INTERROS de Prépas & Deug

SPÉ MP-PC-PSI

Électromagnétisme Physique des Ondes

Olivier Chenevez

Ancien élève de l'École Normale Supérieure

Collection dirigée par Éric MAURETTE

Du même auteur, aux Éditions PRÉPAMATH,
dans la collection «Interros de Prépas et Deug» :

Mécanique des Systèmes & Mécanique des Fluides – Spé MP-PC-PSI

~

~

Toute ma gratitude à Éric CHENEVEZ*, élève à l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris et dessinateur hors pair de l'intégralité des figures qui illustrent ce manuel.*
Je remercie également pour leur précieuse contribution Gilbert DE MARÉSCHAL*, ancien élève de l'*ENS *de la rue d'Ulm et Cyriaque* CHOLET*, professeur de physique en classe préparatoire.*

~

Coordination éditoriale :
Nassim MOKRANE

I.S.B.N. 2-910350-27-4

Avant-propos

Ce manuel s'adresse à tous les élèves de Math Spé, quelle que soit leur filière (MP, PC, PSI). Il traite des nouveaux programmes de physique tels qu'il ont été fixés dans le Bulletin de l'Éducation Nationale du 18 juillet 1996.

En électromagnétisme, l'*électrostatique*, la *magnétostatique*, l'*électrocinétique* et l'*induction* sont au programme de toutes les filières. Le chapitre sur l'*équilibre électrostatique d'un conducteur* ne s'adresse qu'aux MP et celui sur la *conversion électromagnétique et électromécanique* aux PSI exclusivement.

En physique des ondes, seules les *ondes électromagnétiques dans le vide* concernent les MP. L'intégralité de cette partie est au programme des PC et PSI.

Par souci d'efficacité, l'ouvrage se concentre exclusivement sur des sujets posés aux concours des Grandes Écoles scientifiques (E.N.S., Polytechnique, concours commun des Mines, Centrale, E.N.S.I.). Par exigence de qualité, il propose un cours approfondi et détaillé plutôt qu'un simple rappel, sans cesse en relation avec les exercices.

En marge du cours et en support des exercices sont intégrés des compléments de cours qui ne sont pas explicitement au programme. De mon point de vue, ils contribuent à une compréhension plus en profondeur des phénomènes physiques étudiés. Pourvu qu'on s'y arrête un peu, ils aideront à éclairer certaines notions du programme.

Les parties cours et exercices ne sont pas faites pour être cloisonnées. Le cours n'a pas seulement pour vocation de précéder la réflexion sur l'exercice. Il doit aussi en accompagner la résolution. L'un et l'autre se répondent : les exercices font explicitement référence au cours et doivent aider à mieux à le comprendre ; réciproquement, les concepts du cours, lorsqu'ils sont compris en profondeur, aident à la résolution de problèmes plus ponctuels. L'intelligence des notions de physique exige de s'y arrêter quelque temps jusqu'à percevoir la logique du cours dans sa globalité. Chaque notion s'intègre dans une logique générale, qu'il faut faire l'effort de percevoir.

J'ai opté pour une présentation thématique des exercices. Les programmes traités sont clairement mentionnés (MP, PC, PSI). Ils ont tous, sans exception, été posés aux concours des Grandes Écoles scientifiques. Ils sont sélectionnés pour leur complémentarité et pour leur capacité à illustrer au mieux les concepts de physique au programme. Leur résolution est la plus détaillée possible. Plutôt que de multiplier les exercices, j'ai choisi de préciser les solutions, avec méthode. D'expérience de khôlleur, d'enseignant et d'ancien préparationnaire, il m'apparaît en effet beaucoup plus efficace d'approfondir quelques exercices bien sélectionnés. À condition de suivre la ligne de l'ouvrage : cours, exercices et compléments doivent rester en dialogue permanent.

Sommaire

pages

Sommaire

pages

Sommaire

pages

Sommaire

pages

Sommaire

pages

Première partie

Electromagnétisme

Chapitre 1

Introduction

L'interaction électromagnétique, une interaction parmi d'autres

La nature est régie par quatre types d'interactions, l'interaction gravitationnelle qui nous est la plus familière, l'interaction électromagnétique et les interactions nucléaires faible et forte.

Les deux interactions nucléaires ont une portée très courte, de l'ordre du Fermi ($1\ F = 10^{-15}\ m$, ordre de grandeur des dimensions d'un noyau).

– L'*interaction forte* assure la cohésion des noyaux atomiques en soudant entre eux neutrons et protons. Son intensité est très élevée, beaucoup plus élevée que celle de l'interaction électromagnétique qui tend au contraire à éloigner deux protons l'un de l'autre. Mais son effet devient négligeable sur des distances supérieures aux dimensions caractéristiques du noyau atomique.

– L'*interaction faible* se manifeste entre certaines particules non chargées, de masse nulle et insensibles à l'interaction forte. Son intensité est si faible que ces éléments peuvent traverser plusieurs mètres de tôle sans être déviés. C'est cette interaction qui est responsable de la désintégration des noyaux d'atomes (phénomène de radioactivité).

Quant aux interactions électromagnétique et gravitationnelle, elles sont de longue portée.

– A l'échelle de l'atome, l'*interaction électromagnétique* domine largement. Elle assure la cohésion du nuage atomique autour du noyau. Au niveau microscopique, la masse des particules est si faible que l'interaction gravitationnelle est négligeable devant l'interaction électromagnétique.

– A l'échelle macroscopique en revanche (vous, moi, la lune...), comme la nature est globalement neutre, la *gravitation* devient l'interaction dominante. Les masses en jeu sont telles que cette interaction a en outre une intensité très élevée. Non contente de nous retenir sur la Terre, elle maintient les planètes en rotation autour du Soleil et regroupe les quelques cent milliards d'étoiles de la Voie lactée.

A chaque interaction son domaine de prédilection. L'interaction forte domine à l'échelle nucléaire et assure la cohésion du noyau atomique. A l'échelle moléculaire, c'est l'interaction électromagnétique qui prend le dessus pour assurer la cohésion de la matière. Elle est relayée à l'échelle macroscopique par l'interaction gravitationnelle qui, elle, assure la cohésion de l'univers.

Les champs électromagnétiques

Une distribution de particules chargées *au repos* dans un référentiel galiléen exerce sur une charge q placée en un point M une *force électrostatique* $\vec{F}$ proportionnelle à q :

$$\vec{F} = q\vec{E}_s(M)$$

Le champ de vecteur $\vec{E}_s(M)$ ainsi défini est indépendant de la charge électrique q. Il ne dépend que de la distribution de particules chargées et s'avère analogue au champ gravitationnel. On l'appelle *champ électrostatique* et, par abus de langage, on dit que la distribution de charge *crée* un champ $\vec{E}_s(M)$ dans tout l'espace.

Une distribution de particules chargées *en mouvement* dans un référentiel galiléen exerce sur une particule de charge q, de vitesse $\vec{v}$ dans ce même référentiel et placée en un point M une *force électromagnétique* $\vec{F}$ proportionnelle à q :

$$\vec{F} = q[\vec{E}(M) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M)]$$

Les champs de vecteur $\vec{E}(M)$ et $\vec{B}(M)$ ainsi définis sont indépendants de la charge q. Il ne dépendent, eux aussi, que de la distribution de particules chargées. On les appelle respectivement *champ électrique* et *champ magnétique*. L'ensemble de ces deux champs constitue le *champ électromagnétique*. Si le mouvement de la charge q s'arrêtait, le champ électrique tendrait vers le champ électrostatique et le champ magnétique s'annulerait. Ici aussi, par abus de langage, on dit que la distribution de charge *crée* un *champ électromagnétique* $(\vec{E}, \vec{B})$ dans tout l'espace.

Les deux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne dépendent que des charges et des vitesses de l'ensemble des particules qui les créent. Ils vérifient quatre équations différentielles fonctions de ces charges et de ces vitesses, les *équations de Maxwell*. Ce sont les lois fondamentales de l'électromagnétisme.

Chapitre 2

Lois fondamentales de l'électromagnétisme

2.1 Densité de charge, densité de courant

2.1.1 Définitions

Densité volumique de charge

La charge électrique d'une particule élémentaire est indépendante de sa vitesse et du réferentiel choisi pour décrire son mouvement. C'est une donnée qui lui est intrinsèque. Notons d^3q la quantité totale de charge située dans le volume élémentaire $d^3\tau$ situé autour du point M à l'instant t. On définit la *densité volumique de charge* $\rho(M,t)$ en M à l'instant t de la façon suivante :

$$\boxed{\rho(M,t) = \frac{d^3q}{d^3\tau}}$$

ρ est une quantité de charge par unité de volume. C'est une charge volumique, l'analogue pour les charges électriques de la masse volumique.

Densité volumique de courant

Même vitesse pour toutes les charges

Lorsque les charges situées dans le volume $d^3\tau$ ont toutes la même vitesse $\vec{v}(M,t)$ à l'instant t, le *courant de charge* d^2I qui passe à travers la surface élémentaire $d^2\vec{S}$ parallèle à $\vec{v}$ est la quantité de charge qui traverse cette surface par unité de temps, c'est-à-dire le flux de charge à travers d^2S.

La *densité volumique de courant* $\vec{j}(M,t)$ en M et à l'instant t est le vecteur colinéaire à $\vec{v}$ défini de la façon suivante :

$$d^2I = \vec{j}(M,t) \cdot d^2\vec{S}$$

D'où

$$\boxed{\vec{j}(M,t) = \rho_v(M,t)\vec{v}(M,t)}$$

où $\rho_v(M,t)$ représente la *densité de charge en mouvement* à la vitesse $\vec{v}$.

$\vec{j}$ représente donc le flux de charge par unité de surface perpendiculaire à la vitesse des charges. C'est l'analogue pour les charges de la quantité de mouvement volumique $\mu\vec{v}$.

Une seule espèce de charge

Lorsque les charges sont de même espèce mais ont des vitesses différentes, l'expression précédente devient

$$\vec{j}(M,t) = \rho_v(M,t) < \vec{v} > (M,t)$$

où $< \vec{v} > (M,t)$ représente la vitesse moyenne des charges situées en M à l'instant t.

Deux espèces

La densité de charge en mouvement $\rho_v(M,t)$ n'est pas forcément égale à la densité volumique de charge du milieu $\rho(M,t)$. Dans un conducteur métallique par exemple, les électrons se déplacent quasiment librement alors que les charges positives (noyaux des atomes) sont fixes par rapport au support. La vitesse moyenne de ces ions, notée $\vec{v}_{ion}$, est nulle. Le courant est donc assuré uniquement par les électrons :

$$\vec{j} = \rho_{elec}\vec{v}_{elec}$$

et, comme la charge volumique totale d'un conducteur est généralement nulle,

$$\rho = \rho_{elec} + \rho_{ion} \simeq 0$$

Si, par contre, les ions sont eux aussi en mouvement, la densité de courant devient :

$$\vec{j} = \rho_{elec}\vec{v}_{elec} + \rho_{ion}\vec{v}_{ion}$$

Cas général

Lorsque plusieurs espèces i de densité de charge $\rho_i(M,t)$ et de vitesse moyenne $\vec{v_i}(M,t)$ à l'instant t sont présentes dans le milieu, les densités de courant et de charge s'écrivent respectivement :

$$\boxed{\vec{j} = \sum_i \rho_i\vec{v_i}}$$

et

$$\rho(M,t) = \sum_i \rho_i(M,t)$$

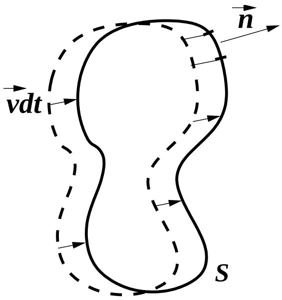
2.1.2 Equation de conservation de la charge

Une seule espèce de charge

Soit V un volume de contrôle fixe et quelconque tracé dans un milieu de charge volumique $\rho(M,t)$ de vitesse $\vec{v}(M,t)$. La charge électrique est une quantité qui se conserve. Pendant l'intervalle de temps dt, la variation dQ de la quantité de charge Q située à l'intérieur de V est donc égale à la quantité de charge qui entre dans V pendant dt :

$$dQ = \iint_S \rho(M,t)(-\vec{v}(M,t)dt \cdot \vec{n})\, d^2S$$

où S représente la surface fermée qui entoure V et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface S et dirigé vers l'extérieur.



En divisant par dt, on obtient

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint_S \rho(M,t)\vec{v}(M,t) \cdot \vec{n}\, d^2S$$

Comme V est un volume de contrôle fixe,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V \rho(M,t)\, d^3\tau = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3\tau$$

D'après la formule d'Ostrogradski,

$$\iint_S \rho\vec{v} \cdot \vec{n}\, d^2S = \iiint_V \mathrm{div}\,(\rho\vec{v})\, d^3\tau$$

D'où

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{v})\right] d^3\tau = 0$$

Cette égalité étant vraie quel que soit le volume V, on en déduit que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) = 0$$

Soit

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Cas général

Lorsque plusieurs espèces i sont présentes dans le milieu, la relation de conservation précédente reste valable pour chacune des espèces i :

$$\text{div}\,(\rho_i \vec{v}_i) + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0$$

En sommant ces égalités sur i, il vient :

$$\text{div}\,(\sum_i \rho_i \vec{v}_i) + \frac{\partial}{\partial t}(\sum_i \rho_i) = 0$$

Soit

$$\text{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Régime stationnaire

Lorsque le régime est stationnaire, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Dans ce cas, l'équation de conservation de la charge devient

$$\text{div}\,\vec{j} = 0$$

Intégrons cette relation sur un volume de contrôle V quelconque :

$$\iiint_V \text{div}\,\vec{j}\, d^3\tau = 0$$

Notons S la surface qui entoure V. D'après la formule d'Ostrogradski,

$$\iiint_V \text{div}\,\vec{j}\, d^3\tau = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}\, d^2S$$

où $\vec{n}$ représente le vecteur unitaire normal à la surface S et dirigé de l'intérieur vers l'extérieur. On en déduit que

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}\, d^2S = 0$$

En régime stationnaire, la densité de courant est donc à flux conservatif.

Loi des noeuds

Considérons en particulier un noeud O quelconque dans un circuit. On note I_i le courant qui parcourt de O vers le reste du circuit le fil i de section S_i. L'expression précédente devient

$$\sum_i \iint_{S_i} \vec{j} \cdot \vec{n}\, d^2S = 0$$

On en déduit la *loi des noeuds* :

$$\boxed{\sum_i I_i = 0}$$

Dans cette expression, les courants sont algébriques. Ils sont positifs lorsqu'ils quittent le noeud et négatifs sinon.

La loi des noeuds affirme donc que la somme des courants qui arrivent en un point quelconque d'un circuit électrique est égale à la somme des courants qui le quittent.

La loi des noeuds n'est valable que lorsque le régime est stationnaire ou le terme $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ négligeable. Ce n'est pas toujours le cas.

2.1.3 Densités surfaciques, densités linéiques

Densités surfaciques

Lorsque les charges ou les courants sont localisés dans un volume infiniment mince constitué par une pellicule de très faible épaisseur, on modélise leur distribution par une *nappe de charge ou de courant d'épaisseur nulle*.

Notons d^2q la charge d'un élément de surface d^2S de cette nappe. On définit la *densité surfacique de charges* σ (charge par unité de surface) de la façon suivante :

$$\sigma(M,t) = \frac{d^2q}{d^2S}$$

Si h représente l'épaisseur réelle de la nappe et $<\ \rho\ >_h$ sa densité volumique de charge moyennée sur l'épaisseur de la nappe, alors $d^2q =<\rho>_h\ (hd^2S)$. D'où

$$\sigma = h < \rho >_h$$

Notons dI le courant qui traverse un segment $\vec{dl}$ de cette surface. On définit la *densité surfacique de courant* $\vec{j_s}$ comme suit :

$$dI = \vec{j_s} \cdot \vec{dl}$$

Comme, par ailleurs, $dI =< \vec{j} >_h \cdot (h\vec{dl})$, on en déduit que :

$$\vec{j_s} = h < \vec{j} >_h$$

Densités linéiques

Lorsque les charges ou les courants sont localisés sur une courbe ou dans un tube de section infiniment faible, on modélise leur distribution par une *ligne chargée ou une ligne de courant de section nulle*.

Notons dq la charge d'un élément de longueur dl de cette ligne chargée. On définit la *densité linéique de charge* λ (charge par unité de longueur) de la façon suivante :

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

Si on note s la section réelle du tube et $<\ \rho\ >_s$ la densité de charge moyennée sur cette section, alors $dq =< \rho >_s\ (sdl)$. D'où

$$\lambda = s < \rho >_s$$

La *densité linéique de courant* n'est autre que le courant $I = s < j >_s$ qui passe à travers le tube.

Remarque importante

Insistons bien sur le fait que les distributions surfaciques et linéiques ne sont que des modèles qui facilitent le calcul des champs qu'elles créent. Elles n'ont en effet rien de réel. Nous verrons dans la suite que le champ électrostatique et le champ magnétique sont discontinus à la traversée d'une distribution surfacique. *On ne peut donc pas définir de champ sur cette surface.* Pour calculer la force électromagnétique qui s'exerce sur une telle distribution, il convient de revenir à la distribution volumique réelle.

COURS

2.2 Equations de Maxwell dans le vide

Les champs électriques et magnétiques qui permettent de déterminer les forces électromagnétiques vérifient quatre équations différentielles fonctions des densités volumiques de charge et de courant qui créent ces champs. Ce sont les *équations de Maxwell*.

En électromagnétisme, le mouvement des charges peut induire des forces qui *dépendent non seulement de la position de la particule chargée* sur laquelle s'appliquent ces forces *mais aussi de sa vitesse* via le champ magnétique. Les équations de Maxwell sont donc plus compliquées qu'en gravitation. Nous constaterons cependant qu'au repos, les équations vérifiées par le champ electrostatique sont analogues à celles que vérifie le champ gravitationnel.

2.2.1 Enoncé

- $\vec{E}$: champ électrique
- $\vec{B}$: champ magnétique
- ρ : densité volumique de charge
- $\vec{j}$: densité volumique de courant
- ε_0 : permitivité electrique
- μ_0 : permitivité magnétique
- c : vitesse de la lumière

Dans un milieu *non magnétique et non diélectrique* (mêmes caractéristiques que le vide), les équations de Maxwell ont les expressions suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\,\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{div}\,\vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

On supposera que lorsque les densités de charge ρ et de courant $\vec{j}$ sont données, la solution $(\vec{E}, \vec{B})$ de ce système d'équation est *unique*. Par conséquent, lorsque deux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient ce système d'équations, ce sont les champs électriques et magnétiques réels créés par la distribution de charge ρ et de courant $\vec{j}$.

Les deux équations $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{div}\,\vec{B} = 0$ sont indépendantes de ρ et de $\vec{j}$. Elles établissent des relations sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$.