



نیم‌سال دوم سال ۹۷-۹۸

## جواب تمرین سری سوم: مسائل ارضای محدودیت

لطفاً به نکات زیر توجه کنید:

- برای برخی از سوالات، جواب‌های دیگری را نیز می‌توان متصور بود و این جواب‌ها تنها جواب‌های درست مسائل نیستند.

- آدرس گروه درس: <https://groups.google.com/forum/#!forum/ai972>

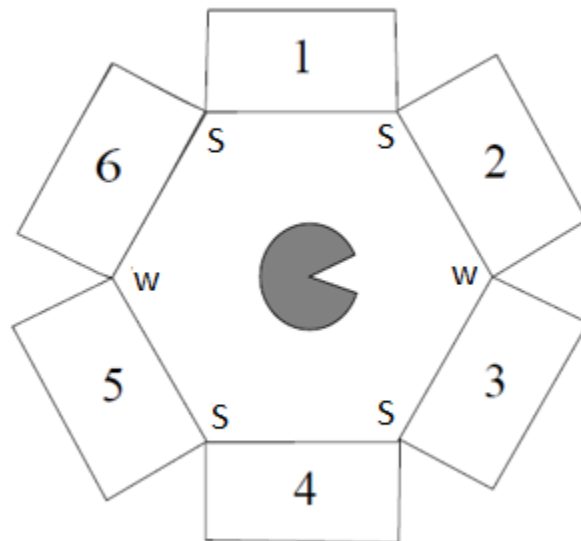
- صفحه تمرین: <https://quera.ir/course/assignments/8862/problems>

موفق باشید

# سوال‌های تئوری

## سوال اول

پکمن گیر افتاده است! او با دیوارهایی که پشت آن‌ها غول (P) یا روح (G) یا راه خروج (E) قرار دارد محاصره شده است. برای این که پکمن بتواند فرار کند باید دیواری که به خروج منتهی می‌شود را پیدا کند. یکی از نشانه‌هایی که کمک می‌کند تا بفهمیم پشت دیوار چیست، بادی ست که می‌وزد. غول باد قوی تولید می‌کند (S) و راه خروج باد ضعیف (W) و روح هیچ بادی تولید نمی‌کند. اما پکمن نمی‌تواند هر جریان هوا رو به صورت جداگانه اندازه‌گیری کند. در عوض در نقطه‌ای به هم رسیدن دو دیوار می‌تواند برآیند دو جریان هوا را اندازه‌گیری کند. مثلاً بین دو دیوار که پشت آن‌ها غول وجود دارد، برآیند دو جریان هوا، قوی است و جریان قوی احساس می‌شود. یا بین دو دیوار که پشت یکی غول هست و پشت یکی خروج، جریان قوی احساس می‌شود. بین دو دیوار خروج و روح هم جریان ضعیف احساس می‌شود. تعداد خروج‌ها ممکن است صفر، یک و یا بیشتر باشد. پکمن می‌داند که هیچ دو خروجی پشت دیوارهای مجاور هم نیستند.



برای مدل کردن مسئله ی پکمن از  $X_i$  برای نشان دادن موجود پشت دیوار  $i$  اُم استفاده کنید که دامنه‌ی آن P ، G ، یا E است

الف - به صورت binary و یا unary محدودیت های مستقیم و غیر مستقیم این مدل را بنویسید.

Binary:

$X_1=P \text{ OR } X_2=P, X_1=P \text{ OR } X_6=P, X_4=P \text{ OR } X_3=P$

$X_4=P \text{ OR } X_5=P, X_2=E \text{ OR } X_3=P, X_5=P \text{ OR } X_6=P$

Unary:

$X_2 \neq P, X_3 \neq P, X_6 \neq P, X_5 \neq P$

ب- جدول زیر را بعد از اعمال عملیات arc consistency با توجه به دامنه ی مسئله تکمیل کنید.

$X_1$	P
$X_2$	E G
$X_3$	E G
$X_4$	P
$X_5$	E G
$X_6$	E G

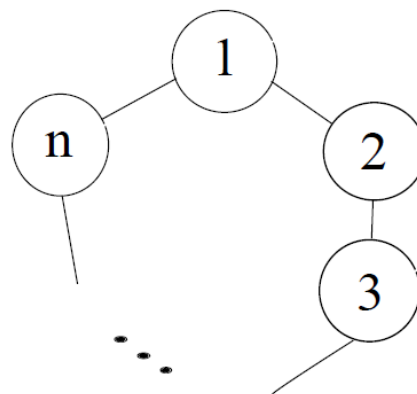
ج- با توجه به MRV، کدام متغیر یا متغیرها در مرحله ی اول به جواب می رسند؟

متغیرهای  $X_1$  و  $X_4$

د- فرض کنید پکمن میداند پشت دیوار شماره ۶ روح قرار دارد. تمام حل های ممکن برای این CSP را بنویسید یا اگر حلی وجود ندارد آن را ذکر کنید.

حلهای ممکن: PGWPWG و PWGPWG

مسئله ی CSP که در بالا دیدید یک ساختار دایروی با ۶ متغیر است. حل یک مسئله ی CSP مانند بالا را در نظر بگیرید که  $n$  متغیر دارد ( $n > 2$ ) همچنین در نظر بگیرید دامنه ی مسئله  $d$  عضو دارد.



هـ - با جزئیات توضیح دهید این مسئله ی CSP با ساختار دایروی را چگونه میتوان به روش بهینه حل کرد؟ (مثلا در زمان خطی نسبت به تعداد متغیر ها). از روش های گفته شده در کلاس استفاده کنید.

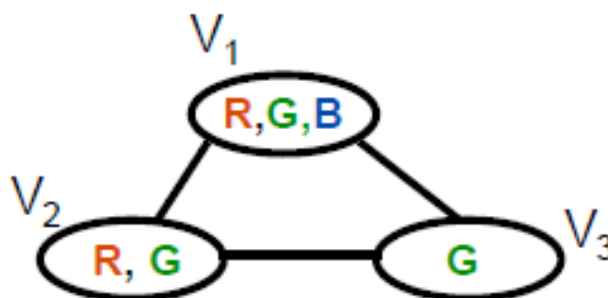
با مقدارهی به یکی از متغیرها می توان ساختار دایروی را تبدیل به ساختار درختی کرد. می دانیم ساختار درختی برای یک مسئله CSP را می توان با روش های بهینه حل کرد. حال در صورت عدم یافت جواب، باید مقدار اولیه تخصیص داده شده به متغیر ابتدایی تغییر یابد. این عملیات تا زمانی ادامه می یابد که به جواب برسیم.

و - اگر از شیوهی جست و جوی backtracking معمولی برای این گراف با ساختار دایروی استفاده کنیم و در هر مرحله arc consistency اجرا بشود، درباره ی رفتار backtracking در حالت worst-case چه می توان گفت ؟ (مثلا تعداد دفعاتی که جست و جو عقبگرد می کند )

برای حل مسئله در بدترین حالت با d بار عمل Backtrack مسئله حل خواهد شد. زیرا ممکن است قصد داشته باشیم d مقدار ممکن را قبل از یافتن راه حل بسنجیم.

## سوال دوم

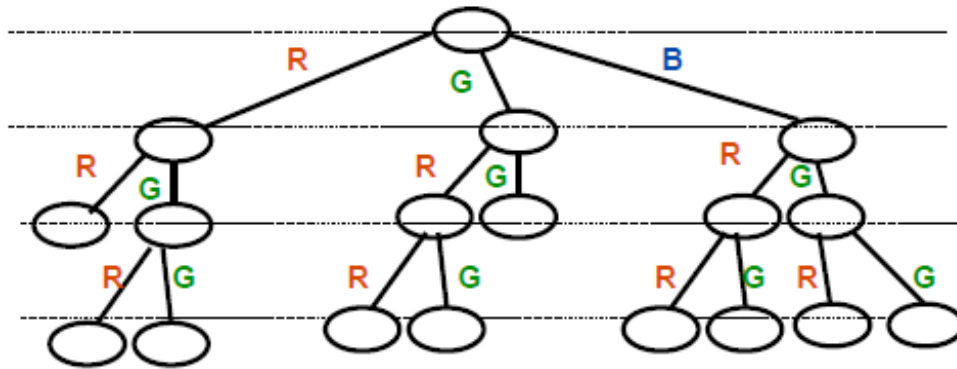
با توجه به شکل زیر به سوالات پاسخ دهید.



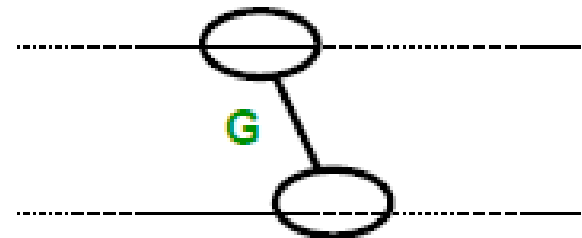
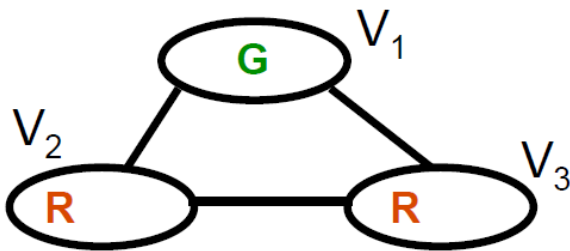
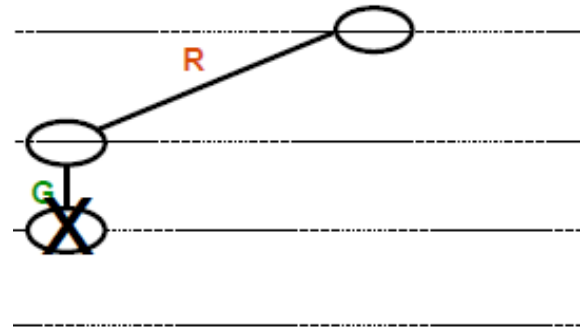
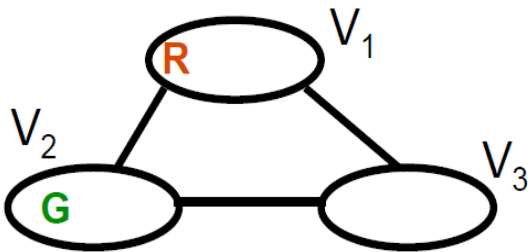
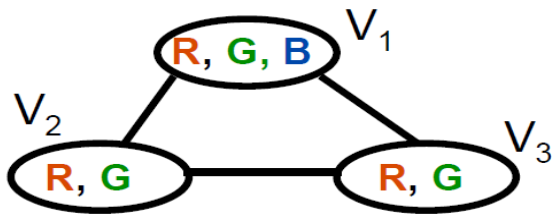
الف - جدول Arc Consistency زیر را کامل کنید.

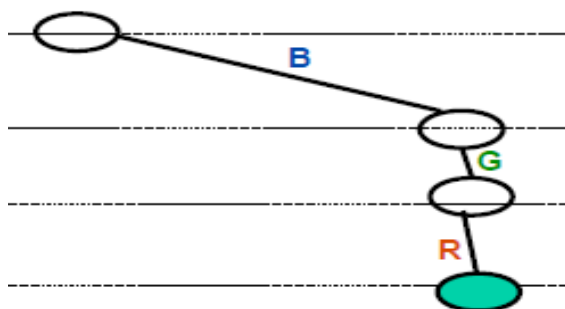
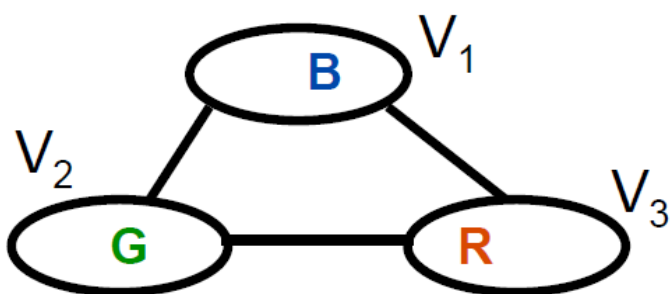
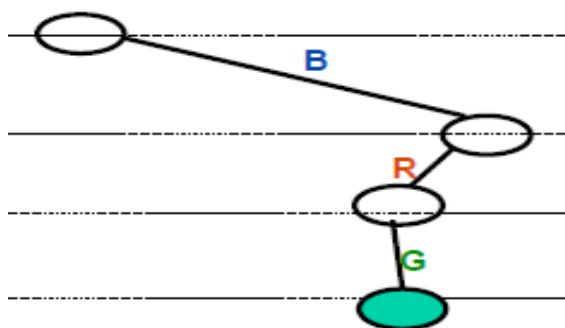
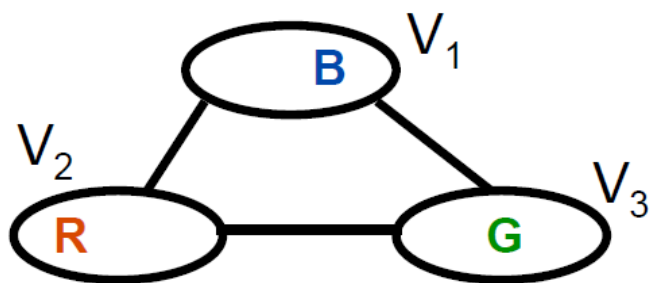
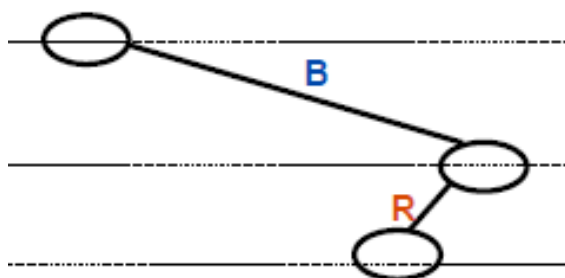
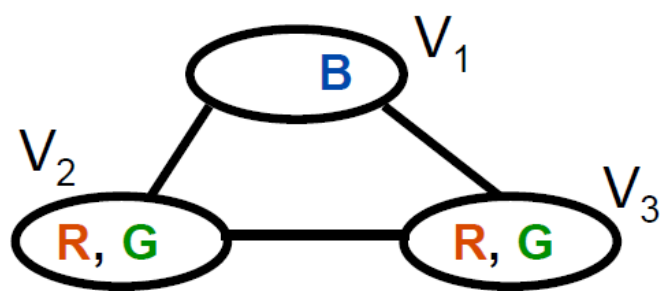
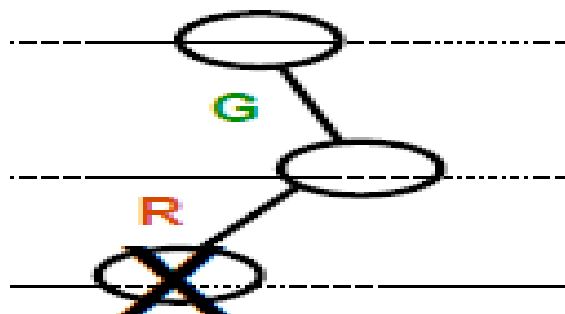
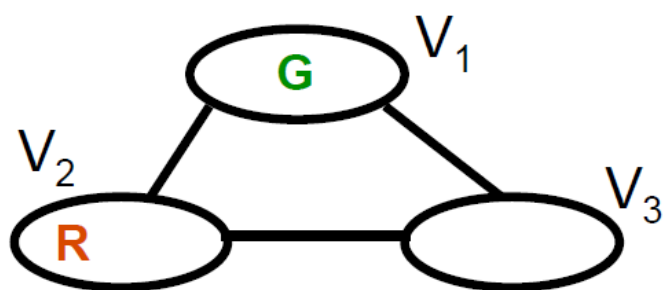
arc consistency	Value deleted
V1 – V2	-
V1 – V3	V1(G)
V2 – V3	V2(G)
V1 – V2	V1®
V1 – V3	-
V2 – V3	-

ب - درخت Backtracking را با شروع از راس  $V_1$  و سپس  $V_2$  به شکل کامل رسم کنید.



ج - درخت Backtracking را با فیلتر کردن Forward Checking به شکل کامل با شروع از راس  $V_1$  و سپس  $V_2$  رسم کنید.





## سوال سوم

شما در حال ساخت یک برنامه‌ی اتوماتیک برای حل جدول crossword هستید چون فکر می‌کنید با آن می‌توان پول خوبی به جیب زد! برای آن‌هایی که با این جدول آشنا نیستند، crossword یا همان جدول کلمات متقاطع (در این سوال برای زبان انگلیسی) یک جدول مربعی است که در آن حروف قرار دارند و باید کلمه‌های معنی‌دار متقاطع را به صورت چپ به راست یا بالا به پایین پیدا کنید. همچنین یک کلمه در دو جای جدول تکرار نشده است. برای مثال در جدول زیر با شروع از موقعیت‌های ۱ و ۲ و ۳، کلمات DEN و ARE و MAT، و با شروع از موقعیت‌های ۱ و ۴ و ۵ کلمات DAM و ERA و NET دیده می‌شوند.

<sup>1</sup> D	<sup>2</sup> A	<sup>3</sup> M
<sup>4</sup> E	R	A
<sup>5</sup> N	E	T

بخشی از کار شما این است که یک جدول کلمات متقاطع را با استفاده از تکنیک حل مسئله‌ی CSP بسازید. برای این کار اول باید بتوانیم مسئله را به صورت درست بازنمایی کنیم. شما یک دیکشنری دارید که می‌توانید از کلمات داخل آن در جدول خود استفاده کنید و دیکشنری شامل  $k$  کلمه می‌شود.  $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ . فرض کنید که شما یک جدول با  $N$  مربع خالی و  $M$  کلمه‌ی متفاوت می‌سازید و البته زبان انگلیسی هم ۲۶ حرف دارد. مثلاً در مثال بالا  $N=9$  و  $M=6$  می‌باشد.

شما در ابتدا تصمیم می‌گیرید که کلمات، متغیرهای شما در CSP باشد.  $D_1$  نمایشی برای کلمه‌ی اول بالا به پایین و  $D_2$  نمایشی برای کلمه‌ی دوم بالا به پایین می‌باشد. و همچنین  $A_1$  نمایش برای اولین کلمه‌ی افقی باشد. مثلاً در مثال بالا  $A_1 = \text{DAM}$ ,  $D_1 = \text{DEN}$ ,  $D_2 = \text{ARE}$ . ... همچنین فرض می‌کنید  $D_1[i]$  نمایشی برای حرف  $i$ ام در کلمه‌ی اول بالا به پایین ( $D_1$ ) باشد.

الف – اندازه‌ی فضای حالت برای این CSP چقدر می‌شود؟

جواب‌های زیادی برای این مسئله قابل قبول هستند. ساده‌ترین جواب این است که یک دیکشنری با اندازه‌ی  $k$  که  $m$  کلمه دارد، فضای حالت  $k^m$  خواهد بود. یک حد پایین‌تر زمانی به وقوع می‌رسد که وقتی یک کلمه ظاهر شد، تمام کلمات بعد متفاوت باشند. که در این صورت جواب  $\frac{k!}{(k-m)!}$  خواهد بود. در نظر داشته باشید که  $n$  در جواب این مسئله تاثیری ندارد.

ب - دقیقا و با نمایش ریاضی شرح دهید محدودیت‌های CSP وقتی که از کلمات به عنوان متغیر استفاده می‌کنیم چیست.

برای هر جفت از کلمات در سطر و ستون که  $D_k$  و  $A_i$  اشتراک دارند، باید محدودیت این وجود داشته باشد که حروفشان یکسان باشد. مخصوصا اگر از مکان‌های  $i$  و  $j$  اشتراک داشته باشند، داریم:  $D_k[i] = A_i[j]$   
 علاوه بر این هر کلمه باید طول درستی داشته باشد. یک formulation مناسب این است که برای همه  $L$  هایی که عضو  $N$  هستند،  $D_k$  و  $A_i$  با طول  $L$  در پازل داریم  $length(D_k) = L$  و  $length(A_i) = L$

بعد از مشخص کردن CSP خود شما تصمیم گرفتید که جلو تر بروید و یک جدول کلمات متقاطع کوچک با استفاده از جدول زیر درست کنید. فرض کنید کلمات دیکشنری شما به شرح زیر است.

Crossword Grid				
1	2	3	4	
5				
6				
7				

Dictionary Words

ARCS, BLAM, BEAR, BLOGS, LARD, LARP,  
 GAME, GAMUT, GRAMS, GPS, MDS, ORCS, WARBLER

ج - می‌خواهیم بررسی کنیم که arc consistency تا چه حد می‌تواند دامنه را برای این مسئله محدود کند. حتی وقتی هیچ اختصاص دهی ای (assignment) انجام نشده باشد. مثلا فرض کنید هنوز هیچ تغییری اختصاص داده نشده است. محدودیت‌های unary را ابتدا اعمال کنید، و بعد arc consistency را اعمال کنید. (روی جدول پایین)

$D_1$	ARCS	BLAM	BEAR	BLOGS	LARD	LARP	GPS	MDS	GAME	GAMUT	GRAMS	ORCS	WARBLER
$D_2$	ARCS	BLAM	BEAR	BLOGS	LARD	LARP	GPS	MDS	GAME	GAMUT	GRAMS	ORCS	WARBLER
$D_3$	ARCS	BLAM	BEAR	BLOGS	LARD	LARP	GPS	MDS	GAME	GAMUT	GRAMS	ORCS	WARBLER
$D_4$	ARCS	BLAM	BEAR	BLOGS	LARD	LARP	GPS	MDS	GAME	GAMUT	GRAMS	ORCS	WARBLER
$A_1$	ARCS	BLAM	BEAR	BLOGS	LARD	LARP	GPS	MDS	GAME	GAMUT	GRAMS	ORCS	WARBLER
$A_5$	ARCS	BLAM	BEAR	BLOGS	LARD	LARP	GPS	MDS	GAME	GAMUT	GRAMS	ORCS	WARBLER
$A_6$	ARCS	BLAM	BEAR	BLOGS	LARD	LARP	GPS	MDS	GAME	GAMUT	GRAMS	ORCS	WARBLER
$A_7$	ARCS	BLAM	BEAR	BLOGS	LARD	LARP	GPS	MDS	GAME	GAMUT	GRAMS	ORCS	WARBLER

دوست شما به شما پیشنهاد می‌کند به جای کلمات، از حروف برای متغیر استفاده نمایید. برای شماره گذاری از سمت بالا چپ شروع کنید و به سمت راست بروید و بعد از آن از بالا به پایین حرکت کنید. یعنی در مثالی که ابتدای این سوال آوردیم:  $X_1=D, X_2=A$  و ...

د - اندازه‌ی فضای حالت برای این CSP چقدر است ؟

اندازه‌ی فضای حالت  $26^n$  خواهد بود. زیرا در زبان انگلیسی 26 حرف وجود دارد و برای هر حرف  $n$  مکان مختلف قابل تصور است.