

INTERROS

de Prépas & Deug

MP-PC-PSI
SPÉ

**Électromagnétisme
Physique des Ondes**

Olivier Chenevez

Ancien élève de l'École Normale Supérieure

Collection dirigée par **Éric MAURETTE**

*Du même auteur, aux Éditions PRÉPAMATH,
dans la collection «Interros de Prépas et Deug» :*

Mécanique des Systèmes & Mécanique des Fluides – Spé MP-PC-PSI



*Toute ma gratitude à Éric CHENEVEZ, élève à l'École Nationale
Supérieure des Mines de Paris et dessinateur hors pair de l'inté-
gralité des figures qui illustrent ce manuel.*

*Je remercie également pour leur précieuse contribution
Gilbert DE MARÉSCHAL, ancien élève de l'ENS de la rue d'Ulm et
Cyriaque CHOLET, professeur de physique en classe préparatoire.*



Coordination éditoriale :
Nassim MOKRANE

I.S.B.N. 2-910350-27-4
© 1999, PRÉPAMATH Éditions

Avant-propos

Ce manuel s'adresse à tous les élèves de Math Spé, quelle que soit leur filière (MP, PC, PSI). Il traite des nouveaux programmes de physique tels qu'il ont été fixés dans le Bulletin de l'Éducation Nationale du 18 juillet 1996.

En électromagnétisme, l'*électrostatique*, la *magnétostatique*, l'*électrocinétique* et l'*induction* sont au programme de toutes les filières. Le chapitre sur l'*équilibre électrostatique d'un conducteur* ne s'adresse qu'aux MP et celui sur la *conversion électromagnétique et électromécanique* aux PSI exclusivement.

En physique des ondes, seules les *ondes électromagnétiques dans le vide* concernent les MP. L'intégralité de cette partie est au programme des PC et PSI.

Par souci d'efficacité, l'ouvrage se concentre exclusivement sur des sujets posés aux concours des Grandes Écoles scientifiques (E.N.S., Polytechnique, concours commun des Mines, Centrale, E.N.S.I.). Par exigence de qualité, il propose un cours approfondi et détaillé plutôt qu'un simple rappel, sans cesse en relation avec les exercices.

En marge du cours et en support des exercices sont intégrés des compléments de cours qui ne sont pas explicitement au programme. De mon point de vue, ils contribuent à une compréhension plus en profondeur des phénomènes physiques étudiés. Pourvu qu'on s'y arrête un peu, ils aideront à éclairer certaines notions du programme.

Les parties cours et exercices ne sont pas faites pour être cloisonnées. Le cours n'a pas seulement pour vocation de précéder la réflexion sur l'exercice. Il doit aussi en accompagner la résolution. L'un et l'autre se répondent : les exercices font explicitement référence au cours et doivent aider à mieux à le comprendre ; réciproquement, les concepts du cours, lorsqu'ils sont compris en profondeur, aident à la résolution de problèmes plus ponctuels. L'intelligence des notions de physique exige de s'y arrêter quelque temps jusqu'à percevoir la logique du cours dans sa globalité. Chaque notion s'intègre dans une logique générale, qu'il faut faire l'effort de percevoir.

J'ai opté pour une présentation thématique des exercices. Les programmes traités sont clairement mentionnés (MP, PC, PSI). Ils ont tous, sans exception, été posés aux concours des Grandes Écoles scientifiques. Ils sont sélectionnés pour leur complémentarité et pour leur capacité à illustrer au mieux les concepts de physique au programme. Leur résolution est la plus détaillée possible. Plutôt que de multiplier les exercices, j'ai choisi de préciser les solutions, avec méthode. D'expérience de khôlleur, d'enseignant et d'ancien préparateur, il m'apparaît en effet beaucoup plus efficace d'approfondir quelques exercices bien sélectionnés. À condition de suivre la ligne de l'ouvrage : cours, exercices et compléments doivent rester en dialogue permanent.

Sommaire

pages

I. ÉLECTROMAGNÉTISME.....	I
Chapitre 1. Introduction.....	3
Chapitre 2. Lois fondamentales de l'électromagnétisme	3
1. Densité de charge, densité de courant	5
2. Équations de Maxwell dans le vide	10
3. Énergie électromagnétique.....	13
Chapitre 3. Électrostatique dans le vide.....	17
1. Propriétés générales.....	17
2. Dipôle électrique.....	29
3. Énergie électrostatique	35
Chapitre 4. Compléments d'électrostatique	41
1. Autre méthode de détermination de l'énergie de constitution	41
2. Localisation de l'énergie de constitution	42
3. Pression électrostatique.....	43
Chapitre 5. Exercices d'électrostatique.....	47
1. Disque chargé en surface	47
2. Fil infini rectiligne et antisymétriquement chargé.....	51
3. Segment de fil uniformément chargé.....	55
4. Boule uniformément chargée	59
5. Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène	63
6. Distribution volumique des charges.....	69
7. Distribution quelconque des charges	73
8. Sphère non uniformément chargée en surface	76
Chapitre 6. Équilibre électrostatique d'un conducteur..	81
1. Définition	81
2. Propriétés d'un conducteur en équilibre.....	81
3. Condensateur	85
Chapitre 7. Exercices sur les conducteurs.....	91
1. Sphères conductrices en contact	91
2. Force exercée par un conducteur sur un autre	94
3. Sphère conductrice placée dans un champ uniforme.....	97
4. Dipôle électrique placé au dessus d'un conducteur plan	100
5. Sphère conductrice au voisinage d'une charge ponctuelle	104
6. Sphère conductrice creuse au voisinage d'une charge ponctuelle.....	110
7. Charge au dessus d'une calotte sphérique.....	102
8. Conducteur en rotation dans un référentiel galiléen	116
9. Capacité d'un conducteur ellipsoïde	119
10. Condensateurs simples.....	121
11. Autres exemples de calculs de capacités	125

Sommaire

pages

Chapitre 8. Électrocinétique des courants continus .. 137

1. Loi d'Ohm.....	137
2. Densité de la puissance dissipée par effet Joule	139
3. Champ électromoteur et générateur de tension	140
4. Résistance d'un récepteur passif.....	142
5. Loi d'Ohm dans un générateur	146
6. Loi d'Ohm dans un récepteur.....	148
7. Bilan énergétique dans un circuit	149

Chapitre 9. Magnétostatique dans le vide 151

1. Propriétés générales de magnétostatique	151
2. Dipôle magnétique.....	163
3. Effet Hall.....	168
4. Coefficient d'inductance	169

Chapitre 10. Compléments de magnétostatique..... 171

1. Interaction entre deux circuits filiformes.....	171
2. Formule de Newmann.....	173
3. Énergie de déplacement d'un circuit	175
4. Généralisation	180

Chapitre 11. Exercices de magnétostatique 183

1. Exemples simples.....	183
2. Solénoïde torique	191
3. Mutuelle entre deux spires	194
4. Champ créé par une nappe cylindrique infinie.....	196
5. Champ créé par un circuit elliptique en ses foyers.....	198
6. Distribution volumique non uniforme de courant.....	199
7. Câble coaxial	201
8. Dipôle et circuit rectiligne.....	204
9. Champ au voisinage du centre d'une spire	206
10. Dipôle magnétique au dessus d'un supraconducteur.....	208

Chapitre 12. Induction électromagnétique dans le cadre de l'AEQS 215

1. Approximation des états quasi-stationnaires.....	215
2. Champ électrique	216
3. Champ électromoteur	217
4. Loi de Faraday et loi de Lenz	220
5. Énergie de constitution électromagnétique	223

Chapitre 13. Compléments d'induction..... 229

1. Roue de Barlow.....	229
2. Conducteur parfait en électromagnétisme	232
3. Énergie de constitution d'une distribution volumique de courant.....	233
4. Valeur maximale d'une mutuelle.....	235

Sommaire

pages

5. Forces magnétiques agissant sur un circuit.....	236
6. Puissance électromagnétique exercée sur un circuit	239
7. Énergie potentielle électromagnétique	241
8. Énergie de constitution de deux distributions.....	243
9. Analogie entre les énergies magnétiques et électrostatiques.....	244

Chapitre 14. Exercices d'induction 245

1. Déplacement d'un cadre dans un champ extérieur.....	245
2. Force électromotrice induite dans une spire.....	247
3. Mouvement relatif de deux tiges.....	249
4. Mouvement d'une barre.....	252
5. Circuit électrique fermé par une barre métallique mobile.....	255
6. Spire en rotation dans un champ uniforme	258
7. Dipôle magnétique au dessus d'une spire	261
8. L'expérience de Feynman	264
9. Circuit électrique contenant deux roues de Barlow	266
10. Circuit constitué d'une spire reliée à une roue de Barlow	271
11. Petit disque en lévitation au dessus d'un solénoïde.....	277
12. Fil infini au dessus d'un conducteur parfait	281
13. Sphère conductrice placée dans un champ oscillant	287
14. Cylindre conducteur placée dans un champ magnétique oscillant... ..	289
15. Cylindre conducteur en rotation dans champ magnétique uniforme.	291
16. Cylindre conducteur fixe dans un champ tournant.....	294
17. Dipôle dans la cavité cylindrique d'un conducteur	298
18. Décharge d'une sphère chargée en surface.....	301

Chapitre 15. Conversion électromagnétique et électromécanique 305

1. Transformateur monophasé.....	305
2. Conversion électromécanique. Exemple des rails de Laplace	310
3. Les moteurs électriques	313
4. Les générateurs tournants	317
5. Étude détaillée d'un moteur asynchrone	318

II. PHYSIQUE DES ONDES..... 323

Chapitre 1. Introduction 325

Chapitre 2. Concepts généraux sur les ondes..... 327

1. Équations de propagation	327
2. Polarisation d'une onde vectorielle	328
3. Solution de l'équation de d'Alembert.....	328
4. Généralisation aux équations de propagation.....	333
5. Paquet d'ondes.....	336

Sommaire

pages

Chapitre 3. Ondes mécaniques 339

- 1. Milieux continus 339
- 2. Oscillateurs couplés 368

Chapitre 4. Ondes sonores 399

- 1. Ondes acoustiques dans un fluide parfait 399
- 2. ondes sonores sphériques 413
- 3. Ondes sonores dans un tuyau de section variable 416
- 4. Ondes sonores dans un tuyau souple 420
- 5. Absorption du son 423

Chapitre 5. Lignes électriques 435

- 1. Introduction 435
- 2. Ondes stationnaires dans une ligne 436
- 3. Propagation sur une ligne avec perte 440

Chapitre 6. Ondes électromagnétiques dans le vide. . 443

- 1. Retour sur l'AEQS 443
- 2. Équation de propagation des champs et des potentiels 443
- 3. Ondes planes 447
- 4. Retour sur l'énergie électromagnétique 452

Chapitre 7. Exercices sur les ondes électro- magnétiques dans le vide 455

- 1. Onde progressive non plane 455
- 2. Superposition de deux OPPHs 460
- 3. Guide d'onde plan 464
- 4. Guide d'onde cylindrique 467
- 5. Modes dans une cavité conductrice 469
- 6. Rayonnement d'un dipôle 473
- 7. Rayonnement d'un dipôle tournant 480
- 8. Effet de peau dans un fil conducteur 485
- 9. Mode propre d'un plasma 488
- 10. Excitation d'un conducteur par une OPPH en incidence normale ... 491
- 11. Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait 497
- 12. Propagation d'ondes électromagnétiques dans un conducteur 500
- 13. Onde électromagnétique dans un supraconducteur 507
- 14. Énergie électromagnétique stockée dans un condensateur 510
- 15. Rayonnement d'une distribution dipolaire oscillante 513

Chapitre 8. Ondes électromagnétiques dans les milieux 519

- 1. Introduction aux milieux diélectriques 519
- 2. Introduction aux milieux aimantés 528
- 3. Équation de Maxwell dans un milieu diélectrique et aimanté 535
- 4. Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques linéaires et isotropes 536

Sommaire

pages

Chapitre 9. Compléments sur les ondes électro-magnétiques dans les milieux..... 545

- 1. Charges de polarisation 545
- 2. Courants équivalents 547

Chapitre 10. Exercices sur les ondes électro-magnétiques dans les milieux 549

- 1. Interaction entre deux circuits filiformes 549
- 2. Formule de Newmann 558
- 3. Énergie de déplacement d'un circuit 561
- 4. Généralisation 564
- 5. Énergie de déplacement d'un circuit 570
- 6. Généralisation 572

III. ANNEXES 581

Chapitre 1. Quelques unités 583

Chapitre 2. Constantes physiques 585

Chapitre 3. Opérateurs différentiels 587

- Coordonnées cartésiennes 587
- Coordonnées cylindriques 588
- Coordonnées sphériques 589

Chapitre 4. Relations utiles 591

- Relations différentielles 591
- Relations intégrales 591
- Autres relations 592

Première partie

Electromagnétisme

Chapitre 1

Introduction

L'interaction électromagnétique, une interaction parmi d'autres

La nature est régie par quatre types d'interactions, l'interaction gravitationnelle qui nous est la plus familière, l'interaction électromagnétique et les interactions nucléaires faible et forte.

Les deux interactions nucléaires ont une portée très courte, de l'ordre du Fermi ($1 \text{ F} = 10^{-15} \text{ m}$, ordre de grandeur des dimensions d'un noyau).

- L'*interaction forte* assure la cohésion des noyaux atomiques en soudant entre eux neutrons et protons. Son intensité est très élevée, beaucoup plus élevée que celle de l'interaction électromagnétique qui tend au contraire à éloigner deux protons l'un de l'autre. Mais son effet devient négligeable sur des distances supérieures aux dimensions caractéristiques du noyau atomique.
- L'*interaction faible* se manifeste entre certaines particules non chargées, de masse nulle et insensibles à l'interaction forte. Son intensité est si faible que ces éléments peuvent traverser plusieurs mètres de tôle sans être déviés. C'est cette interaction qui est responsable de la désintégration des noyaux d'atomes (phénomène de radioactivité).

Quant aux interactions électromagnétique et gravitationnelle, elles sont de longue portée.

- A l'échelle de l'atome, l'*interaction électromagnétique* domine largement. Elle assure la cohésion du nuage atomique autour du noyau. Au niveau microscopique, la masse des particules est si faible que l'interaction gravitationnelle est négligeable devant l'interaction électromagnétique.
- A l'échelle macroscopique en revanche (vous, moi, la lune...), comme la nature est globalement neutre, la *gravitation* devient l'interaction dominante. Les masses en jeu sont telles que cette interaction a en outre une intensité très élevée. Non contente de nous retenir sur la Terre, elle maintient les planètes en rotation autour du Soleil et regroupe les quelques cent milliards d'étoiles de la Voie lactée.

A chaque interaction son domaine de prédilection. L'interaction forte domine à l'échelle nucléaire et assure la cohésion du noyau atomique. A l'échelle moléculaire, c'est l'interaction électromagnétique qui prend le dessus pour assurer la cohésion de la matière. Elle est relayée à l'échelle macroscopique par l'interaction gravitationnelle qui, elle, assure la cohésion de l'univers.

Les champs électromagnétiques

Une distribution de particules chargées *au repos* dans un référentiel galiléen exerce sur une charge q placée en un point M une *force électrostatique* \vec{F} proportionnelle à q :

$$\vec{F} = q\vec{E}_s(M)$$

Le champ de vecteur $\vec{E}_s(M)$ ainsi défini est indépendant de la charge électrique q . Il ne dépend que de la distribution de particules chargées et s'avère analogue au champ gravitationnel. On l'appelle *champ électrostatique* et, par abus de langage, on dit que la distribution de charge *crée* un champ $\vec{E}_s(M)$ dans tout l'espace.

Une distribution de particules chargées *en mouvement* dans un référentiel galiléen exerce sur une particule de charge q , de vitesse \vec{v} dans ce même référentiel et placée en un point M une *force électromagnétique* \vec{F} proportionnelle à q :

$$\vec{F} = q[\vec{E}(M) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M)]$$

Les champs de vecteur $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$ ainsi définis sont indépendants de la charge q . Il ne dépendent, eux aussi, que de la distribution de particules chargées. On les appelle respectivement *champ électrique* et *champ magnétique*. L'ensemble de ces deux champs constitue le *champ électromagnétique*. Si le mouvement de la charge q s'arrêtait, le champ électrique tendrait vers le champ électrostatique et le champ magnétique s'annulerait. Ici aussi, par abus de langage, on dit que la distribution de charge *crée* un *champ électromagnétique* (\vec{E}, \vec{B}) dans tout l'espace.

Les deux champs \vec{E} et \vec{B} ne dépendent que des charges et des vitesses de l'ensemble des particules qui les créent. Ils vérifient quatre équations différentielles fonctions de ces charges et de ces vitesses, les *équations de Maxwell*. Ce sont les lois fondamentales de l'électromagnétisme.

Chapitre 2

Lois fondamentales de l'électromagnétisme

2.1 Densité de charge, densité de courant

2.1.1 Définitions

Densité volumique de charge

La charge électrique d'une particule élémentaire est indépendante de sa vitesse et du référentiel choisi pour décrire son mouvement. C'est une donnée qui lui est intrinsèque. Notons d^3q la quantité totale de charge située dans le volume élémentaire $d^3\tau$ situé autour du point M à l'instant t . On définit la *densité volumique de charge* $\rho(M, t)$ en M à l'instant t de la façon suivante :

$$\rho(M, t) = \frac{d^3q}{d^3\tau}$$

ρ est une quantité de charge par unité de volume. C'est une charge volumique, l'analogue pour les charges électriques de la masse volumique.

Densité volumique de courant

Même vitesse pour toutes les charges

Lorsque les charges situées dans le volume $d^3\tau$ ont toutes la même vitesse $\vec{v}(M, t)$ à l'instant t , le *courant de charge* d^2I qui passe à travers la surface élémentaire d^2S parallèle à \vec{v} est la quantité de charge qui traverse cette surface par unité de temps, c'est-à-dire le flux de charge à travers d^2S .

La *densité volumique de courant* $\vec{j}(M, t)$ en M et à l'instant t est le vecteur colinéaire à \vec{v} défini de la façon suivante :

$$d^2I = \vec{j}(M, t) \cdot d^2\vec{S}$$

D'où

$$\vec{j}(M, t) = \rho_v(M, t)\vec{v}(M, t)$$

où $\rho_v(M, t)$ représente la *densité de charge en mouvement* à la vitesse \vec{v} .

\vec{j} représente donc le flux de charge par unité de surface perpendiculaire à la vitesse des charges. C'est l'analogue pour les charges de la quantité de mouvement volumique $\mu\vec{v}$.

Une seule espèce de charge

Lorsque les charges sont de même espèce mais ont des vitesses différentes, l'expression précédente devient

$$\vec{j}(M, t) = \rho_v(M, t) \langle \vec{v} \rangle (M, t)$$

où $\langle \vec{v} \rangle (M, t)$ représente la vitesse moyenne des charges situées en M à l'instant t .

Deux espèces

La densité de charge en mouvement $\rho_v(M, t)$ n'est pas forcément égale à la densité volumique de charge du milieu $\rho(M, t)$. Dans un conducteur métallique par exemple, les électrons se déplacent quasiment librement alors que les charges positives (noyaux des atomes) sont fixes par rapport au support. La vitesse moyenne de ces ions, notée \vec{v}_{ion} , est nulle. Le courant est donc assuré uniquement par les électrons :

$$\vec{j} = \rho_{elec}\vec{v}_{elec}$$

et, comme la charge volumique totale d'un conducteur est généralement nulle,

$$\rho = \rho_{elec} + \rho_{ion} \simeq 0$$

Si, par contre, les ions sont eux aussi en mouvement, la densité de courant devient :

$$\vec{j} = \rho_{elec}\vec{v}_{elec} + \rho_{ion}\vec{v}_{ion}$$

Cas général

Lorsque plusieurs espèces i de densité de charge $\rho_i(M, t)$ et de vitesse moyenne $\vec{v}_i(M, t)$ à l'instant t sont présentes dans le milieu, les densités de courant et de charge s'écrivent respectivement :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$$

et

$$\rho(M, t) = \sum_i \rho_i(M, t)$$

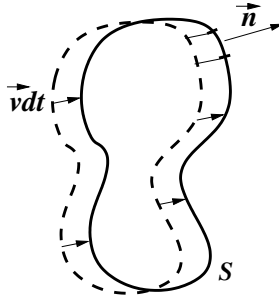
2.1.2 Equation de conservation de la charge

Une seule espèce de charge

Soit V un volume de contrôle fixe et quelconque tracé dans un milieu de charge volumique $\rho(M, t)$ de vitesse $\vec{v}(M, t)$. La charge électrique est une quantité qui se conserve. Pendant l'intervalle de temps dt , la variation dQ de la quantité de charge Q située à l'intérieur de V est donc égale à la quantité de charge qui entre dans V pendant dt :

$$dQ = \iint_S \rho(M, t)(-\vec{v}(M, t)dt \cdot \vec{n}) d^2S$$

où S représente la surface fermée qui entoure V et \vec{n} le vecteur unitaire normal à la surface S et dirigé vers l'extérieur.



En divisant par dt , on obtient

$$\frac{dQ}{dt} = - \iint_S \rho(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot \vec{n} d^2S$$

Comme V est un volume de contrôle fixe,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(M, t) d^3\tau = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\tau$$

D'après la formule d'Ostrogradski,

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d^2S = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) d^3\tau$$

D'où

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] d^3\tau = 0$$

Cette égalité étant vraie quel que soit le volume V , on en déduit que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Soit

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Cas général

Lorsque plusieurs espèces i sont présentes dans le milieu, la relation de conservation précédente reste valable pour chacune des espèces i :

$$\operatorname{div}(\rho_i \vec{v}_i) + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0$$

En sommant ces égalités sur i , il vient :

$$\operatorname{div}\left(\sum_i \rho_i \vec{v}_i\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_i \rho_i\right) = 0$$

Soit

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Régime stationnaire

Lorsque le régime est stationnaire, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Dans ce cas, l'équation de conservation de la charge devient

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Intégrons cette relation sur un volume de contrôle V quelconque :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} d^3\tau = 0$$

Notons S la surface qui entoure V . D'après la formule d'Ostrogradski,

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} d^3\tau = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2S$$

où \vec{n} représente le vecteur unitaire normal à la surface S et dirigé de l'intérieur vers l'extérieur. On en déduit que

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2S = 0$$

En régime stationnaire, la densité de courant est donc à flux conservatif.

Loi des noeuds

Considérons en particulier un noeud O quelconque dans un circuit. On note I_i le courant qui parcourt de O vers le reste du circuit le fil i de section S_i . L'expression précédente devient

$$\sum_i \iint_{S_i} \vec{j} \cdot \vec{n} d^2S = 0$$

On en déduit la *loi des noeuds* :

$$\boxed{\sum_i I_i = 0}$$

Dans cette expression, les courants sont algébriques. Ils sont positifs lorsqu'ils quittent le noeud et négatifs sinon.

La loi des noeuds affirme donc que la somme des courants qui arrivent en un point quelconque d'un circuit électrique est égale à la somme des courants qui le quittent.

La loi des noeuds n'est valable que lorsque le régime est stationnaire ou le terme $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ négligeable. Ce n'est pas toujours le cas.

2.1.3 Densités surfaciques, densités linéiques

Densités surfaciques

Lorsque les charges ou les courants sont localisés dans un volume infiniment mince constitué par une pellicule de très faible épaisseur, on modélise leur distribution par une *nappe de charge ou de courant d'épaisseur nulle*.

Notons d^2q la charge d'un élément de surface d^2S de cette nappe. On définit la *densité surfacique de charges* σ (charge par unité de surface) de la façon suivante :

$$\sigma(M, t) = \frac{d^2q}{d^2S}$$

Si h représente l'épaisseur réelle de la nappe et $\langle \rho \rangle_h$ sa densité volumique de charge moyennée sur l'épaisseur de la nappe, alors $d^2q = \langle \rho \rangle_h (hd^2S)$. D'où

$$\sigma = h \langle \rho \rangle_h$$

Notons dI le courant qui traverse un segment \vec{dl} de cette surface. On définit la *densité surfacique de courant* \vec{j}_s comme suit :

$$dI = \vec{j}_s \cdot \vec{dl}$$

Comme, par ailleurs, $dI = \langle \vec{j} \rangle_h \cdot (h\vec{dl})$, on en déduit que :

$$\vec{j}_s = h \langle \vec{j} \rangle_h$$

Densités linéiques

Lorsque les charges ou les courants sont localisés sur une courbe ou dans un tube de section infiniment faible, on modélise leur distribution par une *ligne chargée ou une ligne de courant de section nulle*.

Notons dq la charge d'un élément de longueur dl de cette ligne chargée. On définit la *densité linéique de charge* λ (charge par unité de longueur) de la façon suivante :

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

Si on note s la section réelle du tube et $\langle \rho \rangle_s$ la densité de charge moyennée sur cette section, alors $dq = \langle \rho \rangle_s (sdl)$. D'où

$$\lambda = s \langle \rho \rangle_s$$

La *densité linéique de courant* n'est autre que le courant $I = s \langle j \rangle_s$ qui passe à travers le tube.

Remarque importante

Insistons bien sur le fait que les distributions surfaciques et linéiques ne sont que des modèles qui facilitent le calcul des champs qu'elles créent. Elles n'ont en effet rien de réel. Nous verrons dans la suite que le champ électrostatique et le champ magnétique sont discontinus à la traversée d'une distribution surfacique. *On ne peut donc pas définir de champ sur cette surface*. Pour calculer la force électromagnétique qui s'exerce sur une telle distribution, il convient de revenir à la distribution volumique réelle.

2.2 Equations de Maxwell dans le vide

Les champs électriques et magnétiques qui permettent de déterminer les forces électromagnétiques vérifient quatre équations différentielles fonctions des densités volumiques de charge et de courant qui créent ces champs. Ce sont les *équations de Maxwell*.

En électromagnétisme, le mouvement des charges peut induire des forces qui *dependent non seulement de la position de la particule chargée* sur laquelle s'appliquent ces forces *mais aussi de sa vitesse* via le champ magnétique. Les équations de Maxwell sont donc plus compliquées qu'en gravitation. Nous constaterons cependant qu'au repos, les équations vérifiées par le champ électrostatique sont analogues à celles que vérifie le champ gravitationnel.

2.2.1 Enoncé

- \vec{E} : champ électrique
- \vec{B} : champ magnétique
- ρ : densité volumique de charge
- \vec{j} : densité volumique de courant
- ε_0 : permittivité électrique
- μ_0 : permittivité magnétique
- c : vitesse de la lumière

Dans un milieu *non magnétique et non diélectrique* (mêmes caractéristiques que le vide), les équations de Maxwell ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

On supposera que lorsque les densités de charge ρ et de courant \vec{j} sont données, la solution (\vec{E}, \vec{B}) de ce système d'équation est *unique*. Par conséquent, lorsque deux champs \vec{E} et \vec{B} vérifient ce système d'équations, ce sont les champs électriques et magnétiques réels créés par la distribution de charge ρ et de courant \vec{j} .

Les deux équations $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{div} \vec{B} = 0$ sont indépendantes de ρ et de \vec{j} . Elles établissent des relations sur \vec{E} et \vec{B} .