Chapitre 6

Cinématique du continu

O. Thual, 26 mai 2013

Sommaire

1 Description eulérienne du mouvement **2**
1.1 Détermination des trajectoires 2
1.2 Lignes de courant 3
1.3 Gradient du champ de vitesse 4
2 Transport par les trajectoires **5**
2.1 Dérivée particulaire 5
2.2 Champ d'accélération 6
2.3 Transport d'un petit vecteur 7
3 Tenseur des taux de déformations **8**
3.1 Variation des longueurs 8
3.2 Variation des angles 9
3.3 Variation des volumes 10

Introduction

Si la représentation lagrangienne des champs est adaptée à la modélisation des solides élastiques, dont les configurations déformées restent proches d'une configuration de référence, la représentation eulérienne est plus appropriée pour la modélisation des fluides qui perdent rapidement la mémoire de la condition initiale. Le point de départ de la description du mouvement est donc la donnée ou la mesure d'un champ de vitesse à partir duquel il convient de reconstituer des trajectoires ou encore la dérivée d'un champ en suivant ces trajectoires. Le gradient de ce champ de vitesse permet de décrire l'évolution de petits vecteurs transportés par le mouvement le long de trajectoires. Sa partie antisymétrique, appelée tenseur des taux de rotations, décrit la rotation solide subie par le voisinage d'une particule. Sa partie symétrique, appelée tenseur des taux de déformations, décrit le taux de variation des longueurs, des anges et des volumes.

1 Description eulérienne du mouvement

À partir de la donnée d'un champ de vitesse en représentation eulérienne, on détermine les trajectoires du mouvement en résolvant un système d'équations différentielles ordinaires. Dans le cas général, ces trajectoires sont différentes des lignes de courant instantanées.

1.1 Détermination des trajectoires

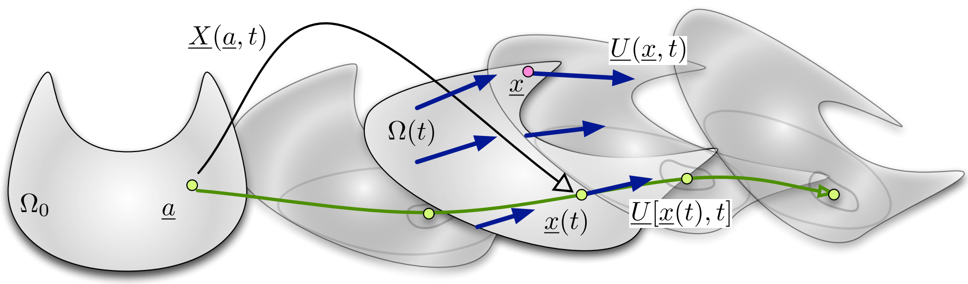

FIGURE **6**.1 – Détermination du mouvement $\underline{X}(\underline{a},t)$ et des trajectoires $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a},t)$ à partir du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$.

On considère un champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$ et l'on omet l'exposant $^{(E)}$ pour désigner la représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x},t) = \underline{U}^{(E)}(\underline{x},t)$. La trajectoire $\underline{x}(t)$ issue du point $\underline{a}$ à l'instant initial $t = 0$ est solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}\left[\underline{x}(t), t\right] \qquad \text{avec} \qquad \underline{x}(0) = \underline{a} \ . \tag{6.1}$$

L'ensemble des solutions de ce système permet de construire le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ défini par

$$\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{x}(t) \qquad \text{avec } \underline{x}(t) \text{ trajectoire telle que} \qquad \underline{x}(0) = \underline{a} \ . \tag{6.2}$$

La représentation lagrangienne de la vitesse est alors définie par la relation

$$\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = \underline{U}\left[\underline{X}(\underline{a}, t), t\right] \ . \tag{6.3}$$

On peut alors écrire

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial t}(\underline{a}, t) = \frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{U}\left[\underline{x}(t), t\right] = \underline{U}\left[\underline{X}(\underline{a}, t), t\right] = \underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) \ . \tag{6.4}$$

1.2 Lignes de courant

Les trajectoires du mouvement ne doivent pas être confondues avec les lignes de champs de $\underline{U}(\underline{x}, t)$ à l'instant t appelée “lignes de courant”. Ces lignes de champs sont des courbes que l'on peut paramétrer par des fonctions $s \mapsto \underline{y}(s)$ où s est un paramètre réel. Ces fonctions doivent être telles que leur vecteur tangent $\frac{d\underline{y}}{ds}$ soit partout parallèle au vecteur $\underline{U}$ ce que l'on écrit

$$\frac{d\underline{y}}{ds}(s) \wedge \underline{U}[\underline{y}(s), t] = \underline{0} \ . \tag{6.5}$$

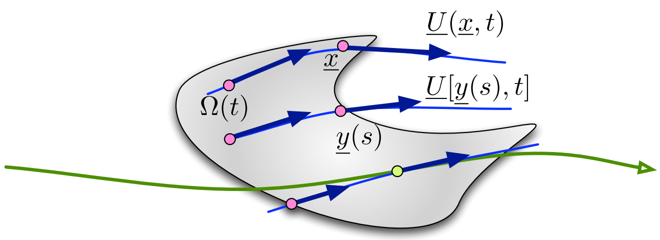

FIGURE **6**.2 – Lignes de champ $\underline{y}(s)$ à l'instant t.

On en déduit qu'il existe une fonction $\phi(s)$ telle que

$$\frac{d\underline{y}}{ds}(s) = \phi(s) \ \underline{U}[\underline{y}(s), t] \ . \tag{6.6}$$

Cette fonction doit être strictement positive pour que la courbe paramétrée $\underline{y}(s)$ décrive tout sa ligne de champ lorsque s décrit la droite réelle. On peut ainsi choisir $\phi(s)$ par simplicité ou $\phi(s) = \|\underline{U}[\underline{y}(s), t]\|^{-1}$ pour que s soit la coordonnée curviligne de la ligne de courant.

Une formulation courante, mais peu explicite, consiste à écrire

$$\frac{dy_1}{U_1} = \frac{dy_2}{U_2} = \frac{dy_3}{U_3} \ . \tag{6.7}$$

Cette écriture conduit souvent au choix de l'une des coordonnées y_1, y_2 ou y_3 comme paramètre s, au moins localement.

Dans le cas général, les trajectoires et les lignes de champs ne décrivent pas les mêmes courbes dans la mesure où elles ne vérifient pas les mêmes équations :

$$\begin{array}{lcl} \text{Trajectoires :} & \dot{\underline{x}}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t] & \text{pour tout } t. \\ \text{Lignes de courant :} & \dot{\underline{y}}(s) = \phi(s)\, \underline{U}[\underline{y}(s), t] & \text{pour } t \text{ fixé.} \end{array} \tag{6.8}$$

Dans le cas particulier d'un champ de vitesse "stationnaire", c'est-à-dire tel que $\underline{U}(\underline{x})$ ne dépend pas du temps, les courbes parcourues par les trajectoires et les lignes de courant sont confondues. En effet, le choix de $\phi(s) = 1$ permet de confondre l'équation $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t)]$ des trajectoires et l'équation $\dot{\underline{y}}(s) = \underline{U}[\underline{y}(s)]$ des lignes de courant.

1.3 Gradient du champ de vitesse

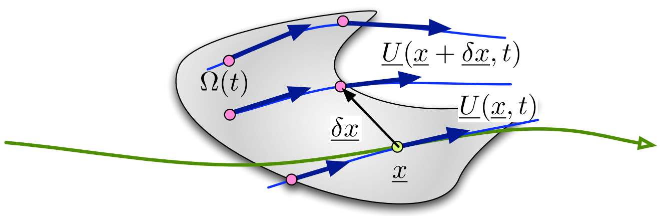

FIGURE **6**.3 – Variation de $\underline{U}(\underline{x}, t)$ en fonction de l'espace.

Étant donné le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$, on définit son gradient $\underline{\underline{K}}(\underline{x}, t)$ dont les composantes sont

$$\underline{\underline{K}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{U}(\underline{x}, t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad K_{ij}(\underline{x}, t) = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(\underline{x}, t) \ . \tag{6.9}$$

Si $\underline{\delta x}$ est un petit vecteur, on peut alors écrire

$$\underline{U}(\underline{x} + \underline{\delta x}, t) = \underline{U}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{K}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\delta x} + O(\delta x^2) \ , \tag{6.10}$$

où $\delta x = \|\underline{\delta x}\|$ est la norme de $\underline{\delta x}$. On peut alors décomposer $\underline{\underline{K}}$ en la somme de deux tenseurs d'ordre deux respectivement symétrique et antisymétrique à l'aide de la relation

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{K}} + {}^t\underline{\underline{K}}) \; . \qquad (\mathbf{6}.11)$$

Les tenseurs $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$ et $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ sont respectivement appellés "tenseur des taux de rotation" et "tenseur des taux de déformation". Les composantes de ces tenseurs s'écrivent respectivement

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right] \quad \text{et} \quad D_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right] \; . \qquad (\mathbf{6}.12)$$

Le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ est tel que pour tout vecteur $\underline{\delta x}$ on puisse écrire

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\delta x} = \underline{\omega} \wedge \underline{\delta x} \; . \qquad (\mathbf{6}.13)$$

Ses composantes sont telles que $\omega_i + \Omega_{jk} = 0$ si $\epsilon_{ijk} = 1$. On en déduit qu'il est relié au rotationnel de la vitesse $\underline{U}$ par la relation

$$\omega(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\, \underline{\text{rot}}\, \underline{U}(\underline{x}, t) \; . \qquad (\mathbf{6}.14)$$

2 Transport par les trajectoires

La dérivée d'une grandeur le long d'une trajectoire, appelée dérivée particulaire, s'exprime en représentation eulérienne en fonction de toute ses dérivées partielles et du champ de vitesse. Le champ d'accélération est alors la dérivée particulaire du champ de vitesse. Un petit vecteur transporté par le mouvement, c'est-à-dire reliant deux trajectoires voisines, obéit à une équation d'évolution faisant intervenir le gradient du champ de vitesse.

2.1 Dérivée particulaire

On considère un champ B dont la représentation eulérienne $B(\underline{x}, t)$ est liée à la représentation lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ à travers le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ et la relation

$$B[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = B^{(L)}(\underline{a}, t) \; . \qquad (\mathbf{6}.15)$$

Étant donnée la trajectoire $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ issue de la condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{a}$, on considère la dépendance temporel $b(t)$ du champ B obtenue en suivant cette trajectoire et définie par la relation

$$b(t) = B[\underline{x}(t), t] = B[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = B^{(L)}(\underline{a}, t) \; . \qquad (\mathbf{6}.16)$$

On peut alors calculer la dérivée de $b(t)$ qui s'écrit

$$\dot{b}(t) \quad = \quad \frac{\partial B}{\partial t}[\underline{x}(t), t] + \frac{dx_j(t)}{dt}\, \frac{\partial B}{\partial x_j}[\underline{x}(t), t]$$

$$= \frac{\partial B}{\partial t}[\underline{x}(t),t] + U_j[\underline{x}(t),t]\,\frac{\partial B}{\partial x_j}[\underline{x}(t),t]$$
$$= \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U}\cdot \underline{\mathrm{grad}}\; B\right)[\underline{x}(t),t]\;. \qquad (\mathbf{6}.17)$$

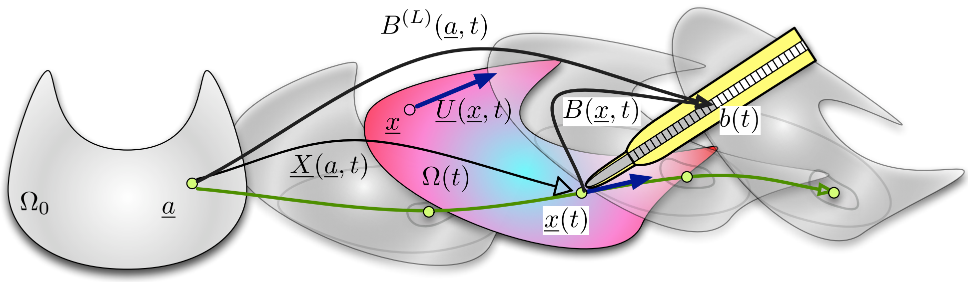

FIGURE **6**.4 – Relation entre les représentations eulérienne $B(\underline{x},t)$ et lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a},t)$ du champ B.

On définit alors le champ $\frac{dB}{dt}$ dont la représentation eulérienne s'écrit

$$\frac{dB}{dt}(\underline{x},t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{x},t) + \underline{U}(\underline{x},t)\cdot \underline{\mathrm{grad}}\; B(\underline{x},t)\;. \qquad (\mathbf{6}.18)$$

Ce champ est appelé "dérivée particulaire" du champ B dans la mesure où il représente la dérivée de B le long d'une trajectoire. D'autre part, l'égalité $b(t) = B^{(L)}(\underline{a},t)$ de l'équation (**6**.16) permet d'écrire

$$\dot{b}(t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a},t)\;. \qquad (\mathbf{6}.19)$$

La comparaison de cette relation avec l'équation (**6**.17) et la notation $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a},t)$ permettent d'écrire

$$\frac{dB}{dt}[\underline{X}(\underline{a},t),t] = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a},t)\;. \qquad (\mathbf{6}.20)$$

On en déduit que la représentation lagrangienne de la dérivée particulaire $\frac{dB}{dt}$ s'écrit

$$\frac{dB}{dt}^{(L)}(\underline{a},t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a},t)\;. \qquad (\mathbf{6}.21)$$

2.2 Champ d'accélération

La dérivée particulaire d'un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x},t) = V_i(\underline{x},t)\;\underline{e}_i$ s'écrit

$$\frac{d\underline{V}}{dt}(\underline{x},t) = \frac{dV_i}{dt}(\underline{x},t)\;\underline{e}_i = \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + U_j\,\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right](\underline{x},t)\;\underline{e}_i \qquad (\mathbf{6}.22)$$

dans la mesure où les vecteurs de base $\underline{e}_i$ sont indépendants de l'espace et du temps. En utilisant le gradient $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V}$ du champ $\underline{V}$, de composantes $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$, et en définissant l'opérateur $\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ = U_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, on peut alors écrire

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V} \cdot \underline{U} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{V} \ , \qquad (\mathbf{6}.23)$$

la parenthèse de l'expression $(\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ )\underline{V}$ étant inutile dans la mesure où la notation $\underline{\mathrm{grad}}\ \underline{V}$ (un seul trait sous le gradient) n'est pas définie.

Le champ d'accélération est défini par sa représentation lagrangienne

$$\underline{\Gamma}^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial \underline{U}^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) = \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2}(\underline{a}, t) \ . \qquad (\mathbf{6}.24)$$

Par définition de la dérivée particulaire, sa représentation eulérienne s'écrit

$$\underline{\Gamma}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{U}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{K}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t) \quad (\mathbf{6}.25)$$

où $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{U}$ est le gradient de $\underline{U}$. Ses composantes vérifient

$$\Gamma_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) U_j + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j\, U_j)}{\partial x_i} \qquad (\mathbf{6}.26)$$

Comme $\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{U} = \underline{\omega} \wedge \underline{U}$ et que $\underline{\omega} = \frac{1}{2}\underline{\mathrm{rot}}\ \underline{U}$, on voit que l'on peut écrire

$$\underline{\Gamma} = \frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\mathrm{rot}}\ \underline{U} \wedge \underline{U} + \frac{1}{2} \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{U}^2 \ . \qquad (\mathbf{6}.27)$$

2.3 Transport d'un petit vecteur

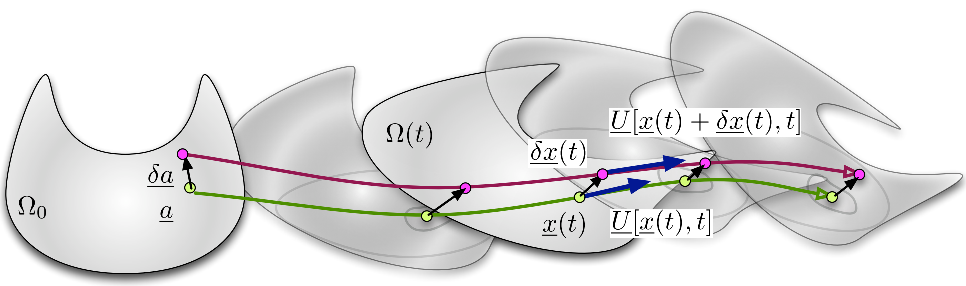

FIGURE **6**.5 – Transport d'un petit vecteur $\underline{\delta x}(t)$ par la trajectoire $\underline{x}(t)$.

On considère un petit vecteur $\underline{\delta x}(t)$ transporté par la trajectoire $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ issue du point $\underline{a}$ à l'instant $t = 0$. Un tel vecteur est la différence de deux trajectoires $\underline{x}(t)$ et $\underline{x}(t) + \underline{\delta x}(t)$ tel que

$$\underline{\delta x}(t) = \underline{X}(\underline{a} + \underline{\delta a}, t) - \underline{X}(\underline{a}, t) \qquad (\mathbf{6}.28)$$

où $\underline{\delta a} = \underline{\delta x}(0)$ est la valeur du petit vecteur à l'instant $t=0$. Comme $\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ pour toute trajectoire, on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\underline{\delta x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t)+\underline{\delta x}(t), t] - \underline{U}[\underline{x}(t)] = \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t), t]\cdot\underline{\delta x}(t) + O\left[\delta x^2(t)\right] \ , \quad (\mathbf{6}.29)$$

où $\delta x(t) = \|\underline{\delta x}(t)\|$ est la norme du petit vecteur. En supposant $\underline{\delta x}(t)$ infinitésimal, on pourra donc écrire

$$\frac{d}{dt}\underline{\delta x}(t) = \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t), t]\cdot\underline{\delta x}(t) \ . \quad (\mathbf{6}.30)$$

En utilisant la décomposition de $\underline{\underline{K}}$ en partie antisymétrique et symétrique, on peut alors écrire

$$\frac{d}{dt}\underline{\delta x}(t) = \underline{\omega}[\underline{x}(t), t]\wedge\underline{\delta x}(t) + \underline{\underline{D}}[\underline{x}(t), t]\cdot\underline{\delta x}(t) \ . \quad (\mathbf{6}.31)$$

Le terme $\underline{\omega}\wedge\underline{\delta x}$ de cette équations traduit un mouvement de rotation solide de vecteur rotation $\underline{\omega}$ pour les particules situées dans le voisinage de la trajectoire $\underline{x}(t)$ (théorie des torseurs et des distributeurs). Le terme $\underline{\underline{D}}\cdot\underline{\delta x}$ traduit un mouvement de déformation qui sera étudié plus loin par l'intermédiaire des taux de variation des longueurs, des angles et des volumes.

3 Tenseur des taux de déformations

Le tenseur des taux de déformation, partie symétrique du gradient du champ de vitesse, permet de décrire la variation des longueurs, des angles et des volumes associés à des petits vecteurs transportés par le mouvement.

3.1 Variation des longueurs

On considére deux petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ transportés par la trajectoire $\underline{x}(t)$. Il vérifient donc

$$\frac{d}{dt}\underline{\delta x}(t) = \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t), t]\cdot\underline{\delta x}(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}\underline{\delta x}'(t) = \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t), t]\cdot\underline{\delta x}'(t) \ . \quad (\mathbf{6}.32)$$

La dérivée par rapport au temps de leur produit scalaire vérifie donc

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{\delta x}\cdot\underline{\delta x}'\right) = {}^t(\underline{\underline{K}}\ \underline{\delta x})\,\underline{\delta x}' + {}^t\underline{\delta x}\,\underline{\underline{K}}\,\underline{\delta x}' =^t \underline{\delta x}\left(\underline{\underline{K}} + {}^t\underline{\underline{K}}\right)\underline{\delta x}' \ . \quad (\mathbf{6}.33)$$

On peut donc faire apparaitre le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$ et écrire

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{\delta x}(t)\cdot\underline{\delta x}'(t)\right] = 2\,\underline{\delta x}(t)\cdot\underline{\underline{D}}[\underline{x}(t), t]\cdot\underline{\delta x}'(t) \ . \quad (\mathbf{6}.34)$$

où $\underline{\underline{D}}$ est le tenseur des taux de déformation.

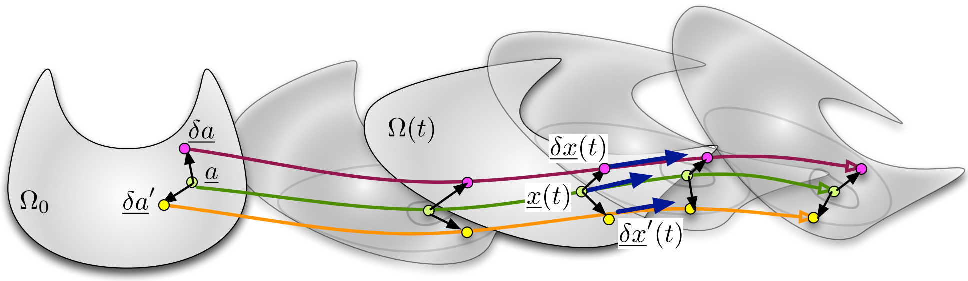

FIGURE **6**.6 – Transport de deux petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ par la trajectoire $\underline{x}(t)$.

En choisissant $\underline{\delta x}' = \underline{\delta x}$, on peut écrire

$$\frac{1}{\|\underline{\delta x}(t)\|}\frac{d\|\underline{\delta x}(t)\|}{dt} = \frac{\underline{\delta x}(t)\cdot\underline{\underline{D}}[\underline{x}(t),t]\cdot\underline{\delta x}(t)}{\|\underline{\delta x}(t)\|^2}\ , \tag{6.35}$$

où $\frac{1}{\|\underline{\delta x}\|}\frac{d\|\underline{\delta x}\|}{dt}$ est le taux de variation relation des longueurs pour un petit vecteur ayant la direction de $\underline{\delta x}$ à l'instant t dans le voisinage de $\underline{x}(t)$. On remarque en effet que ce taux ne dépend pas de la norme du petit vecteur $\underline{\delta x}$. Si $\underline{\delta x}(t) = \delta x\, \underline{e}_1$ à l'instant t, ce taux de variation est égal à D_{11}. Les composantes diagonales de $\underline{\underline{D}}$ sont donc les taux de variation relatifs des longueurs dans les directions des vecteurs de base.

3.2 Variation des angles

On suppose maintenant qu'à l'instant $t = t_*$, les deux petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ transportés par le mouvement sont orthogonaux ce que l'on écrit

$$\underline{\delta x}(t_*)\cdot\underline{\delta x}'(t_*) = 0\ . \tag{6.36}$$

On définit l'angle de glissement $\gamma(t)$ comme étant de complémentaire du l'angle que forment ces petites vecteurs et l'on écrit

$$\underline{\delta x}(t)\cdot\underline{\delta x}'(t) = \|\underline{\delta x}(t)\|\,\|\underline{\delta x}'(t)\|\,\sin\gamma(t) \qquad \text{avec } \gamma(t_*) = 0. \tag{6.37}$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\underline{\delta x}\cdot\underline{\delta x}') = \frac{d}{dt}(\|\underline{\delta x}\|\,\|\underline{\delta x}'\|)\,\sin\gamma + \|\underline{\delta x}\|\,\|\underline{\delta x}'\|\,\frac{d\gamma}{dt}\,\cos\gamma\ . \tag{6.38}$$

Comme $\gamma(t_*) = 0$, on en déduit

$$\left.\frac{d}{dt}(\underline{\delta x}\cdot\underline{\delta x}')\right|_{t_*} = \left.\left(\|\underline{\delta x}\|\,\|\underline{\delta x}'\|\,\frac{d\gamma}{dt}\right)\right|_{t_*} \tag{6.39}$$

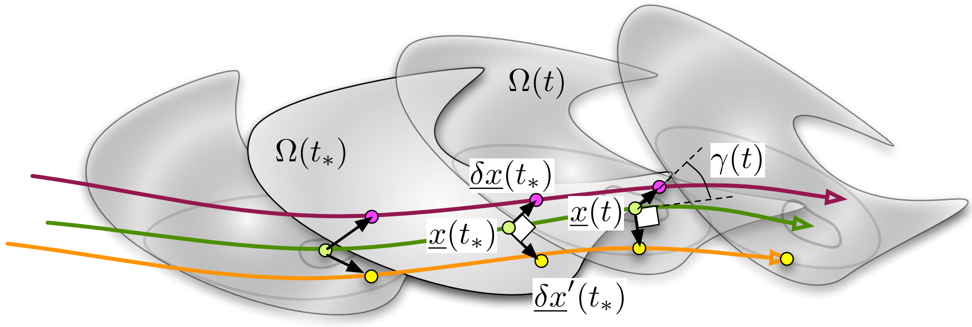

FIGURE **6**.7 – Transport de deux petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ orthogonaux à $t = t_*$ et angle de glissemnt $\gamma(t)$.

En remplaçant t_* par t dans cette dernière équation et en utilisant l'équation (**6**.34) on en déduit

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = 2\,\frac{\underline{\delta x}(t)\cdot\underline{\underline{D}}[\underline{x}(t),t]\cdot\underline{\delta x}'(t)}{\|\underline{\delta x}(t)\|\,\|\underline{\delta x}'(t)\|} \qquad \text{avec } \gamma(t) = 0. \tag{6.40}$$

On remarque que ce taux de variation de l'angle de glissement ne dépend que des directions des deux petits vecteurs orthogonaux à l'instant t considéré. En choisissant $\underline{\delta x} = \delta x\,\underline{e}_1$ et $\underline{\delta x}' = \delta x'\,\underline{e}_2$, on voit que

$$\frac{d\gamma_{12}}{dt} = 2\,D_{12}\,. \tag{6.41}$$

Les composantes non diagonales de $\underline{\underline{D}}$ sont donc égales à la moitié des angles de glissement des directions des vecteurs de base.

3.3 Variation des volumes

On considère maintenant trois petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$, $\underline{\delta x}'(t)$ et $\underline{\delta x}''(t)$ transportés par la trajectoire $\underline{x}(t)$ et on suppose qu'ils engendrent une petit cube de côté δx à l'instant $t = t_*$ et qu'ils alignés avec les vecteurs de base à travers les relations

$$\underline{\delta x}(t_*) = \delta x\,\underline{e}_1\,, \quad \underline{\delta x}'(t_*) = \delta x\,\underline{e}_2\,, \quad \underline{\delta x}''(t_*) = \delta x\,\underline{e}_3\,. \tag{6.42}$$

Le volume $\mathcal{V}(t)$ du parallélépipède qu'ils engendrent à un instant t quelconque s'écrit

$$\delta\mathcal{V}(t) = \left(\underline{\delta x}(t), \underline{\delta x}'(t), \underline{\delta x}''(t)\right) \tag{6.43}$$

en supposant que ce produit mixte est positif.

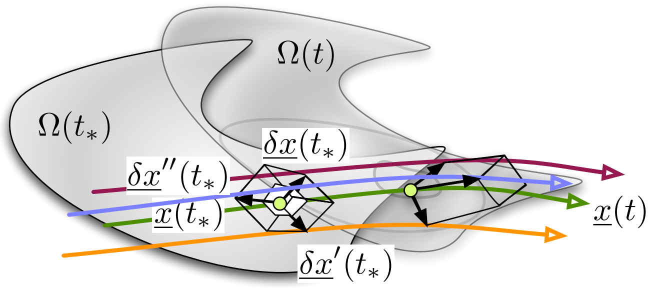

FIGURE **6**.8 – Transport de trois petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$, $\underline{\delta x}'(t)$ et $\underline{\delta x}''(t)$ formant un cube à $t = t_*$.

La dérivation de cette équation conduit à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta\mathcal{V}(t) &= \Big(\underline{\underline{K}}[\underline{x}(t),t]\cdot\underline{\delta x}(t),\underline{\delta x}'(t),\underline{\delta x}''(t)\Big)\\ &+ \Big(\underline{\delta x}(t),\underline{\underline{K}}[\underline{x}(t),t]\cdot\underline{\delta x}'(t),\underline{\delta x}''(t)\Big)\\ &+ \Big(\underline{\delta x}(t),\underline{\delta x}'(t),\underline{\underline{K}}[\underline{x}(t),t]\cdot\underline{\delta x}''(t)\Big)\ . \qquad (\mathbf{6}.44)\end{aligned}$$

Comme les petits vecteurs sont proportionnels aux vecteurs de base pour $t = t_*$, on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta\mathcal{V}(t_*) &= \delta x^3\left[(\underline{\underline{K}}\cdot\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)+(\underline{e}_1,\underline{\underline{K}}\cdot\underline{e}_2,\underline{e}_3)+(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{\underline{K}}\cdot\underline{e}_3)\right]\Big|_{[\underline{x}(t_*),t_*]}\\ &= \delta x^3\ [K_{11}+K_{22}+K_{33}]|_{[\underline{x}(t_*),t_*]} = \delta\mathcal{V}(t_*)\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t_*),t_*]\\ &= \delta\mathcal{V}(t_*)\ \mathrm{div}\ \underline{U}[\underline{x}(t_*),t_*]\ . \qquad (\mathbf{6}.45)\end{aligned}$$

En recouvrant une petit domaine quelconque $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement par des petits cubes à l'instant t, on démontre que le taux relatif de variation des petits volumes s'écrit

$$\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)}\ \frac{d}{dt}\delta\mathcal{V}(t) = \mathrm{div}\ \underline{U}[\underline{x}(t),t] \qquad (\mathbf{6}.46)$$

où $\underline{x}(t)$ est une trajectoire proche de $\delta\mathcal{V}(t)$.