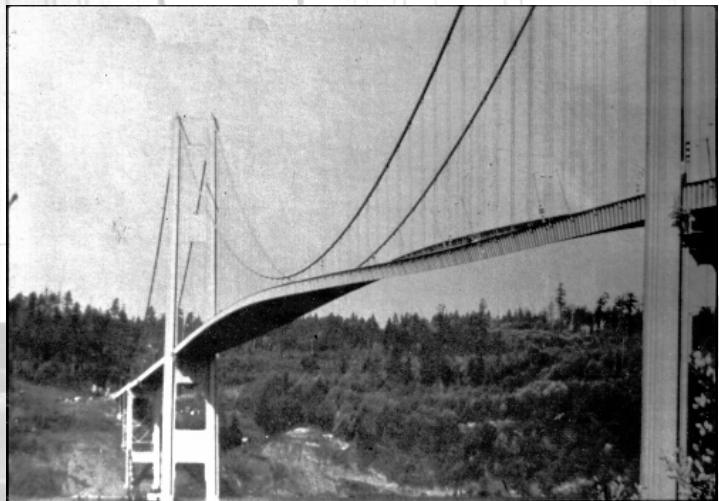
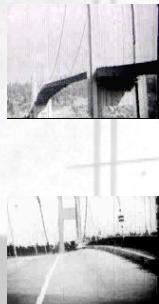




Introduction à la Mécanique des milieux continus déformables



Introduction à la Mécanique des milieux continus déformables





Introduction à la Mécanique des milieux continus déformables



ENSEEIHT

<http://www-hmf.enseeiht.fr>
Mécanique des milieux continus, O.Thual

3



Présentation des objectifs

1. Place du cours dans la formation d'ingénieur
2. Plan du cours
3. Organisation pratique
4. Des expériences à la modélisation



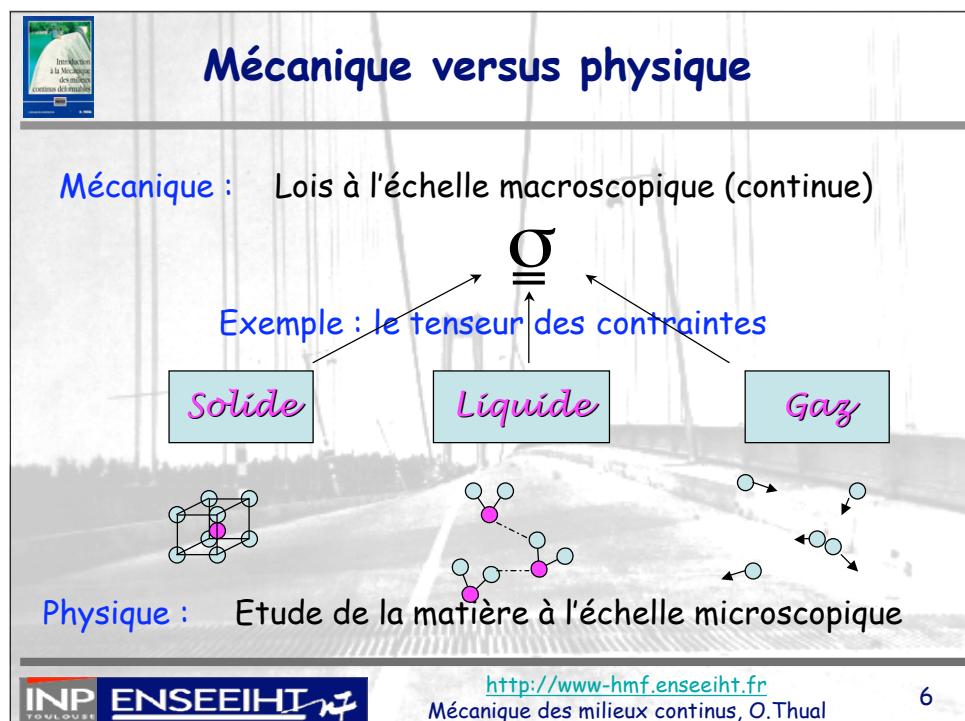
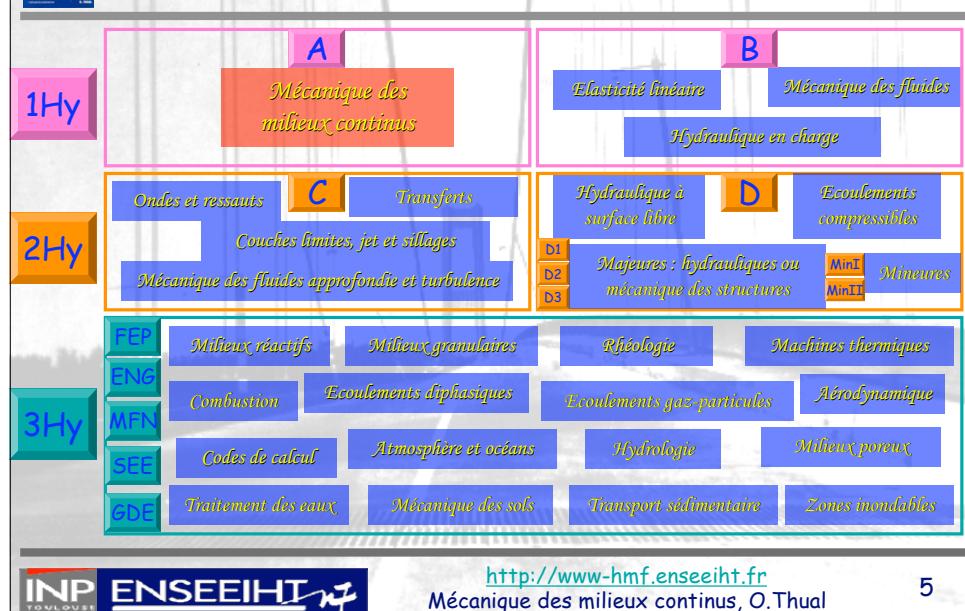
ENSEEIHT

<http://www-hmf.enseeiht.fr>
Mécanique des milieux continus, O.Thual

4



1. Place du cours dans la formation





2. Plan du cours

1. Introduction

Mathématiques

- 2. Grandes déformations
- 3. Cinématique
- 4. Hypothèse du continu

*Axiomes de base
de la mécanique*

- 5. Tenseur des contraintes
- 6. Lois de conservation

7. Elasticité linéaire

8. Mécanique des fluides



ENSEEIHT

<http://www-hmf.enseeiht.fr>

Mécanique des milieux continus, O.Thual

7

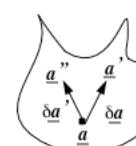
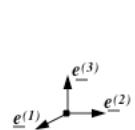
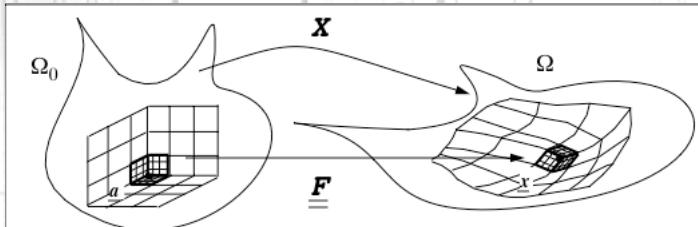


Chap 2 : Grandes déformations

Mathématiques

Déformation

$\underline{X}(\underline{a})$



Différentielle

$\underline{F}(\underline{a})$



ENSEEIHT

<http://www-hmf.enseeiht.fr>

Mécanique des milieux continus, O.Thual

8

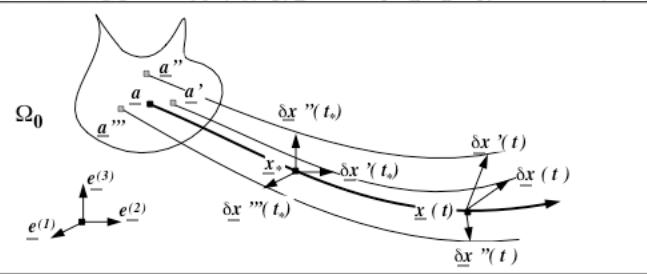
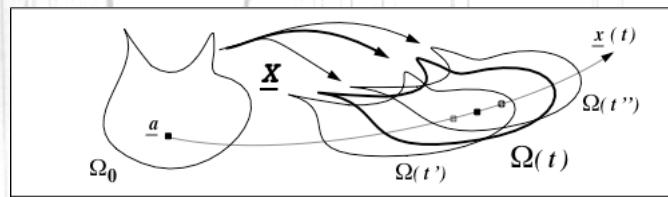


Chap 3 : Cinématique

Mathématiques

Mouvement

$$\underline{X}(\underline{a}, t)$$



Petits vecteurs
transportés par
le mouvement



ENSEEIHT

<http://www-hmf.enseeiht.fr>
Mécanique des milieux continus, O.Thual

9



Chap 4 : Hypothèse du continu

Mathématiques

Densité volumique

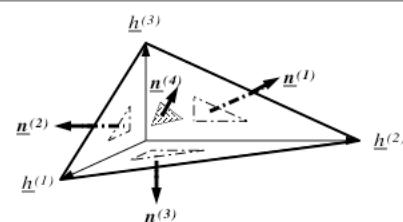
$$\iiint_D f(\underline{x}) d^3x$$

Log |F(Dh)|

pente +3

h mic h mac

Log h



Flux d'un scalaire

$$q(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{Q}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$$



ENSEEIHT

<http://www-hmf.enseeiht.fr>
Mécanique des milieux continus, O.Thual

10

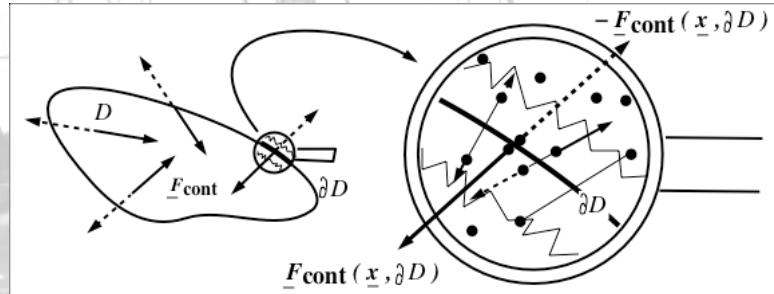


Chap 5 : Tenseur des contraintes

Axiomes de base
de la mécanique

Forces de contact

$$\underline{F}_{cont} = \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$$



ENSEEIHT

<http://www-hmf.enseeiht.fr>
Mécanique des milieux continus, O.Thual

11



Chap 6 : Lois de conservation

Axiomes de base
de la mécanique

Équations du mouvement

1. Loi de conservation de la masse
2. Loi de conservation de la quantité de mouvement
3. Loi de conservation du moment cinétique
4. « Théorème » de l'énergie cinétique
5. Loi de conservation de l'énergie (premier principe)
6. Second principe



ENSEEIHT

<http://www-hmf.enseeiht.fr>
Mécanique des milieux continus, O.Thual

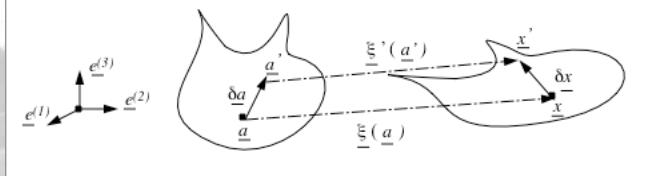
12



Chap 7 : Elasticité linéaire

Équations de Lamé-Clapeyron

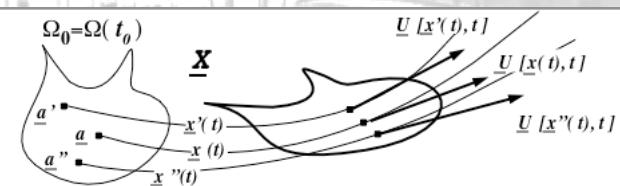
$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(\underline{a}, t) = \underline{f}(\underline{a}, t) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \xi(\underline{a}, t) + \mu \Delta \xi(\underline{a}, t)$$



Chap 8 : Mécanique des fluides

Équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \underline{U} \\ \rho \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\operatorname{grad} p + \underline{f} + (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{U} + \mu_n \Delta \underline{U} \\ \rho \frac{de}{dt} &= r + k\Delta T - p \operatorname{div} \underline{U} + \lambda_n (\operatorname{div} \underline{U})^2 + 2 \mu_n \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}\end{aligned}$$





3. Organisation pratique

Partiel : une page recto-verso
Examen : une copie double

DM : seules les notes en-dessous de 10/20 comptent

	Très Bien	Bien	Moyen	Passeable	Mauvais	Commentaires
Définition des objectifs du cours						
Documentation écrite du cours						
Intervention de l'enseignant						
Contrôle des connaissances						
Attente des objectifs du cours						

Cours/TD	Programme	Date
CR 01	Chapitre 1 , Chapitre 2	20/09
TD 1	Exos 1.1 et 1.2	20-21/09
CR 02	Chapitre 2 - exo 2.1	21/09
TD 2	Exo 2.2 et 2.3	23/09
CR 03	Chapitre 2, Chapitre 3 - exo 3.1	26/09
TD 3	Exos 3.2 et 3.6	29/09
TD 4	Exo 3.7	11/10
CR 04	Chapitre 3	13/10
CR 05	Chapitre 3, Pb 3.8 en "DM" à remettre	14/10
TD 5	Partiel 2004 et Examen 2004 (1) à (14)	18/10
Partiel	Chapitre 1 à 3	19/10
CR 06	Chapitre 4, Chapitre 5 - exo 5.1	21/10
TD 6	Exos 5.2 et 5.3	25/10
CR 07	Chapitre 5, Chapitre 6	3/11
TD 7	exo 5.4	8/11
CR 08	Chapitre 6, Chapitre 7	10/11
TD 8	Exo 7.2 et 7.3	15/11
CR 09	Chapitre 7	17/11
TD 9	Pb 7.5	22/11
CR 10	Chapitre 8	24/11
TD 10	Examen 2009	29/11
Examen	Chapitres 1 à 8	9/12

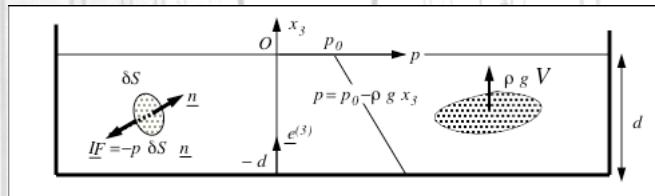
Commentaires supplémentaires :



3. Des expériences à la modélisation

1. Expériences sur les fluides
 - Pression hydrostatique et force d'Archimède
 - Vélocimètre de Venturi dans une conduite
 - Ecoulement de Couette et viscosité
2. Expérience sur les solides déformables
 - Expérience de traction d'un barreau
 - Immersion d'un barreau élastique dans un fluide
 - Expérience de cisaillement d'un barreau
3. Expérience sur la chaleur
 - Diffusion de la chaleur à travers un milieu
4. Lois de comportement
 - Loi de Fourier
 - Loi de Hooke
 - Loi de comportement des fluides newtoniens

Pression hydrostatique et force d'Archimède

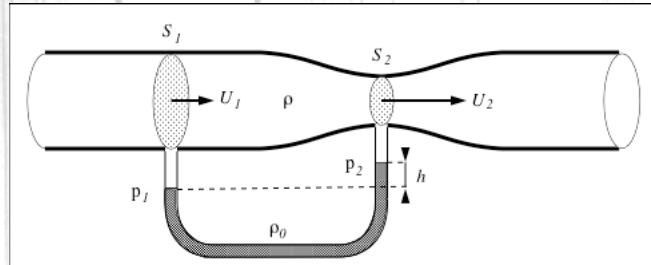


$$\underline{F} = -p(\underline{x}) \delta S \underline{n} \quad p(\underline{x}) = p_0 - \rho g x_3$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \underline{e}^{(3)} \\ \underline{e}^{(2)} \\ \underline{e}^{(1)} \end{matrix} \quad \underline{F} = \rho g V \underline{e}^{(3)}$$

Vélocimètre de Venturi

$$p_1 - p_2 = \rho_0 g h$$



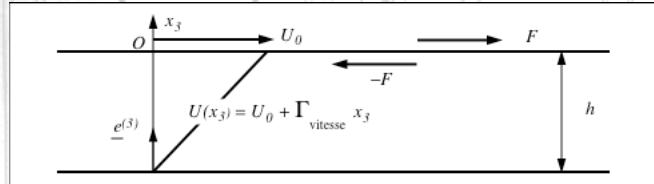
$$U_1 S_1 = U_2 S_2 \quad \rightarrow \quad p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2 \quad \Rightarrow \quad U_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$



Ecoulement de Couette et viscosité

$$F = \frac{I\!F}{S}$$

$$\Gamma_{vitesse} = \frac{U_0}{h}$$



$$F = \mu_n \Gamma_{vitesse}$$

eau $\mu_n = 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
air $\mu_n = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$



<http://www-hmf.enseeiht.fr>
Mécanique des milieux continus, O.Thual

19

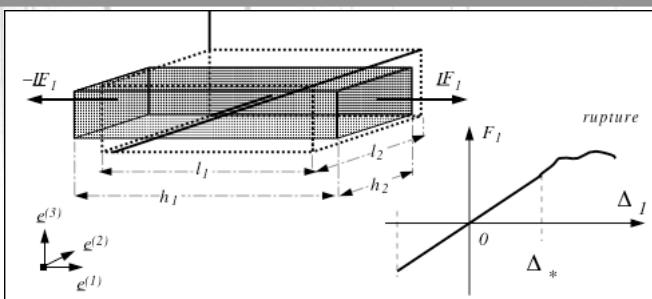


Expérience de traction d'un barreau

$$S_1 = h_2 h_3$$

$$\Delta_i = \frac{h_i - l_i}{l_i}$$

$$F_1 = \frac{I\!F_1}{S_1}$$



$$F_1 = E \Delta_1$$

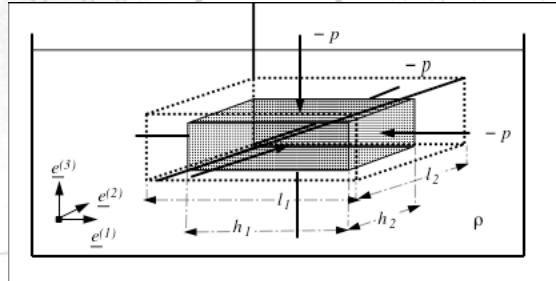
acier	$E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	$\nu = 0.30$
granite	$E = 60 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	$\nu = 0.27$
caoutchouc	$E = 0.02 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	$\nu = 0.50$



<http://www-hmf.enseeiht.fr>
Mécanique des milieux continus, O.Thual

20

Immersion d'une gomme dans un fluide



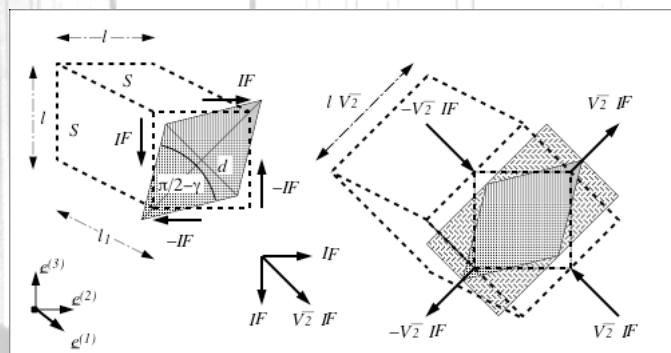
$$p = -\kappa_e \frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0}$$

$$\kappa_e = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Expérience	Δ_1	Δ_2	Δ_3
(a)	$\frac{1}{E} F_1^{(a)} = -\frac{1}{E} p$	$-\frac{\nu}{E} F_1^{(a)} = \frac{\nu}{E} p$	$-\frac{\nu}{E} F_1^{(a)} = \frac{\nu}{E} p$
(b)	$-\frac{\nu}{E} F_2^{(b)} = \frac{\nu}{E} p$	$\frac{1}{E} F_2^{(b)} = -\frac{1}{E} p$	$-\frac{\nu}{E} F_2^{(b)} = \frac{\nu}{E} p$
(c)	$-\frac{\nu}{E} F_3^{(c)} = \frac{\nu}{E} p$	$-\frac{\nu}{E} F_3^{(c)} = \frac{\nu}{E} p$	$\frac{1}{E} F_3^{(c)} = -\frac{1}{E} p$
Total	$-\frac{1-2\nu}{E} p$	$-\frac{1-2\nu}{E} p$	$-\frac{1-2\nu}{E} p$

Expérience de cisaillement

$$F = \frac{IF}{S}$$



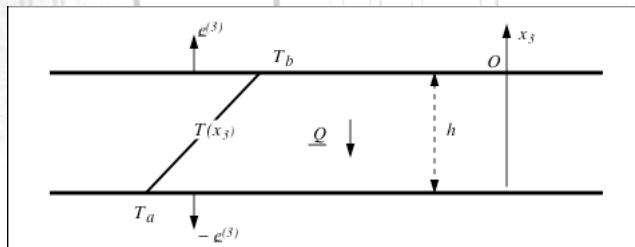
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$F = \mu \gamma$$

Diffusion de la chaleur

$$\Gamma_3 = \frac{T_b - T_a}{h}$$

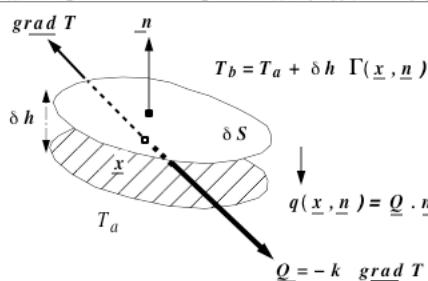
$$\underline{Q} = Q_3 \underline{e}^{(3)}$$



$$Q_3 = -k \Gamma_3$$

air	$k = 2.41 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
glycérine	$k = 0.27 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
mercure	$k = 4.93 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

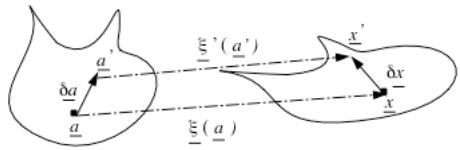
Loi de Fourier



$$\underline{Q}(\underline{x}, t) = -k \underline{\text{grad}} T(\underline{x}, t)$$

Loi de Hooke

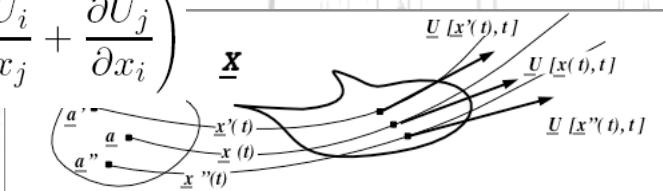
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial a_i} \right)$$



$$\underline{\epsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{tr} (\underline{\sigma}) \underline{I} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}$$

Lois de comportement des fluides newtoniens

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \underline{x}$$

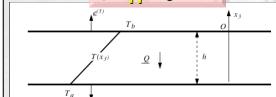


$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \lambda_n \text{div} \underline{U} \underline{I} + 2 \mu_n \underline{\underline{D}}$$

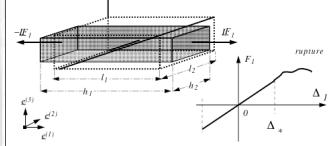


Approche déductive ou inductive

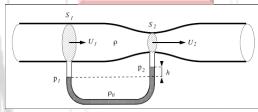
Diffusion



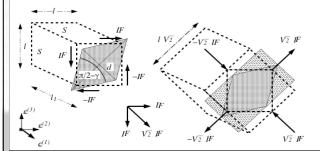
Traction



Venturi



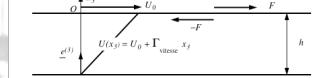
Cisaillement



Loi de Hooke



Couette



Loi de comportement des fluides newtoniens

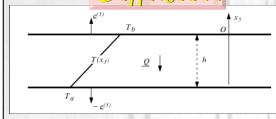
$$Q(\underline{x}, t) = -k \operatorname{grad} T(\underline{x}, t)$$

$$\underline{\epsilon} = -\frac{\nu}{E} \operatorname{tr} (\underline{\sigma}) \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}, \quad \underline{\sigma} = -p \underline{\underline{I}} + \lambda_n \operatorname{div} \underline{U} \underline{\underline{I}} + 2 \mu_n \underline{\underline{D}}$$

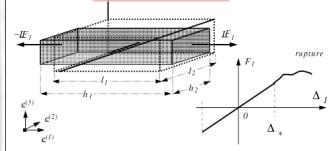


Approche déductive ou inductive

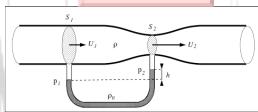
Diffusion



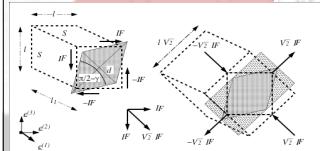
Traction



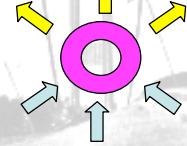
Venturi



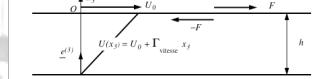
Cisaillement



Loi de Hooke



Couette



Loi de comportement des fluides newtoniens

$$Q(\underline{x}, t) = -k \operatorname{grad} T(\underline{x}, t)$$

$$\underline{\epsilon} = -\frac{\nu}{E} \operatorname{tr} (\underline{\sigma}) \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}, \quad \underline{\sigma} = -p \underline{\underline{I}} + \lambda_n \operatorname{div} \underline{U} \underline{\underline{I}} + 2 \mu_n \underline{\underline{D}}$$