Definição recursiva de linguagens

Base : Especificação de uma ou mais palavras "iniciais" de $\mathcal{L}$ (todas as palavras de menor tamanho possível).

Recursão : Uma ou mais regras para construção de "novas" palavras de $\mathcal{L}$ a partir de palavras "antigas" de $\mathcal{L}$.

Fecho : A linguagem $\mathcal{L}$ consiste exatamente das palavras que podem ser obtidas, começando-se com as palavras iniciais de $\mathcal{L}$, aplicando-se as regras de recursão para a construção de novas palavras.

$\mathcal{L}_1 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_{01} > 0$ ou $|w|_{10} > 0\}$

Base : $01, 10 \in \mathcal{L}_1$.

Recursão : Se $w \in \mathcal{L}_1$, então $0w, w0, 1w, w1 \in \mathcal{L}_1$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_1$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ representa um número binário ímpar (sem zeros à esquerda)$\}$

Base : $1 \in \mathcal{L}_2$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_2$, então $1w, 10w \in \mathcal{L}_2$; se $w = 10u$, então $100u \in \mathcal{L}_2$ $(u \in \Sigma^*)$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_2$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_3 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ representa um número binário e $w \pmod 3 = 1\}$

$\mathcal{L}_4 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ representa um número binário e $w \geqslant 7\}$

$\mathcal{L}_5 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém 001 ou 110$\}$

Base : $001, 110 \in \mathcal{L}_5$.

Recursão : Se $w \in \mathcal{L}_5$, então $0w, w0, 1w, w1 \in \mathcal{L}_5$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_5$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_6 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ não contém 001 ou não contém 110$\}$

Base : $\varepsilon \in \mathcal{L}_6$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_6$. (i) Se $|w| \leqslant 1$ ou $w = u01$ ou $w = u10$, então $w0, w1 \in \mathcal{L}_6$; (ii) se $w = u00$, então $w0 \in \mathcal{L}_6$; (iii) se $w = u11$, então $w1 \in \mathcal{L}_6$ $(u \in \Sigma^*)$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_6$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_7 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid$ todo 0 em w é adjacente à esquerda e à direita a um 1$\}$

Base : $\varepsilon \in \mathcal{L}_7$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_7$, então $w1 \in \mathcal{L}_7$ e, se $|w| \geqslant 1$, $w01 \in \mathcal{L}_7$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_7$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_8 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém as subcadeias 01 e 10$\}$

Base : $010, 101 \in \mathcal{L}_8$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_8$. (i) $w0, w1 \in \mathcal{L}_8$; (ii) se $w = 01u$, então $011u, 0w \in \mathcal{L}_8$; e (iii) se $w = 10u$, então $100u, 1w \in \mathcal{L}_8$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_8$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_9 = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = xyz,$ com $x \in \{0\}^*, |x| = 2k, y \in \{1\}^+$ e $z \in \{0\}^*, |z| = 0$ ou $|z| = 2k' + 1;\ k, k' \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{L}_{10} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = x0y0z$ com $|y| = 2k$ ou $w = x1y1z$ com $|y| = 2k' + 1;\ x, y, z \in \Sigma^*;\ k, k'$

Base : $00, 101, 111 \in \mathcal{L}_{10}$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{10}$. (i) $0w, 1w, w1, w0 \in \mathcal{L}_{10}$; (ii) se $w = cuc$, com $c \in \Sigma$ e $u \in \Sigma^*$, então $cc'uc''c \in \mathcal{L}_{10}$, para $c', c'' \in \Sigma$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{10}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{11} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid$ pelo menos um 0 em w não é seguido de 1$\}$

$\mathcal{L}_{12} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ não contém 101 e termina com 1$\}$

Base : $1 \in \mathcal{L}_{12}$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{12}$. Se $w = 01u$, $u \in \Sigma^*$, então $0w \in \mathcal{L}_{12}$, senão $0w, 1w \in \mathcal{L}_{12}$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{12}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{13} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| \geqslant 3$ e o terceiro e o penúltimo símbolos de w não são 1$\}$

Base : $000, 100, 0000, 0001, 0100, 0101, 1000, 1001, 1100, 1101 \in \mathcal{L}_{13}$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{13}$. (i) Se $w = u0$, $u \in \mathcal{L}_{13}$, então $w0, w1 \in \mathcal{L}_{13}$. (ii) Se $w = u'0c$, com $u' \in \mathcal{L}_{13}$ e $c \in \Sigma$, então $u'c'0c \in \mathcal{L}_{13}$ para $c' \in \mathcal{L}_{13}$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{13}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{14} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém uma quantidade par da subcadeia 010$\}$

$\mathcal{L}_{15} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém uma quantidade par da subcadeia 000$\}$

Base : $\varepsilon \in \mathcal{L}_{15}$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{15}$. (i) $w1, 1w \in \mathcal{L}_{15}$. (ii) Se $|w| < 2$, então $0w, w0 \in \mathcal{L}_{15}$. (ii) Se $w = uv$, $u \in \Sigma^*$ e $v \in \{01, 10, 11\}$, então $w0 \in \mathcal{L}_{15}$. (iii) Se $w = vu$, $u \in \Sigma^*$ e $v \in \{01, 10, 11\}$, então $0w \in \mathcal{L}_{15}$. (iv) Se $w = 0u0$, $u \in \Sigma^+$, então $0w0 \in \mathcal{L}_{15}$. (v) Se $w = u000$, $u \in \Sigma^+$, então $w00 \in \mathcal{L}_{15}$. (vi) Se $w = 000u$, $u \in \Sigma^+$, então $00w \in \mathcal{L}_{15}$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{15}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{16} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 \pmod 3 = 1\}$

$\mathcal{L}_{17} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geqslant 3$ e $|w|_1 \leqslant 2\}$

$\mathcal{L}_{18} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geqslant 3$ ou $|w|_1 = 2,$ e w não contém $11\}$

$\mathcal{L}_{19} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém exatamente uma ocorrência de 00 ou de $11\}$

$\mathcal{L}_{20} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| \geqslant 3$ e o penúltimo símbolo é $0\}$

$\mathcal{L}_{21} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_{00} \geqslant 1$ e $|w|_{11} = 0\}$

$\mathcal{L}_{22} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| \geqslant 2$ e os dois primeiros símbolos de w são iguais aos dois últimos$\}$

Base : $00, 11 \in \mathcal{L}_{22}$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{22}$. (i) Se $w = ccu$ e $w = u'cc$, para $u, u' \in \Sigma^*$ e $c \in \Sigma$; então $cw, wc \in \mathcal{L}_{22}$. (ii) Se $w = c_1c_2uc_3c_4$, para $u \in \Sigma^*$ e $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \Sigma$; então $c_1c_2c_5uc_3c_4, c_1c_2uc_5c_3c_4 \in \mathcal{L}_{22}$, para $c_5 \in \Sigma$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{22}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{23} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ não começa com 10, mas termina com $10\}$

Base : $010, 110 \in \mathcal{L}_{23}$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{23}$. (i) $0w \in \mathcal{L}_{23}$; (ii) se $w = 1u$, $u \in \Sigma^+$, então $1w \in \mathcal{L}_{23}$; (iii) como $w = u'10$, $u' \in \Sigma^+$, então $u'110, u'010 \in \mathcal{L}_{23}$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{23}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{24} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém pelo menos um 0 e pelo menos dois 1's$\}$

Base : $011, 101, 110 \in \mathcal{L}_{24}$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{24}$. (i) $w0, w1 \in \mathcal{L}_{24}$; (ii) Se $w = 0u$, $u \in \Sigma^*$, então $00u \in \mathcal{L}_{24}$; (iii) Se $w = 10u$, $u \in \Sigma^*$, então $100u \in \mathcal{L}_{24}$; (iv) Se $w = 11u$, $u \in \Sigma^*$, então $111u \in \mathcal{L}_{24}$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{24}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{25} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = 0u$ e $|w|$ é par ou $w = 1u'$ e $|u'|$ é par, com $u, u' \in \Sigma^*\}$

$\mathcal{L}_{26} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 + |w|_1 = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$ e w não contém $10\}$

$\mathcal{L}_{27} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = xyz,\ x, z \in \{0\}^*,\ y \in \{1\}^+;\ |x|_0 + |z|_0 = 2k,\ |y|_1 = 2k' + 1,\ k, k' \in \mathbb{N}\}$

Base : $1 \in \mathcal{L}_{27}$.

Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{27}$. Se $w = 1u$, $u \in \Sigma^*$, então $11w \in \mathcal{L}_{27}$, senão $00w, 0w0, w00 \in \mathcal{L}_{27}$.

Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{27}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{28} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = xcycz,\ c \in \Sigma,\ x,y,z \in \Sigma^*;\ |x| = 2k+1,\ |z| = 2k',\ k,k' \in \mathbb{N};\ |y| = 2\}$

Base : $00000, 00010, 00100, 00110, 01001, 01011, 01101, 01111, 10000, 10010, 10100, 10110, 11001, 11011, 11101, 11111 \in \mathcal{L}_{28}$.
Recursão : Se $w \in \mathcal{L}_{28}$, então $cc'w, wcc' \in \mathcal{L}_{28}$ com $c, c' \in \Sigma$.
Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{28}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{29} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém uma, duas ou três ocorrências do símbolo $0\}$

$\mathcal{L}_{30} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = u01^n,\ u \in \Sigma^*,\ n \in \mathbb{N}^+\}$

Base : $01 \in \mathcal{L}_{30}$.
Recursão : Se $w \in \mathcal{L}_{30}$, então $0w, 1w, w1 \in \mathcal{L}_{30}$.
Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{30}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{31} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ não começa com 0 e não termina com $000\}$

Base : $\varepsilon \in \mathcal{L}_{31}$.
Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{31}$. (i) $w1 \in \mathcal{L}_{31}$; (ii) se $w = u1$ ou $w = u'10$, com $u, u' \in \Sigma^*$, então $w0 \in \mathcal{L}_{31}$.
Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{31}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{32} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = uc,\ u \in \Sigma^*,\ c \in \Sigma,\ |u|_c \leqslant 2\}$

$\mathcal{L}_{33} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ não contém 0110 e não termina com $01\}$

Base : $\varepsilon \in \mathcal{L}_{33}$.
Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{33}$. (i) $1w, 0111w, w0, w011 \in \mathcal{L}_{33}$. (ii) Se $w = 0u$, $u \in \Sigma^*$, então $00u, 010u \in \mathcal{L}_{33}$. (iii) Se $w = u0v$, $u \in \Sigma^*$ e $v \in \{\varepsilon, 11\}$, então $u00v, u010v$.
Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{33}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{34} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| \geqslant 4$, começa com 0 e contém pelo menos um 1 do terceiro ao penúltimo símbolo$\}$

$\mathcal{L}_{35} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| = 2k+1,\ k \in \mathbb{N},\ w$ termina com 1 e contém pelo menos mais um $1\}$

Base : $0010, 0011, 0110, 0111 \in \mathcal{L}_{35}$.
Recursão : Se $w \in \mathcal{L}_{35}$, então $0w, w0, w1 \in \mathcal{L}_{35}$.
Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{35}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{36} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| = 2k,\ k \in \mathbb{N},\ w$ não contém $11\}$

$\mathcal{L}_{37} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w = u11,\ u \in \Sigma^*$ e todo 0 em u é seguido de um par de símbolos distintos$\}$

$\mathcal{L}_{38} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém os símbolos 0 e 1, mas não contém $00\}$

$\mathcal{L}_{39} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém pelo menos um 1, mas não contém $11\}$

$\mathcal{L}_{40} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém 00, mas não contém $011\}$

$\mathcal{L}_{41} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém pelo menos um 00, mas não contém $11\}$

Base : $00 \in \mathcal{L}_{41}$.
Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{41}$. (i) $0w, w0 \in \mathcal{L}_{41}$; (ii) se $w = u0$, $u \in \Sigma^+$, então $w1 \in \mathcal{L}_{41}$; (iii) se $w = 0u'$, $u' \in \Sigma^+$, então $1w \in \mathcal{L}_{41}$.
Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{41}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{42} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ começa com 0 e contém 010 ou w começa com 1 e contém $101\}$

Base : $010, 101 \in \mathcal{L}_{42}$.
Recursão : Seja $w \in \mathcal{L}_{42}$. (i) $w0, w1 \in \mathcal{L}_{42}$. (ii) Se $w = 0u$, $0w \in \mathcal{L}_{42}$; se $w = 01u'$, $1w \in \mathcal{L}_{42}$ $(u, u' \in \Sigma^*)$. (iii) Se $w = 1u$, $1w \in \mathcal{L}_{42}$; se $w = 10u'$, $0w \in \mathcal{L}_{42}$ $(u, u' \in \Sigma^*)$
Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{42}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{43} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ contém dois 1's separados por uma quantidade par de símbolos$\}$

$\mathcal{L}_{44} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 = 2k,\ k \in \mathbb{N},$ e cada 0 é seguido de pelo menos dois 1's consecutivos$\}$

Base : $\varepsilon \in \mathcal{L}_{44}$.
Recursão : Se $w \in \mathcal{L}_{44}$, então $1w, w1, 011011w, 011w011, w011011$
Fecho : Dada uma cadeia $w \in \Sigma^*$, $w \in \mathcal{L}_{44}$ se pode ser obtida a partir das cadeias básicas, com a aplicação da regra recursiva um número finito de vezes.

$\mathcal{L}_{45} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w| = 2k,\ k \in \mathbb{N},$ e w começa com 1 ou termina com $11\}$

$\mathcal{L}_{46} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid w$ é diferente de 0, 00, 1, 11 e $010\}$

$\mathcal{L}_{47} = \{w \in \Sigma^* = \{0,1\}^* \mid |w|_0 = 2k$ e $|w|_1 = 3k',\ k, k' \in \mathbb{N}\}$