sigma^*,\ n \in \mathbb{N}^+\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{30}$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0A \mid 1S, \\ A \to 0A \mid 1B, \\ B \to 0A \mid 1B \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	**Eq.**	**Expressão**	**Ação**
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0A \cup 1B$	
	3	$B = 0A \cup 1B \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 1^*0A$	`Lema de Arden`
	2	$A = 0A \cup 1B$	
	3	$B = 1^*0A \cup 1^*$	`Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_1 = 1^*0A$	
	2	$A = (0 \cup 1^+0)A \cup 1^+$	$II.3 \to II.2$
IV	1	$\mathcal{R}_1 = 1^*0A$	
	2	$A = (0 \cup 1^+0)^*1^+$	`Lema de Arden`
V	1	$\mathcal{R}_1 = 1^*0(0 \cup 1^+0)^*1^+$	$IV.2 \to IV.1$

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{30}$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0A \mid 0S \mid 1S, \\ A \to 1A \mid 1B, \\ B \to \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	**Eq.**	**Expressão**	**Ação**
I	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 0\mathcal{R}_2 \cup 1\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 1A \cup 1B$	
	3	$B = \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = (0 \cup 1)^*0A$	`Lema de Arden`
	2	$A = 1^+$	$I.3 \to I.2$, `Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_2 = (0 \cup 1)^*01^+$	$II.2 \to II.1$

$\mathcal{L}_{31} = \{w \in \Sigma^* = \{0, 1\}^* \mid w$ não começa com 0 e não termina com 000$\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{31}$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 1A \mid \varepsilon, & C \to 0D \mid 1A \mid \varepsilon, \\ A \to 0B \mid 1A \mid \varepsilon, & D \to 0D \mid 1A, \\ B \to 0C \mid 1A \mid \varepsilon, & \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_1 = 1A \cup \varepsilon$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0B \cup 1A \cup \varepsilon$	
	3	$B = 0C \cup 1A \cup \varepsilon$	
	4	$C = 0D \cup 1A \cup \varepsilon$	
	5	$D = 0D \cup 1A$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 1A \cup \varepsilon$	
	2	$A = 1^*0B \cup 1^*$	`Lema de Arden`
	3	$B = 00D \cup 01A \cup 0 \cup 1A \cup \varepsilon$	$I.4 \to I.3$
	5	$D = 0^*1A$	`Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_1 = 1A \cup \varepsilon$	
	2	$A = 1^*0B \cup 1^*$	
	3	$B = (00^+1 \cup 01 \cup 1)A \cup 0 \cup \varepsilon$	$II.5 \to II.3$, `Fatoração`
IV	1	$\mathcal{R}_1 = 1A \cup \varepsilon$	
	2	$A = (1^*0(00^+1 \cup 01 \cup 1))^*1^*(00 \cup 0 \cup \varepsilon)$	$III.3 \to III.2$, `Lema de Arden`
V	1	$\mathcal{R}_1 = 1(1^*0(00^+1 \cup 01 \cup 1))^*1^*(00 \cup 0 \cup \varepsilon) \cup \varepsilon$	$IV.2 \to IV.1$

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{31}$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 1A \mid 1D \mid \varepsilon, & C \to \varepsilon, \\ A \to 0B \mid \varepsilon, & D \to 0D \mid 1A \mid 1D \\ B \to 0C \mid \varepsilon, & \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = 1A \cup 1D \cup \varepsilon$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 0B \cup \varepsilon$	
	3	$B = 0C \cup \varepsilon$	
	4	$C = \varepsilon$	
	5	$D = 0D \cup 1A \cup 1D$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = 1A \cup 1D \cup \varepsilon$	
	2	$A = 00 \cup 0 \cup \varepsilon$	$I.4 \to I.3 \to I.2$
	5	$D = (0 \cup 1)^*1A$	`Lema de Arden`
III	1	$\mathcal{R}_2 = 1(00 \cup 0 \cup \varepsilon) \cup 1D \cup \varepsilon$	$II.2 \to II.1$
	5	$D = (0 \cup 1)^*1(00 \cup 0 \cup \varepsilon)$	$II.2 \to II.5$
IV	1	$\mathcal{R}_2 = (1 \cup 1(0 \cup 1)^*1)(00 \cup 0 \cup \varepsilon) \cup \varepsilon$	$II.2 \to II.1$, `Fatoração`

$$\mathcal{L}_{32} = \{w \in \Sigma^* = \{0, 1\}^* \mid w = uc,\ u \in \Sigma^*,\ c \in \Sigma,\ |u|_c \leqslant 2\}$$

$\mathcal{L}_{33} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ não contém 0110 e não termina com 01$\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{33}$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1S \mid \varepsilon, & B \to 0A \mid 1C, \\ A \to 0A \mid 1B \mid \varepsilon, & C \to 1S \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0A \cup 1B \cup \varepsilon$	
	3	$B = 0A \cup 1C$	
	4	$C = 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	
	2	$A = (0 \cup 10)A \cup 111\mathcal{R}_1 \cup 11 \cup \varepsilon$	$I.4 \to I.3 \to I.2,$ `Fatoração`
III	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	
	2	$A = (0 \cup 10)^*(111\mathcal{R}_1 \cup 11 \cup \varepsilon)$	`Lema de Arden`
IV	1	$\mathcal{R}_1 = (0(0 \cup 10)^*111 \cup 1)\mathcal{R}_1 \cup 0(0 \cup 10)^*(11 \cup \varepsilon) \cup \varepsilon$	$III.2 \to III.1,$ `Fatoração`
V	1	$\mathcal{R}_1 = (0(0 \cup 10)^*111 \cup 1))^*(0(0 \cup 10)^*(11 \cup \varepsilon) \cup \varepsilon)$	`Lema de Arden`

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{33}$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1S \mid \varepsilon, & C \to 1D, \\ A \to 0A \mid 1B \mid 1C \mid \varepsilon, & D \to 1S \mid \varepsilon, \\ B \to 0A, & \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 1\mathcal{R}_2 \cup \varepsilon$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 0A \cup 1B \cup 1C \cup \varepsilon$	
	3	$B = 0A$	
	4	$C = 1D$	
	5	$D = 1\mathcal{R}_2 \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 1\mathcal{R}_2 \cup \varepsilon$	
	2	$A = (0 \cup 10)A \cup 111\mathcal{R}_2 \cup 11 \cup \varepsilon$	$I.3 \to I.2, I.5 \to I.4 \to I.2,$ `Fatoração`
III	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 1\mathcal{R}_2 \cup \varepsilon$	
	2	$A = (0 \cup 10)^*(111\mathcal{R}_2 \cup 11 \cup \varepsilon)$	`Lema de Arden`
IV	1	$\mathcal{R}_2 = (0(0 \cup 10)^*111 \cup 1)\mathcal{R}_2 \cup 0(0 \cup 10)^*(11 \cup \varepsilon) \cup \varepsilon$	$III.2 \to III.1,$ `Fatoração`
V	1	$\mathcal{R}_2 = (0(0 \cup 10)^*111 \cup 1)^*(0(0 \cup 10)^*(11 \cup \varepsilon) \cup \varepsilon)$	`Lema de Arden`

$\mathcal{L}_{34} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| \geqslant 4$, começa com 0 e contém pelo menos um 1 do terceiro ao penúltimo símbolo$\}$

$\mathcal{L}_{35} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| = 2k+1,\ k \in \mathbb{N},\ w$ termina com 1 e contém pelo menos mais um 1$\}$

$\mathcal{L}_{36} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| = 2k,\ k \in \mathbb{N},\ w$ não contém 11$\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{36}$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1C \mid \varepsilon, & B \to 0A \mid \varepsilon \\ A \to 0S \mid 1B, & C \to 0S \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1C \cup \varepsilon$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0\mathcal{R}_1 \cup 1B$	
	3	$B = 0A \cup \varepsilon$	
	4	$C = 0\mathcal{R}_1$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 10\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	$I.4 \to I.1$
	2	$A = 0\mathcal{R}_1 \cup 10A \cup 1$	$I.3 \to I.2$
III	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 10\mathcal{R}_1 \cup \varepsilon$	
	2	$A = (10)^*(0\mathcal{R}_1 \cup 1)$	`Lema de Arden`
IV	1	$\mathcal{R}_1 = (0(10)^*0 \cup 10)\mathcal{R}_1 \cup 0(10)^*1 \cup \varepsilon$	$III.2 \to III.1$, `Fatoração`
V	1	$\mathcal{R}_1 = (0(10)^*0 \cup 10)^*(0(10)^*1 \cup \varepsilon)$	`Lema de Arden`

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{36}$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 0D \mid 1C \mid \varepsilon, & C \to 0S, \\ A \to 0S \mid 1B, & D \to 1E, \\ B \to 0A, & E \to 0D \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 0D \cup 1C \cup \varepsilon$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 0\mathcal{R}_2 \cup 1B$	
	3	$B = 0A$	
	4	$C = 0\mathcal{R}_2$	
	5	$D = 1E$	
	6	$E = 0D \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 0D \cup 10\mathcal{R}_2 \cup \varepsilon$	$I.4 \to I.1$
	2	$A = 0\mathcal{R}_2 \cup 10A$	$I.3 \to I.2$
	5	$D = 10D \cup 1$	$I.6 \to I.5$
III	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 0D \cup 10\mathcal{R}_2 \cup \varepsilon$	
	2	$A = (10)^*0\mathcal{R}_2$	`Lema de Arden`
	5	$D = (10)^*1$	`Lema de Arden`
IV	1	$\mathcal{R}_2 = (0(10)^*0 \cup 10)\mathcal{R}_2 \cup 0(10)^*1 \cup \varepsilon$	$III.2, III.5 \to III.1,$ `Fatoração`
V	1	$\mathcal{R}_2 = (0(10)^*0 \cup 10)^*(0(10)^*1 \cup \varepsilon)$	`Lema de Arden`

$\mathcal{L}_{37} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = u11,\ u \in \Sigma^*$ e todo 0 em u é seguido de um par de símbolos distintos$\}$

$\mathcal{L}_{38} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém os símbolos 0 e 1, mas não contém $00\}$

$\mathcal{L}_{39} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém pelo menos um 1, mas não contém $11\}$

$\mathcal{L}_{40} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém 00, mas não contém $011\}$

- Gramática G_1 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{40}$:

$$G_1 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, S\}, \{0,1\}, P, S), \text{ com:}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1S, & C \to 0C \mid 1D \mid \varepsilon \\ A \to 0C \mid 1B, & D \to 0C \mid \varepsilon \\ B \to 0A, & \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_1$ da gramática G_1, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{L}(G_1)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_1 = 0A \cup 1\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_1 \equiv S$
	2	$A = 0C \cup 1B$	
	3	$B = 0A$	
	4	$C = 0C \cup 1D \cup \varepsilon$	
	5	$D = 0C \cup \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_1 = 1^*0A$	`Lema de Arden`
	2	$A = (10)^*0C$	$I.3 \to I.2$, `Lema de Arden`
	4	$C = (0 \cup 10)C \cup 1 \cup \varepsilon$	$I.5 \to I.4$, `Fatoração`
III	1	$\mathcal{R}_1 = 1^*0(10)^*0C$	$II.2 \to II.1$
	4	$C = (0 \cup 10)^*(1 \cup \varepsilon)$	`Lema de Arden`
IV	1	$\mathcal{R}_1 = 1^*0(10)^*0(0 \cup 10)^*(1 \cup \varepsilon)$	$III.4 \to III.1$

- Gramática G_2 que gera as cadeias de $\mathcal{L}_{40}$:

$$G_2 = (V, \Sigma, P, S) = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ com:}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \to 0A \mid 1S, & C \to 0C \mid 1D \mid 1E \mid \varepsilon \\ A \to 0C \mid 1B, & D \to 0C, \\ B \to 0A, & E \to \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- Extração de expressão regular $\mathcal{R}_2$ da gramática G_2, tal que $\mathcal{L}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{L}(G_2)$:

Etapa	Eq.	Expressão	Ação
I	1	$\mathcal{R}_2 = 0A \cup 1\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_2 \equiv S$
	2	$A = 0C \cup 1B$	
	3	$B = 0A$	
	4	$C = 0C \cup 1D \cup 1E \cup \varepsilon$	
	5	$D = 0C$	
	6	$E = \varepsilon$	
II	1	$\mathcal{R}_2 = 1^*0A$	`Lema de Arden`
	2	$A = (10)^*0C$	$I.3 \to I.2$, `Lema de Arden`
	4	$C = (0 \cup 10)C \cup 1 \cup \varepsilon$	$I.5, I.6 \to I.4$, `Fatoração`
III	1	$\mathcal{R}_2 = 1^*0(10)^*0C$	$II.2 \to II.1$
	4	$C = (0 \cup 10)^*(1 \cup \varepsilon)$	`Lema de Arden`
IV	1	$\mathcal{R}_2 = 1^*0(10)^*0(0 \cup 10)^*(1 \cup \varepsilon)$	$III.4 \to III.1$

$\mathcal{L}_{41} = \{w \in \Sigma^* = \{0, 1\}^* \mid w$ contém pelo menos um 00, mas não contém $11\}$

$\mathcal{L}_{42} = \{w \in \Sigma^* = \{0, 1\}^* \mid w$ começa com 0 e contém 010 ou w começa com 1 e contém $101\}$

$\mathcal{L}_{43} = \{w \in \Sigma^* = \{0, 1\}^* \mid w$ contém dois 1's separados por uma quantidade par de símbolos$\}$

$\mathcal{L}_{44} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 = 2k,\ k \in \mathbb{N},$ **e cada** 0 **é seguido de pelo menos dois** 1**'s consecutivos**$\}$

$\mathcal{L}_{45} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| = 2k,\ k \in \mathbb{N},$ **e** w **começa com** 1 **ou termina com** $11\}$

$\mathcal{L}_{46} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ **é diferente de** 0, 00, 1, 11 **e** $010\}$

$\mathcal{L}_{47} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 = 2k$ **e** $|w|_1 = 3k',\ k, k' \in \mathbb{N}\}$