بسمه تعالی

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۱۴۰۱/۱۰/۱۸ **وقت امتحان : ۱۵۰ دقیقه**

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام مدرس:

---

۱. [۲۵ نمره] (الف) نقاط عادی و غیرعادی معادله دیفرانسیل زیر را مشخص کنید:

$$(x^۲ - ۱)y'' - y = ۰.$$

(ب) ۶ جمله اول سری توانی جواب معادله فوق حول نقطه $x = ۰$ را بیابید.

۲. [۲۰ نمره] لاپلاس وارون (تبدیل لاپلاس معکوس) تابع زیر را بیابید:

$$F(s) = \frac{(۱ + e^{-۲\pi(s+۱)})(s + ۱)}{(s + ۱)^۲ + ۱}.$$

۳. [۲۵ نمره] با استفاده از تبدیل لاپلاس، جواب معادله انتگرالی زیر را بیابید:

$$y(x) + ۲e^x \int_۰^x y(t)e^{-t}dt = xe^x.$$

۴. [۲۵ نمره] با استفاده از تبدیل لاپلاس، جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید:

$$y'' - ۳y' - ۴y = e^{۳x}, \quad y(۰) = y'(۰) = ۰.$$

۵. [۲۵ نمره] جواب عمومی دستگاه همگن $X' = AX$ را بیابید هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

موفق باشید

جواب سؤال یک:

الف)

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

نقاط غیرعادی ۵

باقی نقاط، نقاط عادی هستند.

ب ـــ

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad 3 \quad \rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \quad 3$$

$$(x^2-1)y''-y=0 \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\Rightarrow -2a_2-6a_3x-a_0-a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_n\right]x^n=0 \quad 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0+2a_2=0 & 1 \\ a_1+6a_3=0 & 1 \\ a_{n+2}=\dfrac{n(n-1)-1}{(n+1)(n+2)}a_n, \quad \forall n\geq 2 & 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow a_2=-\frac{1}{2}a_0, \quad a_3=-\frac{1}{6}a_1$$

$$a_4=-\frac{1}{24}a_0, \quad a_5=-\frac{1}{24}a_1, \quad a_6=-\frac{11}{720}a_0$$

$$\Rightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x-\frac{1}{2}a_0x^2-\frac{1}{6}a_1x^3-\frac{1}{24}a_0x^4-\frac{1}{24}a_1x^5-\frac{11}{720}a_0x^6+\cdots \quad 6$$

$$\Rightarrow y=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4-\frac{11}{720}x^6+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^5+\cdots\right)$$

جواب سؤال دو :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1+e^{-2\pi(s+1)})(s+1)}{(s+1)^2+1}\right\} = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(e^{-2\pi s}+1)s}{s^2+1}\right\}$$

$$= e^{-t}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}\right\}\right)$$

$$= e^{-t}\left(\cos(t) + u_{2\pi}(t)\cos(t-2\pi)\right) = e^{-t}\cos(t)\left(1+u_{2\pi}(t)\right)$$

3) $$y(x) + 2\int_0^x y(t)\, e^{x-t}\, dt = x e^x$$

$$y(x) + 2y(x) * e^x = x e^x \qquad (4)$$

$$Y(s) + 2\,Y(s) \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2} \qquad (8)$$

$$\left(1 + \frac{2}{s-1}\right) Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \qquad (2)$$

$$(s-1+2)\, Y(s) = \frac{1}{s-1} \qquad (2)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{(s^2-1)} = \frac{1}{s^2-1} \qquad (4)$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \sinh(x). \qquad (5)$$

حل سؤال ۴ :

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = e^{3x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{L} (s^2 - 3s - 4)Y = \frac{1}{s-3}$$ ۱۰ نمره

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{(s-3)(s+1)(s-4)} = \frac{-\frac{1}{4}}{s-3} + \frac{\frac{1}{20}}{s+1} + \frac{\frac{1}{5}}{s-4}$$ ۱۰ نمره

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} e^{3x} + \frac{1}{20} e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x}$$ ۵ نمره

حل ۵ :

$X' = AX \ , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow r = 2, 2, 1$ مقادیر ویژه ۸ نمره

گام ۱

$\boxed{r=2} \Rightarrow (A - rI)V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_2 - v_3 = 0 \\ -v_3 = 0 \\ -v_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow v_2 = v_3 = 0 \Rightarrow V = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ ۵ نمره

گام ۲

$r=2$: $\begin{cases} (A-rI)V \neq 0 \Rightarrow v_2 \neq 0 \text{ یا } v_3 \neq 0 \\ \text{و} \\ (A-rI)^2 V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v_3 = 0 \\ v_2 \neq 0 \\ v_1 \text{ دلخواه} \end{matrix}$

$\longrightarrow V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ مثلاً $\Rightarrow X_2 = e^{2t}\big(V + t(A-rI)V\big) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \right.$

$\left. t \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \boxed{e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ ۵ نمره

$r=1 \longrightarrow (A - rI)V = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow v_2 = v_3 \ , \ v_1 = 0 \longrightarrow V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{X_3 = e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ ۵ نمره

$\Rightarrow X_h = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$ ۲ نمره