

**Annales du cours de
Mécanique des Milieux Continus
Première année HY l'ENSEEIH
2009-2010 à 2011-2012**

**Professeur Olivier THUAL
INPT/ENSEEIH**

26 mai 2013

Table des matières

PARTIELS	5
PARTIEL 2011-12	5
EXAMENS	9
EXAMEN 2010-11	9
EXAMEN 2011-12	14

Préface

Depuis 2009, le cours de Mécanique des Milieux Continus est structuré à partir du polycopié :

- [1] “ Mécanique des Milieux Continus ”,
O. Thual, polycopié de l’ENSEEIH, 2009.

L’ancien support écrit du cours, disponible sous forme d’ouvrage, peut apporter des compléments :

- [2] “Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables”,
O. Thual, Cépaduès-Éditions 1997.

Le présent recueil rassemble les partiels et les examens bâtis à partir de plan polycopié [1]. Les partiels du cours, d’une durée de deux heures, portent sur les chapitres 1 à 5. Les examens, d’une durée de deux heures, portent sur l’ensemble du cours.

PARTIELS

PARTIEL 2011-12

NB : les seuls documents autorisés sont le polycopié du cours, les énoncés de TD distribués par les enseignants et les notes manuscrites personnelles.

PROBLÈME 0.1 Cube

On considère le cube $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : |a_i| < l/2, i = 1, 2, 3\}$ de volume $V_0 = l^3$. Sa masse volumique ρ_0 est homogène dans la configuration de référence.

Intégrales doubles sur la frontière d'un cube

Étant donnée une constante α , on considère le champ de tenseur d'ordre deux

$$\underline{\underline{A}}(\underline{a}) = a_1 a_2 [a_1 \underline{e}_1 \otimes (2 a_1 \underline{e}_1 - 3 a_2 \underline{e}_2) + \alpha a_2 \underline{e}_2 \otimes (2 a_2 \underline{e}_2 - 3 a_1 \underline{e}_1)] .$$

- 1) Calculer $\text{div } \underline{\underline{A}}(\underline{a})$.
- 2) Calculer $\iint_{\partial\Omega_0} \underline{\underline{A}}(\underline{a}) \cdot \underline{n} dS_0$ où \underline{n} est la normale sortante à la frontière $\partial\Omega_0$ de Ω_0 .
- 3) Trouver une valeur de α qui annule la fonction $f(\alpha) = \left\| \iint_{\partial\Omega_0} \underline{a} \wedge \underline{\underline{A}}(\underline{a}) \cdot \underline{n} dS_0 \right\|$.

Petite déformation d'un cube

On considère le champ de déplacement

$$\underline{\xi}(\underline{a}) = k_1 a_1 \underline{e}_1 + (k_0 a_3 + k_2 a_2) \underline{e}_2 + (k_0 a_2 + k_3 a_3) \underline{e}_3$$

où les $|k_i|$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ sont bornés par un paramètre $\eta \ll 1$.

- 4) Calculer la jacobienne $\underline{\underline{H}}(\underline{a})$ de ce champ de déplacement. En déduire que l'on est dans le cadre des petites déformations.
- 5) Exprimer le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$. En déduire les allongements relatifs Δ_i dans les directions \underline{e}_i ainsi que les angles de glissement γ_{ij} des couples de directions orthogonales $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$.
- 6) Exprimer le Jacobien $J(\underline{a})$ de la déformation $\underline{X}(\underline{a}) = \underline{a} + \underline{\xi}(\underline{a})$ puis calculer son développement limité à l'ordre 1 en η . Comparer avec $\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}$.
- 7) Exprimer la représentation eulérienne $\rho^{(E)}(\underline{x}) - \rho_0$ de la variation de masse volumique après déformation, sous l'hypothèse $\eta \ll 1$.

Cube sous contraintes

On suppose que le tenseur des contraintes dans le cube Ω_0 s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a}) = \sigma_0 [\underline{e}_2 \otimes (\underline{e}_2 + \underline{e}_3) + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2] .$$

- 8) Calculer les forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_2)$ exercées par l'extérieur du cube sur la face de normale \underline{e}_2 .
- 9) Représenter, sur un schéma représentant le cube, les forces de contact exercées sur chacune des autres faces.
- 10) Déterminer le repère orthonormé $(\underline{n}_0, \underline{n}_+, \underline{n}_-)$ dans lequel $\underline{\underline{\sigma}}$ est diagonal. Représenter, sur un schéma, les forces de contact exercées sur des surfaces orthogonales aux directions de ce repère.

Loi de Hooke

On néglige les forces extérieures de volumes $\underline{f}(\underline{a}) = 0$ et on impose les conditions aux limites suivantes sur la frontière $\partial\Omega_0$ du cube : $\underline{T}_{limit} = \underline{0}$ pour $|a_1| = l/2$, $\underline{T}_{limit} = \sigma_0 (\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$ pour $a_2 = l/2$, $\underline{T}_{limit} = -\sigma_0 (\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$ pour $a_2 = -l/2$, $\underline{T}_{limit} = \sigma_0 \underline{e}_3$ pour $a_3 = l/2$ et $\underline{T}_{limit} = -\sigma_0 \underline{e}_3$ pour $a_3 = -l/2$. On suppose que le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a})$ résultant de ces contraintes est stationnaire et que le comportement rhéologique du cube obéit à la loi de Hooke de module de Young E et de coefficient de Poisson ν .

- 11) Quel tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ peut-on deviner pour résoudre ce problème aux conditions aux limites ?
- 12) Dédire de ce choix de $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$.
- 13) En déduire un champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a})$ solution du problème.
- 14) Quelles sont les directions principales du tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$?
- 15) Quels sont les allongements relatifs $(\Delta_0, \Delta_+, \Delta_-)$ dans les directions respectives de ce repère ?

Vibrations élastiques

On néglige toujours les forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{a})$ et on suppose maintenant que le cube est animé d'un mouvement décrit par le champ de déplacement

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \xi_m \sin(k a_1) \sin(k c t) \underline{e}_1 ,$$

où ξ_m est une amplitude complexe, $k = \pi/l$ un nombre d'onde et c une vitesse.

- 16) Calculer c pour que $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$ soit une solution non nulle des équations de Lamé.
- 17) En déduire les forces de contact exercées par l'extérieur du cube sur les faces de $\partial\Omega_0$ de normales parallèles à \underline{e}_1 .
- 18) Décrire le dispositif permettant d'observer ces vibrations.

Corrigé Cube**Intégrales doubles sur la frontière d'un cube**

1) On a $\underline{\text{div}} \underline{A} = 0$. 2) En appliquant le théorème de la divergence, on obtient $\iint_{\partial\Omega_0} \underline{A}(\underline{a}) \cdot \underline{n} \, dS_0 = \iiint_{\Omega_0} \underline{\text{div}} \underline{A} \, d^3a = 0$. 3) Comme on a démontré dans le cours que $\iint_{\partial\Omega_0} \underline{a} \wedge \underline{\sigma}(\underline{a}) \cdot \underline{n} \, dS_0 = \iiint_{\Omega_0} \underline{a} \wedge \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}) \, d^3a$ lorsque $\underline{\sigma}(\underline{a})$ est symétrique, on a $f(1) = 0$. En effet, \underline{A} est symétrique pour $\alpha = 1$ et $\underline{\text{div}} \underline{A} = 0$.

Petite déformation d'un cube

4) On a $\underline{H} = k_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + k_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + k_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + k_0 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$. Comme toutes les composantes de \underline{H} sont petites, on est dans le cadre des petites déformations. 5) Comme \underline{H} est symétrique, on a $\underline{\epsilon} = \underline{H}$. On a donc $\Delta_i = k_i$, $\gamma_{23} = 2k_0$ et $\gamma_{ij} = 0$ sinon. 6) Comme $\underline{F} = \underline{I} + \underline{H}$, on a $J(\underline{a}) = |\det \underline{F}| = (1 + k_1)[(1 + k_2)(1 + k_3) - k_0^2] = 1 + (k_1 + k_2 + k_3) + O(\eta^2)$. On a bien $J(\underline{a}) = 1 + \text{tr} \underline{\epsilon} + O(\eta^2)$. 7) la conservation de la masse $\rho J(\underline{a}) = \rho_0$ entraîne $\rho = [1 - \text{tr} \underline{\epsilon} + O(\eta^2)] \rho_0$. On a donc $\rho - \rho_0 = -(k_1 + k_2 + k_3) \rho_0$ à l'ordre 1 en η . On a $\rho^{(E)} = \rho^{(L)} = \rho$ parcequ'on est dans le cadre des petites déformations et, plus simplement, parce que ce champ est constant.

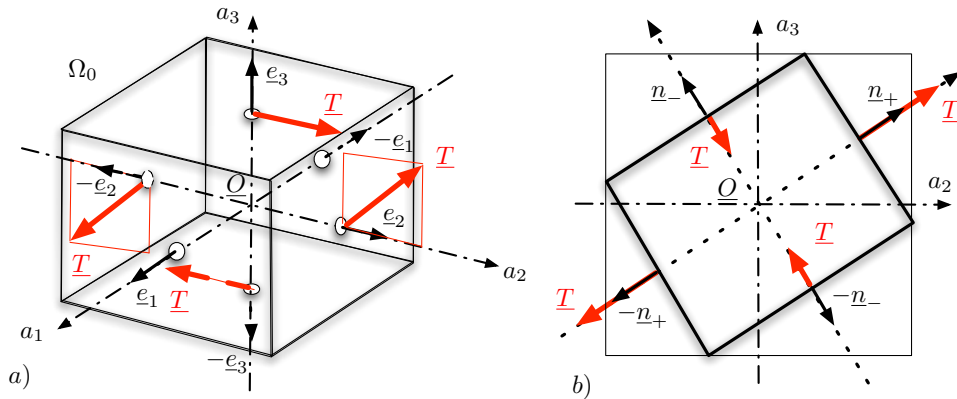
Cube sous contraintes

FIGURE 1 – a) Forces de surface exercées sur les faces du cube. b) Directions principales et diagonalisation de $\underline{\sigma}$.

8) On a $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_2) = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_2 = \sigma_0 (\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$. 9) Les forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ exercées sur les faces du cube sont représentées sur la figure 1a. On a $\underline{T}(\underline{a}, \underline{e}_1) = \underline{T}(\underline{a}, -\underline{e}_1) = 0$. 10) Les valeurs propres de $\underline{\sigma}$ sont $s_0 = 0$, $s_+ = (1 + \sqrt{5})/2 \sim 1.61$ (nombre d'or) et $s_- = (1 - \sqrt{5})/2 = -1/s_+ \sim -0.61$. Les vecteurs propres associés sont respectivement $\underline{n}_0 = \underline{e}_1$, $\underline{n}_+ = (1 + s_+^2)^{-1/2} (s_+ \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$ et $\underline{n}_- = (1 + s_-^2)^{-1/2} (s_- \underline{e}_2 + \underline{e}_3)$. Les forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{n}_+) = \pm s_+ \underline{n}_+$ et $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{n}_-) = \pm s_- \underline{n}_-$ sont représentées sur la figure 1b, les forces $\underline{T}(\underline{a}, \pm \underline{e}_1) = 0$ étant nulles.

Loi de Hooke

11) Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a}) = \sigma_0 [\underline{e}_2 \otimes (\underline{e}_2 + \underline{e}_3) + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2]$ étudié précédemment satisfait les conditions aux limites. Comme il est constant, on a $\text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}$. Il satisfait donc les équations de Lamé stationnaires sans forces extérieures de volume. **12)** La loi de Hooke $\underline{\epsilon} = \frac{-\nu}{E} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}$ entraîne

$$\underline{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{E} [\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \nu (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (1 + \nu) (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)] .$$

13) Le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a}) = k_1 a_1 \underline{e}_1 + (k_0 a_3 + k_2 a_2) \underline{e}_2 + (k_0 a_3 + k_3 a_3) \underline{e}_3$ avec $k_0 = (1 + \nu) \frac{\sigma_0}{E}$, $k_1 = k_3 = -\nu \frac{\sigma_0}{E}$, et $k_2 = \frac{\sigma_0}{E}$ admet $\underline{\epsilon}$ comme tenseur des petites déformations. **14)** Les directions principales de $\underline{\epsilon}$ sont celles de $\underline{\sigma}$, c'est-à-dire $(\underline{n}_0, \underline{n}_+, \underline{n}_-)$. **15)** En appliquant la loi de Hooke dans ce repère, on trouve facilement que $\Delta_0 = -\nu \frac{\sigma_0}{E}$, $\Delta_+ = \frac{\sigma_0}{E} [(1 + \nu) s_+ - \nu]$ et $\Delta_- = \frac{\sigma_0}{E} [(1 + \nu) s_- - \nu]$.

Vibrations élastiques

16) On a $\frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = -c^2 \underline{\xi}$, $\text{grad } (\text{div } \underline{\xi}) = -k^2 \underline{\xi}$ et $\Delta \underline{\xi} = -k^2 \underline{\xi}$. En reportant dans les équations de Lamé, on obtient $[\rho_0 c^2 k^2 - (\lambda + 2\mu) k^2] \underline{\xi} = \underline{0}$. On en déduit $c = c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$. **17)** Le tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}(\underline{a}, t)$ associé au champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a}, t)$ est $\underline{\epsilon}(\underline{a}, t) = k \xi_m \cos(k a_1) \sin(k c t) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$. Comme on a $\underline{\epsilon}(\pm l/2, a_2, a_3) = \underline{0}$ pour $|a_1| = l/2$, on en déduit, par la loi de Hooke, que l'on a $\underline{\sigma}(\pm l/2, a_2, a_3) = \underline{0}$. Les forces de contact exercées sur les faces du cube de normale \underline{e}_1 , donc situées en $|a_1| = l/2$, sont donc nulles. **18)** Le déplacement est nul sur les autres faces. Pour observer ces vibrations, le cube est placé dans un cylindre d'axe Oa_1 dont la section carrée empêche tout déplacement dans le plan Oa_2a_3 . Les faces de normales $\pm \underline{e}_1$ sont libres de contraintes.

EXAMENS

EXAMEN 2010-11

NB : les seuls documents autorisés sont le polycopié du cours, les énoncés de TD distribués par les enseignants et les notes manuscrites ayant votre écriture.

EXERCICE 0.2 Torsion d'un arbre métallique

On considère une pièce métallique homogène contenue dans le domaine

$$\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1^2 + a_2^2) \leq R^2 \text{ et } 0 \leq a_3 \leq L\} . \quad (1)$$

On note ρ_0 sa masse volumique. On note λ et μ ses coefficients de Lamé. Dans tout ce qui suit, on suppose que la section circulaire S_0 d'équation $a_3 = 0$ est immobile (déplacement nul), car encastrée dans un matériau indéformable. On néglige les forces de volume (gravité). On se place dans le cadre des petites perturbations.

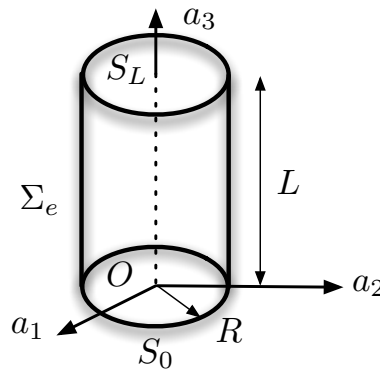


FIGURE 2 – Arbre métallique de forme cylindrique.

Équilibre en torsion

On suppose que le système est à l'équilibre et que le déplacement s'écrit

$$\xi_1 = -\alpha a_2 a_3 , \quad \xi_2 = \alpha a_1 a_3 , \quad \xi_3 = 0 . \quad (2)$$

avec $\alpha > 0$ et $\eta = \alpha \max(R, L) \ll 1$.

- 1) Calculer le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$ et justifier l'hypothèse des petites déformations.
- 2) Calculer le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}(\underline{a})$ et le comparer à $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$ au premier ordre du petit paramètre η .
- 3) Donner l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$. En déduire la résultante des forces extérieures de contact exercées sur la surface S_L d'équation $a_3 = L$.
- 4) Montrer que la surface latérale Σ_e , d'équation $(a_1^2 + a_2^2) = R^2$, est libre de contraintes.
- 5) Calculer le moment résultant en $\underline{0}$ des forces extérieures de contact exercées sur la surface S_0 .
- 6) On suppose que le seuil de rupture du solide est atteint lorsque

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \geq k_e^2 \quad \text{où} \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (3)$$

est la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $k_e > 0$ une constante (critère de résistance de Von Mises). Au-delà de quelle valeur critique α_c de α , fonction de R , k_e et μ la pièce casse-t-elle ?

PROBLÈME 0.3

Vases communicants

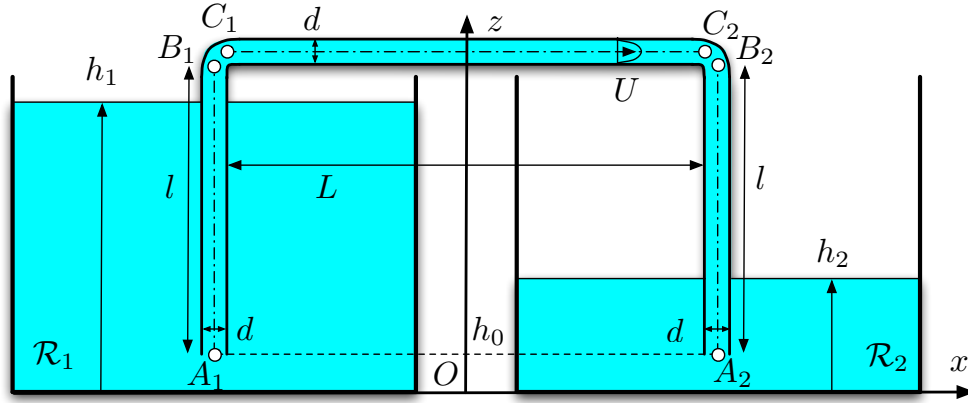
On considère deux réservoirs \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 dont les niveaux d'eau respectifs sont notés h_1 et h_2 (voir figure 3). Ils sont reliés par un petit tube de section circulaire rempli d'eau allant de A_1 à A_2 respectivement situés à l'intérieur de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Dans un repère $Oxyz$ où z est la coordonnée verticale et $z = 0$ est la cote du fond des réservoirs, on suppose $\underline{OA_1} = -\frac{L+d}{2} \underline{e}_x + h_0 \underline{e}_z$ et $\underline{OA_2} = \frac{L+d}{2} \underline{e}_x + h_0 \underline{e}_z$.

On note d le diamètre du tube constitué de deux cylindres verticaux de longueur l et d'axes respectifs A_1B_1 et A_2B_2 , reliés par un tube horizontal de longueur L d'axe C_1C_2 . On suppose que d est suffisamment petit pour que l'écoulement dans le tube puisse être considéré comme laminaire. On néglige alors l'effet des deux coudes reliant les cylindres verticaux au cylindre horizontal.

On suppose que la capacité des réservoirs est suffisamment grande pour considérer que h_1 et h_2 ne varient pas avec le temps tandis qu'un champ de vitesse stationnaire $\underline{U}(\underline{x})$ existe dans le tube. La pression atmosphérique, considérée comme constante, vaut $p_a = 10^5$ Pa. La masse volumique de l'eau, considérée ici comme un fluide incompressible, vaut $\rho = 10^3$ kg.m⁻³. Sa viscosité cinématique vaut $\nu = 10^{-6}$ m².s⁻¹. On prendra $g = 9.81$ m.s⁻².

Écoulement stationnaire dans un tube vertical

- 1) Dans un premier temps, on suppose que $h_1 = h_2 = h_e$ et que le fluide est au repos. En utilisant les équations de Navier-Stokes, donner l'expression de la pression $p(\underline{x})$ en un point quelconque $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$ en fonction de h_e et des autres paramètres du problème.

FIGURE 3 – Réservoirs reliés par un tube de section circulaire de diamètre d .

- 2) On suppose maintenant que $h_1 > h_2$, ce qui induit une circulation d'eau du réservoir \mathcal{R}_1 vers le réservoir \mathcal{R}_2 . On néglige le champ de vitesse dans les réservoirs et on suppose alors que la pression aux points A_1 et A_2 est la pression hydrostatique des réservoirs respectifs auxquels ils appartiennent. Exprimer leurs pressions respectives p_{A_1} et p_{A_2} ainsi que $p_{A_1} - p_{A_2}$.
- 3) En supposant connue la pression p_{B_1} au point B_1 , on cherche une solution de la forme $\underline{U}(\underline{x}) = w(r) \underline{e}_z$ dans le tube vertical où r est la distance de \underline{x} à l'axe A_1B_1 . Montrer que \underline{U} vérifie l'équation de conservation de la masse. On pourra raisonner en coordonnées cartésiennes ou bien utiliser la formule $\text{div } \underline{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ de la divergence d'un champ de vecteur en coordonnées cylindriques.
- 4) Expliciter toutes les composantes de $\frac{d\underline{U}}{dt}$ en coordonnées cartésiennes. En déduire que l'accélération est nulle pour le champ $\underline{U} = w(r) \underline{e}_z$ recherché.
- 5) Écrire les équations de Navier-Stokes pour le cas du champ de vitesse stationnaire $\underline{U} = w(r) \underline{e}_z$ recherché. On pourra raisonner en coordonnées cartésiennes ou bien utiliser les formules

$$\Delta \underline{V} = \left(\Delta V_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} \right) \underline{e}_r + \left(\Delta V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) \underline{e}_\theta + \Delta V_z \underline{e}_z$$

et $\Delta B = \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}$ en coordonnées cylindriques.

- 6) En déduire que $p = p_{A_1} - (\rho g + G_1)(z - h_0)$ dans le tube A_1B_1 où G_1 est une constante que l'on exprimera en fonction de p_{B_1} et des autres paramètres.
- 7) On suppose que $w(r)$ est dérivable en $r = 0$. Écrire les conditions aux limites sur les parois du tube rigide. Exprimer alors $w(r)$ et tracer cette fonction.
- 8) Exprimer le débit volumique Q de l'eau dans le tube en fonction de G_1 .

Écoulement stationnaire dans l'ensemble du tube

On suppose l'égalité des pressions $p_{B_1} = p_{C_1}$ et $p_{B_2} = p_{C_2}$ en négligeant les coudes.

- 9) On cherche le champ de vitesse stationnaire dans le tube horizontal sous la forme $\underline{U}(\underline{x}) = u(r) \underline{e}_x$ où r est maintenant la distance de \underline{x} à l'axe C_1C_2 avec $\underline{OC}_1 = -\frac{L}{2} \underline{e}_x + \left(h_0 + l + \frac{d}{2}\right) \underline{e}_z$ et $\underline{OC}_2 = \frac{L}{2} \underline{e}_x + \left(h_0 + l + \frac{d}{2}\right) \underline{e}_z$. Vérifier que $\text{div } \underline{U} = 0$ et montrer que $p = p_{C_1} - G_0 \left(x + \frac{L}{2}\right) - \rho g (z - z_*)$ où z_* est une constante que l'on exprimera et $G_0 = (p_{C_1} - p_{C_2})/L$.
- 10) En supposant connu $G_2 = (p_{B_2} - p_{A_2})/l + \rho g$, exprimer le champ de vitesse dans le tube vertical d'axe A_2B_2 .
- 11) Montrer que G_1 , G_0 et G_2 sont égaux à une valeur commune G que l'on exprimera en fonction de $p_{A_1} - p_{A_2}$ et de la longueur $L_{tot} = (2l + L)$ du tube.
- 12) En déduire que $Q = \frac{\pi d^4}{128} \frac{g(h_1 - h_2)}{\nu L_{tot}}$ et donner sa valeur pour $l = 1$ m, $L = 2$ m, $d = 4$ mm et $h_1 - h_2 = 50$ cm ?

Bilans intégraux de forces

- 13) Exprimer la résultante $\underline{F}_{A_1B_1}$ des forces de contact exercées par l'extérieur du cylindre d'axe A_1B_1 sur ses sections circulaires de centres A_1 et B_1 .
- 14) Exprimer la résultante \underline{F}_Σ des forces de contacts exercées sur le fluide par la paroi latérale du cylindre d'axe A_1B_1 de normales horizontales.
- 15) Exprimer $\underline{F}_{A_1B_1} + \underline{F}_\Sigma$ et commenter le résultat.
- 16) Exprimer la résultante $\underline{F}_{C_1C_2}$ des forces de contact exercées par l'extérieur du cylindre C_1C_2 sur ses sections circulaires de centres C_1 et C_2 en fonction de G . Comparer cette force aux forces de frottement exercées par la paroi sur le fluide.
- 17) Calculer la résultante des forces de contact exercée sur toute la frontière du cylindre C_1C_2 .

Corrigé Torsion d'un arbre métallique**Équilibre en torsion**

1) On a $H_{12} = -\alpha a_3$, $H_{13} = -\alpha a_2$, $H_{21} = \alpha a_3$, $H_{23} = \alpha a_1$ et $H_{ij} = 0$ sinon. On en déduit $\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = -\alpha a_2/2$, $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \alpha a_1/2$ et $\epsilon_{ij} = 0$. Comme $|\alpha a_1| \leq \eta$, $|\alpha a_2| \leq \eta$ et $|\alpha a_3| \leq \eta$, les composantes de \underline{H} sont d'ordre η et l'on est bien dans le cadre des petites déformations. 2) Comme $\underline{X}(a, t) = \underline{a} + \alpha a_3(-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$, on a $C_{11} = C_{22} = 1 + \alpha^2 a_3^2$, $C_{33} = 1 + \alpha^2(a_1^2 + a_2^2)$, $C_{13} = C_{31} = -\alpha a_2 + \alpha a_1 a_3$, $C_{23} = C_{32} = \alpha a_1 + \alpha a_2 a_3$ et $C_{ij} = 0$ sinon. On a bien $\underline{C} = \underline{I} + 2\underline{\epsilon} + O(\eta^2)$. 3) Comme $\text{tr } \underline{\epsilon} = 0$, l'application de la loi de Hooke conduit à $\underline{\sigma} = 2\mu \underline{\epsilon}$. Les forces de contact exercées sur S_L sont $\underline{T} = \underline{\sigma}(a_1, a_2, L) \cdot \underline{e}_3 = \mu \alpha (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$. Par symétrie, leur résultante, issue de l'intégration de \underline{T} sur S_L , est nulle. 4) Les forces de contact exercées sur Σ_e sont $\underline{T}(\underline{a}) = \underline{\sigma}(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2) / \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \underline{0}$. La surface Σ_e est donc libre de contraintes. 5) Les forces de contact exercées sur S_0 sont $\underline{T}(\underline{a}) = \underline{\sigma}(a_1, a_2, 0) \cdot (-\underline{e}_3) = -\mu \alpha (-a_2 \underline{e}_1 + a_1 \underline{e}_2)$. Leur moment en $\underline{0}$ est $\underline{\Gamma}_0 = \iint_{S_0} \underline{a} \wedge \underline{T}(\underline{a}) dS_0 = -\mu \alpha \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta = -\mu \alpha \frac{\pi R^4}{2} \underline{e}_3$. 6) On a $\underline{s} = \underline{\sigma}$ et $\frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s} = \mu^2 \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2)$. Son maximum est atteint sur la frontière Σ_e et vaut $\mu^2 \alpha^2 R^2$. La rupture est obtenue pour $\alpha \geq \alpha_c = k_e/(\mu R)$.

Corrigé Vases communicants**Écoulement stationnaire dans un tube vertical**

1) Les équations de Navier-Stokes incompressibles pour un fluide au repos ($\underline{U} = \underline{0}$) s'écrivent $\underline{0} = -\text{grad } p - \rho g \underline{e}_z$. En utilisant les conditions aux limites $p = p_a$ en $z = h_e$, on obtient la pression hydrostatique $p(\underline{x}) = p_a - \rho g(z - h_e)$. 2) On a $p_{A_1} = p_a + \rho g(h_1 - h_0)$ et $p_{A_2} = p_a + \rho g(h_2 - h_0)$, d'où $p_{A_1} - p_{A_2} = \rho g(h_1 - h_2)$. 3) La loi de conservation de la masse pour un fluide incompressible et homogène s'écrit $\text{div } \underline{U} = 0$. Comme w ne dépend pas de z , cette relation est trivialement satisfaite. 4) On a $\frac{d\underline{U}}{dt} = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) \underline{e}_x + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}\right) \underline{e}_y + \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}\right) \underline{e}_z$. Comme $u = v = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, on a bien $\frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{0}$. 5) La conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cartésiennes s'écrit $0 = -\frac{\partial p}{\partial x}$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \rho \nu \Delta w$ avec $\Delta w = w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr}\right)$. 6) Les équations $0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ montrent que p ne dépend que de z . Les fonctions $-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$ et $-\rho \nu \Delta w$ sont égales mais dépendent respectivement de z et de r . Elles sont donc égales à une constante, notée G_1 , ce qui entraîne que $p = p_{A_1} - (\rho g + G_1)(z - h_0)$ avec $G_1 = (p_{A_1} - p_{B_1})/l - \rho g$. 7) Les conditions aux limites s'écrivent $w(d/2) = 0$. Comme $0 = G_1 + \rho \nu \Delta w(r)$, on a $\rho \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr}\right) = -G_1$ et donc $\rho \nu r w'(r) = -\frac{1}{2} G_1 r^2 + C_{ste}$. Comme $w'(0)$ est borné, la constante C_{ste} est nulle. En utilisant la condition aux limites $w(d/2) = 0$, on a $w(r) = \frac{G_1}{4\rho \nu} \left(\frac{1}{4} d^2 - r^2\right)$. Le tracé de cette fonction est celui d'une parabole. 8) Le débit volumique est $Q = 2\pi \int_0^r w(r) r dr = \frac{G_1 \pi d^4}{128 \rho \nu}$.

Écoulement stationnaire dans l'ensemble du tube

9) On a bien $\text{div } \underline{U} = 0$ car u ne dépend pas de x . Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \nu \Delta u$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$. On en déduit que $p = -\rho g z + F(x)$ où $F(x)$ est une fonction qui ne dépend que de x . Comme $-F'(x)$ et $-\rho \nu \Delta u$ sont égales et dépendent respectivement de x et r , elles sont égales à une constante notée G_0 . On a donc $p = p_{C_1} - G_0 \left(x + \frac{L}{2}\right) - \rho g(z - z_*)$ avec $z_* = h_0 + l + \frac{d}{2}$, la constante d'intégration étant obtenue en utilisant l'information $p = p_{C_1}$ au point C_1 . Comme $p = p_{C_2}$ au point C_2 , on en déduit que $G_0 = (p_{C_1} - p_{C_2})/L$. **10)** En suivant une démarche similaire à résolution effectuées le tube $A_1 B_1$, on obtient $\underline{U} = -\frac{G_2}{4\rho\nu} \left(\frac{1}{4}d^2 - r^2\right) \underline{e}_z$ avec $G_2 = (p_{B_2} - p_{A_2})/l + \rho g$. **11)** Comme le débit Q est constant le long du tube, on a $G_1 = G_0 = G_2$ et on note G leur valeur commune. Comme on a supposé $p_{B_1} = p_{C_1}$ et $p_{C_2} = p_{B_2}$, on peut écrire $p_{A_1} - p_{A_2} = (p_{A_1} - p_{B_2} - \rho g l) + (p_{C_1} - p_{C_2}) + (p_{B_2} - p_{A_2} + \rho g l) = G_1 l + G_0 L + G_2 l = G L_{tot}$. On a donc $G = \frac{p_{A_1} - p_{A_2}}{(2l+L)}$. **12)** Comme calculé précédemment, le débit est $Q = \frac{G \pi d^4}{128 \rho \nu}$. Comme $G = \frac{p_{A_1} - p_{A_2}}{L_{tot}} = \frac{\rho g (h_2 - h_1)}{(2l+L)}$, le débit vaut $Q = \frac{g(h_2 - h_1) \pi d^4}{128(2l+L)\nu} = 7.7 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Bilans intégraux de forces

13) On a $\underline{K} = \text{grad } \underline{U} = w'(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z$ et donc $\underline{D} = \frac{1}{2} w'(r) (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r)$ et $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\rho\nu \underline{D}$. Sur la section de centre A_1 et de normale $-\underline{e}_z$, les forces de contact sont $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_z) = p_{A_1} \underline{e}_z - \rho\nu w'(r) \underline{e}_r$. Comme $\int_0^{2\pi} \underline{e}_r(\theta) d\theta = \underline{0}$ la résultante vaut $\underline{F}_{A_1} = p_{A_1} S \underline{e}_z$ où $S = \pi d^2/4$ est la section du cylindre. On a de même $\underline{F}_{B_1} = -p_{B_1} S \underline{e}_z$ si bien que $\underline{F}_{A_1 B_1} = \underline{F}_{A_1} + \underline{F}_{B_1} = (p_{A_1} - p_{B_1}) \frac{\pi d^2}{4} \underline{e}_z$ avec $p_{A_1} - p_{B_1} = \rho g l + G_1 l$ et $G_1 = G = (p_{A_1} - p_{A_2})/(2l+L)$. On a donc $\underline{F}_{A_1 B_1} = \rho g V_1 \underline{e}_z + G V_1 \underline{e}_z$ où $V_1 = \frac{\pi d^2 l}{4}$ est le volume du cylindre $A_1 B_1$. **14)** La normale en un point de la frontière latérale Σ étant $\underline{n} = \underline{e}_r$, les forces de contact s'écrivent $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = -p \underline{e}_r + \rho\nu w'(d/2) \underline{e}_z$ avec $w'(d/2) = -\frac{G_1 d}{4\rho\nu}$. On a donc $\underline{T} = -p \underline{e}_r - G_1 (d/4) \underline{e}_z$. Comme $\int_0^{2\pi} \underline{e}_r(\theta) d\theta = \underline{0}$, la résultante de ces forces est $\underline{F}_\Sigma = -\int_0^l \int_0^{2\pi} G_1 (d/4) \underline{e}_z d\theta dz = -G_1 \frac{l \pi d^4}{4} \underline{e}_z = -G V_1 \underline{e}_z$. **15)** La force $\underline{F}_{A_1 B_1} + \underline{F}_\Sigma = \rho g V_1 \underline{e}_z$ est l'opposée du poids du fluide compris dans le cylindre $A_1 B_1$. **16)** En suivant la même démarche, on a $\underline{F}_{C_1 C_2} = G V_1 \underline{e}_x$. Cette force compense les forces de frottement exercées par la paroi sur le fluide, c'est-à-dire la composante en \underline{e}_x des forces de contact. **17)** Comme l'écoulement est stationnaire, la résultante des forces de contact exercées sur toute la frontière du cylindre $C_1 C_2$ est l'opposée du poids du fluide et vaut donc $\rho g V_0 \underline{e}_z$ avec $V_0 = \frac{\pi d^2 L}{4}$.

EXAMEN 2011-12

NB : les seuls documents autorisés sont les notes manuscrites ayant votre écriture.

PROBLÈME 0.4 **Rotation d'axe vertical**

NB : bien qu'elles ne soient pas indispensables pour la résolution du problème, les formules suivantes relatives aux coordonnées cylindriques sont rappelées ici : $\text{grad } B(\underline{x}) = B_{,r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} B_{,\theta} \underline{e}_\theta + B_{,z} \underline{e}_z$, $\text{grad } V = V_{r,r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} (V_{r,\theta} - V_\theta) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + V_{r,z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + V_{\theta,r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} (V_{\theta,\theta} + V_r) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + V_{\theta,z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + V_{z,r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} V_{z,\theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + V_{z,z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, $\text{div } \underline{V} = V_{r,r} + \frac{1}{r} V_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} V_r + V_{z,z}$ et $\Delta B = B_{,rr} + \frac{1}{r} B_{,r} + \frac{1}{r^2} B_{,\theta\theta} + B_{,zz}$.

Rotation dans un solide

On considère un solide élastique homogène et isotrope dont la configuration de référence est exempte de contraintes et occupe le volume :

$$\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R} : 0 < R_1 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \leq R_2 \quad \text{et} \quad 0 \leq a_3 \leq l\}.$$

On définit les coordonnées polaires (R, Θ) dans la configuration de référence par le changement de variables $(a_1, a_2) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$. On définit ensuite les vecteurs de base par $\underline{e}_R(\Theta) = \cos \Theta \underline{e}_1 + \sin \Theta \underline{e}_2$ et $\underline{e}_\Theta(\Theta) = -\sin \Theta \underline{e}_1 + \cos \Theta \underline{e}_2$.

On examine la déformation dont le champ de déplacement est $\underline{\xi}(\underline{a}) = \alpha R \underline{e}_\Theta(\Theta)$ en coordonnées polaires. On suppose que $\alpha \ll 1$.

- 1) Décrire et dessiner le volume Ω occupé par la configuration déformée.
- 2) Exprimer les composantes de $\underline{\xi}$ en coordonnées cartésiennes.
- 3) Calculer le tenseur des petites déformations associé à cette déformation.
- 4) Calculer les tenseurs des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a})$ pour tout point de Ω .

Fluide incompressible avec surface libre

On considère un écoulement à surface libre occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \text{ tels que } r \leq R_m \text{ et } 0 \leq z \leq h(r) \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

où R_m est le rayon de la cuve et $h(r)$ le profil de la surface libre que l'on cherche à déterminer. Le champ de gravité $-g \underline{e}_z$ est parallèle à l'axe de la cuve. On suppose que la cuve est remplie d'un fluide incompressible de masse volumique homogène ρ_0 , et animé du mouvement $\underline{U}(r, \theta, z) = V(r) \underline{e}_\theta(\theta)$ où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques et $V(r)$ un profil de vitesse. On suppose que le fluide est visqueux et que le mouvement vérifie $V(r) = \omega r$.

- 5) Écrire les équations de Navier-Stokes incompressibles en coordonnées cartésiennes en remplaçant le champ de vitesse par son expression.
- 6) Indiquer l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ en fonction du champ de pression p pour l'instant indéterminé.
- 7) On suppose que la pression atmosphérique p_a est constante. Indiquer la condition aux limites que l'on doit imposer sur la surface libre d'équation $z = h(r)$ en supposant la continuité des forces de contact.
- 8) Montrer que le champ de pression s'écrit sous la forme $p = p_c(z, t) + \beta(x^2 + y^2)$ où β est un constante que l'on explicitera.

- 9) Préciser le profil de pression $p_c(z, t)$ en appliquant la condition aux limites en $\underline{x} = h_0 \underline{e}_z$ en supposant que $h(0) = h_0$ est connu.
- 10) En déduire la forme de cette surface libre. En faire un tracé schématique.
- 11) On suppose $\omega = .5$ Hz, $R_m = 1$ m. Calculer la différence de hauteur maximale entre les points de la surface libre pour $g = 9.81$ m/s².

Fluide compressible à toit rigide

On considère un écoulement occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \text{ tels que } r \leq R_m \text{ et } 0 \leq z \leq h_m \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

où R_m et h_m sont respectivement le rayon et la hauteur de la cuve à toit rigide. Le champ de gravité est $-g \underline{e}_z$. On suppose que la cuve fermée est entièrement remplie d'un fluide parfait compressible et que l'ensemble est animé du mouvement de rotation solide $\underline{U}(r, \theta, z) = \omega r \underline{e}_\theta(\theta)$ où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques. On suppose que le fluide est un gaz parfait de masse molaire M . On suppose que la température $T = T_0$ est homogène et on cherche le champ de masse volumique solution sous une forme $\rho = \rho_e(r, z)$ qui ne dépend que de r et de z .

- 12) Écrire les équations d'Euler en remplaçant \underline{U} par sa valeur.
- 13) Montrer que l'hypothèse $\rho = \rho_e(r, z)$ et le champ de vitesse proposé sont compatibles avec l'équation de conservation de la masse.
- 14) Ecrire les équations de conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cylindriques en remplaçant le champ de vitesse par sa valeur.
- 15) En éliminant p , déduire des équations d'état et des équations d'Euler compressibles que la masse volumique est de la forme $\rho_e(r, z) = \rho_c(z) e^{\frac{\omega^2 r^2}{2\alpha}}$ où α est une constante que l'on précisera.
- 16) On suppose que $\rho(0, t) = \rho_e(0, 0) = \rho_0$ est connu. Donner l'expression du profil de masse volumique $\rho_c(z)$ au centre de la cuve.
- 17) En déduire l'expression du champ de pression $p(\underline{x}, t)$.
- 18) Faire un tracé schématique des isobares dans un plan horizontal.

Corrigé Rotation d'axe vertical**Rotation dans un solide**

1) On a $\Omega \sim \Omega_0$. C'est le volume compris entre deux cylindres de hauteur l de même axe et de rayons R_1 et R_2 . 2) On a $\xi_1(\underline{a}) = -\alpha a_2$ et $\xi_2(\underline{a}) = \alpha a_1$. 3) On en déduit que $\underline{H}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit $\underline{\epsilon}(\underline{a}) = \underline{0}$ (partie symétrique de \underline{H}). 4) La loi de Hooke entraîne $\underline{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon} = \underline{0}$.

Fluide incompressible avec surface libre

5) On a $\underline{U}(\underline{x}, t) = -\omega y \underline{e}_x + \omega x \underline{e}_y$ pour le champ de vitesse, $\frac{d}{dt}\underline{U} = -\omega^2 (x \underline{e}_x + y \underline{e}_y)$ pour l'accélération et $\Delta \underline{U} = \underline{0}$. Les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ et $\frac{d}{dt}\underline{U} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z + \nu \Delta \underline{U}$. On vérifie que l'on a bien $\operatorname{div} \underline{U} = 0$. Les équations de quantité de mouvement s'écrivent $-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1}$, $-\omega^2 y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2}$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$. 6) Comme $\underline{D}(\underline{x}, t) = \underline{0}$, on a $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{I}$. 7) On doit avoir $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -p_a \underline{I}$ pour les points \underline{x} de la surface libre. On en déduit $p(\underline{x}, t) = p_a$ pour ces points. 8) On déduit des équations de Navier-Stokes la relation $p(\underline{x}, t) = p_c(z, t) + \beta (x^2 + y^2)$ avec $\beta = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2$. 9) En reportant dans l'équation de la quantité de mouvement verticale, on obtient $\frac{\partial}{\partial z} p_c = -\rho_0 g$, d'où $p_c(z, t) = p_a - \rho_0 g (z - h_0)$. 10) En appliquant la condition aux limites $p = p_a$ à tous les points de la surface libre $z = h(r)$, on obtient $0 = -g[h(r) - h_0] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$ et donc $h(r) = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$. La surface libre a la forme d'un paraboloïde de révolution. 11) La différence est $h(R_m) - h_0 = \frac{\omega^2}{2g} R_m^2 \sim 1.3 \text{ cm}$.

Fluide compressible à toit rigide

12) La loi de conservation de la masse s'écrit $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}$. Comme $\operatorname{div} \underline{U} = 0$, on a donc $\frac{d\rho}{dt} = 0$. La loi de conservation de la quantité de mouvement pour le fluide parfait (inviscible) s'écrit $\frac{d}{dt}\underline{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z$ avec $\frac{d}{dt}\underline{U} = -\omega^2 (\underline{e}_x + \underline{e}_y)$. 13) L'hypothèse $\rho = \rho_e(r, z)$ entraîne bien $\frac{d\rho}{dt} = \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \rho = \omega r \frac{\partial}{\partial \theta} \rho_e(r, z) = 0$. 14) Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent $-\omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$, $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$ et $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$. 15) L'équation d'état entraîne $p = \rho_e(r, z) \frac{RT_0}{M}$. On en déduit $\frac{RT_0}{M} \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dr} = \omega^2 r$ et donc $\rho_e(r, z) = \rho_c(z) e^{\frac{\omega^2 r^2}{2\alpha}}$ avec $\alpha = \frac{RT_0}{M}$. 16) La relation hydrostatique entraîne $\frac{RT_0}{M} \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial \rho_c}{\partial z} = -g$ et donc $\rho_c(z) = \rho_0 e^{-\frac{gz}{\alpha}}$. 17) On a donc $p = \alpha \rho_e(r, z)$ avec $\rho_e(r, z) = \rho_0 \exp \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz \right) \right]$. 18) Les isobares sont des cercles concentriques. Le minimum de pression est au centre.