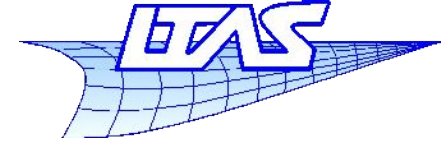


Plan du cours

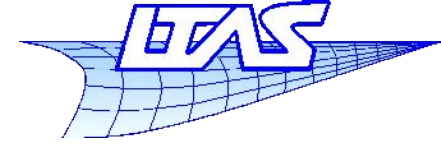
- Introduction
- Images et techniques d'affichage
 - Bases
 - Correction gamma
 - Aliasing et techniques pour y remédier
 - Stockage

Plan du cours

- Perspective 3D & transformations 2D / 3D
 - Passer d'un espace 3D vers un dispositif d'affichage 2D
- Deux paradigmes de génération d'images
- Représentation de courbes et surfaces
 - Splines & co.
- Rendu réaliste (Ray tracing)
 - Concepts et bases théoriques



Représentation des courbes et surfaces

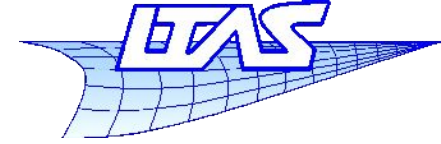


- Courbes
 - Interpolation
 - Splines cubiques
 - Approximation
 - Courbes de Bézier
 - Courbes B-spline
- Surfaces
 - Interpolation
 - Patch de Coons
 - Approximation
 - Surfaces B-splines
 - Surfaces de subdivision

- Deux références utiles :

JC.Léon, Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO, Hermes, 1991

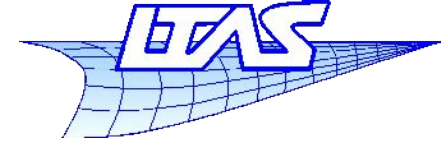
L. Piegl, W. Tiller, The NURBS Book, Second Edition, Springer , 1996



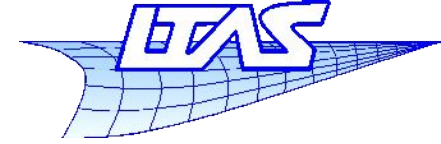
Splines cubiques

Infographie

Splines



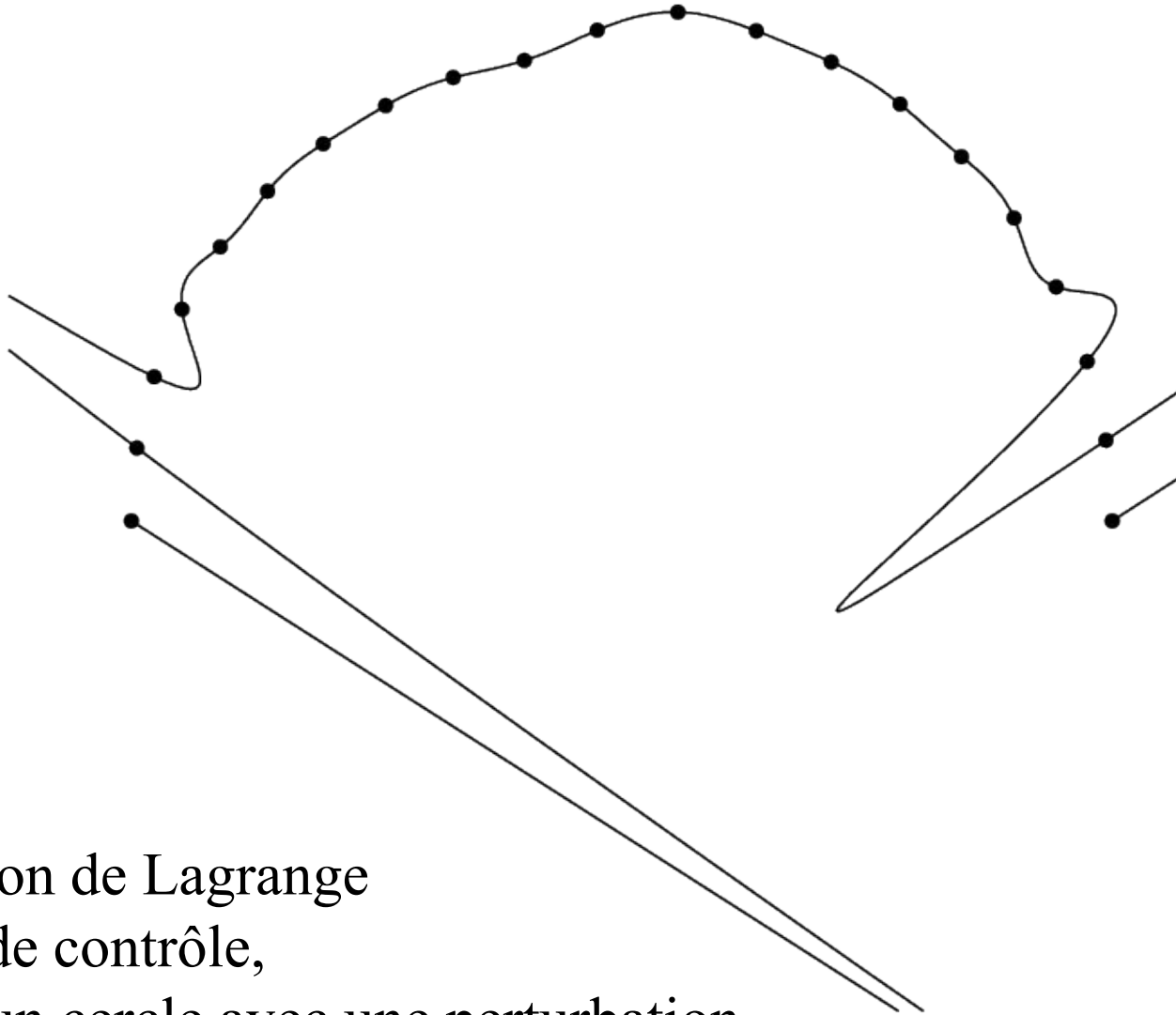
- But :
 - Interpoler des points (appelés points de contrôles)
 - Passer par les points (interpolation \neq approximation)
 - Garantir une certaine régularité à la courbe
 - Simple (efficace) à calculer



- Partons du principe que l'on a un grand nombre de points de contrôle
- Mais on ne veut pas d'une interpolation de Lagrange !
 - Correspond à un construire UN polynôme d'ordre suffisant pour passer par tous les points (il y en a $d+1$)
 - Continuité C_∞

$$P(u) = \sum_{i=0}^d P_i L_i^d(u)$$

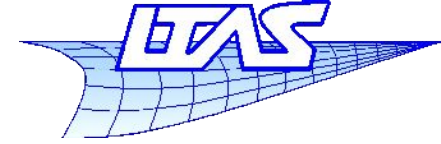
Splines



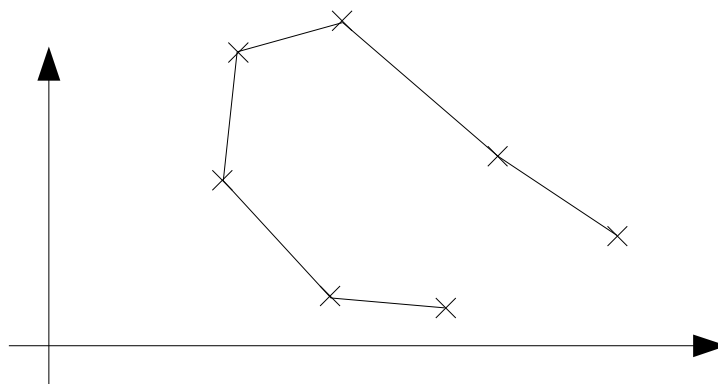
Interpolation de Lagrange

21 points de contrôle,

situés sur un cercle, avec une perturbation

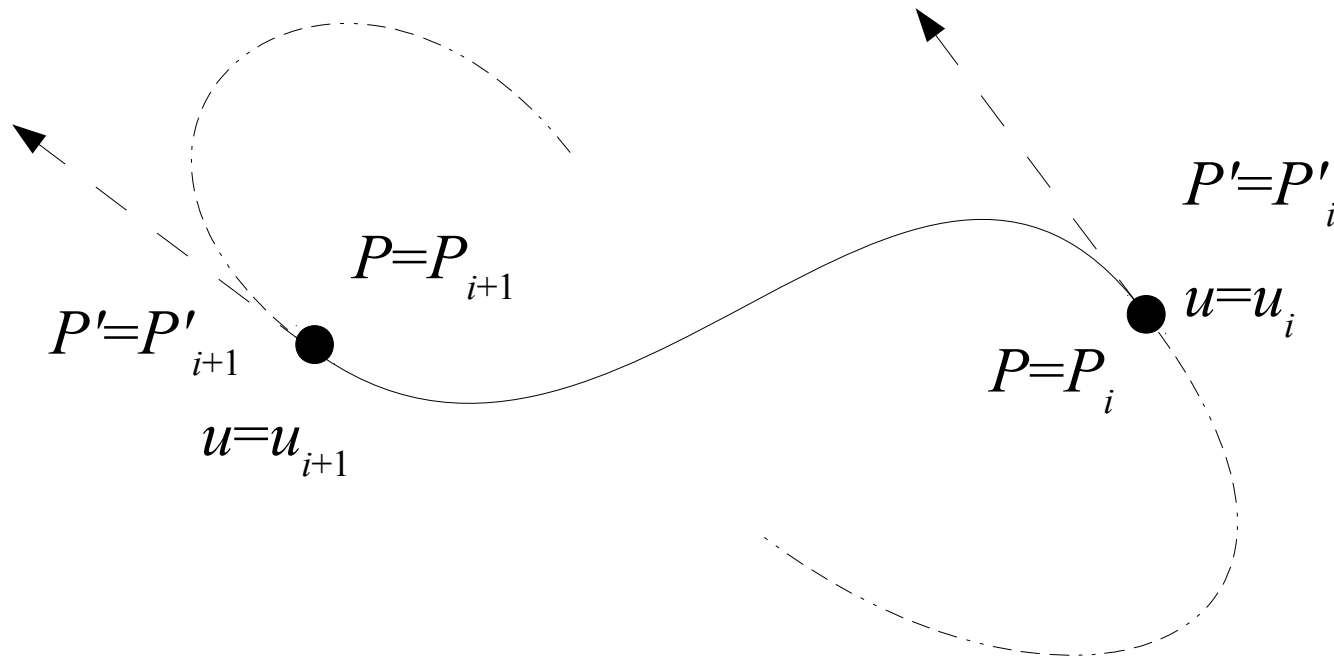


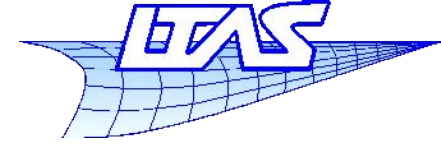
- Partons du principe que l'on a un grand nombre de points de contrôle
 - On devrait rester avec un ordre faible mais conserver suffisamment de liberté pour passer par tous les points
 - Courbe définie par morceaux ... et d'ordre faible (1)



Splines

- On va construire une interpolation par morceaux telle que l'on peut imposer les pentes aux noeuds





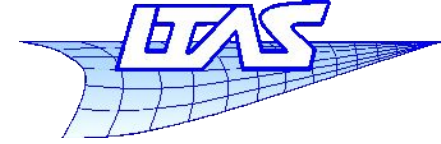
- Dans chaque intervalle $[i, i+1]$, on veut disposer d'un polynôme indépendant
- On dispose de 4 paramètres : position à chaque point et tangentes associées.
 - On doit donc disposer d'une base à 4 degrés de libertés, donc d'ordre 3 dans le cas de polynômes.

$$P(u_i) = P_i \equiv \begin{cases} x(u_i) = x_i \\ y(u_i) = y_i \end{cases}$$

$$x_{[i]}(u) = A_{[i]0} + A_{[i]1}u + A_{[i]2}u^2 + A_{[i]3}u^3, \quad u \in [u_i, u_{i+1}]$$

Infographie

Splines



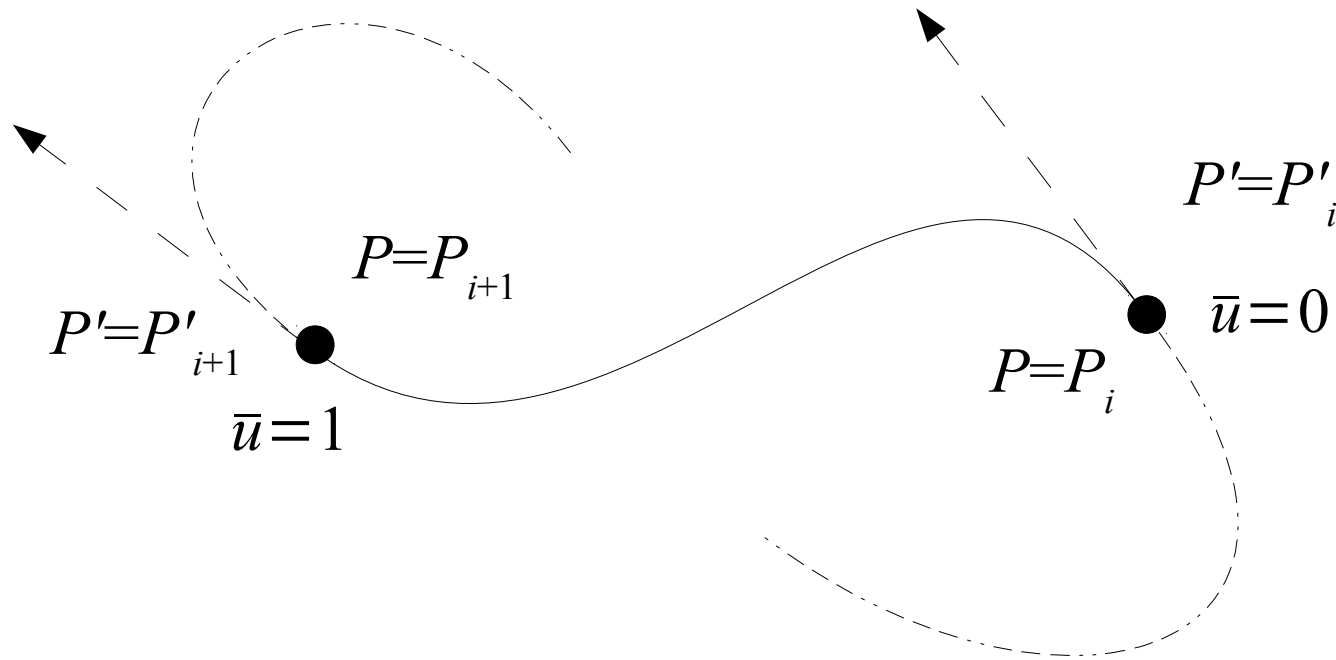
- Dans un premier temps, posons que chaque intervalle est unitaire i.e. $u_{i+1} - u_i = 1$
- On peut donc sans problème reparamétriser l'intervalle :

$$\bar{u} = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} = u - u_i \quad \frac{d\bar{u}}{du} = 1$$

- On a donc sur chaque intervalle i la relation :

$$x_{[i]}(\bar{u}) = a_{[i]0} + a_{[i]1} \bar{u} + a_{[i]2} \bar{u}^2 + a_{[i]3} \bar{u}^3 \quad , \quad \bar{u} \in [0, 1]$$

Splines



- On passe par les deux points :

$$P(\bar{u}_0=0)=P_i \Leftrightarrow a_{[i]0} + a_{[i]1} \bar{u}_0 + a_{[i]2} \bar{u}_0^2 + a_{[i]3} \bar{u}_0^3 = x_i$$

$$P(\bar{u}_1=1)=P_{i+1} \Leftrightarrow a_{[i]0} + a_{[i]1} \bar{u}_1 + a_{[i]2} \bar{u}_1^2 + a_{[i]3} \bar{u}_1^3 = x_{i+1}$$

- On impose les deux pentes :

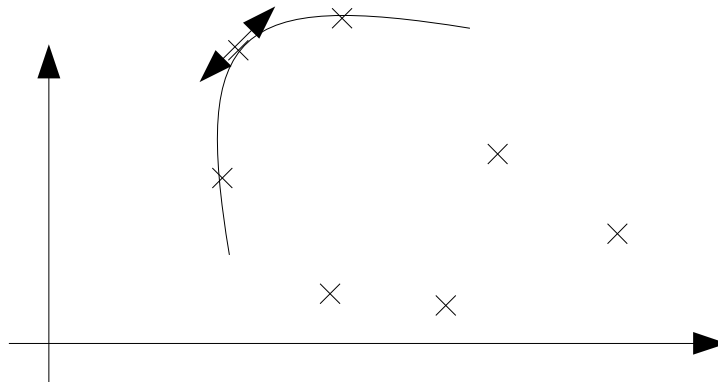
$$P'(\bar{u}_0=0)=P'_i \Leftrightarrow a_{[i]1} + 2a_{[i]2} \bar{u}_0 + 3a_{[i]3} \bar{u}_0^2 = x'_i$$

$$P'(\bar{u}_1=1)=P'_{i+1} \Leftrightarrow a_{[i]1} + 2a_{[i]2} \bar{u}_1 + 3a_{[i]3} \bar{u}_1^2 = x'_{i+1}$$

- Au final :

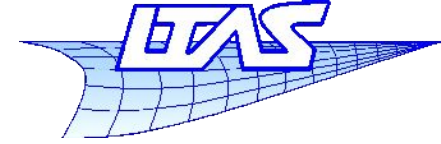
$$\begin{cases} a_{[i]0} = x_i \\ a_{[i]1} = x'_i \\ a_{[i]2} = 3(x_{i+1} - x_i) - 2x'_i - x'_{i+1} \\ a_{[i]3} = 2(x_i - x_{i+1}) + x'_i + x'_{i+1} \end{cases}$$

- On a continuité
- On a continuité de la dérivée
- Mais comment choisir les pentes ?
 - Laisser le choix à l'utilisateur (liberté « artistique »)
 - Automatiquement ...



Infographie

Splines



- Par différences finies centrées à trois points:

$$x'_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2(u_{i+1} - u_i)} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2(u_i - u_{i-1})}$$

- Aux extrémités on prend des différences finies simples (décentrées)

$$x'_0 = \frac{x_1 - x_0}{u_1 - u_0} \quad x'_{n-1} = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{u_{n-1} - u_{n-2}}$$

- Dépend de la paramétrisation !
- Spline cardinale

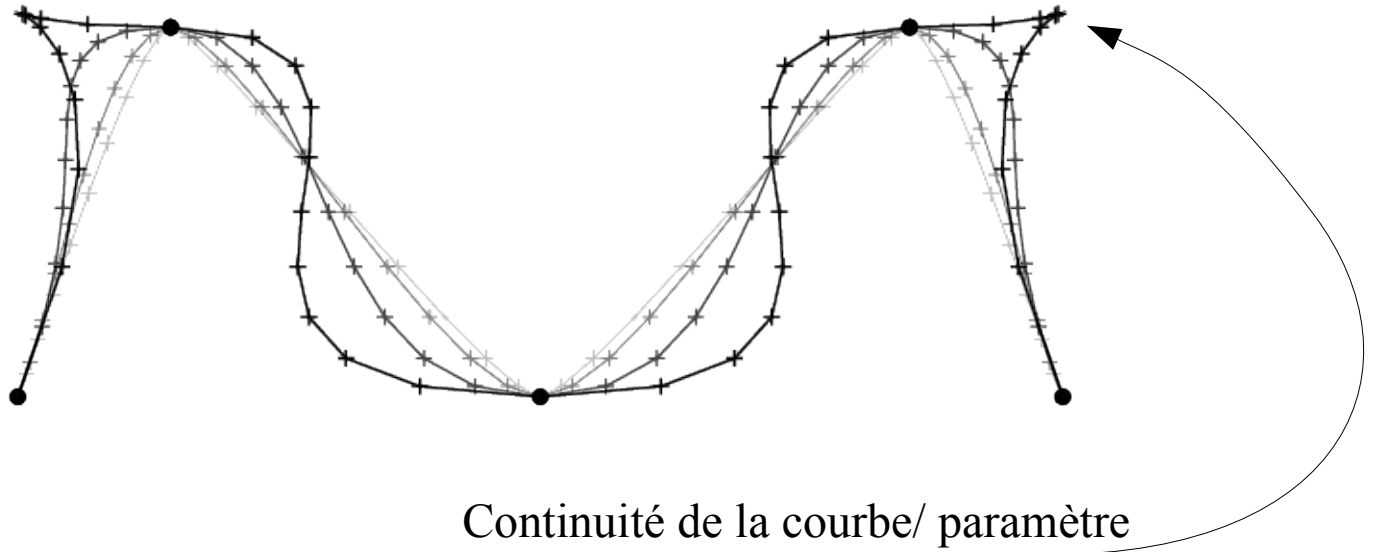
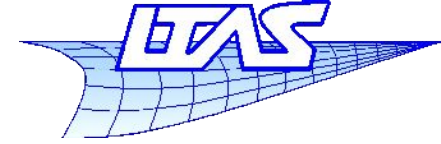
$$x'_0 = (1 - c)(x_1 - x_0)$$

$$x'_i = (1 - c) \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}, \quad 0 \leq c \leq 1$$

$$x'_{n-1} = (1 - c)(x_{n-1} - x_{n-2})$$
- c est un paramètre de « tension ». $c=0$ donne une spline de Catmull-Rom, $c=1$ une succession de droites qui zigzaguent.

Infographie

Splines

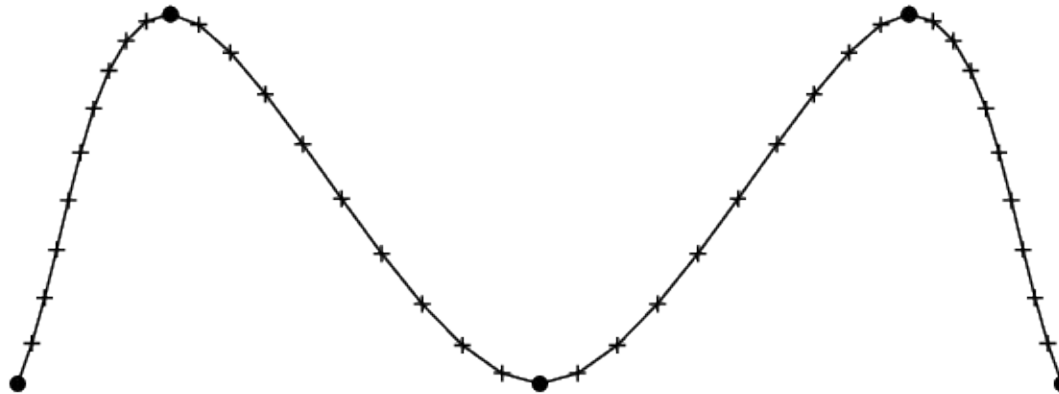
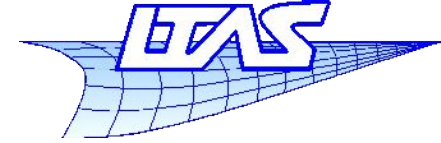


Continuité de la courbe/ paramètre
mais perte de régularité (et de la continuité
géométrique dans la plupart des cas)

5 points, différences finies en variant la paramétrisation
 $[0..1]$, $[0..2]$, $[0..5]$, $[0..10]$

Infographie

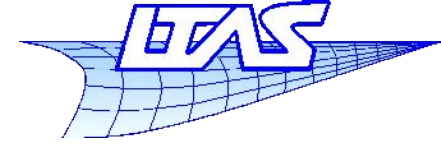
Splines



5 points, Spline cardinale (Catmull-Rom) $c=0$

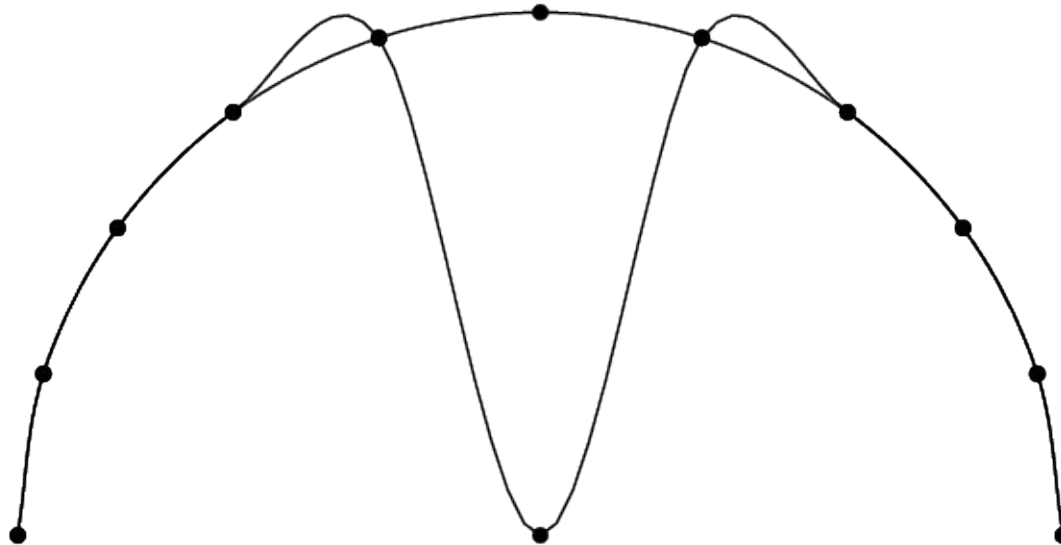
Infographie

Splines



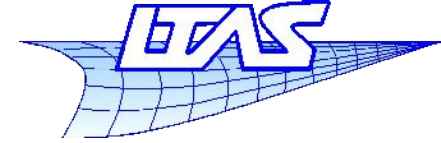
La spline de Catmull-Rom est très utilisée en infographie

- Simple à calculer, efficace
- Contrôle local (prix à payer : dérivée seconde discontinue)
- Animations par « keyframing »
 - Assure un mouvement fluide par la continuité de la tangente



Infographie

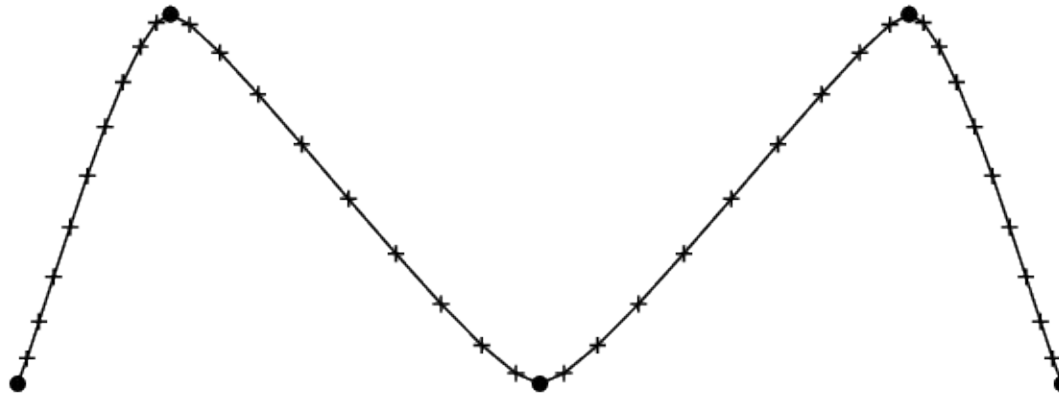
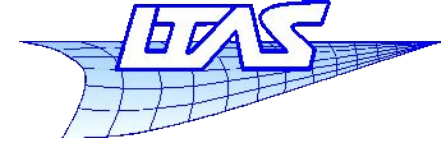
Splines



5 points, Spline cardinale $c=0.25$

Infographie

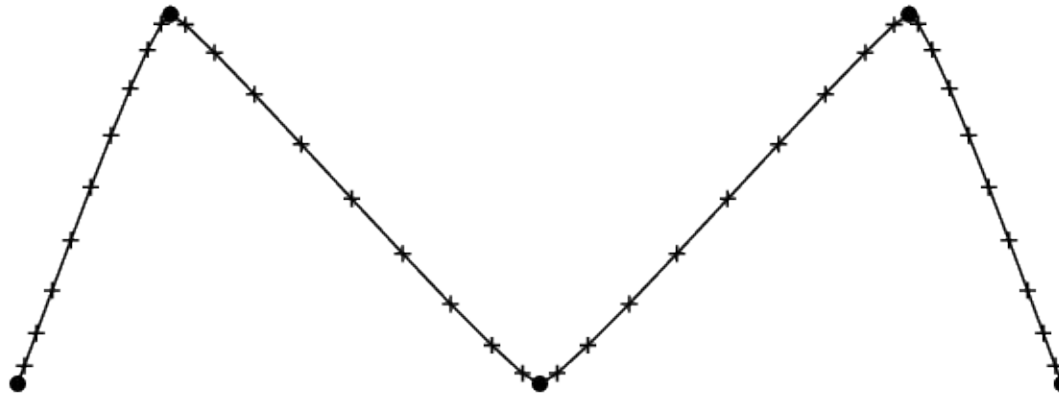
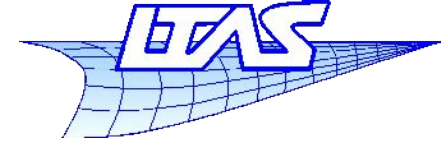
Splines



5 points, Spline cardinale $c=0.5$

Infographie

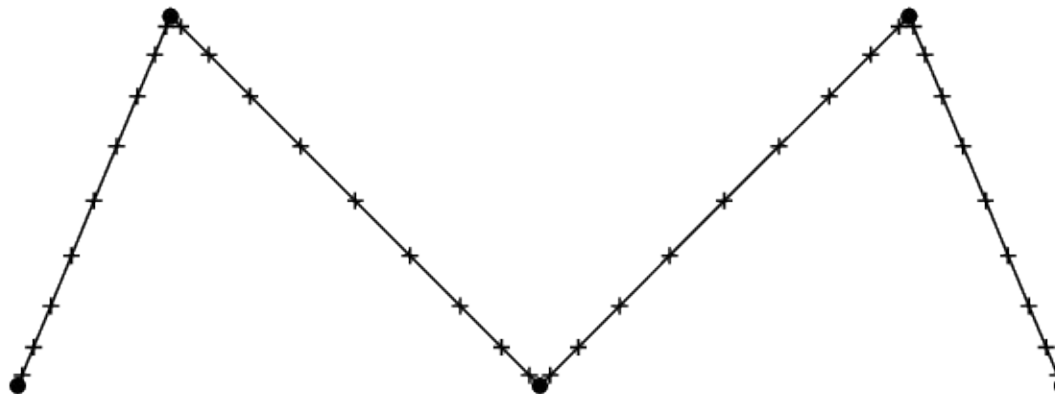
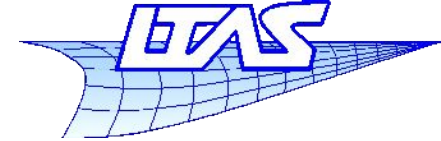
Splines



5 points, Spline cardinale $c=0.75$

Infographie

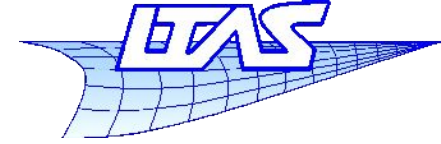
Splines



5 points, Spline cardinale $c=1.0$

Infographie

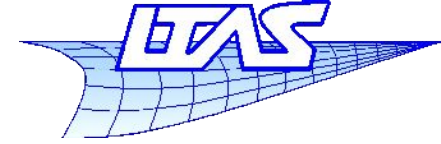
Splines



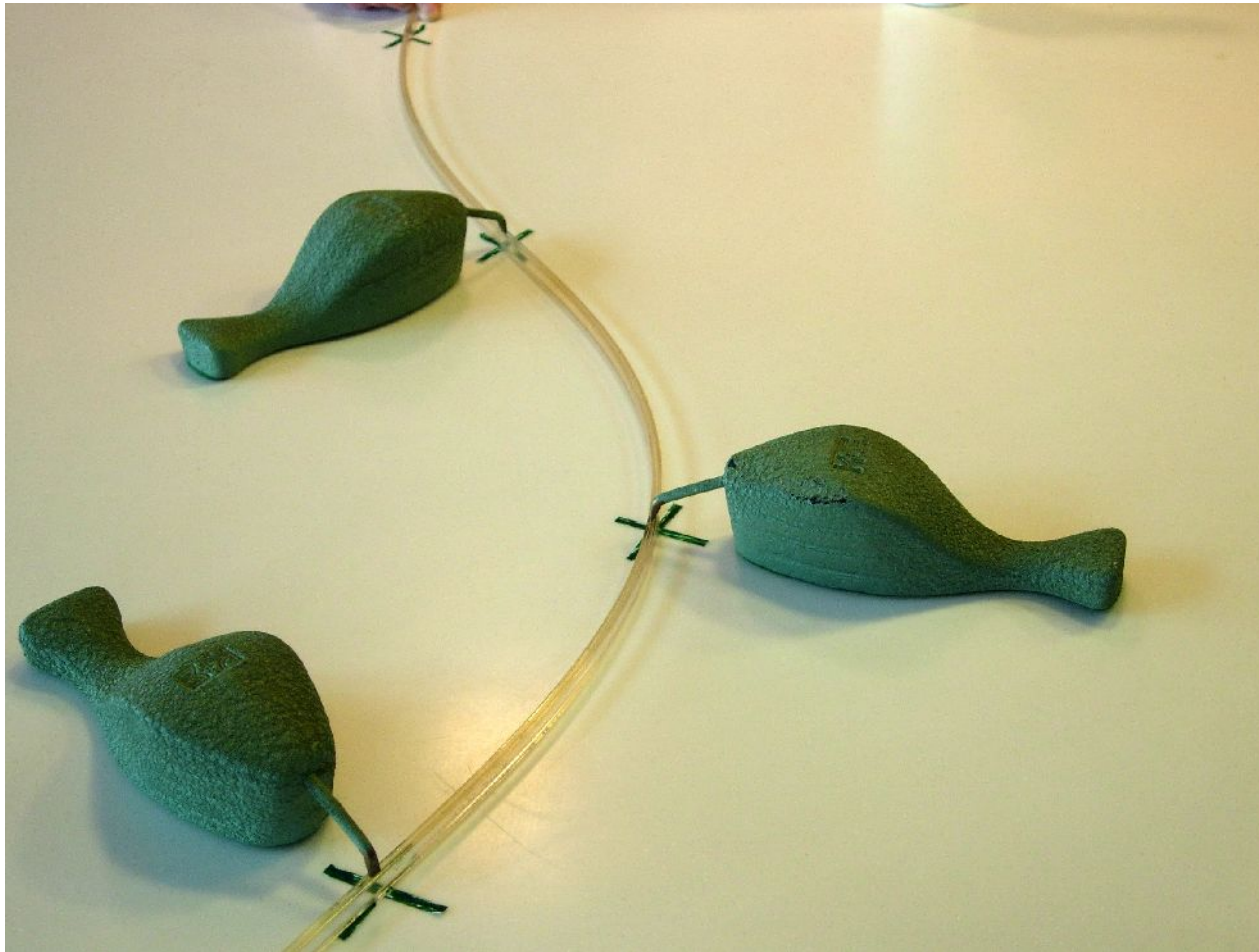
- On peut imposer la continuité de la dérivée seconde...
 - Sur une courbe avec n points, on a n relations supplémentaires à imposer
 - On ne peut imposer la continuité de la dérivée seconde que sur les $n-2$ points intérieurs
 - Restent les points extérieurs
 - On peut imposer une dérivée seconde nulle.
 - On obtient ce que l'on nomme « **spline naturelle** »
 - On peut aussi imposer une certaine pente
 - Imposer que la dérivée troisième soit nulle sur les points 1 et $n-2$
 - Implique un polynôme simple (en un « morceau ») pour les deux premiers segments et les deux derniers.

Infographie

Splines

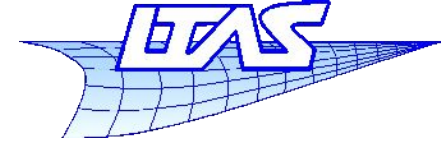


- Spline naturelle : approximation mathématique de la spline historiquement utilisée en construction navale.



C. DeBoor





$$\begin{cases} a_{[i]0} = x_i \\ a_{[i]1} = x'_i \\ a_{[i]2} = 3(x_{i+1} - x_i) - 2x'_i - x'_{i+1} \\ a_{[i]3} = 2(x_i - x_{i+1}) + x'_i + x'_{i+1} \end{cases}$$

- On impose la dérivée seconde

$$x''_{[i-1]}(1) = x''_{[i]}(0) \Leftrightarrow 2a_{[i-1]2} + 6a_{[i-1]3} = 2a_{[i]2}$$

- On substitue dans les équations « internes »

$$\begin{aligned} 2[3(x_i - x_{i-1}) - 2x'_{i-1} - x'_i] + 6[2(x_{i-1} - x_i) + x'_{i-1} + x'_i] \\ = 2[3(x_{i+1} - x_i) - 2x'_i - x'_{i+1}] \end{aligned}$$

- Enfin on obtient :

$$x'_{i-1} + 4x'_i + x'_{i+1} = 3(x_{i+1} - x_{i-1})$$

- Aux extrémités on veut

$$x''_{[0]}(0) = 0 \Leftrightarrow 2a_{[0]2} = 0$$

$$2x'_0 + x'_1 = 3(x_1 - x_0)$$

$$x''_{[n-2]}(1) = 0 \Leftrightarrow 2a_{[n-2]2} + 6a_{[n-2]3} = 0$$

$$x'_{n-2} + 2x'_{n-1} = 3(x_{n-1} - x_{n-2})$$

- On a donc un système linéaire à n inconnues:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-2} \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x_1 - x_0) \\ 3(x_2 - x_0) \\ 3(x_3 - x_1) \\ \vdots \\ 3(x_{n-1} - x_{n-3}) \\ 3(x_{n-1} - x_{n-2}) \end{pmatrix}$$

- En résolvant le système, on a :

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-2}' \\ x_{n-1}' \end{pmatrix}$$

que l'on reporte dans

$$\begin{cases} a_{[i]0} = x_i \\ a_{[i]1} = x_i' \\ a_{[i]2} = 3(x_{i+1} - x_i) - 2x_i' - x_{i+1}' \\ a_{[i]3} = 2(x_i - x_{i+1}) + x_i' + x_{i+1}' \end{cases}$$

pour obtenir le polynôme dans chaque portion

$$x_{[i]}(\bar{u}) = a_{[i]0} + a_{[i]1}\bar{u} + a_{[i]2}\bar{u}^2 + a_{[i]3}\bar{u}^3, \quad 0 \leq \bar{u} < 1$$

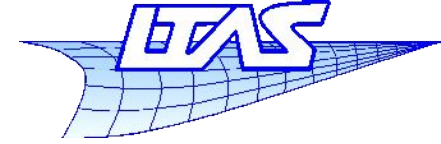
A partir du paramètre u global, il faut trouver dans quelle portion on se trouve puis évaluer le bon polynôme...

Splines

Catmull-Rom

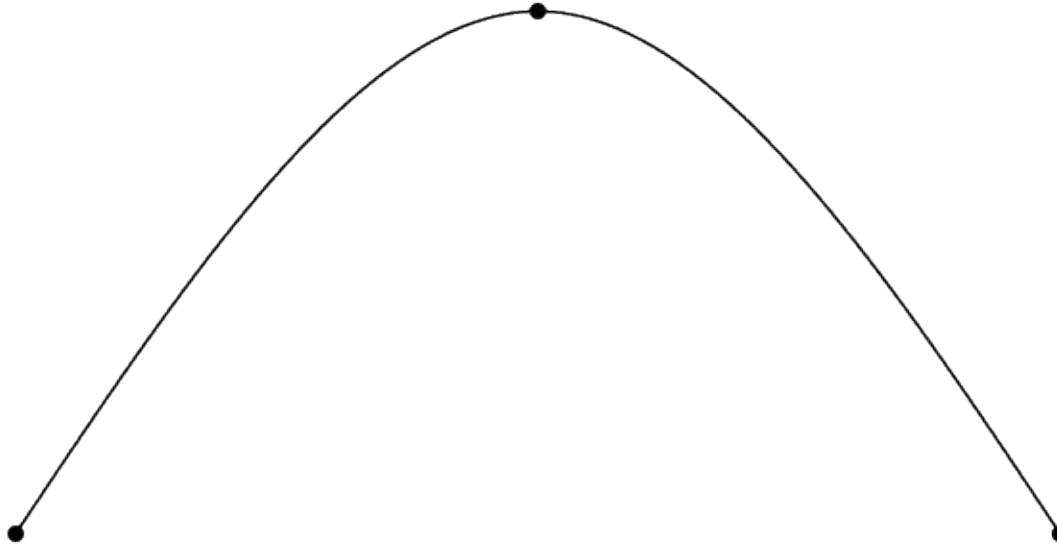


5 points de contrôle, Spline naturelle



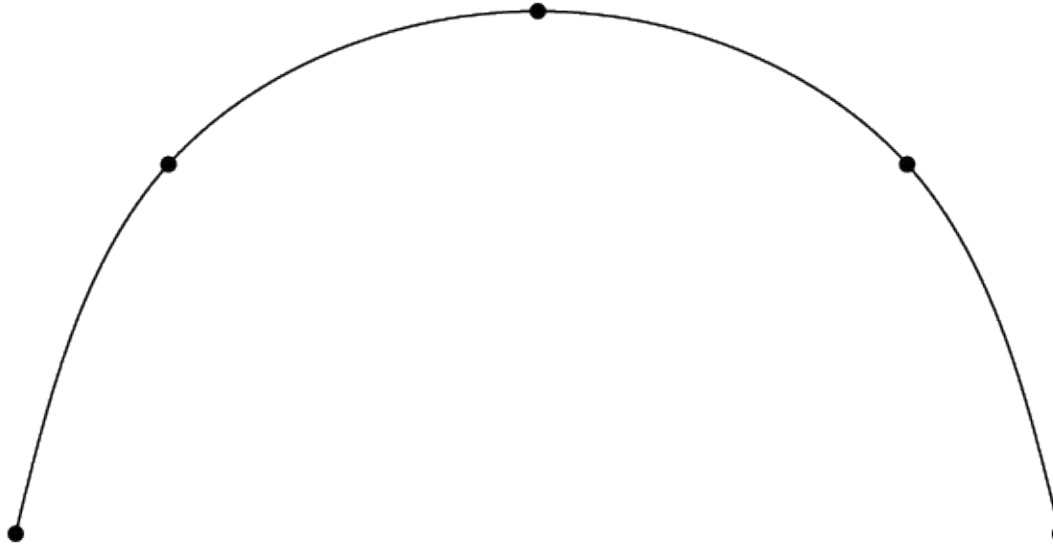
- Une expérience
 - On approxime un cercle par un nombre de points croissants
 - Concomitamment , ~~l'ordre de l'approximation~~ Le nombre de morceaux augmente.
 - Dans tous les cas, la courbe est C_∞ C_2

Splines



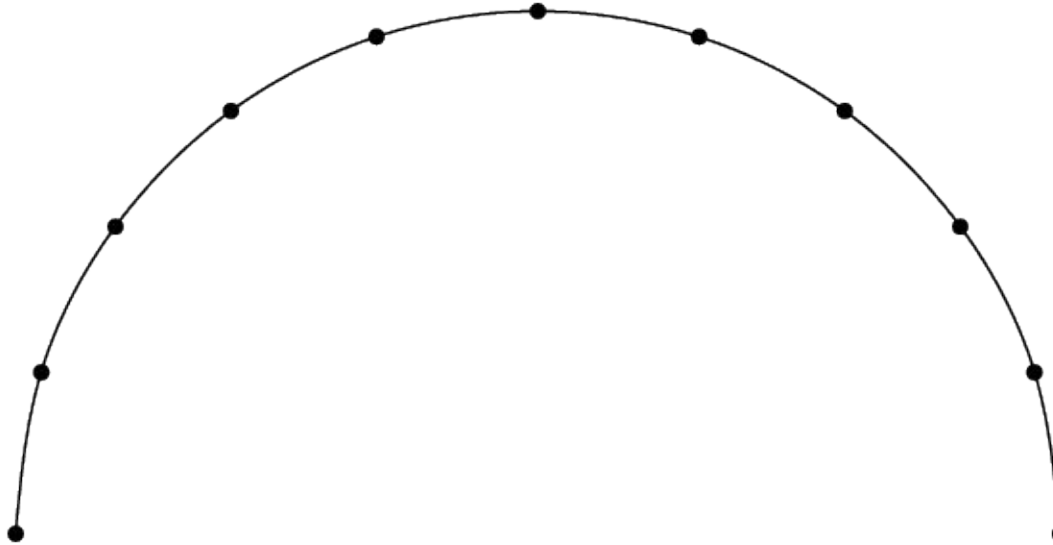
3 points

Splines



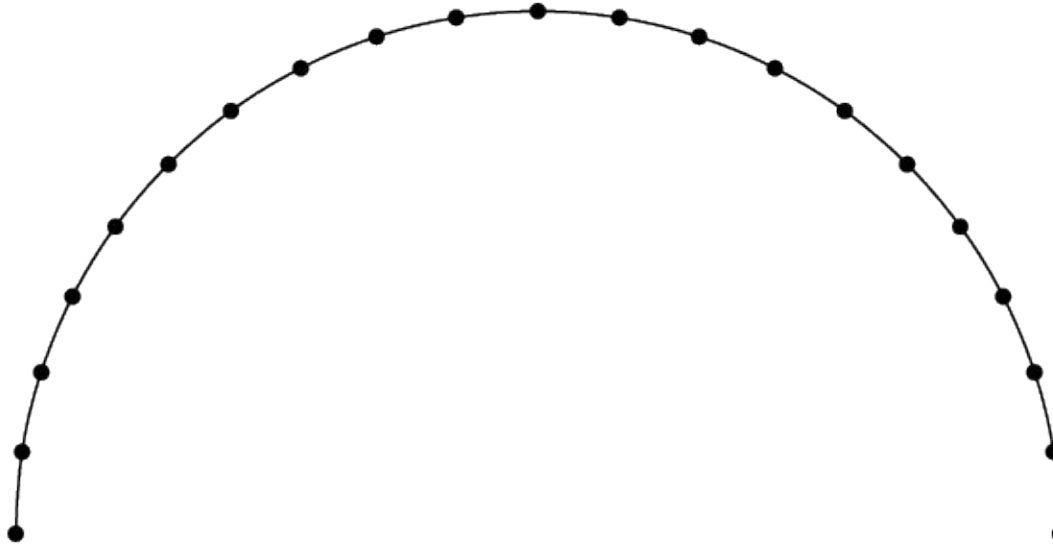
5 points

Splines



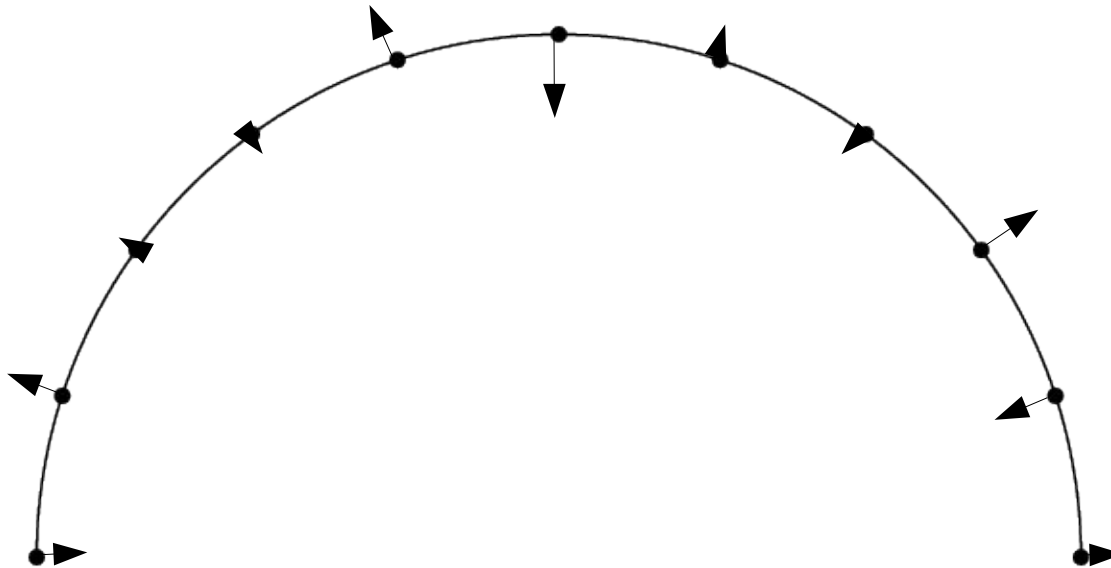
11 points

Splines

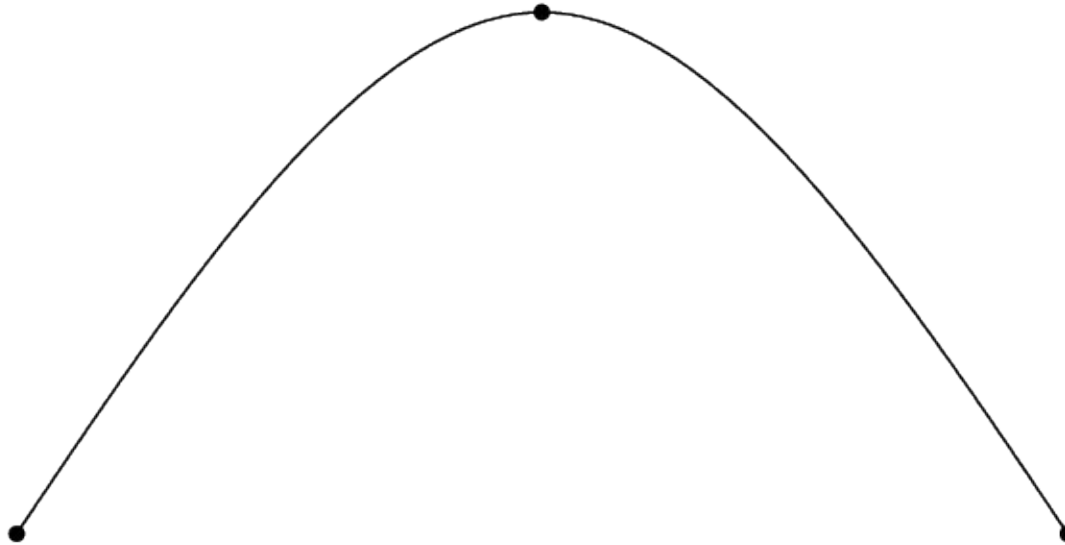


21 points

- Perturbation aléatoire
 - Chaque point est déplacé radialement d'une valeur comprise entre -0.5 et $+0.5$ % du rayon du cercle

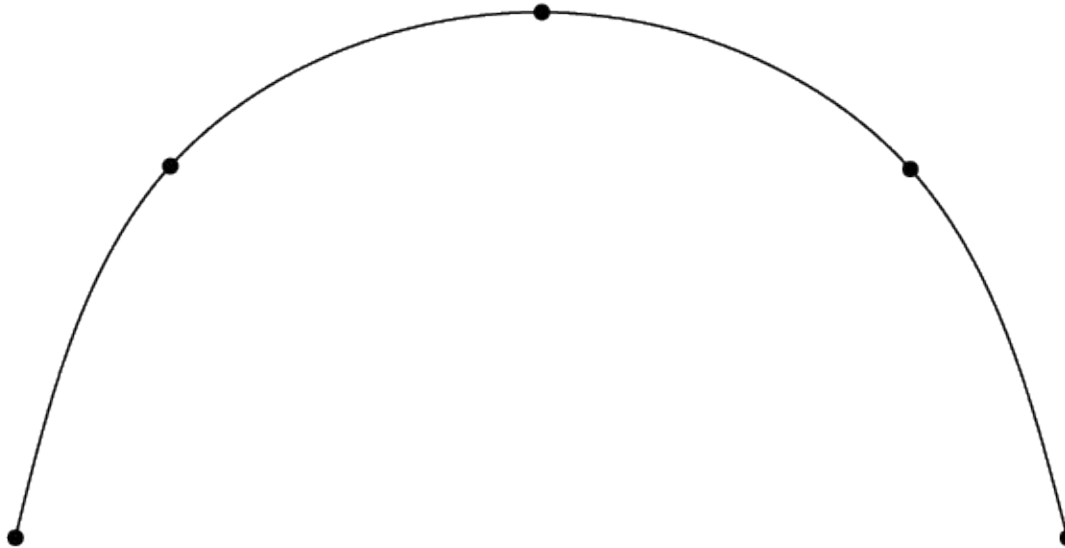


Splines



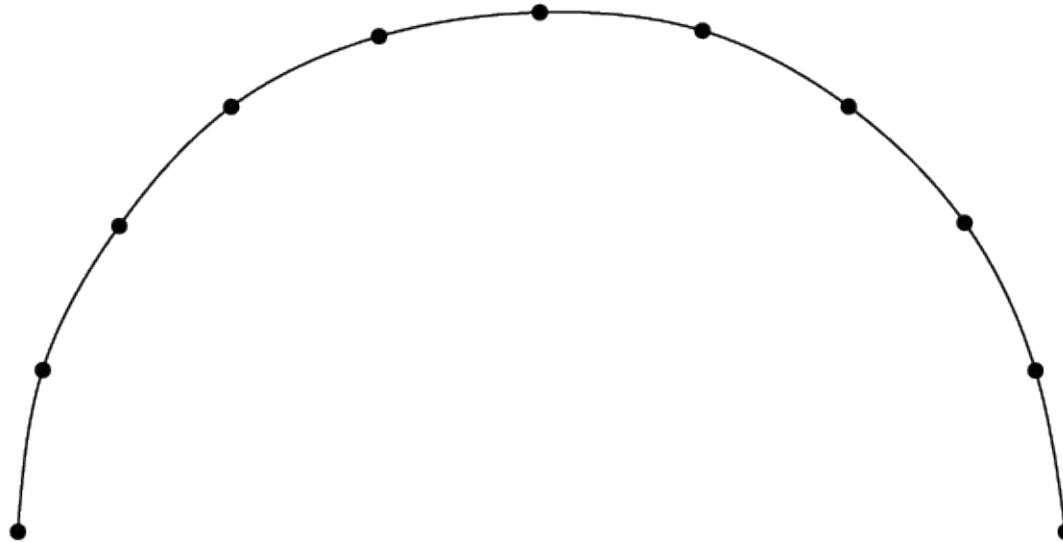
3 points, perturbation aléatoire 1%

Splines



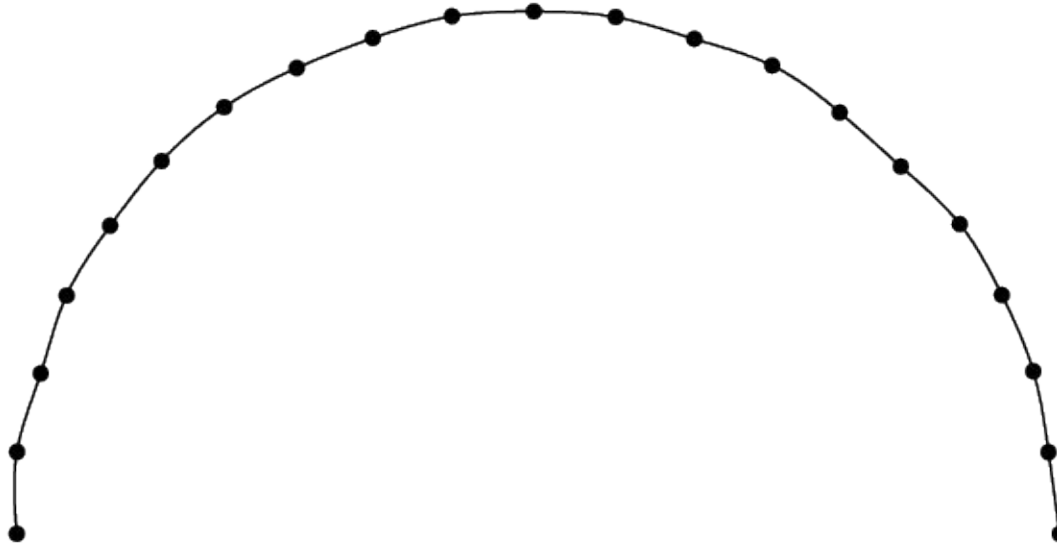
5 points, perturbation aléatoire 1%

Splines



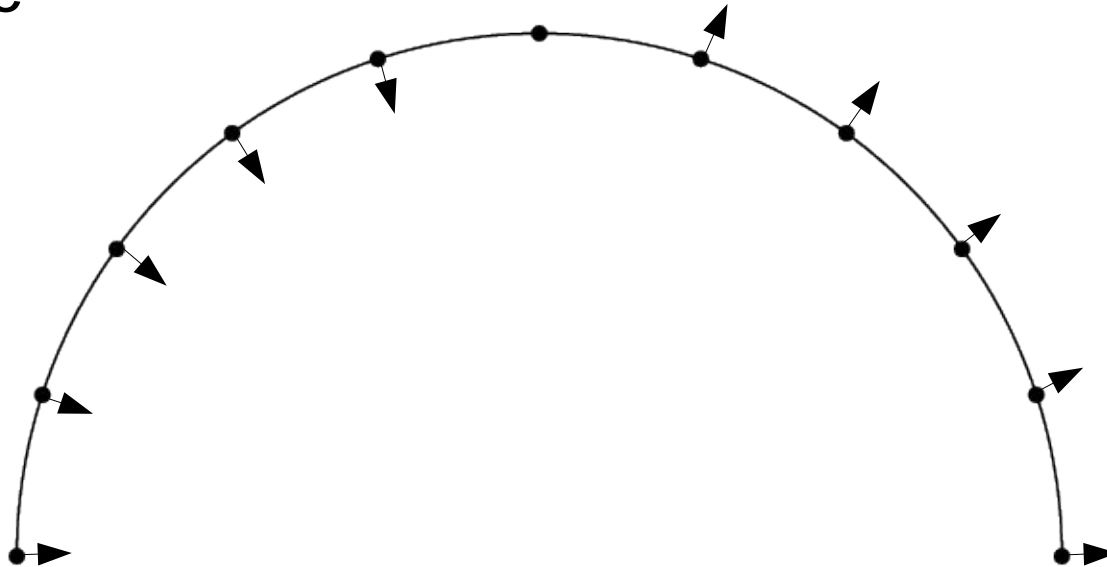
11 points, perturbation aléatoire 1%

Splines

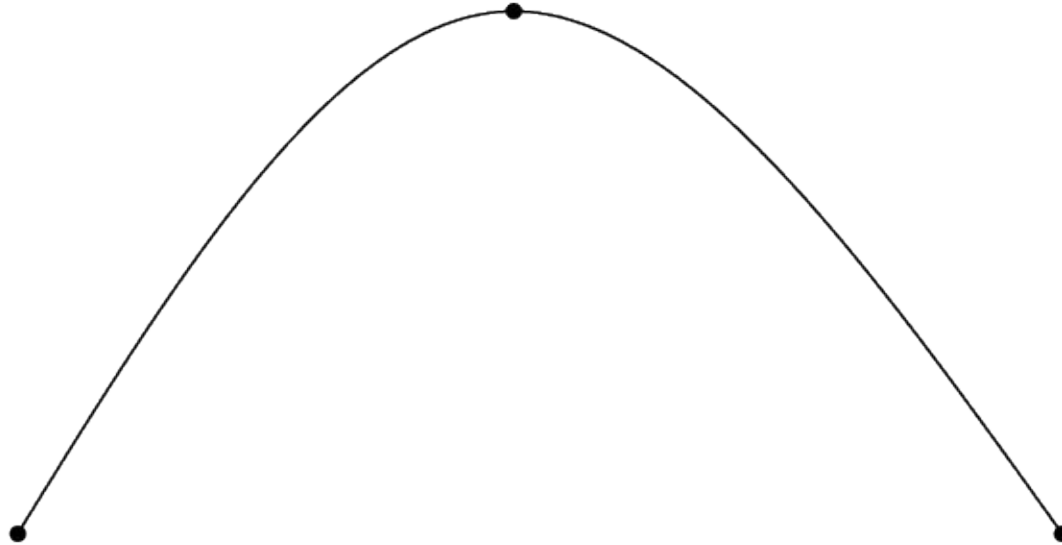


21 points, perturbation aléatoire 1%

- Perturbation déterministe
 - Chaque point est déplacé radialement en fonction de sa position d'une valeur de -5 ou +5 % du rayon du cercle

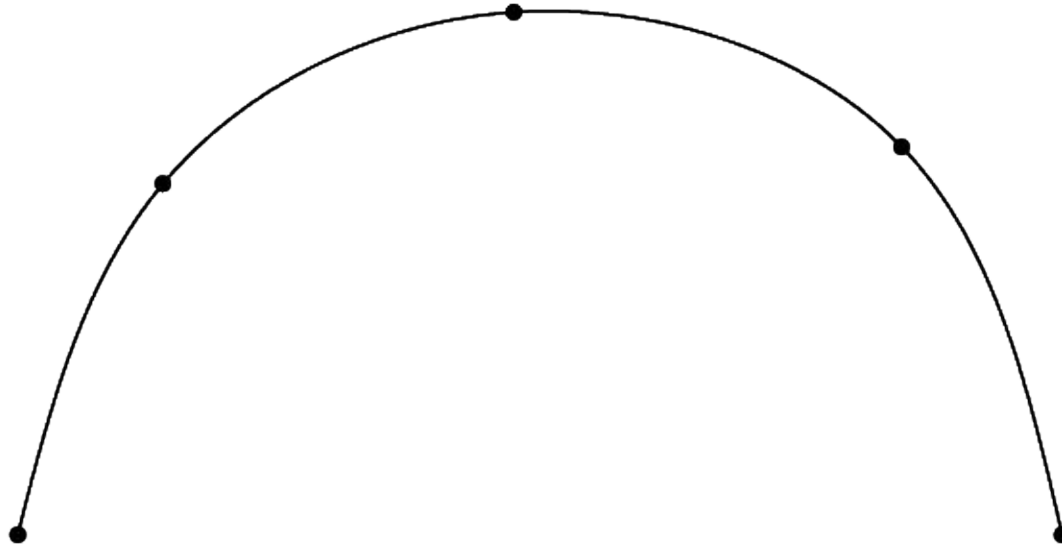


Splines



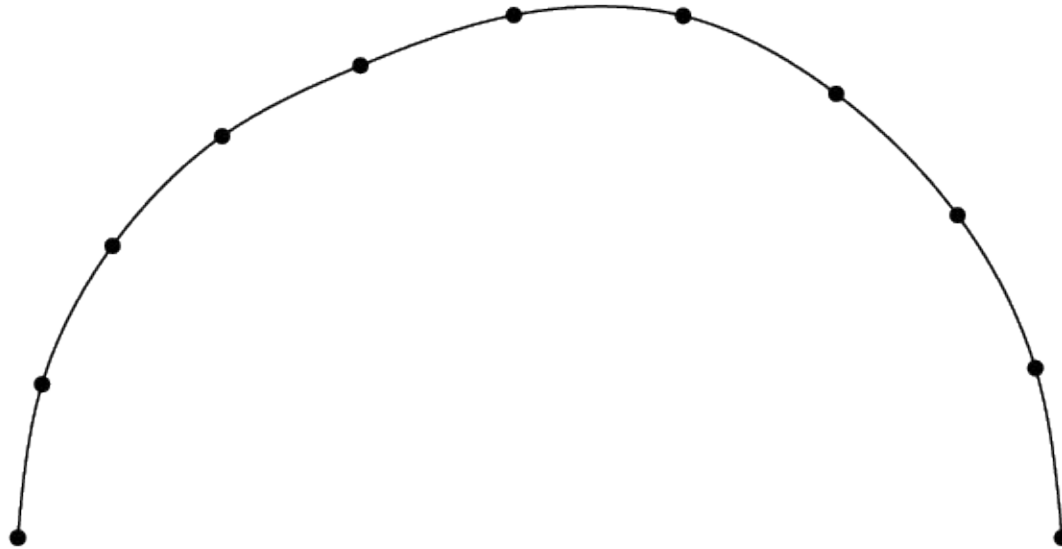
3 points, perturbation déterministe 5%

Splines



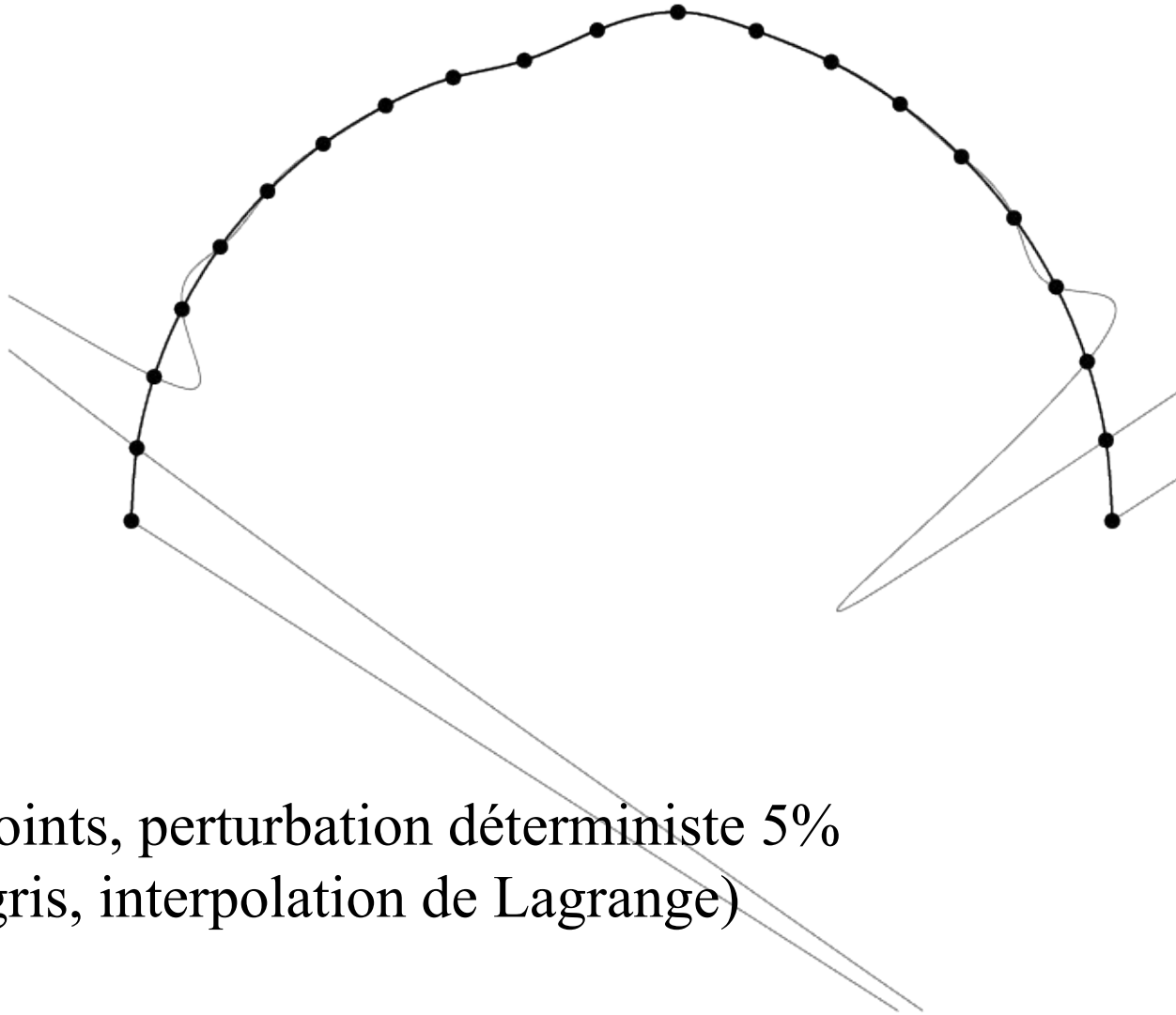
5 points, perturbation déterministe 5%

Splines



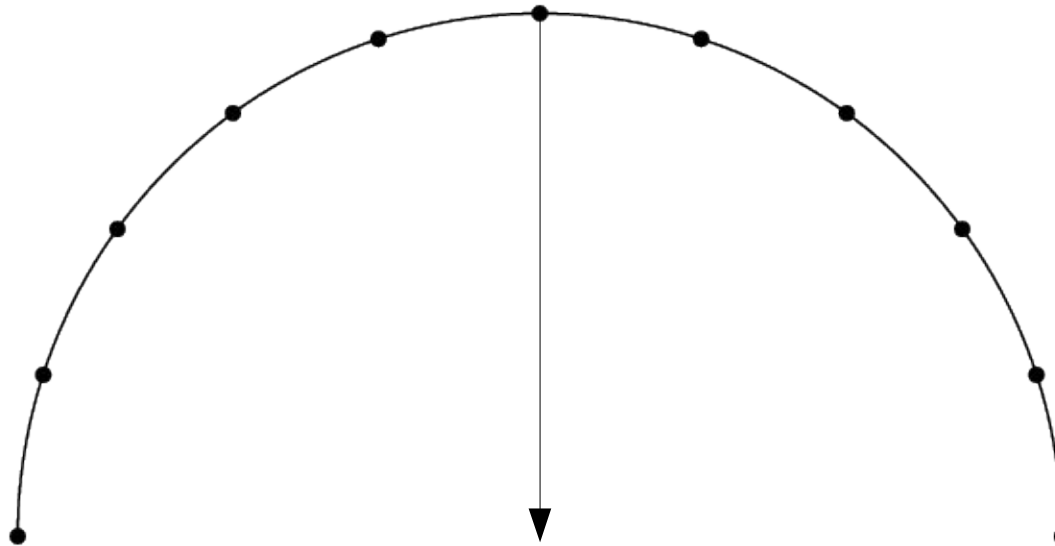
11 points, perturbation déterministe 5%

Splines

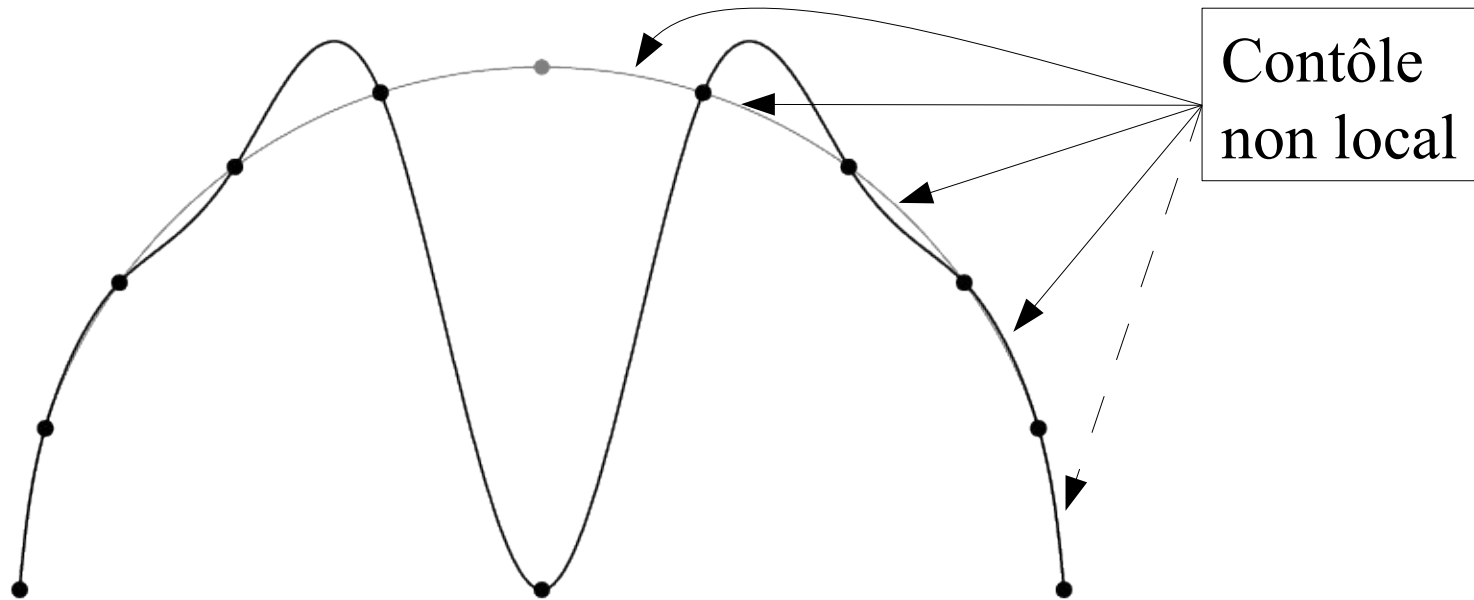


21 points, perturbation déterministe 5%
(en gris, interpolation de Lagrange)

- Perturbation d'un point
 - On déplace le point indiqué d'une grande valeur

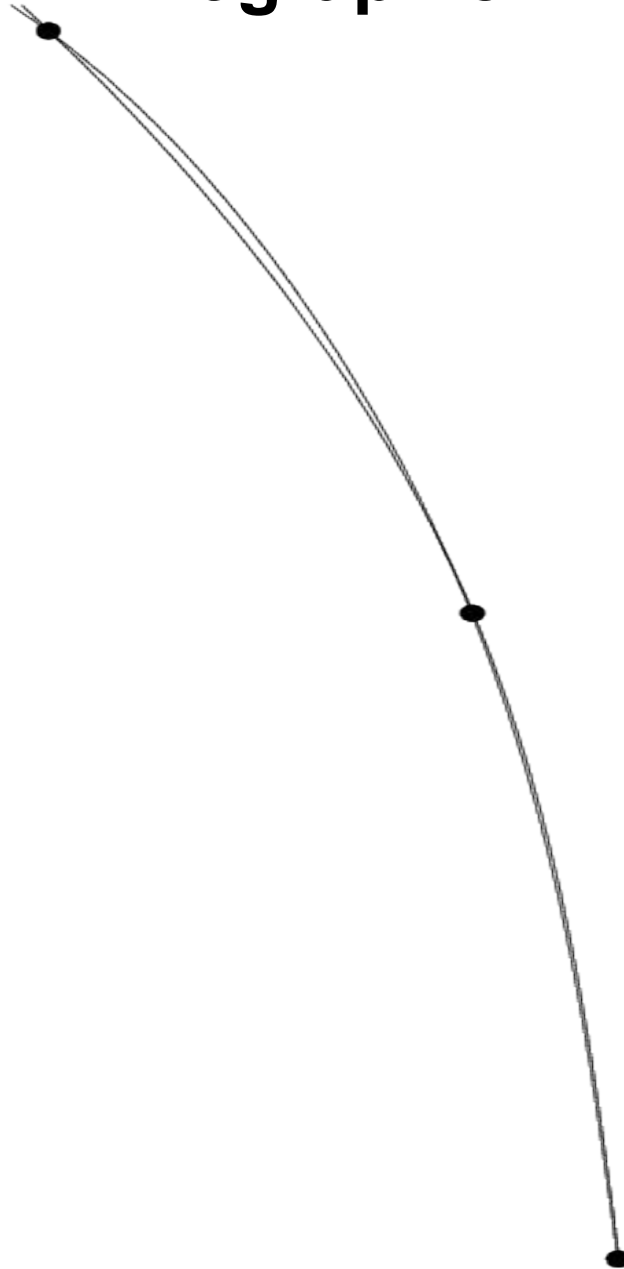
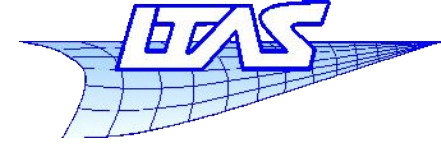


Splines

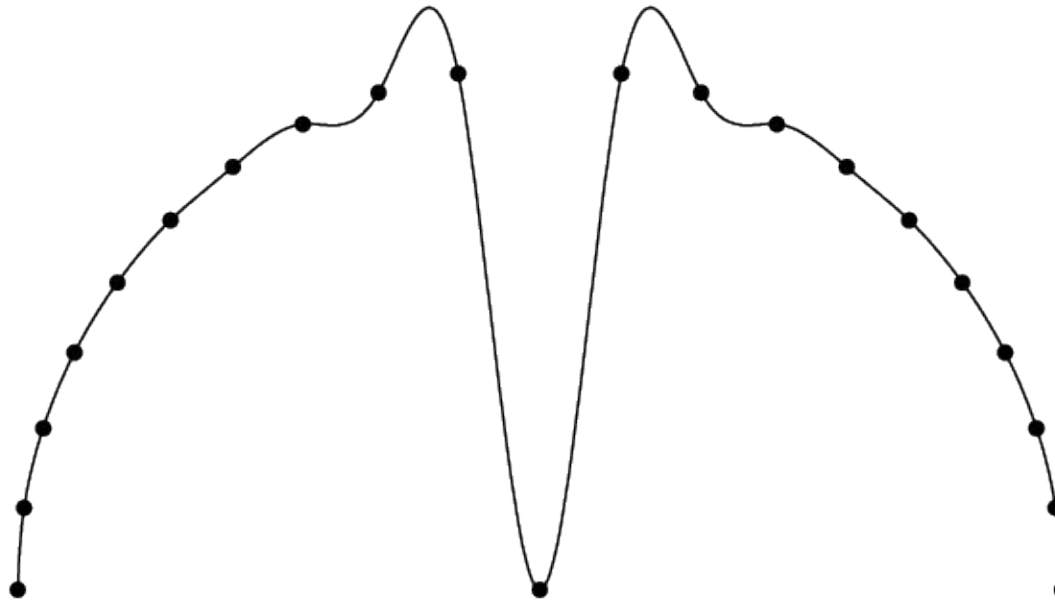


11 points

Infographie

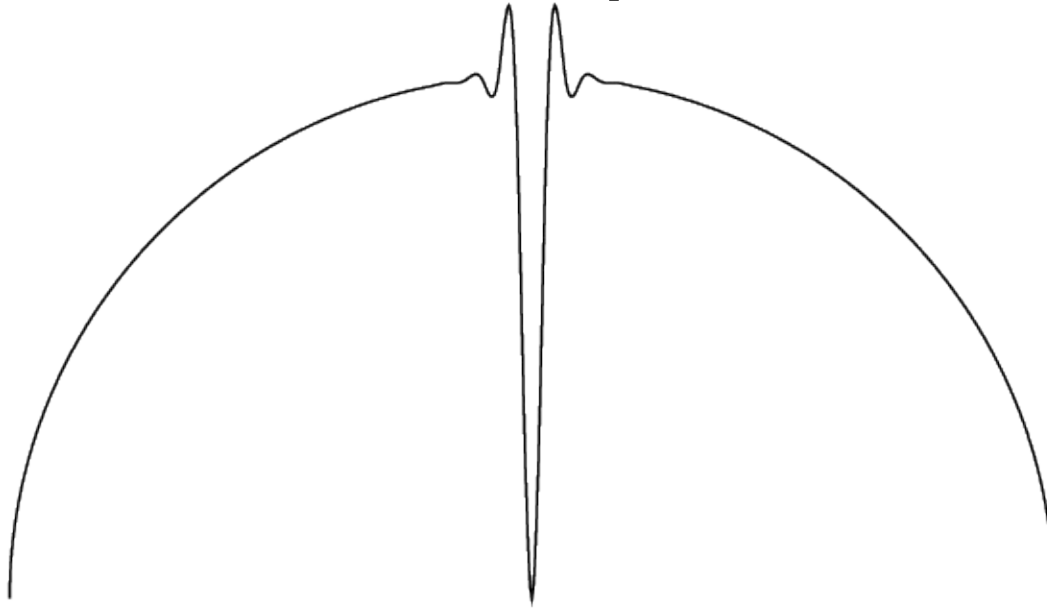


Splines



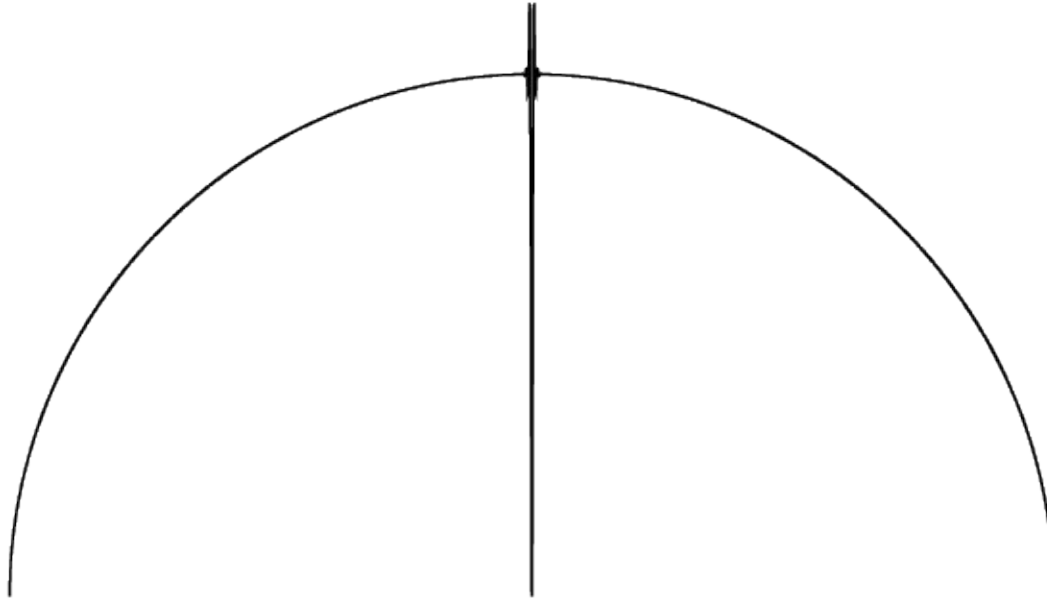
21 points

Splines

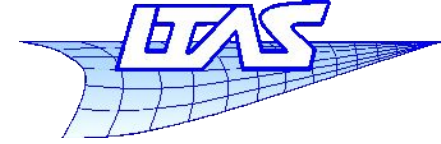


99 points

Splines

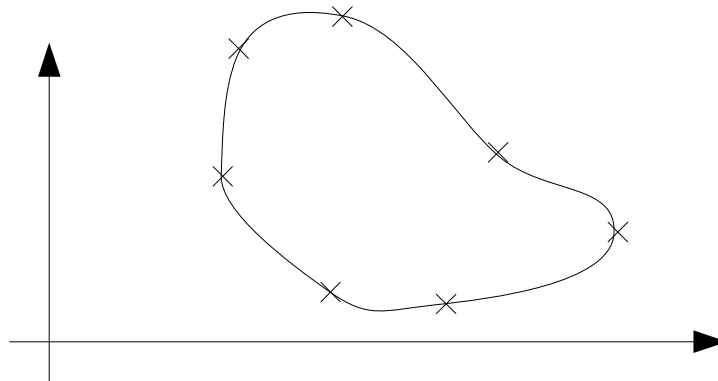


999 points



- Schéma d'interpolation stable
- Pas de phénomène de Runge
- Le déplacement d'un point affecte encore toute la courbe
 - Toutefois, la perturbation s'amortit très rapidement lorsque l'on s'éloigne du point déplacé
 - Les « overshoots » sont limités.

- Courbe fermée ?
 - On peut fermer la courbe et imposer partout que la dérivée seconde soit continue



- Au lieu de

$$x''_{[0]}(0) = 0 \Leftrightarrow 2a_{[0]2} = 0$$

$$x''_{[n-2]}(1) = 0 \Leftrightarrow 2a_{[n-2]2} + 6a_{[n-2]3} = 0$$

... on a

$$x''_{[n-2]}(1) = x''_{[0]}(0) \Leftrightarrow 2a_{[n-2]2} + 6a_{[n-2]3} = 2a_{[0]2}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-2} \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x_1 - x_{n-1}) \\ 3(x_2 - x_0) \\ 3(x_3 - x_1) \\ \vdots \\ 3(x_{n-1} - x_{n-3}) \\ 3(x_0 - x_{n-2}) \end{pmatrix}$$

Courbes de Bézier

Courbes de Bézier

- Courbes de Bézier
 - Pierre Bézier (1910-1999)
 - Développe UNISURF – premier modelleur surfacique chez Renault (1971)
 - Rend publiques les courbes portant son nom en 1962... mais principe découvert en 1959 par Paul de Casteljaou (alors chez Citroën) ! Culture du secret aidant, ce dernier n'aura ses travaux reconnus qu'en 1975.



Courbes de Bézier

- Utilisation des courbes de Bézier :
 - Fontes Postscript (Bézier cubiques) & TrueType (Bézier quadratiques)

AaBbCc

- Infographie
- En modélisation géométrique et CAO , elles tendent à être supplantées par une technique plus générale (NURBS)

Courbes de Bézier

- Constat que la modélisation par l'interpolation n'est pas très pratique
 - On dispose assez rarement des points de passage voulus d'une courbe
 - On souhaite justement définir ces points comme résultat d'un processus de modélisation plutôt que comme donnée d'entrée
 - L'approximation donne plus de liberté dans la construction de la courbe
 - De nombreuses propriétés géométriques désirables ne peuvent être obtenues que pour une approximation

Courbes de Bézier

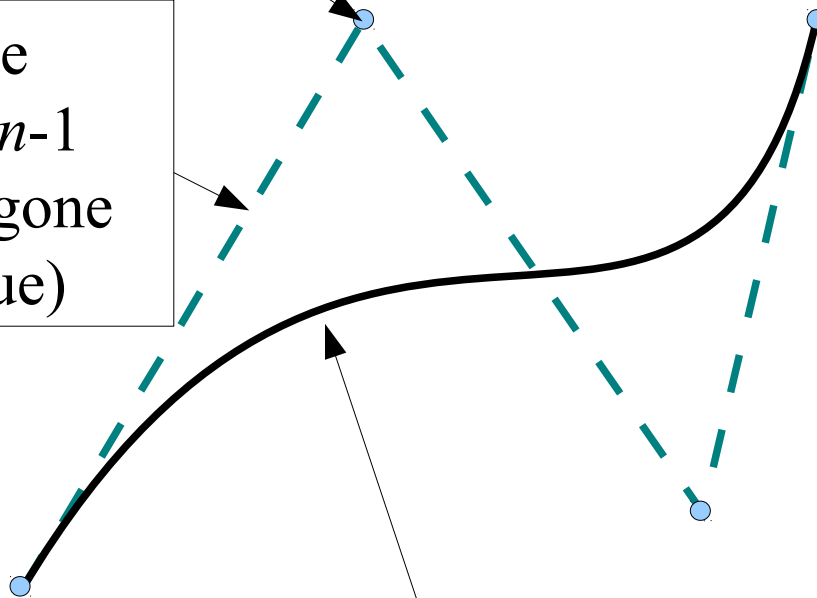
- Éléments d'une courbe de Bézier :

$n=d+1$ points de contrôle

Polygone de
contrôle à $d=n-1$
cotés (ou polygone
caractéristique)

Pour les courbes de
Bézier la notion de
noeud est triviale

$$u_0=0 \quad u_1=1$$



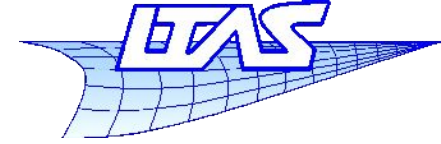
Courbe de Bézier

Courbes de Bézier

- Caractéristiques et construction des courbes de Bézier
 - Plus de liberté que l'interpolation
 - Degré quelconque
 - Contrôle fin de la forme de la courbe
 - Stabilité par rapport à l'élévation en degré (pas comme Lagrange !)

$$P(u) = \sum_{i=0}^d P_i B_i^d(u)$$

- Les $B_i^d(u)$ sont les polynômes de Bernstein (Sergei N. Bernstein, 1880-1968 - ne pas confondre avec Leonard Bernstein...):
 - Ils forment une base polynomiale complète
 - Ils forment une partition de l'unité
 - On les appelle parfois fonctions de mélange (blending)



- Propriétés d'invariance.
 - Il est utile que les courbes définies pour un ensemble de points puissent subir des transformation linéaires affines.
 - Soit P_i^* la transformation affine des points de contrôle P_i
 - Soit $P^*(P_i)$ la transformation affine des points de la courbe $P(P_i)$ définie à partir des points P_i
 - Soit $P(P_i^*)$ la nouvelle courbe formée en se basant directement sur P_i^* avec la même paramétrisation.
 - L'invariance par rapport à la transformation implique simplement que $P^*(P_i) = P(P_i^*)$

Splines

■ Transformées affines $\phi(\mathbf{P}) \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{u}$

■ Translation

■ Échelle

■ Rotation

■ Cisaillement

$$\mathbf{u} = [a, b, c] ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = 0 ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = 0 ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots$$

$$\mathbf{u} = 0 ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

Soit une courbe paramétrique construite ainsi :

$$P(u) = \sum_0^{n-1} P_i K_i^n(u)$$

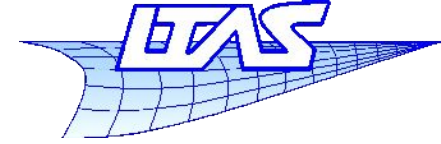
- Vérifions l'invariance par une translation t :

$$P(P_i^*) = \sum_0^{n-1} (P_i + t) K_i^n(u) = \sum_0^{n-1} P_i K_i^n(u) + \sum_0^{n-1} t K_i^n(u)$$

$$= P(u) + \sum_0^{n-1} t K_i^n(u)$$

$$= P(u) + t = P^*(P_i) \quad \text{ssi} \quad \sum_0^{n-1} K_i^n(u) = 1$$

Partition de l'unité



- Pour le reste des transformations

$$P(P_i^*) = \sum_0^{n-1} (P_i \cdot \mathbf{A}) K_i^n(u) = \sum_0^{n-1} P_i K_i^n(u) \cdot \mathbf{A}$$

$$= P(u) \cdot \mathbf{A} = P^*(P_i)$$

(pas de conditions particulières autres que linéarité)

Par conséquent, à la condition que les fonctions utilisées comme base forment une *partition de l'unité*, et que la dépendance par rapport aux points de contrôle soit *linéaire*, la représentation est invariante par transformation affine.

Courbes de Bézier

- Polynômes de Bernstein

$$B_i^d(u) = \binom{d}{i} u^i (1-u)^{d-i}$$

Coefficients binomiaux

Courbes de Bézier

- Polynômes de Bernstein

$$B_i^d(u) = \binom{d}{i} u^i (1-u)^{d-i}$$

Coefficients binomiaux

$$\begin{aligned}
 1 &= [(1-u) + u]^d = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} u^i (1-u)^{d-i} \\
 &= \sum_{i=0}^d B_i^d(u)
 \end{aligned}$$

- On a partition de l'unité par construction ...

Courbes de Bézier

- Quelques caractéristiques des polynômes de B.
 - $B_i^d(u) = 0$ si $i < 0$ ou $i > d$
 - $B_i^d(0) = \delta_{i0}$ et $B_i^d(1) = \delta_{id}$
 - $B_i^d(u)$ a une racine de multiplicité i au point $u=0$
 - $B_i^d(u)$ a une racine de multiplicité $d-i$ au point $u=1$
 - $B_i^d(u) \geq 0$ pour $u \in [0,1]$
 - $B_i^d(1-u) = B_{d-i}^d(u)$
 - $B_i^{d'} = d \left(B_{i-1}^{d-1}(u) - B_i^{d-1}(u) \right)$
 - Si $i \neq 0$, $B_i^d(u)$ a un maximum unique en $u=i/d$

$$B_i^d(i/d) = i^i d^{-d} (d-i)^{(d-i)} \binom{d}{i}$$

Courbes de Bézier

- Construction par récurrence de la base de Bernstein

$$B_i^d(u) = (1-u) B_i^{d-1}(u) + u B_{i-1}^{d-1}(u)$$

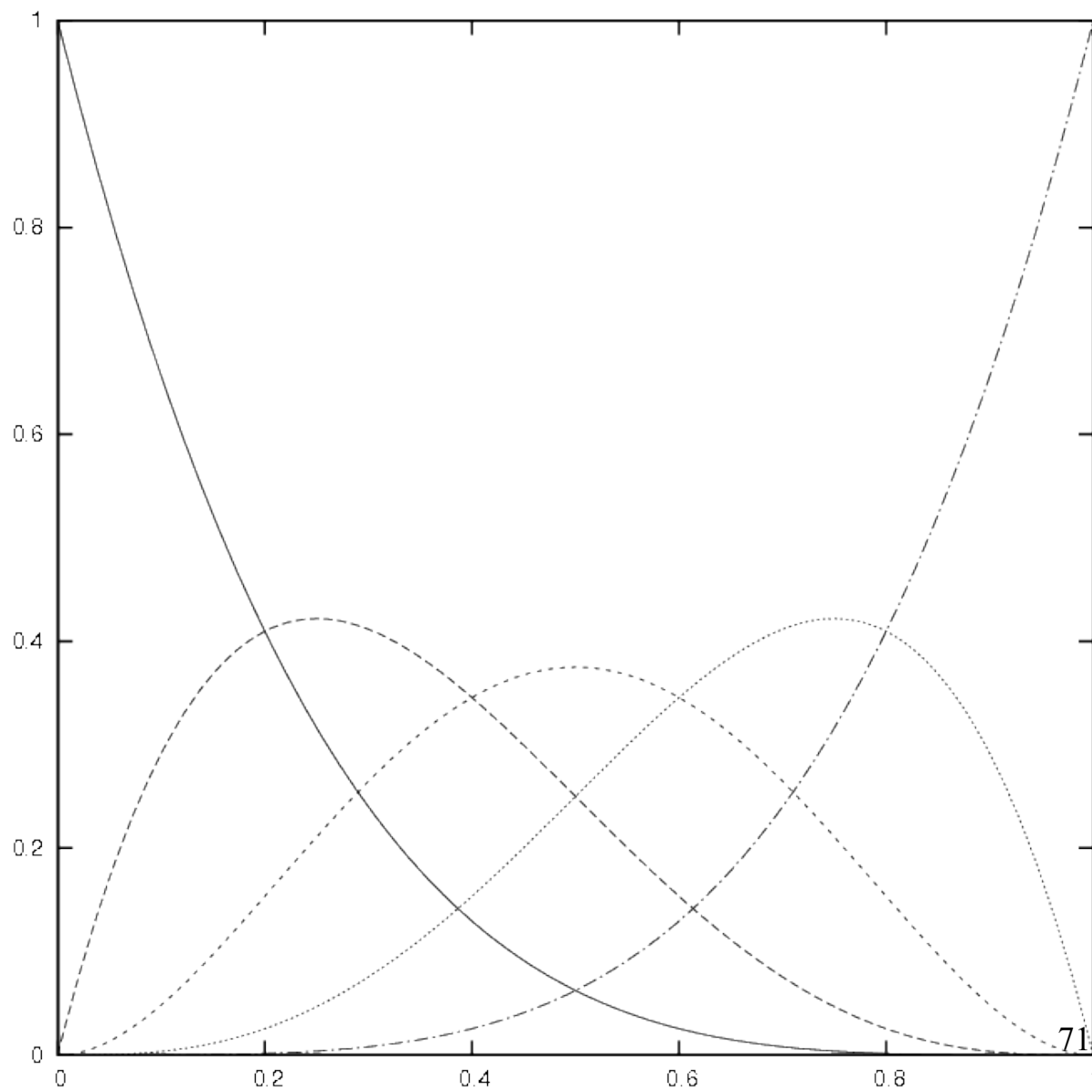
$$B_d^d(u) = u B_{d-1}^{d-1}(u) \quad B_0^d(u) = (1-u) B_0^{d-1}(u)$$

... mais aucun intérêt pratique autre que de démontrer des relations algébriques (cf suite)

- On calcule rarement ces polynômes explicitement

Courbes de Bézier

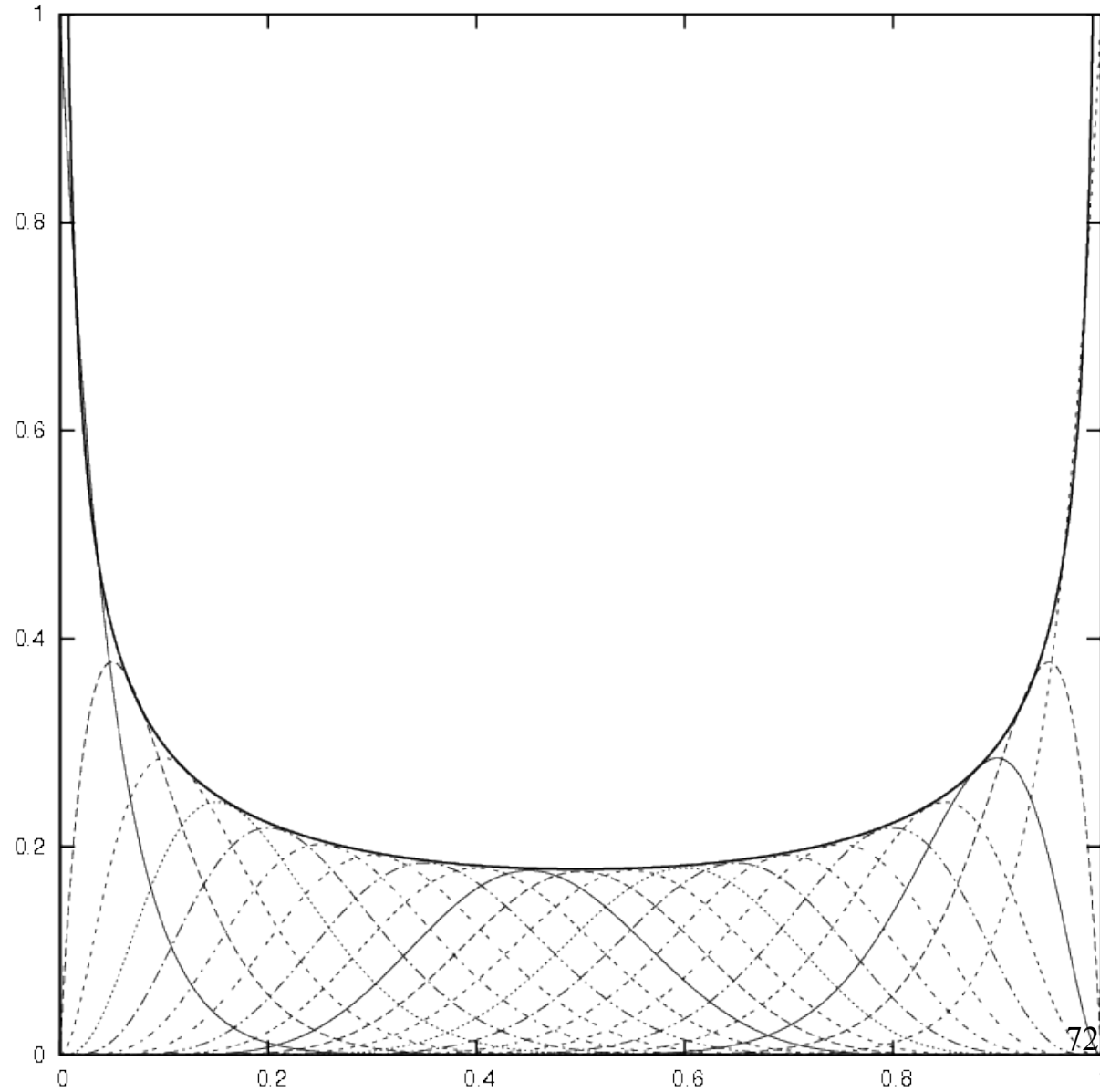
- Degré 4
- Pas de valeurs négatives



Courbes de Bézier

- Degré 20
- Pas de valeurs extrêmes
- Existence d'une enveloppe limite

$$\frac{1}{\sqrt{2d\pi u(1-u)}}$$

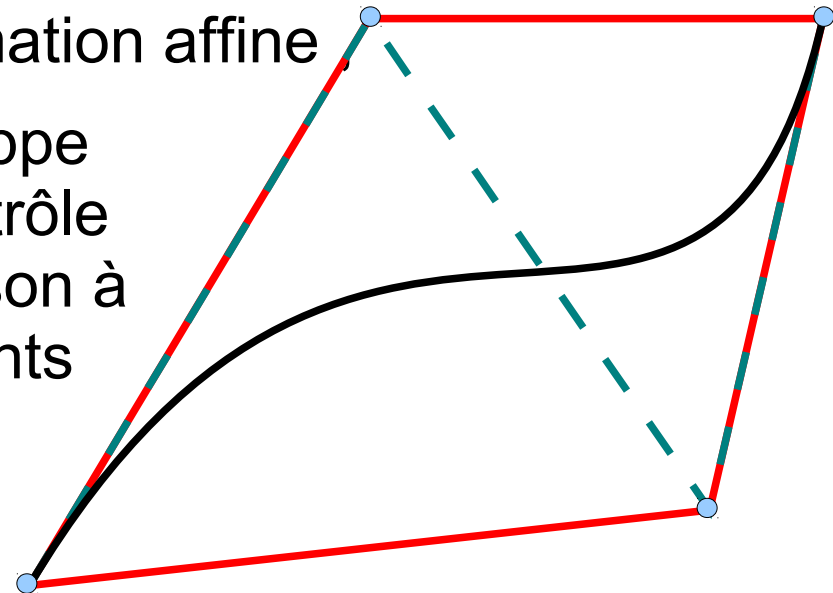


Courbes de Bézier

- Les caractéristiques des polynômes de Bernstein impliquent que la courbe de Bézier

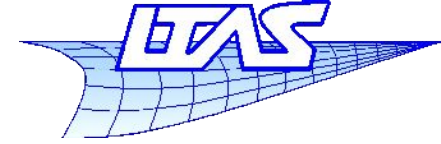
$$P(u) = \sum_{i=0}^d P_i B_i^d(u) \quad :$$

- interpole P_0 et P_d ,
- est invariante par transformation affine
- est contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle (car $P(u)$ est une combinaison à coefficients positifs des points de contrôle – justement appelée combinaison convexe),



Infographie

Courbes de Bézier



(suite)

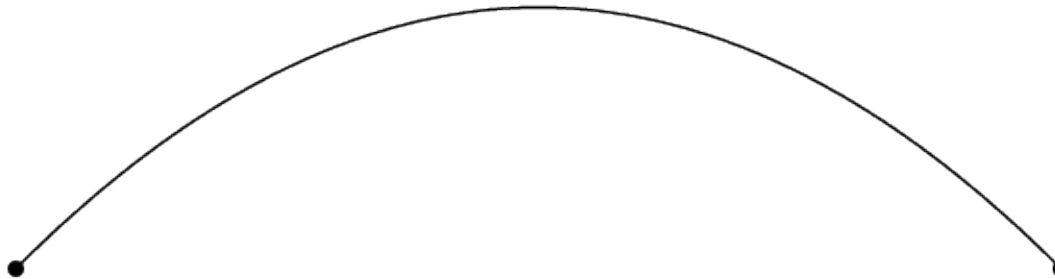
- est à *variation décroissante* : le nombre de points d'inflexion est inférieur aux nombres d'ondulations du polygone caractéristique (preuve par le fait qu'une courbe de Bézier est obtenue par subdivision récursive, cf plus loin) ,
- Délimite un domaine convexe si le polygone de contrôle délimite un domaine convexe,
- est de longueur inférieure ou égale à celle du polygone de contrôle (idem) .

Courbes de Bézier

- Exemple géométriques
 - Cercle avec un nombre de points qui augmente
 - Perturbation d'un point

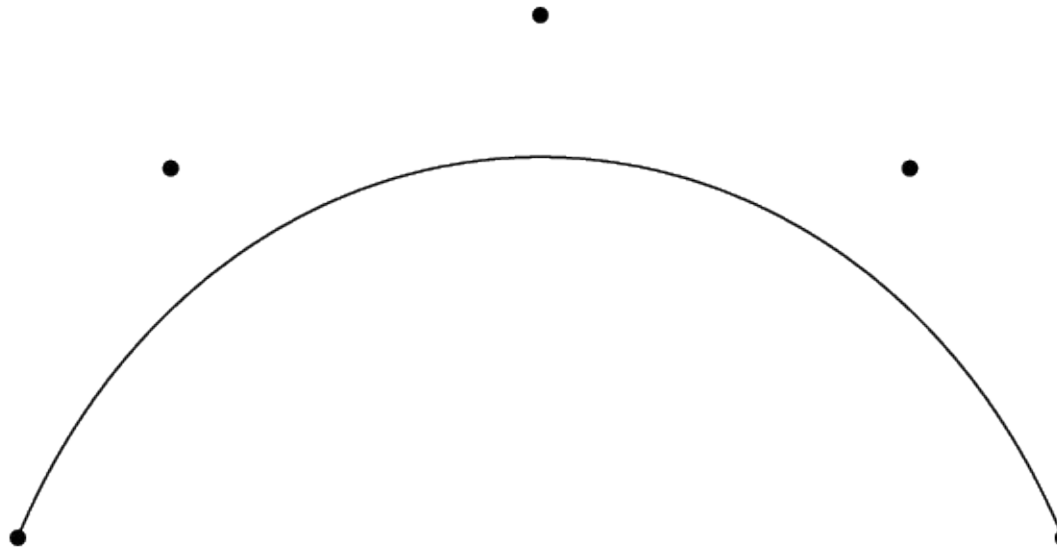
Courbes de Bézier

•



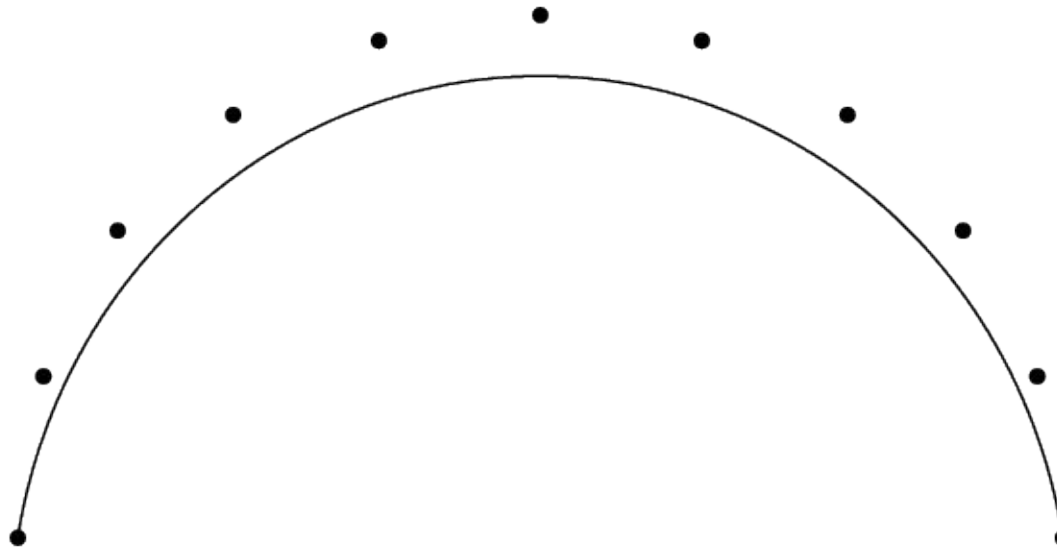
Degré 2

Courbes de Bézier



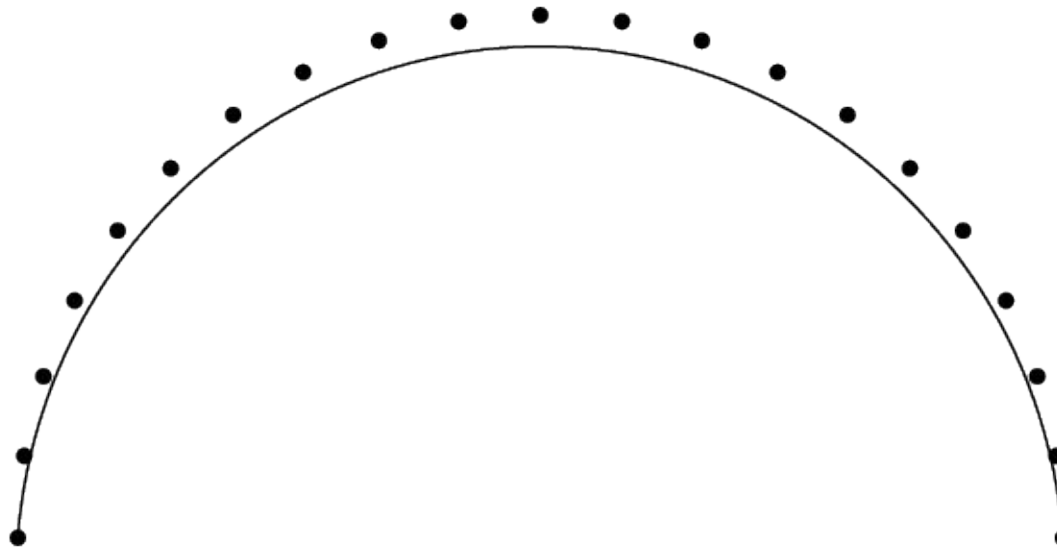
Degré 4

Courbes de Bézier



Degré 10

Courbes de Bézier



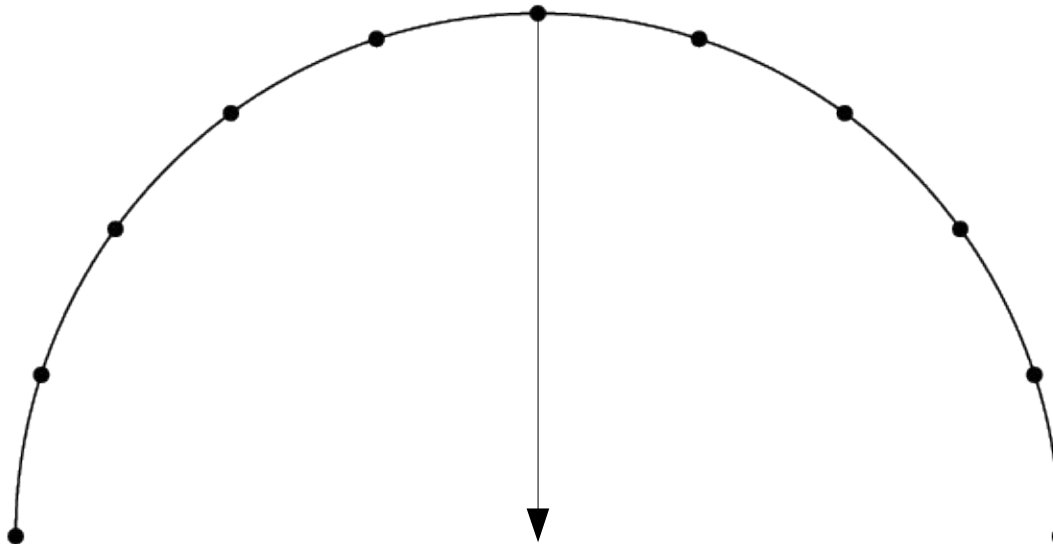
Degré 20

Courbes de Bézier

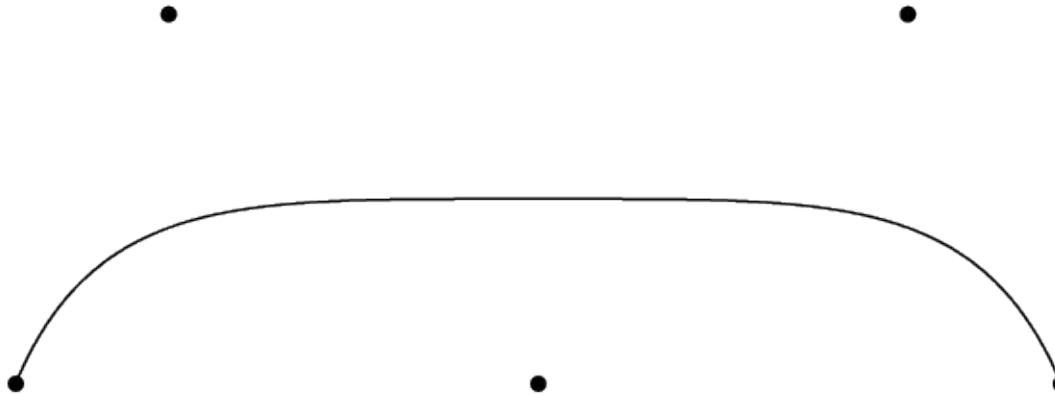
- Lorsque le nombre de points de contrôle augmente, la courbe tend vers le polygone de contrôle (sous certaines conditions)
- L'approximation implique une erreur conséquente entre les points de contrôle et la courbe
 - Mais effectuer une interpolation n'est pas le but ici...

Courbes de Bézier

- Perturbation d'un point
 - On déplace le point indiqué d'une grande valeur

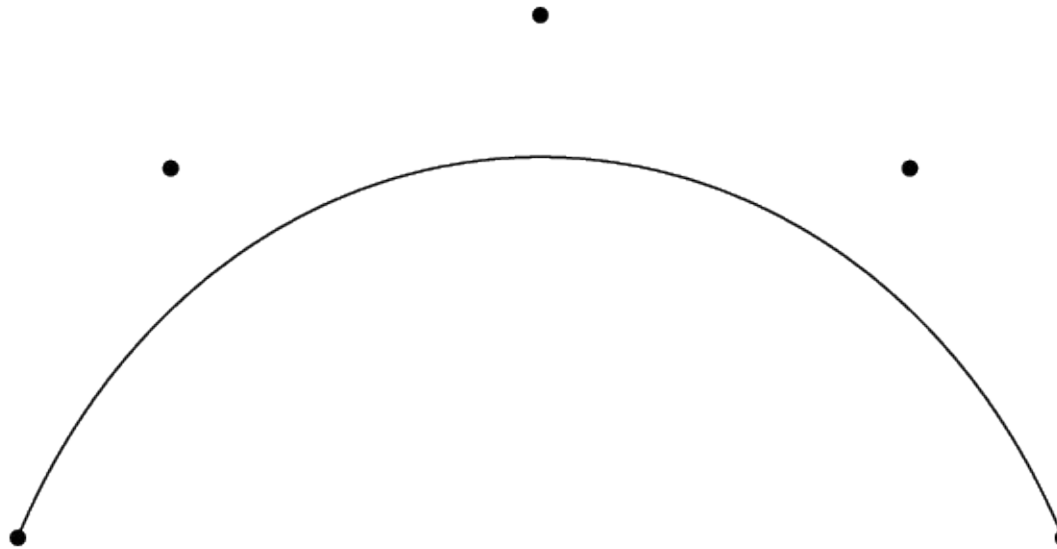


Courbes de Bézier



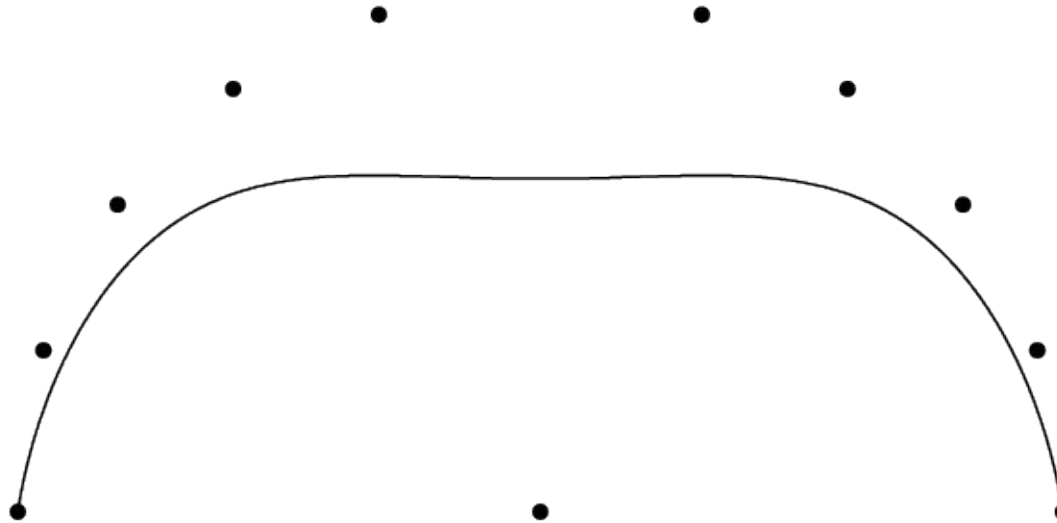
Degré 4

Courbes de Bézier



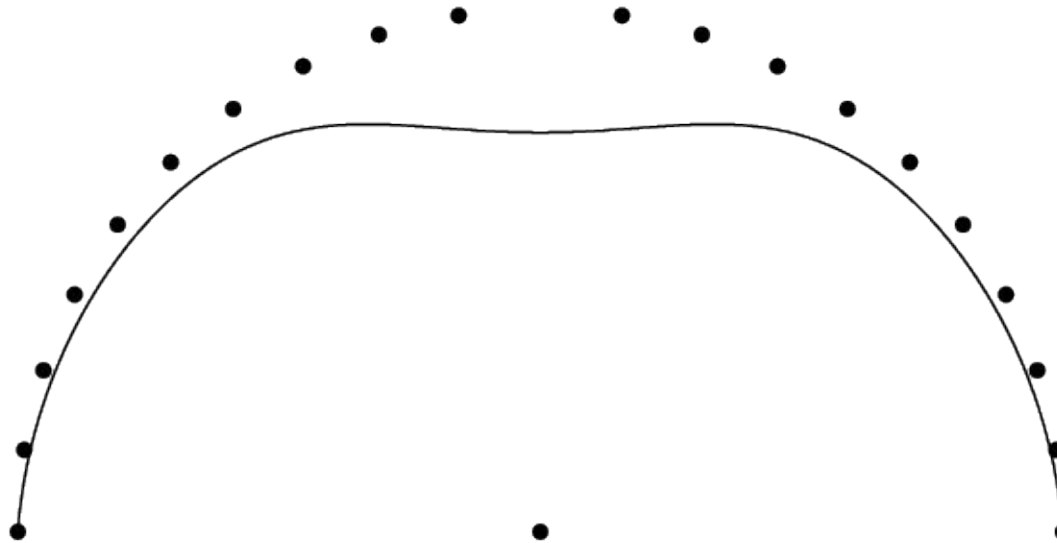
Degré 4

Courbes de Bézier



Degré 10

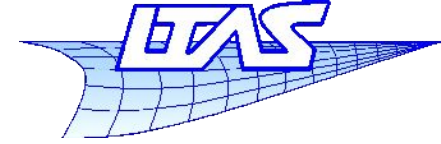
Courbes de Bézier



Degré 20

Infographie

Courbes de Bézier



- Manipulations des courbes de Bézier
 - Élévation de degré
 - Évaluation (Algorithme de De Casteljau et autres)
 - Modification de l'intervalle d'une courbe
 - Coupure, extension
 - Courbes définies par morceaux et subdivision récursive

Courbes de Bézier

- Élévation de degré
 - Une courbe de degré $d+1$ peut représenter exactement n'importe quelle courbe de degré d
 - Si on ne dispose pas d'assez de points de contrôle, on peut augmenter le degré
 - Il faut déterminer les nouveaux points de contrôle (un de plus !)
 - Relations de Forrest [1972]

$$Q_0 = P_0$$

$$Q_i = \frac{i}{d+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{d+1}\right) P_i \text{ pour } i = 1, \dots, d$$

$$Q_{d+1} = P_d$$

Courbes de Bézier

- Démonstration des relations de Forrest :

$$P(u) = \sum_{i=0}^d P_i B_i^d(u) \quad Q(u) = \sum_{i=0}^{d+1} Q_i B_i^{d+1}(u)$$

$$Q(u) = P(u) \quad \forall u \in [0,1]$$

- Exprimons $B_i^d(u)$ en fonction de $B_i^{d+1}(u)$

$$B_i^d(u) = \binom{d}{i} u^i (1-u)^{d-i}$$

$$B_i^{d+1}(u) = \binom{d+1}{i} u^i (1-u)^{d-i+1} = (1-u) \frac{\binom{d+1}{i}}{\binom{d}{i}} B_i^d(u)$$

Courbes de Bézier

$$B_{i+1}^{d+1}(u) = \binom{d+1}{i+1} u^{i+1} (1-u)^{d-i} = u \frac{\binom{d+1}{i+1}}{\binom{d}{i}} B_i^d(u)$$

- On remplace les termes du binome $\binom{d}{i} = \frac{d!}{(d-i)!i!}$

$$\binom{d+1}{i} = \frac{(d+1)!}{(d+1-i)!i!} = \binom{d}{i} \frac{d+1}{d+1-i}$$

$$\binom{d+1}{i+1} = \frac{(d+1)!}{(d-i)!(i+1)!} = \binom{d}{i} \frac{d+1}{i+1}$$

$$B_i^{d+1}(u) = (1-u) \frac{d+1}{d+1-i} B_i^d(u)$$

$$B_{i+1}^{d+1}(u) = u \frac{d+1}{i+1} B_i^d(u)$$

Courbes de Bézier

- On décompose $B_i^d(u) \longrightarrow B_i^d(u) = (1-u) B_i^d(u) + u B_i^d(u)$

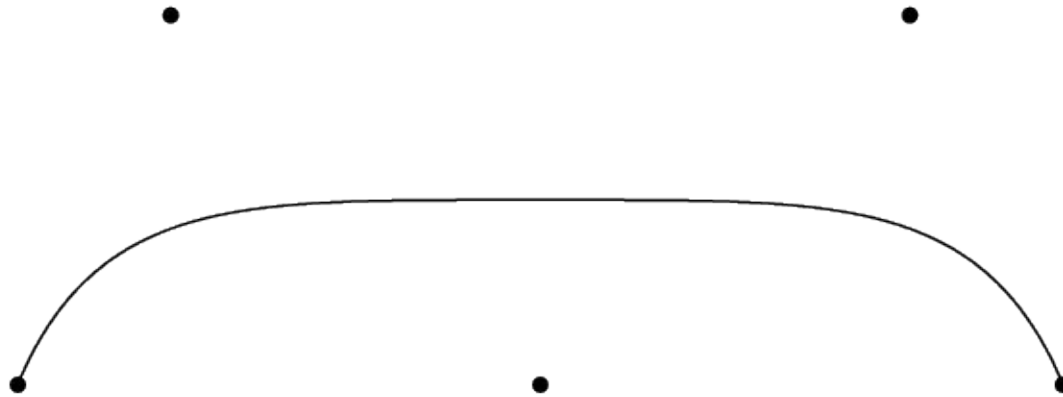
$$B_i^d(u) = \frac{d+1-i}{d+1} B_i^{d+1}(u) + \frac{i+1}{d+1} B_{i+1}^{d+1}(u)$$

$$\begin{aligned} Q(u) = P(u) &\Rightarrow \sum_{i=0}^{d+1} Q_i B_i^{d+1}(u) = \sum_{i=0}^d P_i \left(\frac{d+1-i}{d+1} B_i^{d+1}(u) + \frac{i+1}{d+1} B_{i+1}^{d+1}(u) \right) \\ &= \sum_{i=0}^d P_i \left(1 - \frac{i}{d+1} \right) B_i^{d+1}(u) + \sum_{i=1}^{d+1} P_{i-1} \frac{i}{d+1} B_i^{d+1}(u) \\ &= \sum_{i=1}^d \left(P_i \left(1 - \frac{i}{d+1} \right) + P_{i-1} \frac{i}{d+1} \right) B_i^{d+1}(u) + P_0 B_0^{d+1}(u) + P_d B_{d+1}^{d+1}(u) \end{aligned}$$

Q_i Q_0 Q_{d+1}

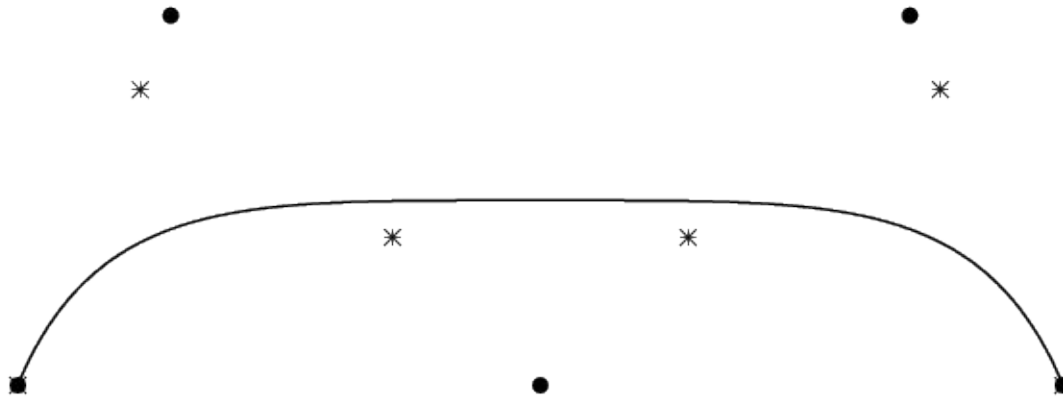
Courbes de Bézier

- Élévation de degré



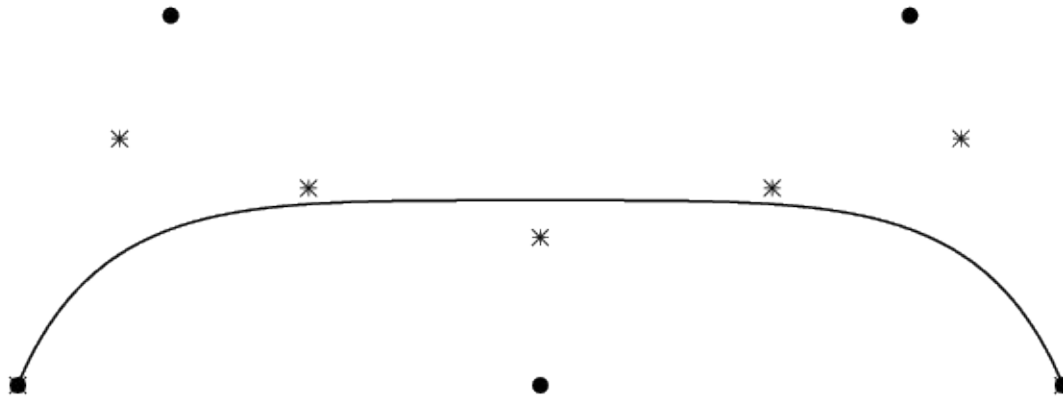
Degré 4

Courbes de Bézier



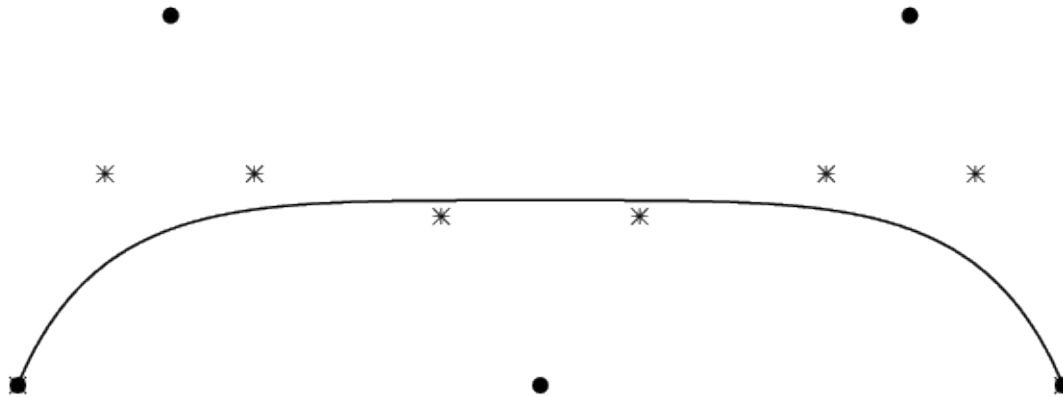
Degré 5

Courbes de Bézier



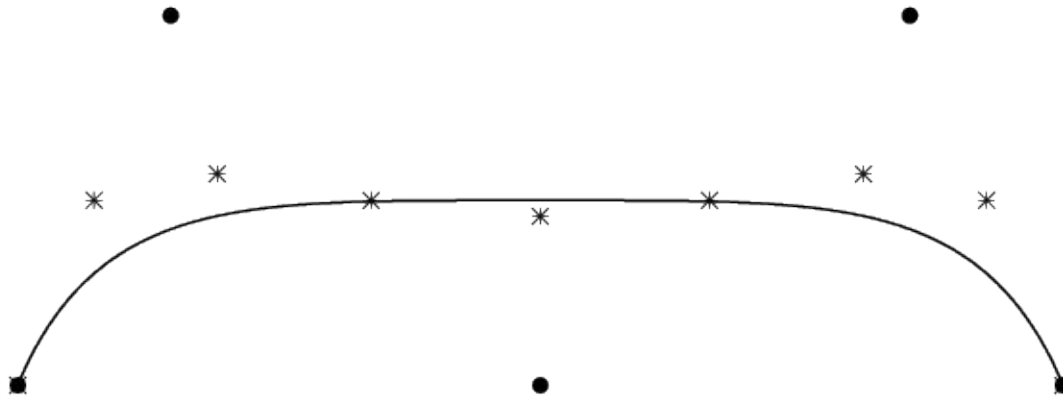
Degré 6

Courbes de Bézier



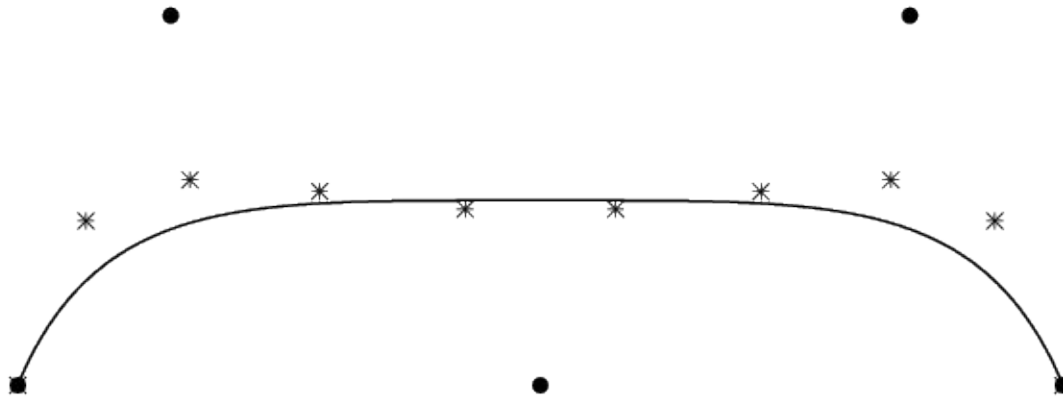
Degré 7

Courbes de Bézier



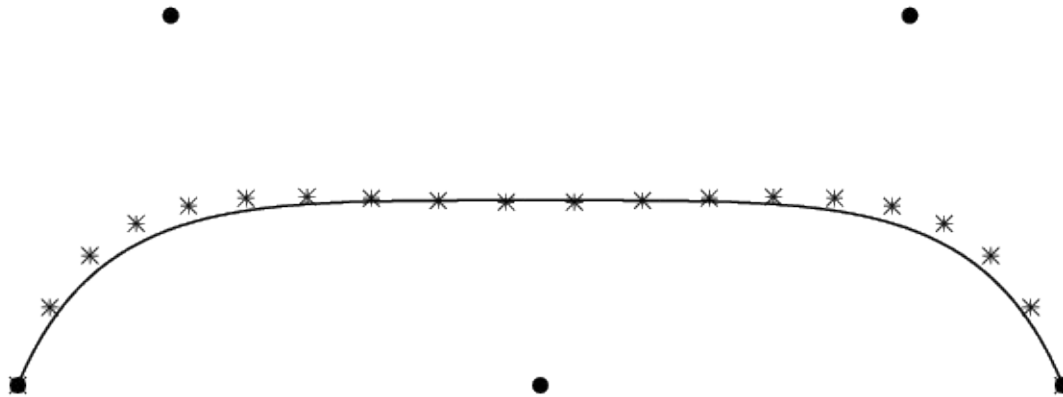
Degré 8

Courbes de Bézier



Degré 9

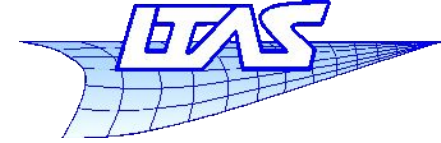
Courbes de Bézier



Degré 21

Infographie

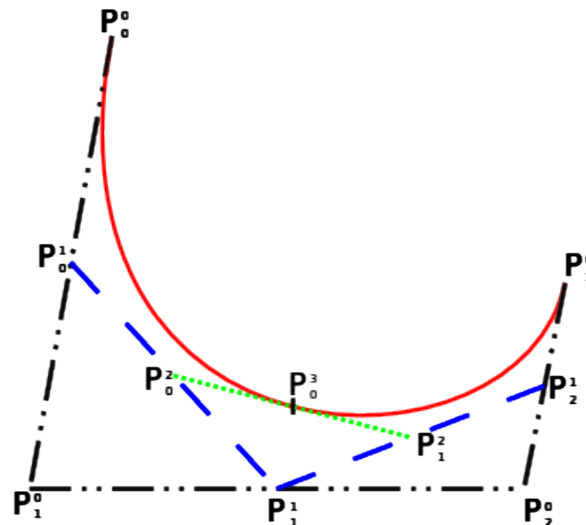
Courbes de Bézier



- Algorithme de De Casteljau
 - Permet la construction robuste des points de la courbe
 - Interprétation géométrique simple

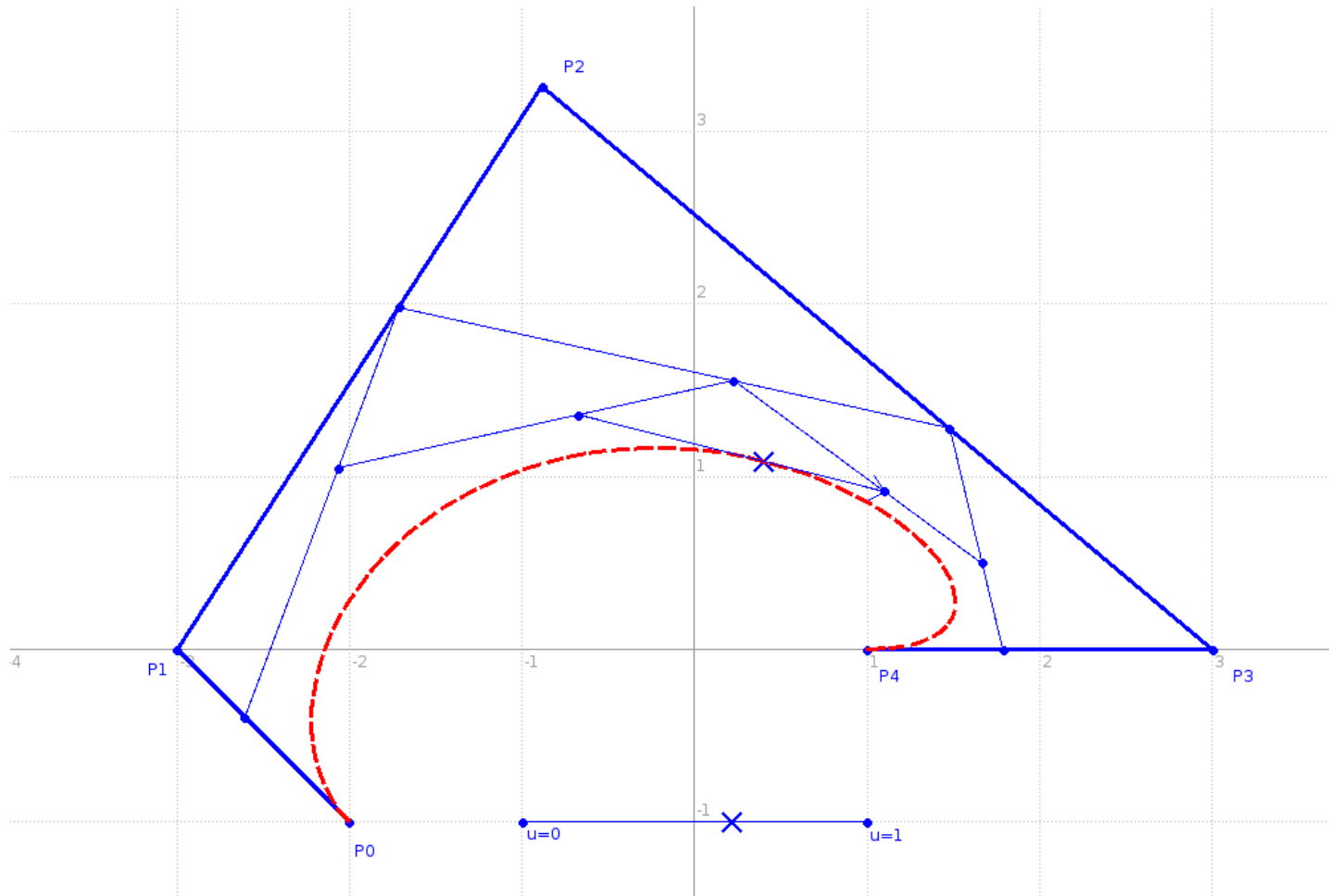
Courbes de Bézier

- Principe de l'algorithme de De Casteljau
 - Construction des barycentres P_i^1 des points de contrôle P_i^0 : $P_i^1 = (1-u)P_i^0 + uP_{i+1}^0$
 - On continue avec P_i^2
 - Tant qu'il reste plusieurs points de contrôles P_i^j



Courbes de Bézier

- Kig



Courbes de Bézier

- L'algorithme est le suivant :

Initialisation de P_i^0
Pour j de 1 à d
 Pour i de 0 à $d-j$

$$P_i^j = (1-u) P_i^{j-1} + u P_{i+1}^{j-1}$$

 Finpour
Finpour
 P_0^d est le point recherché.

- Quelle est sa complexité ?
 - Comporte $3d(d+1)$ multiplications et $3d(d+1)/2$ additions , donc quadratique en fonction du degré d .

Courbes de Bézier

- Démonstration à l'aide des relations de récurrence

$$P(u) = \sum_{i=0}^d P_i B_i^d(u)$$

$$\begin{aligned} B_i^d(u) &= (1-u) B_i^{d-1}(u) + u B_{i-1}^{d-1}(u) \\ B_d^d(u) &= u B_{d-1}^{d-1}(u) \quad B_0^d(u) = (1-u) B_0^{d-1}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(u) &= \sum_{i=1}^{d-1} P_i ((1-u) B_i^{d-1}(u) + u B_{i-1}^{d-1}(u)) \\ &\quad + P_0 (1-u) B_0^{d-1}(u) + P_d u B_{d-1}^{d-1}(u) \end{aligned}$$

En rassemblant les termes $B_i^{d-1}(u)$:

$$P(u) = \sum_{i=0}^{d-1} [(1-u) P_i + u P_{i+1}] B_i^{d-1}(u)$$

En posant $P_i^1 = (1-u) P_i^0 + u P_{i+1}^0 \longrightarrow P(u) = \sum_{i=0}^{d-1} P_i^1 B_i^{d-1}(u)$

Courbes de Bézier

- On recommence avec $P(u) = \sum_{i=0}^{d-1} P_i^1 B_i^{d-1}(u)$

$$P(u) = \sum_{i=1}^{d-2} P_i^1 ((1-u) B_i^{d-2}(u) + u B_{i-1}^{d-2}(u)) \\ + P_0^1 (1-u) B_0^{d-2}(u) + P_d^1 (1-u) B_{d-2}^{d-2}(u)$$

$$P(u) = \sum_{i=0}^{d-2} \left[(1-u) P_i^1 + u P_{i+1}^1 \right] B_i^{d-2}(u)$$

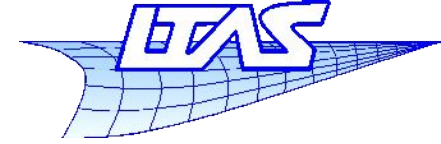
$$P(u) = \sum_{i=0}^{d-2} P_i^2 B_i^{d-2}(u)$$

.....

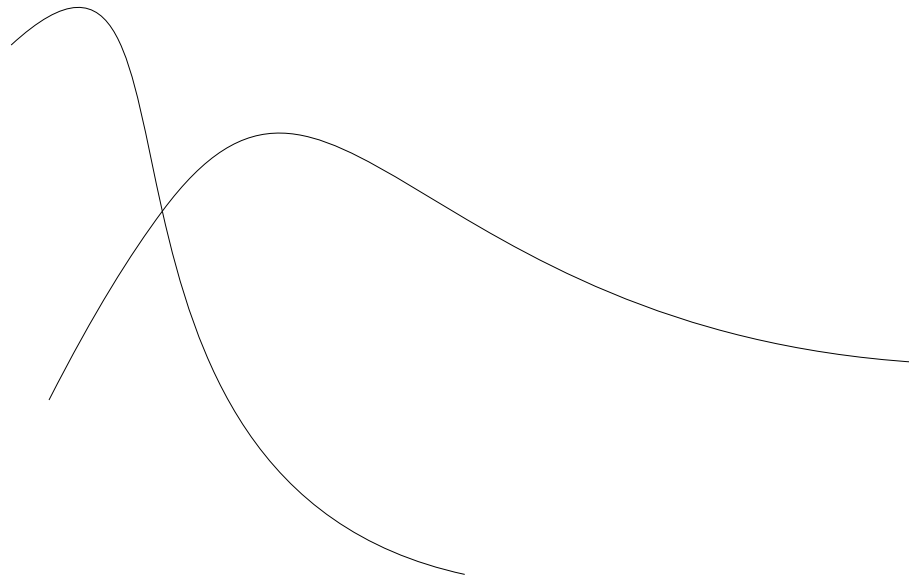
→ $P(u) = P_0^d B_0^0(u) , B_0^0(u) \equiv 1$ CQFD

Infographie

Courbes de Bézier

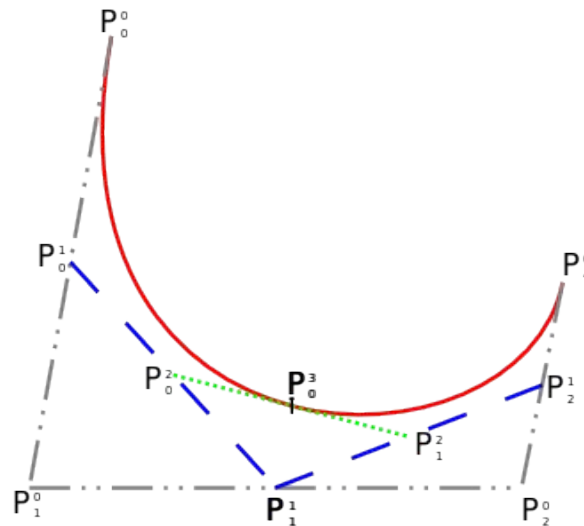


- Restriction d'une courbe (coupure)
 - On fait par exemple l'intersection de deux courbes
 - On a besoin d'une représentation indépendante de chaque segment
 - On veut $0 < u < 1$ sur chaque segment



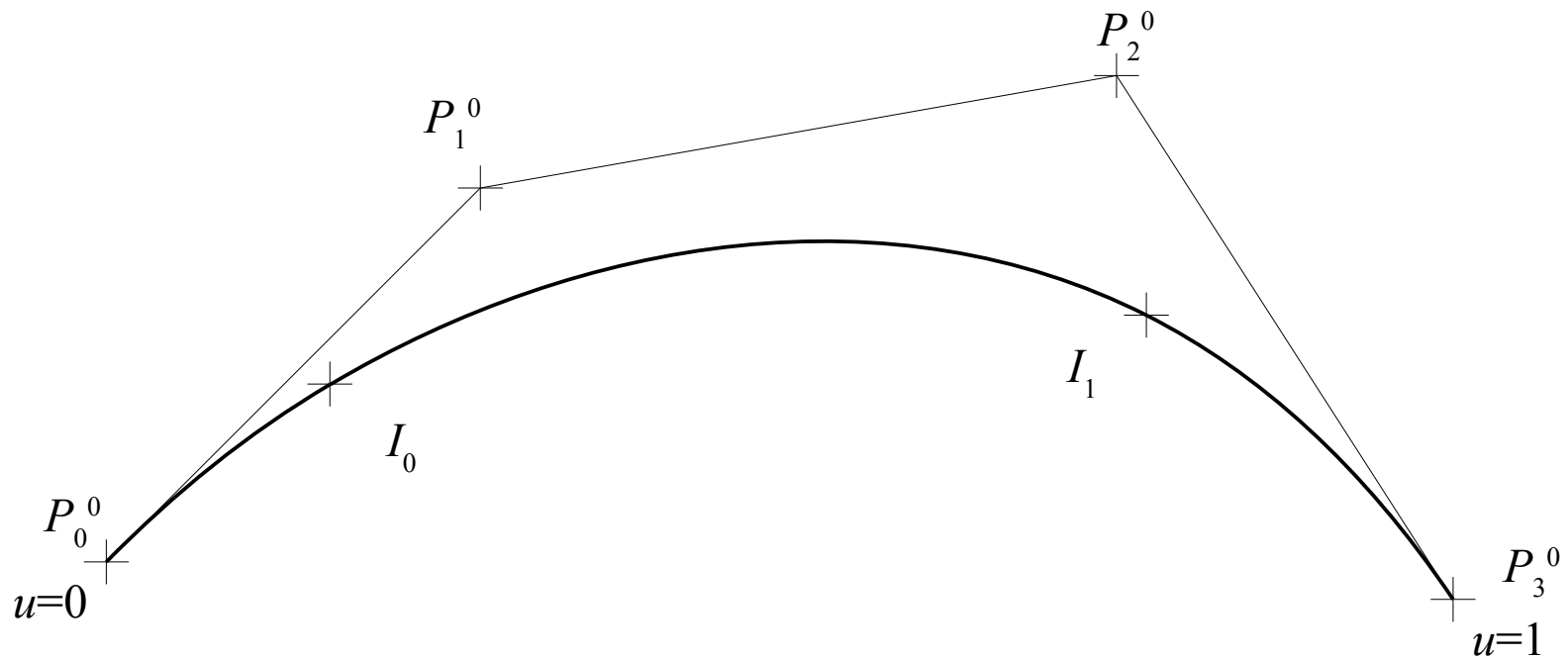
Courbes de Bézier

- Partons de la construction de De Casteljau



- Le polygone de contrôle des deux parties est obtenu à partir des points issus de l'algorithme de De Casteljau !

- Courbe à limiter

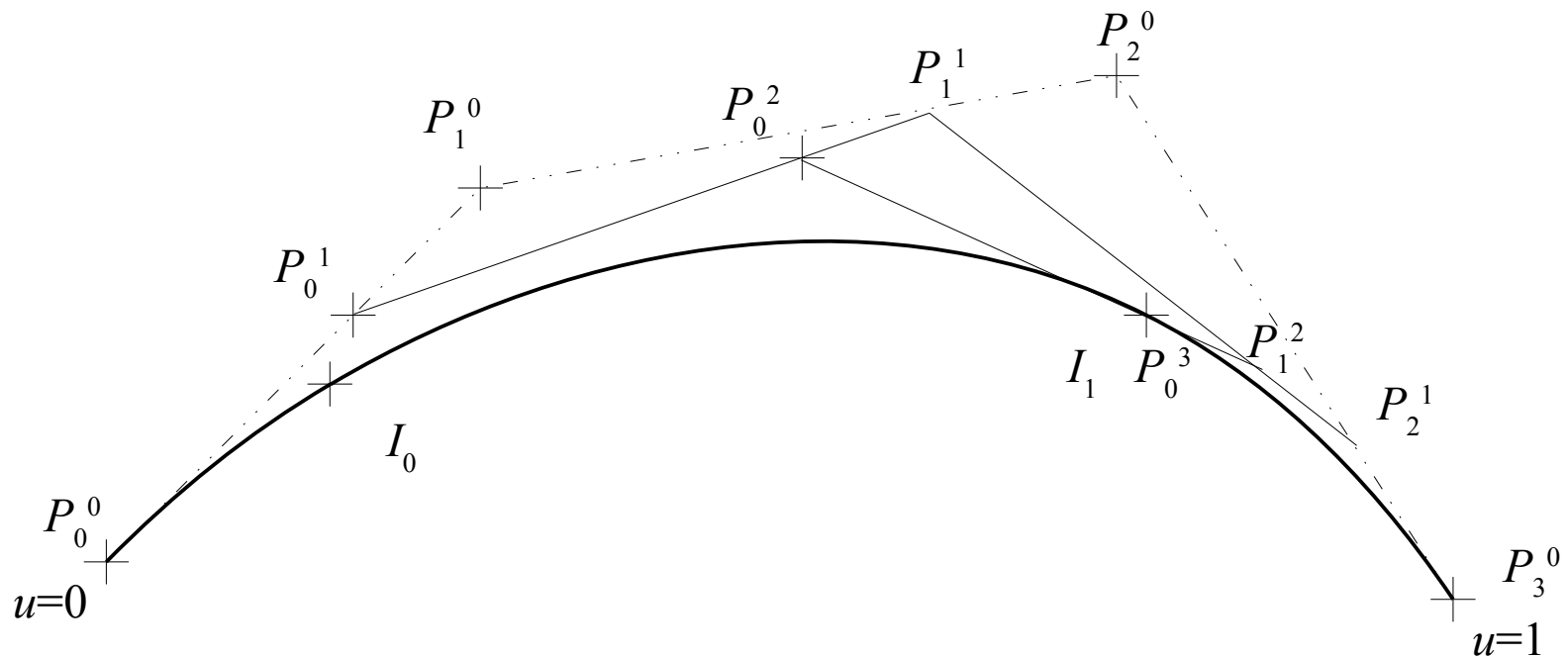


Courbes de Bézier

- Pour une courbe dont que l'on veut limiter :
 - 1 – calculer le point d'intersection I_1 – en $u=u_1$ à l'aide de l'algorithme de De Casteljau – donne les points P_i^j

Courbes de Bézier

1 – calculer le point d'intersection I_1 – en $u=u_1$ à l'aide de l'algorithme de De Casteljau – donne les points P_i^j

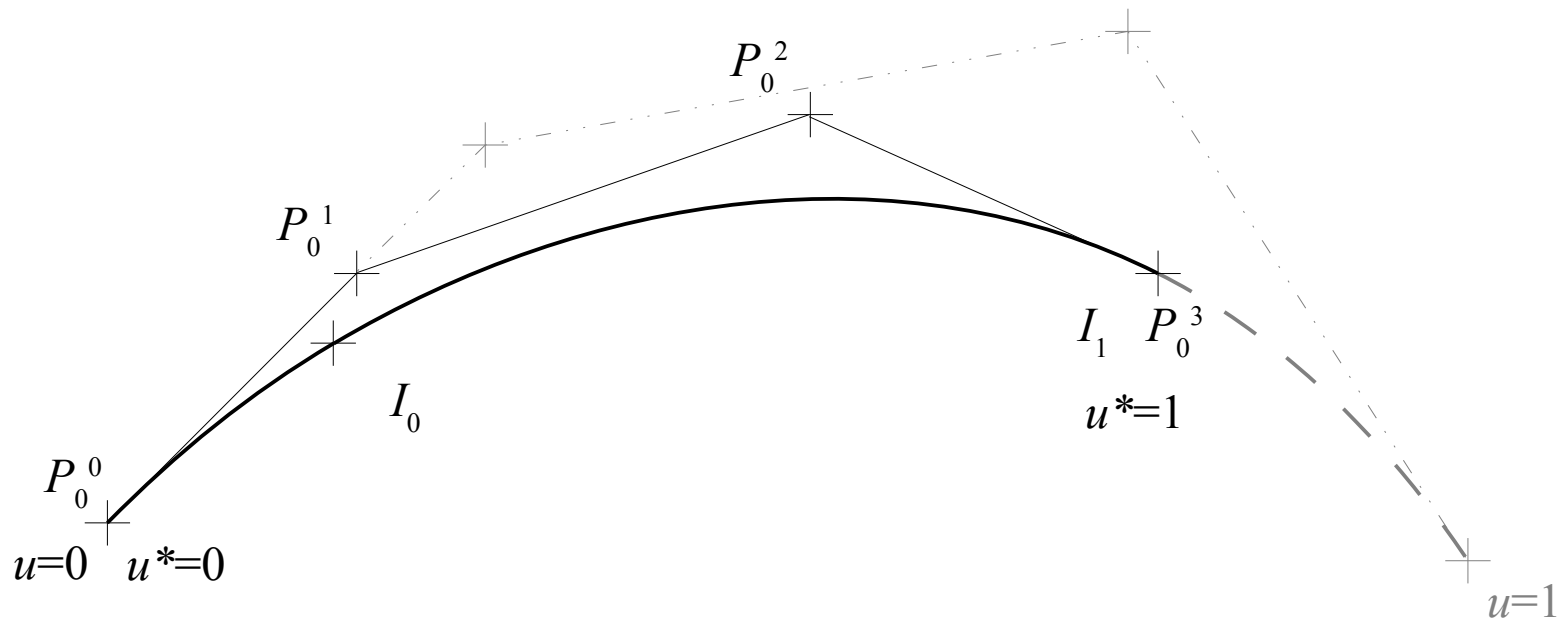


Courbes de Bézier

- Pour une courbe dont on veut limiter :
 - 1 – calculer le point d'intersection I_1 – en $u=u_1$ à l'aide de l'algorithme de De Casteljau – donne les points P_i^j
 - 2 – Parmi ces points, considérer les points P_0^j : c'est le polygone caractéristique de la restriction de la courbe à l'intervalle P_0-I_1 : de paramétrisation $u^*=u/u_1$

Courbes de Bézier

- 2 – Parmi ces points, considérer les points P_0^j : c'est le polygone caractéristique de la restriction de la courbe à l'intervalle P_0-I_1 : de paramétrisation $u^*=u/u_1$

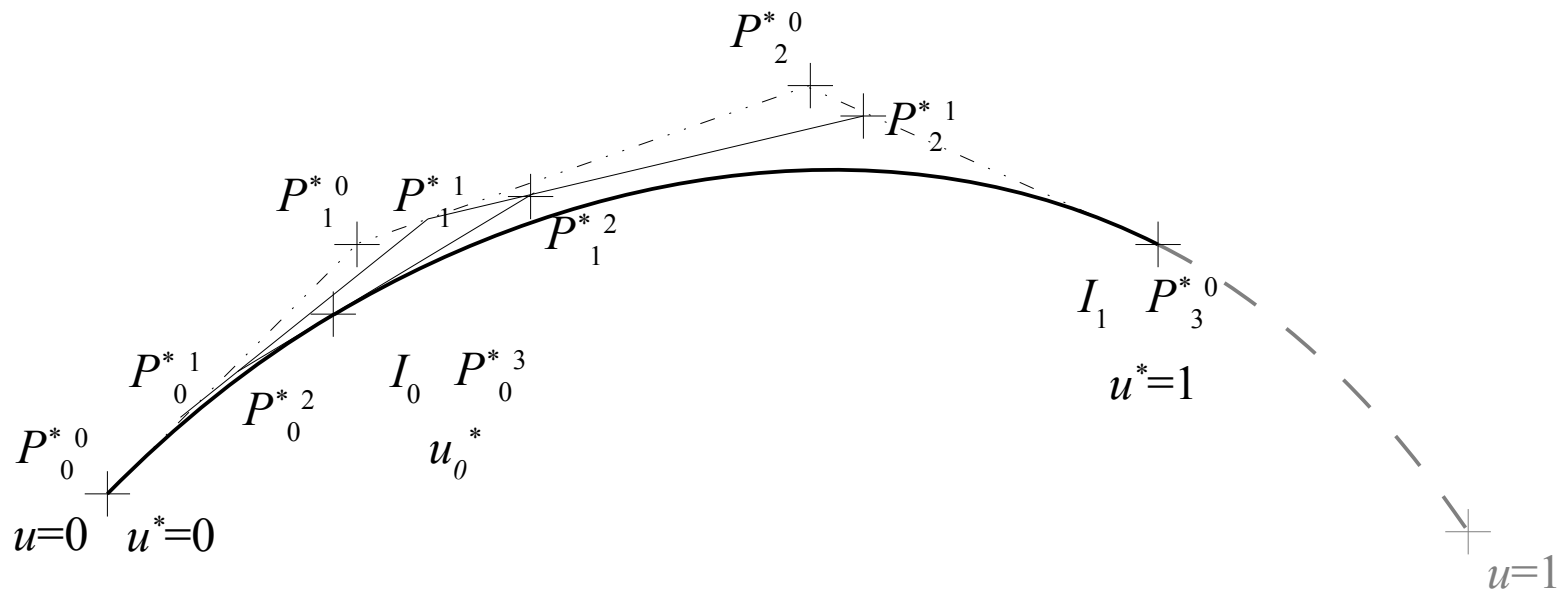


Courbes de Bézier

- Pour une courbe dont que l'on veut limiter :
 - 1 – calculer le point d'intersection I_1 – en $u=u_1$ à l'aide de l'algorithme de De Casteljau – donne les points P_i^j
 - 2 – Parmi ces points, considérer les points P_0^j : c'est le polygone caractéristique de la restriction de la courbe à l'intervalle P_0-I_1 : de paramétrisation $u^*=u/u_1$
 - 3 – Calculer l'intersection I_0 sur la nouvelle courbe – en $u^*=u_0^*$ - donne les points P_i^{*j}

Courbes de Bézier

3 – Calculer l'intersection I_0 sur la nouvelle courbe – en $u^*=u_0^*$ - donne les points P_i^{*j}

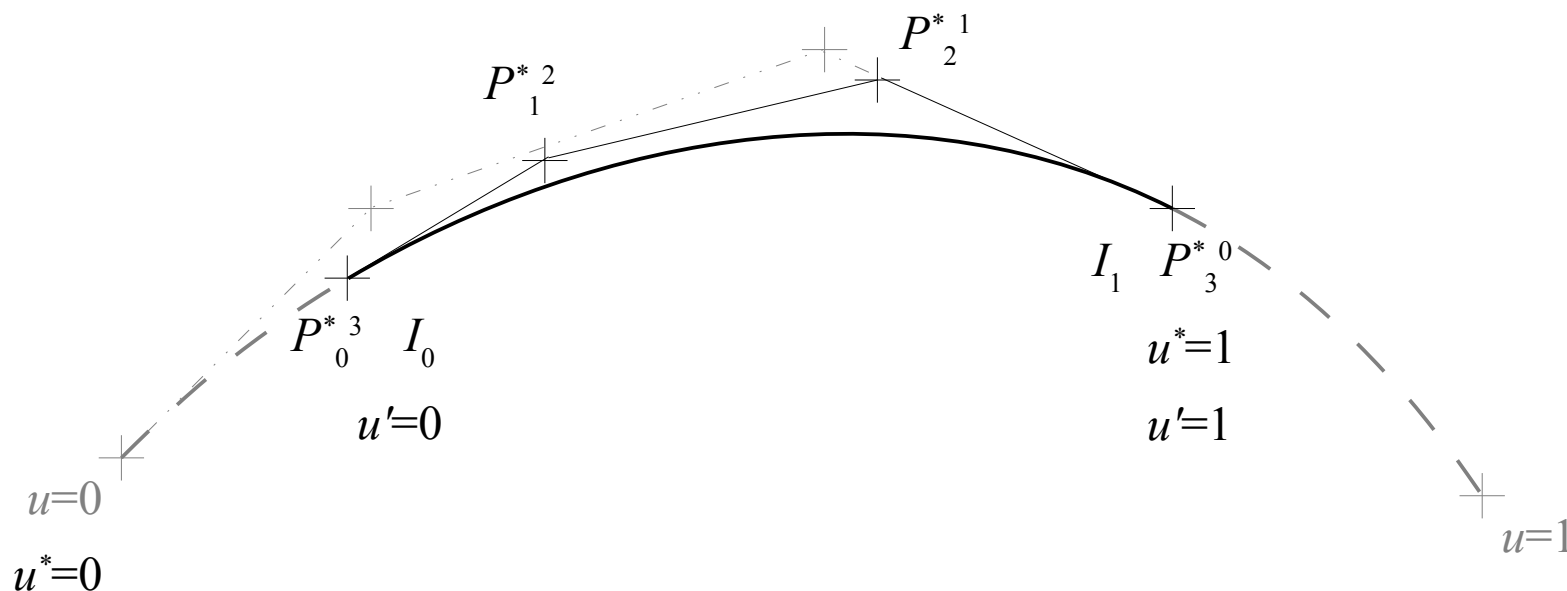


Courbes de Bézier

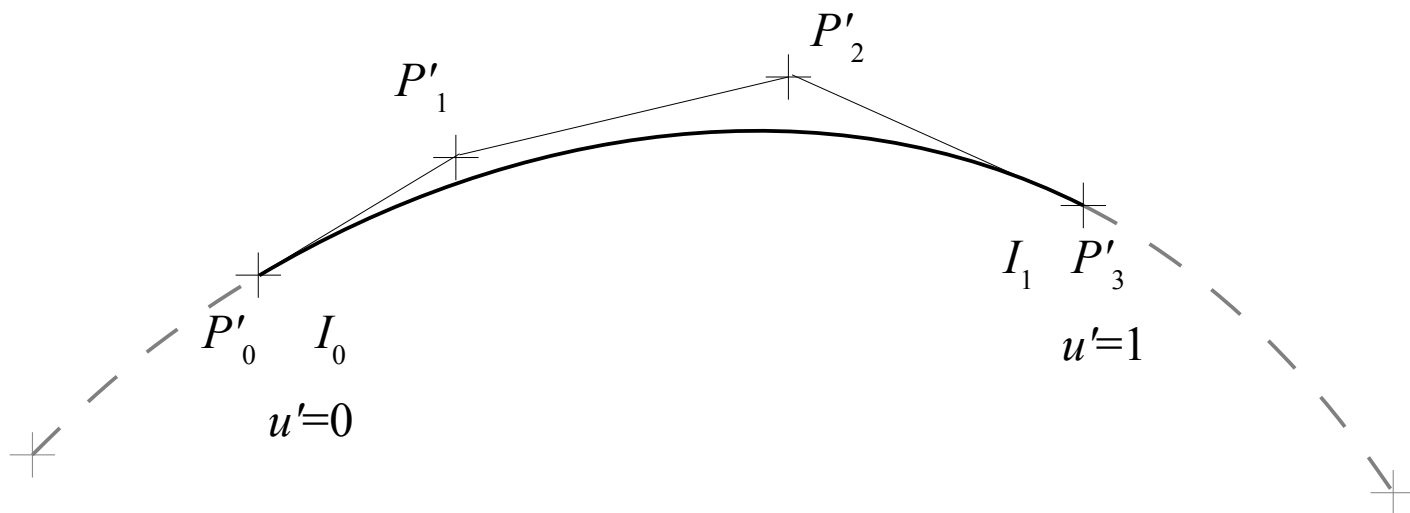
- Pour une courbe dont on veut limiter :
 - 1 – calculer le point d'intersection I_1 – en $u=u_1$ à l'aide de l'algorithme de De Casteljau – donne les points P_i^j
 - 2 – Parmi ces points, considérer les points P_0^j : c'est le polygone caractéristique de la restriction de la courbe à l'intervalle P_0-I_1 : de paramétrisation $u^*=u/u_1$
 - 3 – Calculer l'intersection I_0 sur la nouvelle courbe – en $u^*=u_0^*$ - donne les points P_i^{*j}
 - 4 – Considérer les points P_i^{*d} : c'est le polygone caractéristique de la restriction de la courbe à l'intervalle I_0-I_1 : de paramétrisation $u'=(u^*-u_0^*)/(1-u_0^*)$

Courbes de Bézier

4 – Considérer les points P_i^{*d} : c'est le polygone caractéristique de la restriction de la courbe à l'intervalle I_0-I_1 : de paramétrisation $u'=(u^*-u_0^*)/(1-u_0^*)$



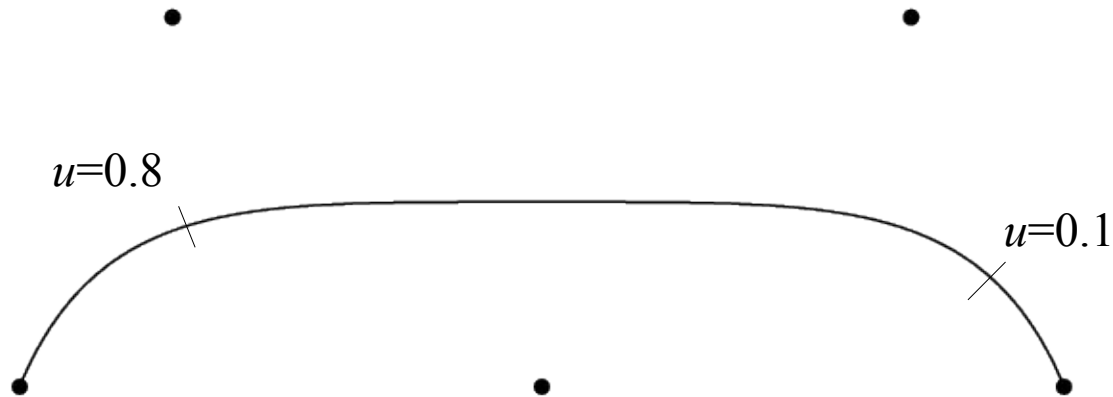
Courbes de Bézier



Courbes de Bézier

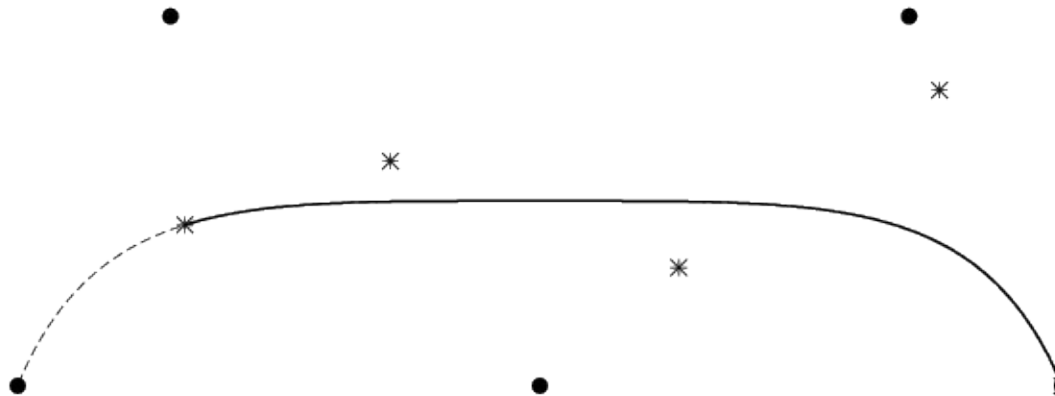
- Avec le même algorithme, on peut accroître le domaine utile d'une courbe
 - Intersection avec des objets proches des extrémités de la courbe
 - Attention : Les courbes de bézier ne sont à variation décroissante que lorsque $0 < u < 1$...

Courbes de Bézier



Coupures désirées

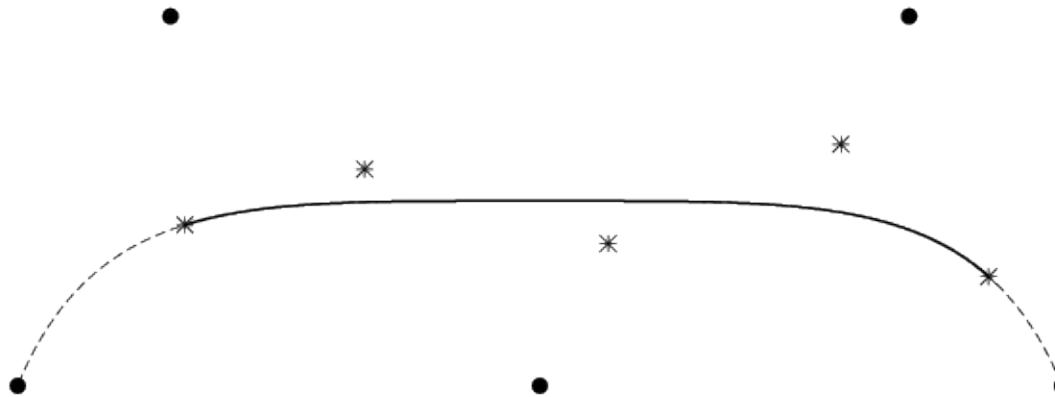
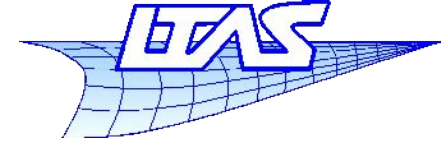
Courbes de Bézier



Coupure pour $u=0.8$

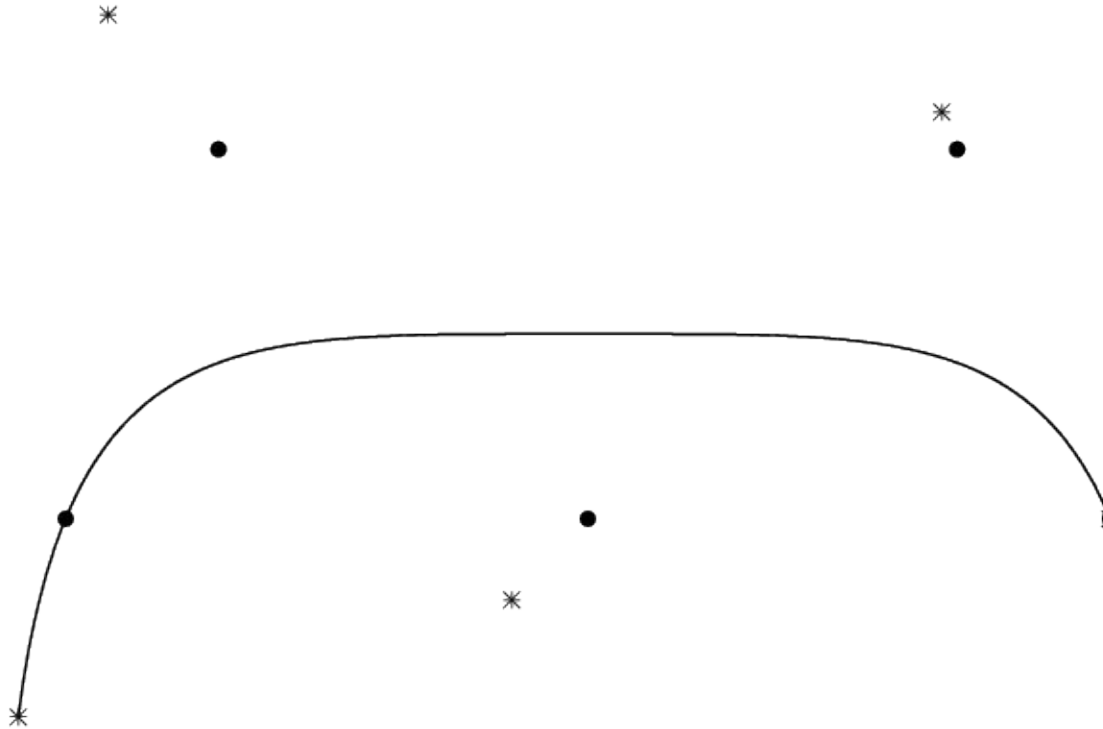
Infographie

Courbes de Bézier



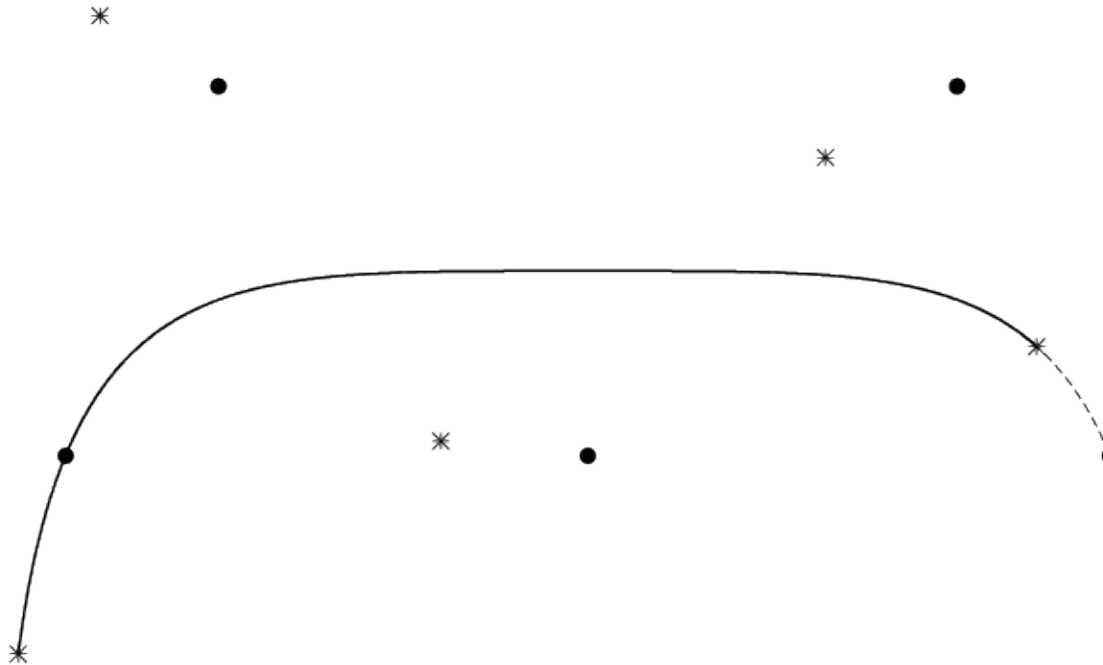
Coupure pour $u=0.8$...et pour $u=0.1$ (soit $u^*=0.1/0.8$)

Courbes de Bézier



Extension pour $u=1.1$

Courbes de Bézier



Extension pour $u=1.1$ et coupure pour $u=0.1$ (soit $u^*=0.1/1.1$)

Courbes de Bézier

- Expression des dérivées d'une courbe de Bézier

$$\frac{dP}{du}(u) = \sum_{i=0}^d P_i B_i'^d(u) \quad \text{avec} \quad B_i'^d = d \left(B_{i-1}^{d-1}(u) - B_i^{d-1}(u) \right)$$

$$\frac{dP}{du}(u) = d \sum_{i=0}^d P_i \left(B_{i-1}^{d-1}(u) - B_i^{d-1}(u) \right) = d \left(P_0 (B_{-1}^{d-1} - B_0^{d-1}) + P_1 (B_0^{d-1} - B_1^{d-1}) + P_2 (B_1^{d-1} - B_2^{d-1}) + \dots + P_d (B_{d-1}^{d-1} - B_d^{d-1}) \right)$$

$\nearrow = 0$
 $\searrow = 0$

- En factorisant les $B_i^{d-1}(u)$:

$$\frac{dP}{du}(u) = d \sum_{i=0}^{d-1} (P_{i+1} - P_i) B_i^{d-1}(u)$$

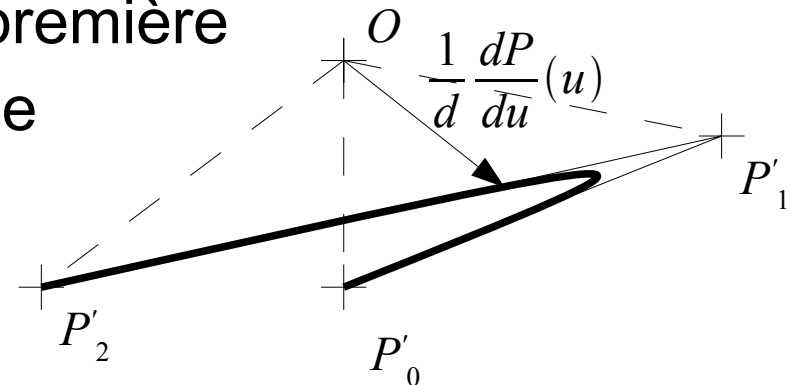
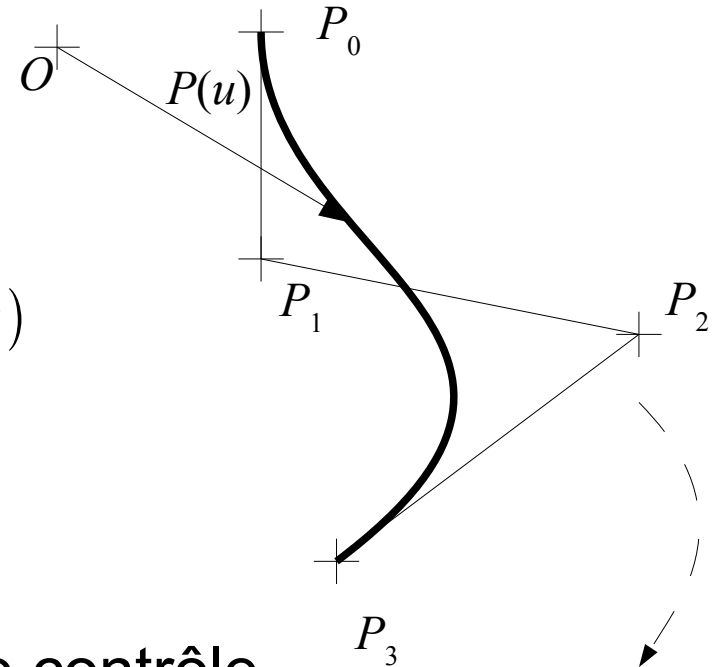
Courbes de Bézier

- Dérivée première

$$\frac{dP}{du}(u) = d \sum_{i=0}^{d-1} (P_{i+1} - P_i) B_i^{d-1}(u)$$

$$\frac{dP}{du}(u) = d \sum_{i=0}^{d-1} P'_i B_i^{d-1}(u)$$

- On passe par les points de contrôle P'_0 et P'_{d-1} ... donc la dérivée première aux extrémités ne dépend que des **deux** premiers (resp. derniers) points de contrôle



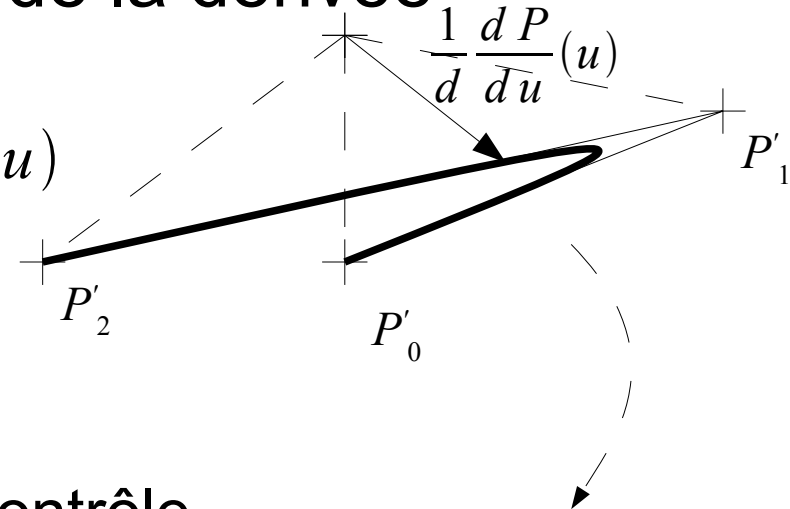
Hodographe premier

Courbes de Bézier

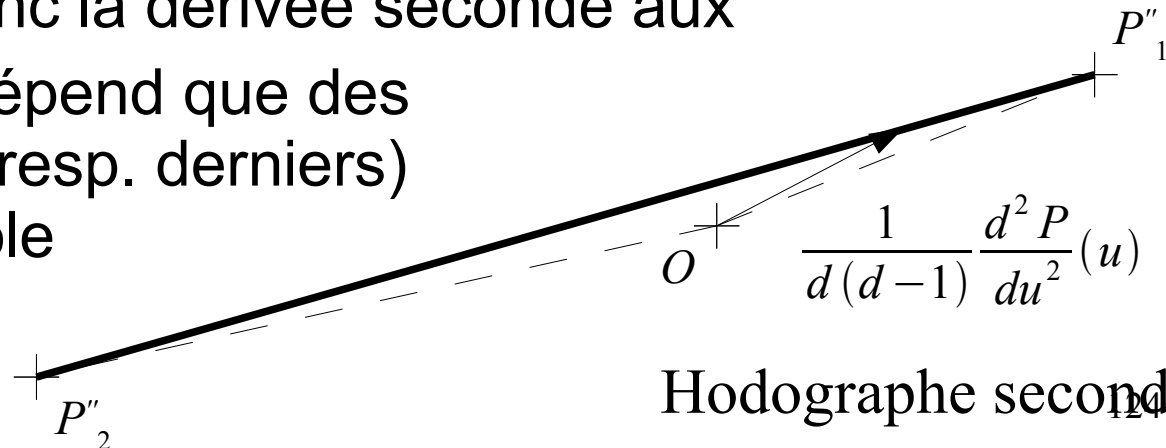
- Dérivée seconde = dérivée de la dérivée

$$\frac{d^2 P}{du^2}(u) = (d-1)d \sum_{i=0}^{d-2} (P'_{i+1} - P'_i) B_i^{d-2}(u)$$

$$\frac{d^2 P}{du^2}(u) = (d-1)d \sum_{i=0}^{d-2} P''_i B_i^{d-2}(u)$$



- On passe par les points de contrôle P''_0 et P''_{d-2} ... donc la dérivée seconde aux extrémités ne dépend que des **trois** premiers (resp. derniers) points de contrôle



Hodographe seconde

Courbes de Bézier

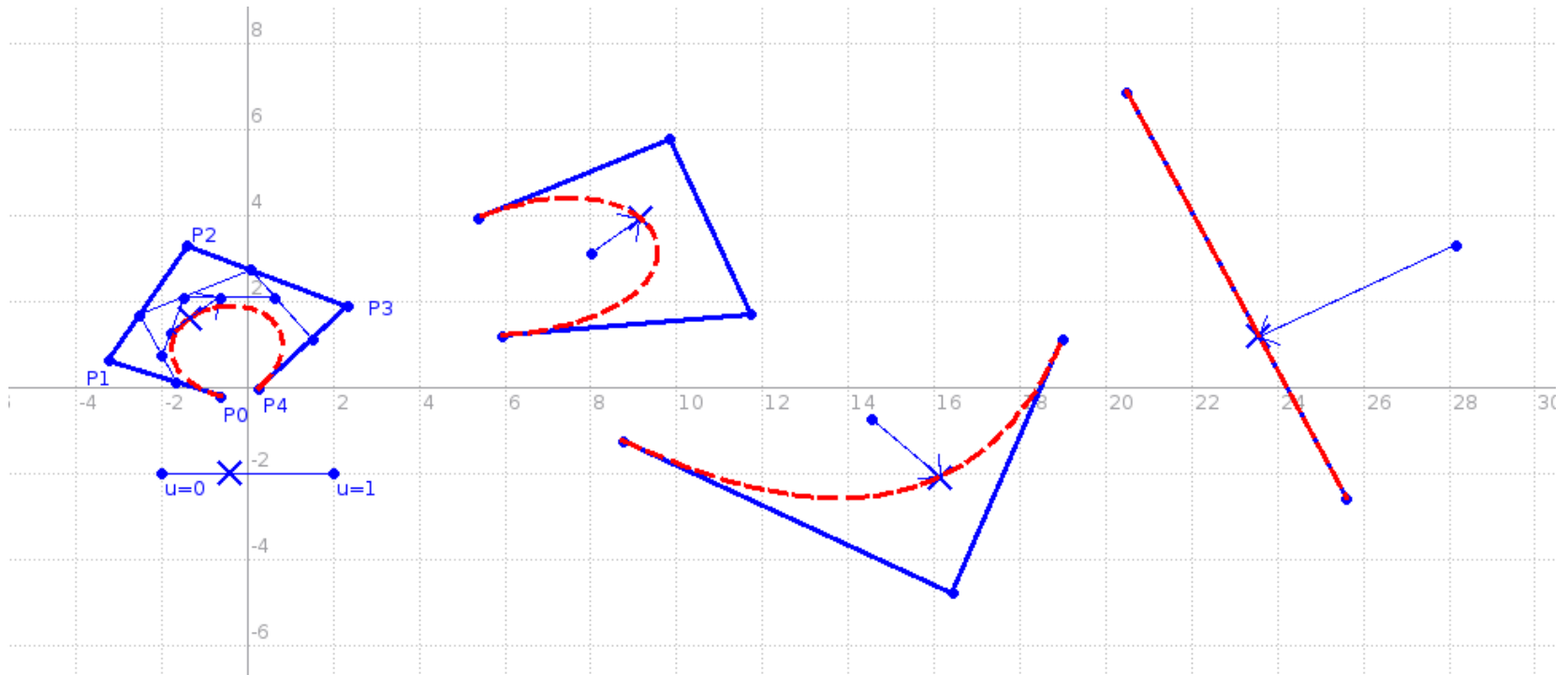
- Dérivée d'ordre k

$$\frac{d^k P}{du^k}(u) = (d - k + 1) \cdots (d - 1) d \sum_{i=0}^{d-k} (P_{i+1}^{(k-1)} - P_i^{(k-1)}) B_i^{d-k}(u)$$

$$\frac{d^k P}{du^k}(u) = \prod_{l=1}^k (d - l + 1) \sum_{i=0}^{d-k} P_i^{(k)} B_i^{d-k}(u) \quad , \quad P_i^{(k)} = (P_{i+1}^{(k-1)} - P_i^{(k-1)})$$

- La dérivée d'ordre k aux extrémités ne dépend que des $k+1$ premiers (resp. derniers) points de contrôle.
- Bien entendu, pour autant qu'il y ait assez de points de contrôles ... ($k < d+1$)

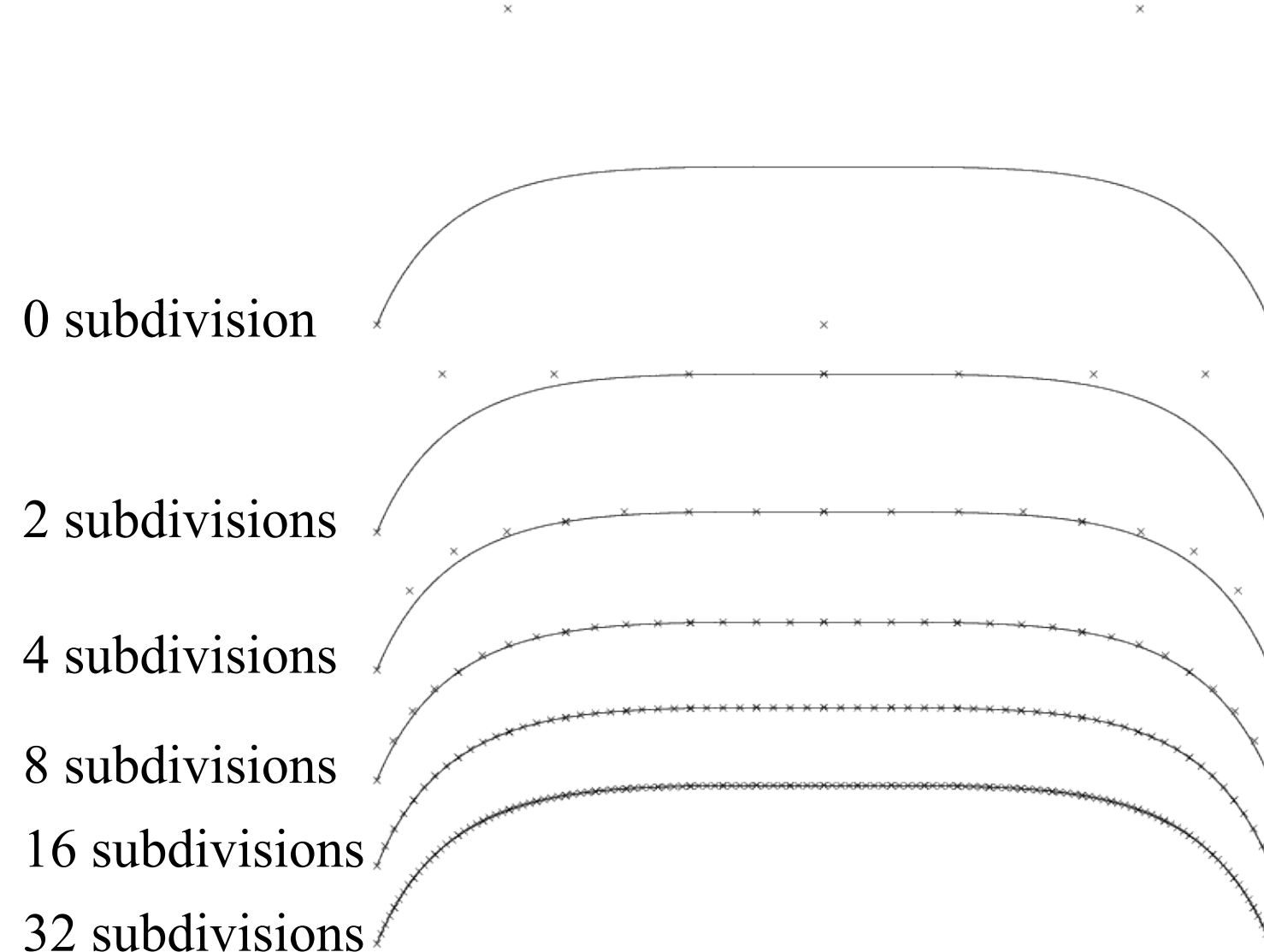
Courbes de Bézier



Courbes de Bézier

- Subdivision récursive
 - Permet de tracer rapidement la courbe à l'aide de l'algorithme de de Casteljau
 - Idée : subdiviser la courbe en deux sous courbes en $u=0.5$, puis ces sous courbes en quatre (tjrs pour $u^*=0.5$) et ainsi de suite.
 - Les points de contrôle des sous courbes sont obtenus comme résidu de l'algo de de Casteljau à chaque subdivision
 - Les points de contrôle se rapprochent très rapidement de la courbe
 - Lorsque l'écart entre les points de départ et d'arrivée de chaque sous courbe est inférieur à un facteur (dépend de la résolution), on joint simplement les points du polygone caractéristique par des droites
 - Il s'agit d'une approche « diviser pour régner » (*divide and conquer*) – paradigme courant en génie logiciel.

Courbes de Bézier



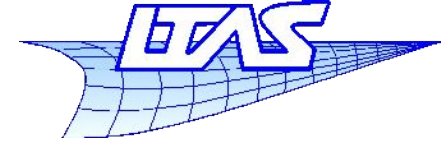
Courbes de Bézier

- Coût de l'algorithme de subdivision récursive
 - En $O(d^2 \cdot 2^m)$ pour m niveaux de subdivision
 - Nombre de points générés : $d \cdot 2^m$
 - Par point, l'algorithme devient linéaire par rapport au degré...

B-Splines

Infographie

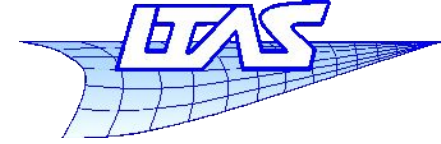
B-Splines



- Isaac J. Schoenberg (1946)
- Carl De Boor (1972-76)
- Maurice G. Cox (1972)
- Richard Riesenfeld (1973)
- Wolfgang Boehm (1980)

B-Splines

- Les courbes de Bézier partent d'une approche où le degré de la courbe est directement lié au nombre de points de contrôle.
 - La gestion de la continuité entre courbes de Bézier n'est pas triviale
- Les B-Splines sont une généralisation en ce sens que l'ordre ne dépend plus du nombre de points de contrôle
 - On peut imposer tout type de continuité en n'importe quel point de la courbe (on verra comment)
 - Ce sont des courbes polynomiales par morceaux (Les courbes de Bézier ont une représentation polynomiale unique)
 - Le contrôle est local
 - La paramétrisation est librement choisie (avec Bézier, $0 < u < 1$)



- Base des courbes de Bézier :

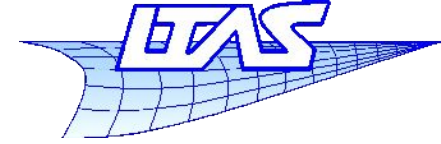
$$P(u) = \sum_{i=0}^d P_i B_i^d(u)$$

- Fonctions de forme définies sur tout l'intervalle [0..1]
- Continuité entre 2 c. de Bézier assurée par le choix judicieux des P_i

- Base des B-splines

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^d(u)$$

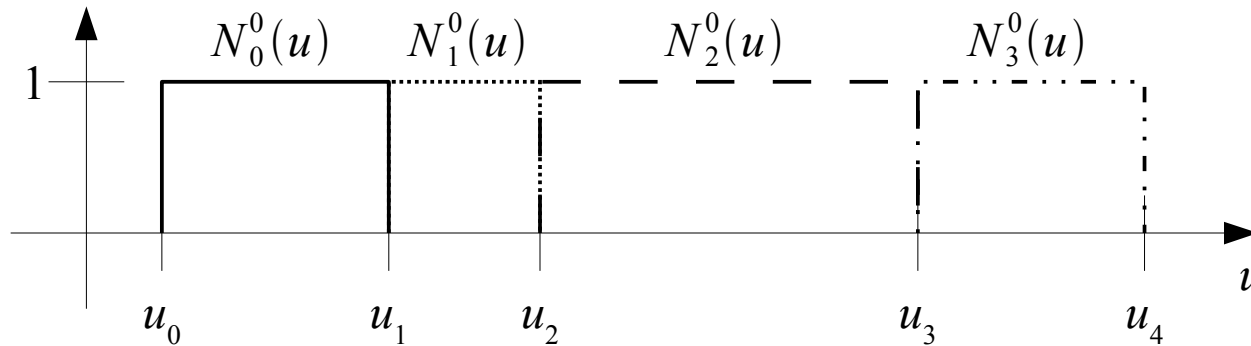
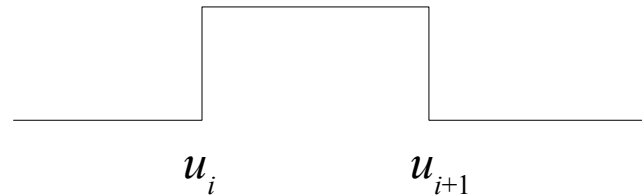
- Fonctions de base N_i^d définies par morceaux
- Ont un support compact + satisfont partition de l'unité
- La continuité est définie par les fonctions de forme



- Les fonctions de forme B-spline sont définies :
 - Par la séquence nodale
 - Par le degré des polynômes de chaque morceau
- La séquence nodale :
 - Suite de valeurs u_i (nœuds) du paramètre u de la courbe, croissantes (non strictement) – il peut y avoir des valeurs égales.
 - ex. $U=\{0,0,0,1,2,3,4,4,4\}$

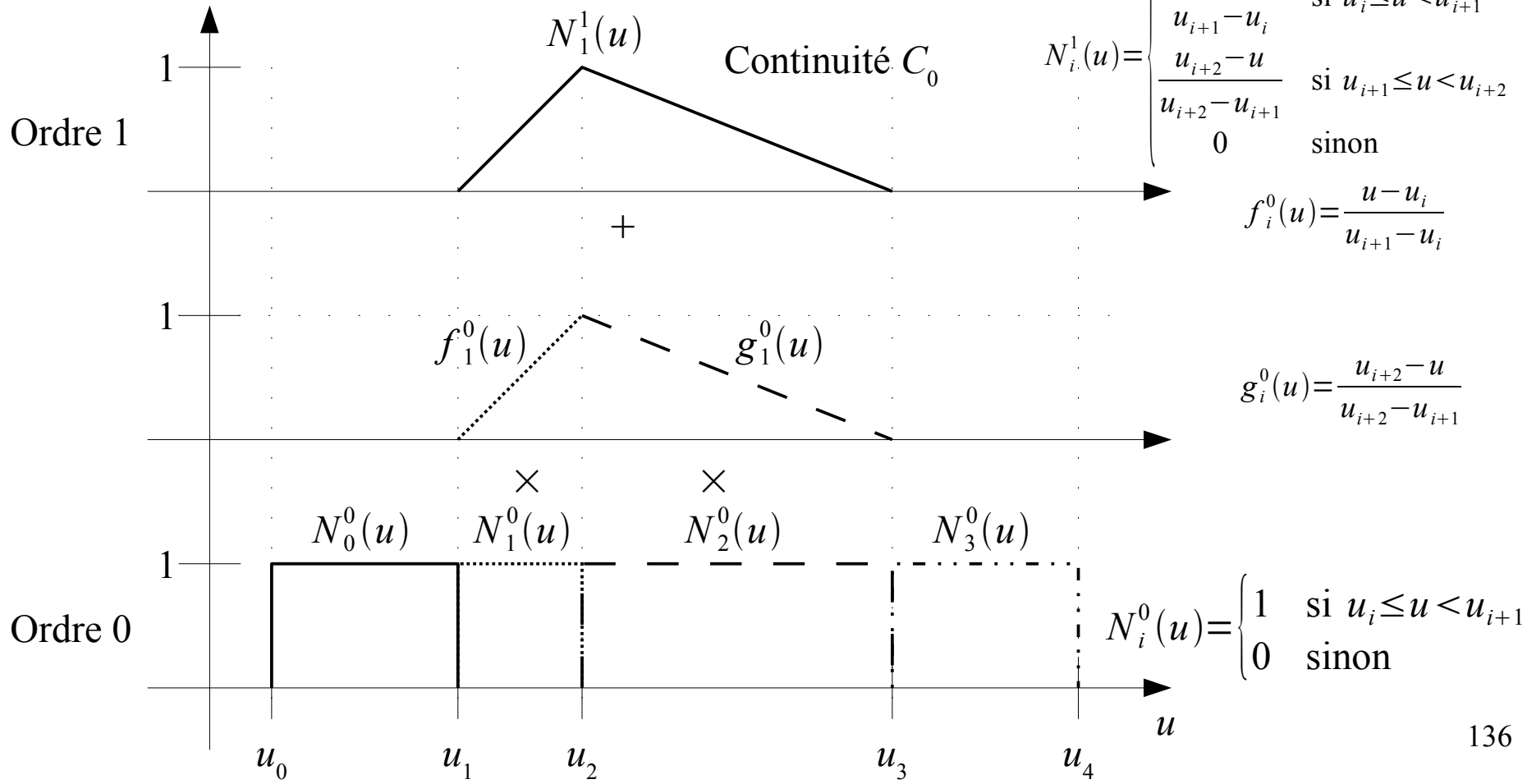
- Construction de la base B-spline
 - Base de degré 0

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

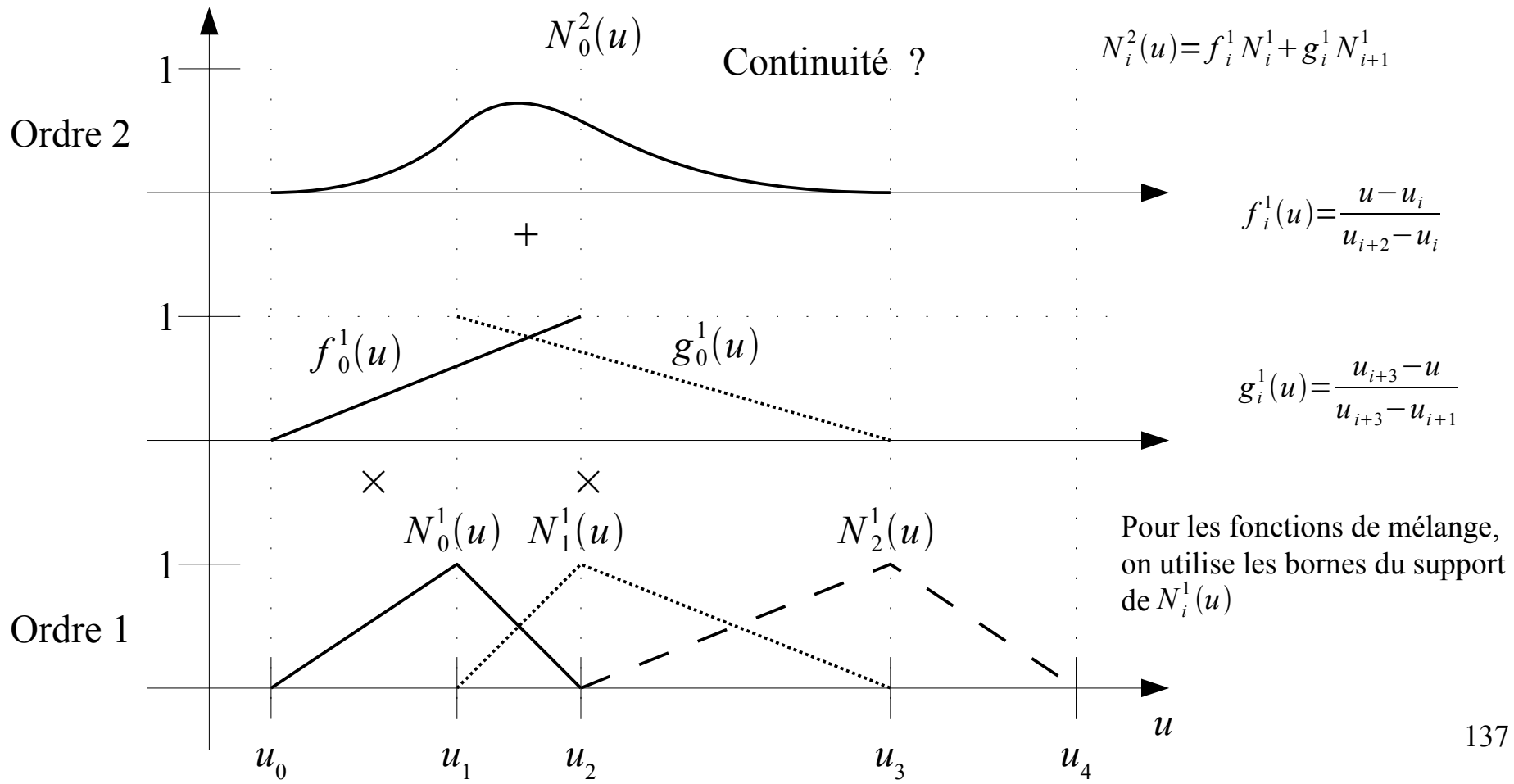


Séquence nodale

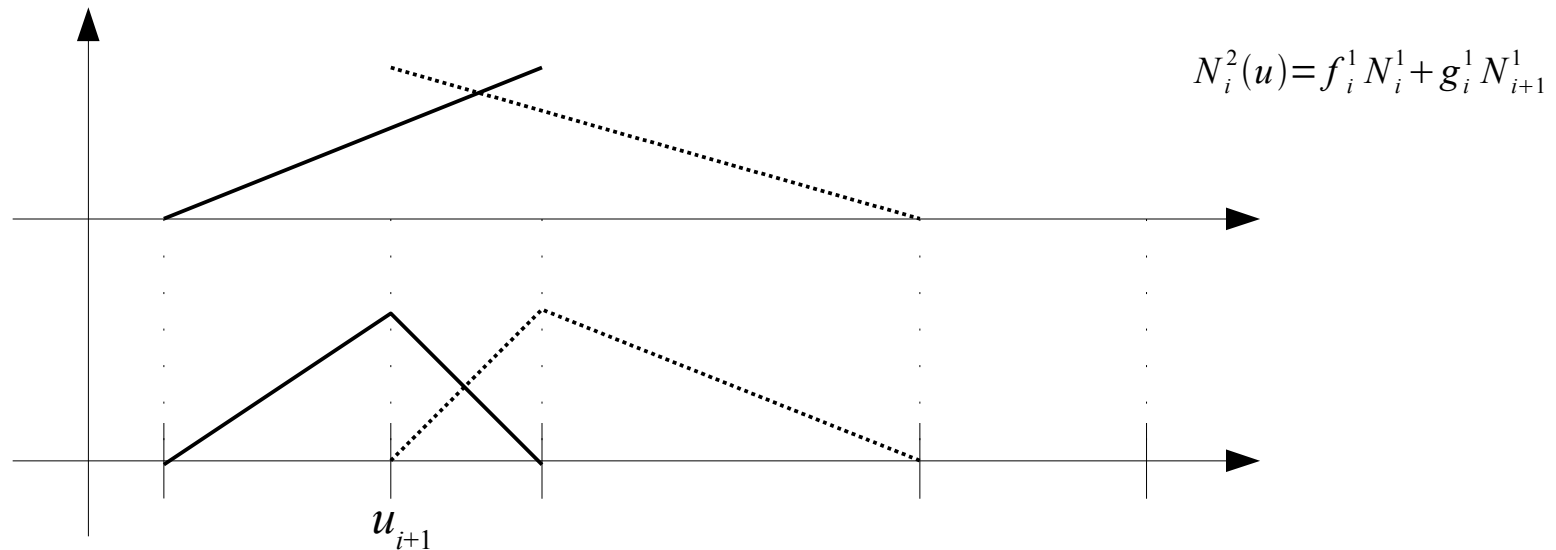
- Fonctions de base d'ordre supérieur obtenues par mélange linéaire- « linear blending »



- Fonctions de base d'ordre supérieur obtenues par mélange linéaire- « linear blending »



B-Splines

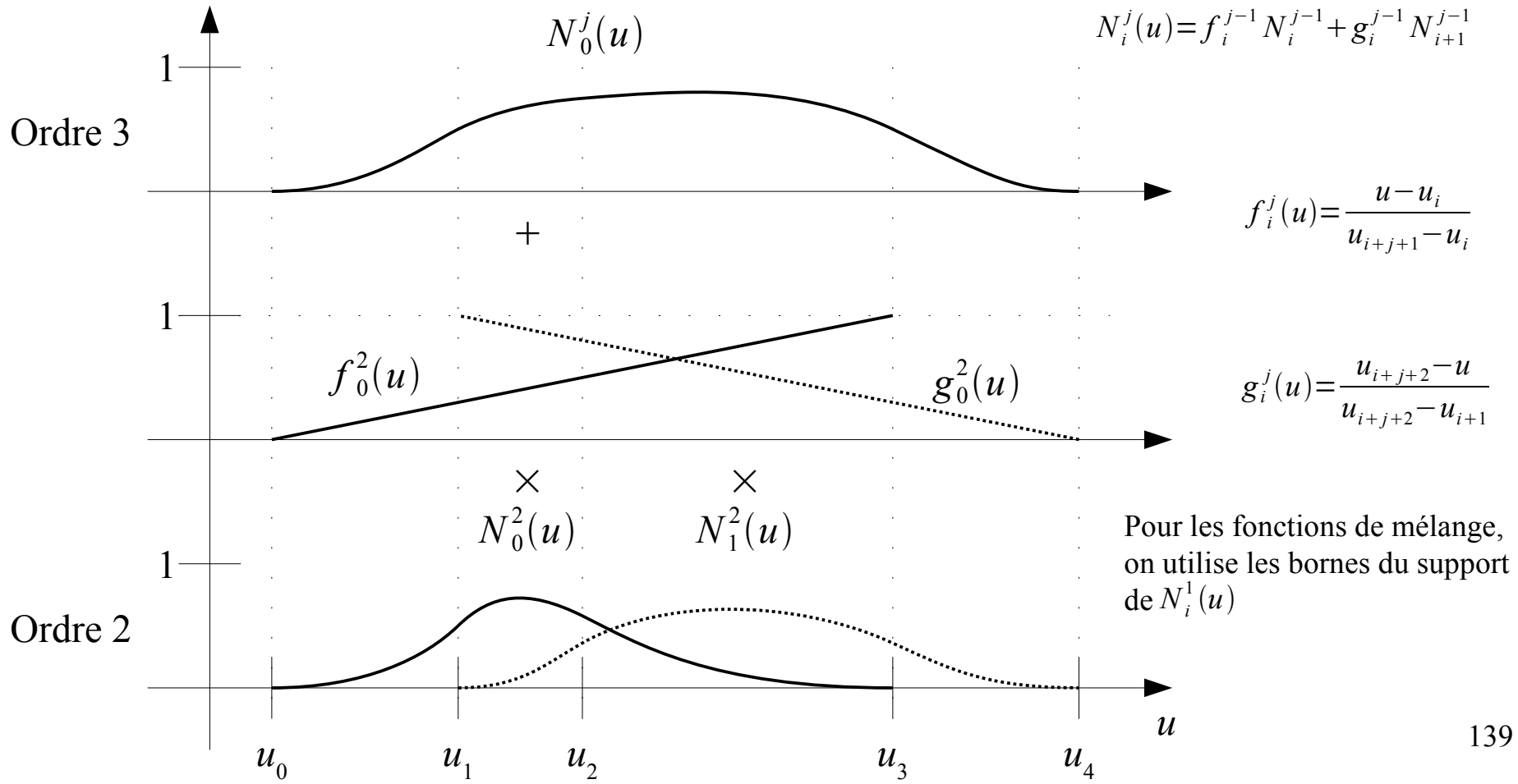


$$\begin{aligned}
 N_i'^2(u_{i+1}^-) &= f_i'^{j-1} N_i^{j-1} + g_i'^{j-1} N_{i+1}^{j-1} + f_i^{j-1} N_i'^{j-1} + g_i^{j-1} N_{i+1}'^{j-1} \\
 &= f_i'^{j-1}(u_{i+1}^-) N_i^{j-1}(u_{i+1}^-) + f_i^{j-1}(u_{i+1}^-) N_i'^{j-1}(u_{i+1}^-) \\
 &= \frac{1}{u_{i+2} - u_i} + \frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+2} - u_i} \cdot \frac{1}{u_{i+1} - u_i} = \frac{2}{u_{i+2} - u_i}
 \end{aligned}$$

→ Continuité C_1

$$\begin{aligned}
 N_i'^2(u_{i+1}^+) &= f_i'^{j-1} N_i^{j-1} + g_i'^{j-1} N_{i+1}^{j-1} + f_i^{j-1} N_i'^{j-1} + g_i^{j-1} N_{i+1}'^{j-1} \\
 &= f_i'^{j-1}(u_{i+1}^+) N_i^{j-1}(u_{i+1}^+) + f_i^{j-1}(u_{i+1}^+) N_i'^{j-1}(u_{i+1}^+) + g_i^{j-1}(u_{i+1}^+) N_{i+1}'^{j-1}(u_{i+1}^+) \\
 &= \frac{1}{u_{i+2} - u_i} - \frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+2} - u_i} \cdot \frac{1}{u_{i+2} - u_{i+1}} + \frac{1}{u_{i+2} - u_{i+1}} = \frac{2}{u_{i+2} - u_i}
 \end{aligned}$$

- Fonctions de base d'ordre supérieur obtenues par mélange linéaire- « linear blending »



B-Splines

- Définition des fonctions de forme

- On pose $U = \{u_0, \dots, u_m\}$, $u_i \leq u_{i+1}$, $i = 0 \dots m-1$ (séquence nodale)
- Les fonctions sont telles que : (formule de récurrence de Cox – de Boor)

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N_i^d(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+d} - u_i} N_i^{d-1}(u) + \frac{u_{i+d+1} - u}{u_{i+d+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{d-1}(u)$$

- Dans le cas où $u_{i+d} - u_i = 0$, nécessairement

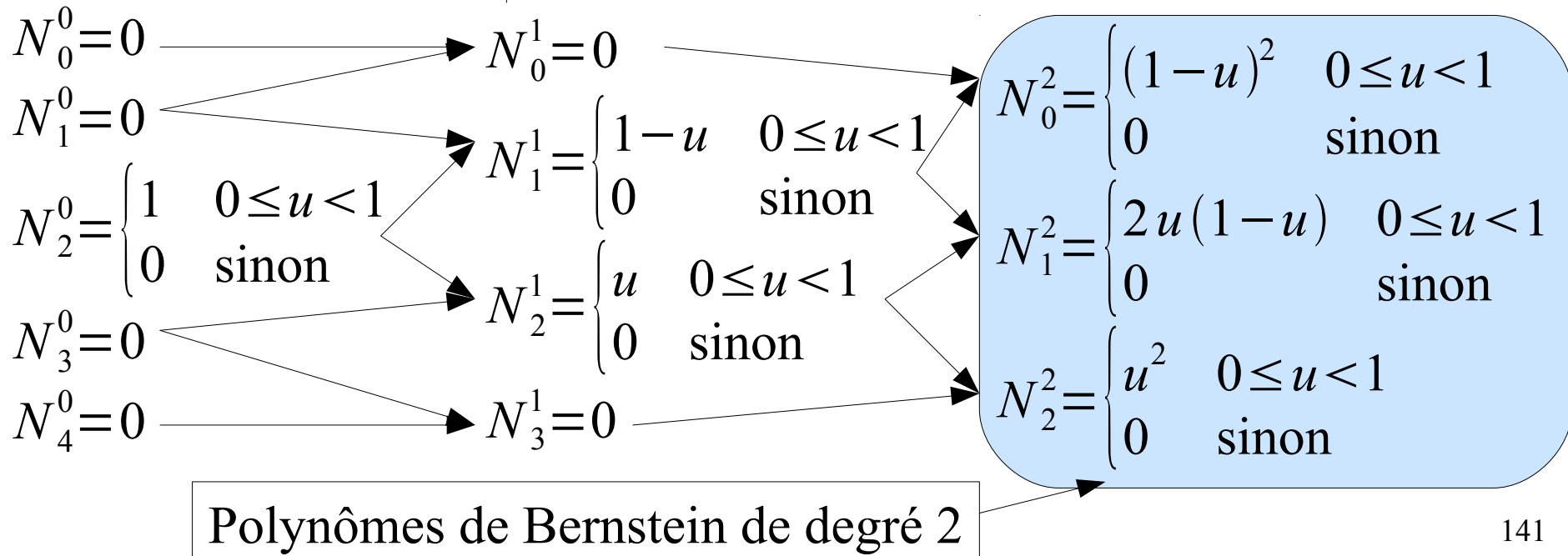
$$N_i^{d-1}(u) \equiv 0 \quad . \text{ Par convention, on pose } \frac{0}{0} = 0$$

B-Splines

- Exemple : calcul des fonctions de forme de degré $d \leq 2$ pour $U = \{u_0=0, u_1=0, u_2=0, u_3=1, u_4=1, u_5=1\}$

$$N_0^1(u) = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} N_0^0(u) + \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} N_1^0(u) \rightarrow \frac{0}{0} = 0$$

par convention

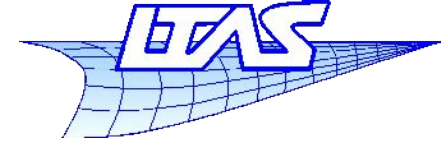


B-Splines

- Les polynômes de Bernstein de degré d sont un cas particulier de la base des B-splines
 - Ils correspondent à une séquence nodale

$$U_B = \{u_0=0, \dots, u_d=0, u_{d+1}=1, \dots, u_{2d+1}=1\}$$

- Les courbes de Bézier (d'un morceau) sont un sous ensemble des B-splines.
- Il est toutefois possible de transformer toute B-spline en assemblage de courbes de Bézier – car les polynômes de Bernstein forment une base complète des polynômes de degré d .



- Fonctions de forme et points de contrôle
 - Contrairement aux courbes de Bézier, le nombre de points de contrôle n'est pas imposé par le degré d
 - Soit $m+1$ le nombre de nœuds. On dispose de $n+1$ fonctions de forme indépendantes
 - A chaque fonction de forme, on associe un point de contrôle
- $$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^d(u)$$
- Le nombre de points de contrôle est fixé par la relation $n+1=m-d$

B-Splines

■ Types de séquences nodales...

- Uniforme – l'écart entre deux noeuds successifs est constant

$$U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m-d-1}\} \quad , \quad u_{i+1} - u_i = k$$

- Périodique - l'écart entre les noeuds en début de séquence nodale est identique à celui des noeuds en fin de séquence nodale

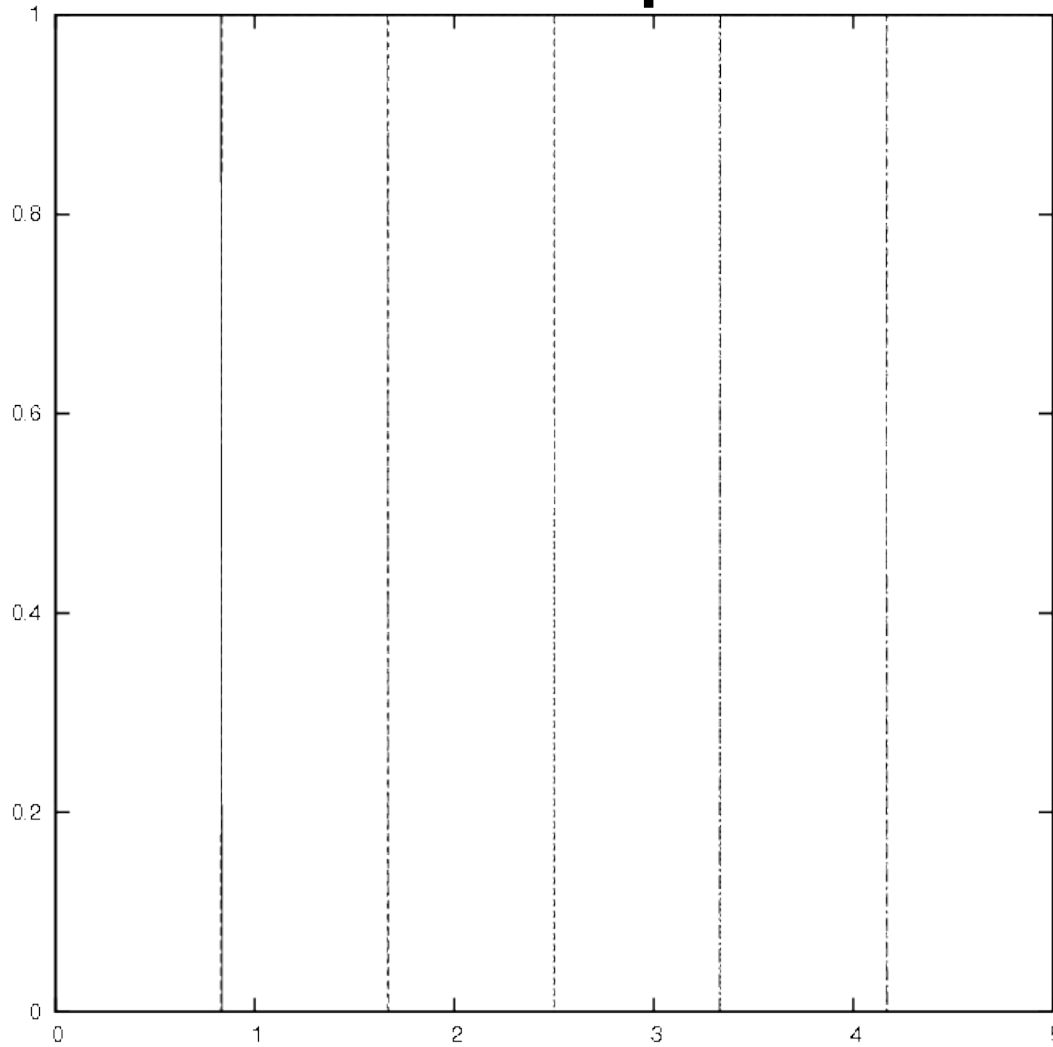
$$U = \left\{ \underbrace{u_0, \dots, u_d}_{d+1}, u_{d+1}, \dots, u_{m-d-1}, \underbrace{u'_0, \dots, u'_d}_{d+1} \right\} \quad , \quad u'_i - u_i = k$$

- Non uniforme – interpolant le premier et dernier point de contrôle

$$U = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{d+1}, u_{d+1}, \dots, u_{m-d-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{d+1} \right\}$$

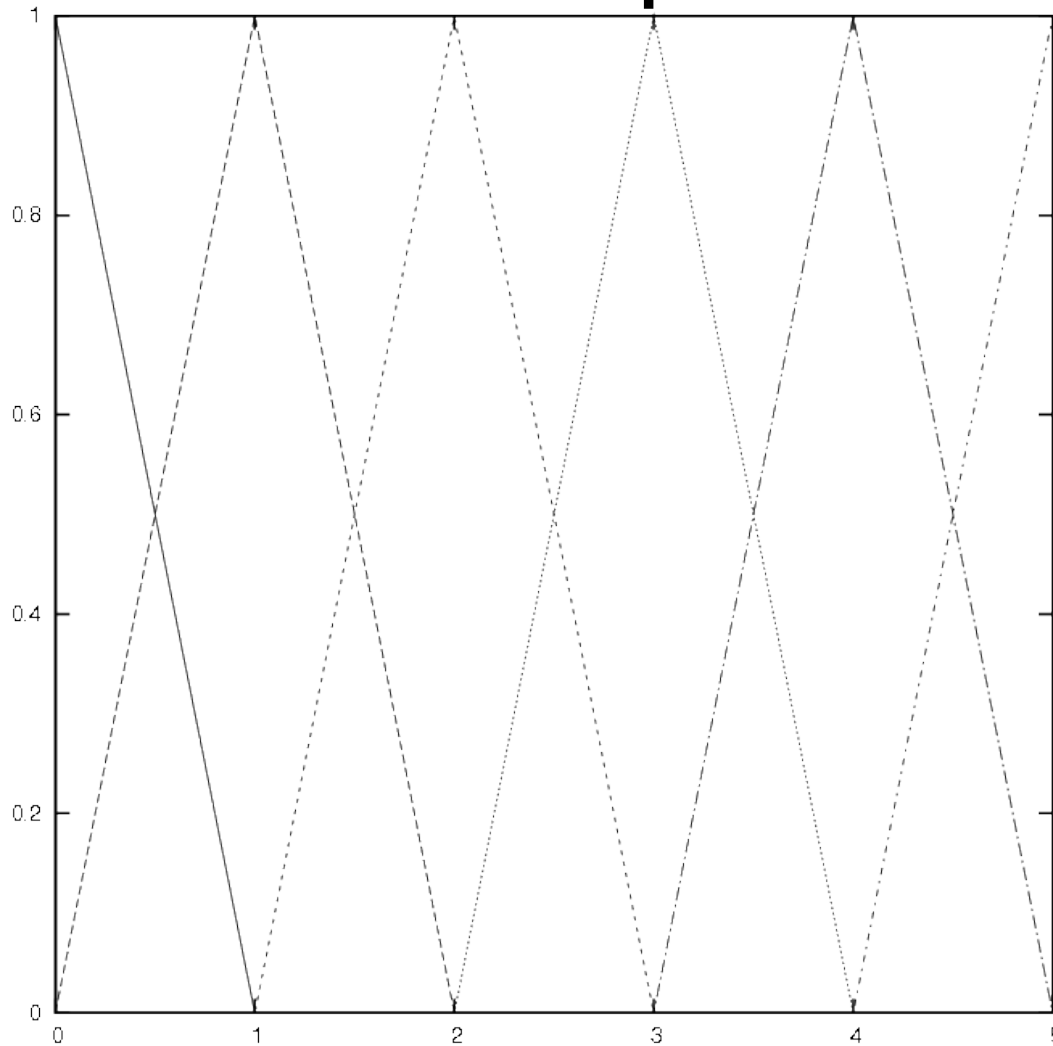
Pour la suite, sauf indication contraire, on considère les séquences nodales non uniformes interpolant les premiers et derniers points de contrôles

B-Splines



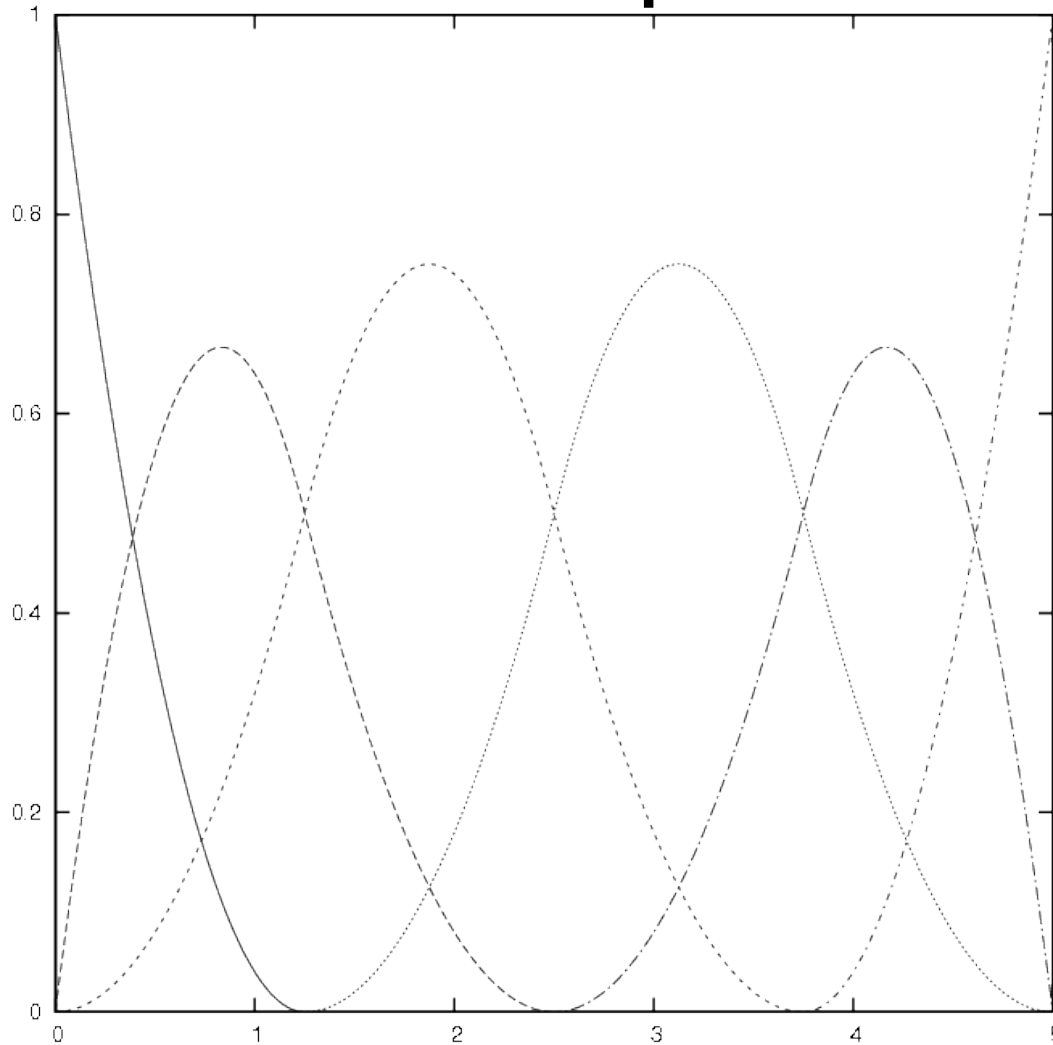
$$U = \left\{ 0, \frac{5}{6}, \frac{10}{6}, \frac{15}{6}, \frac{20}{6}, \frac{25}{6}, 5 \right\} \quad d=0 \quad m+1=7 \quad n+1=6$$

B-Splines



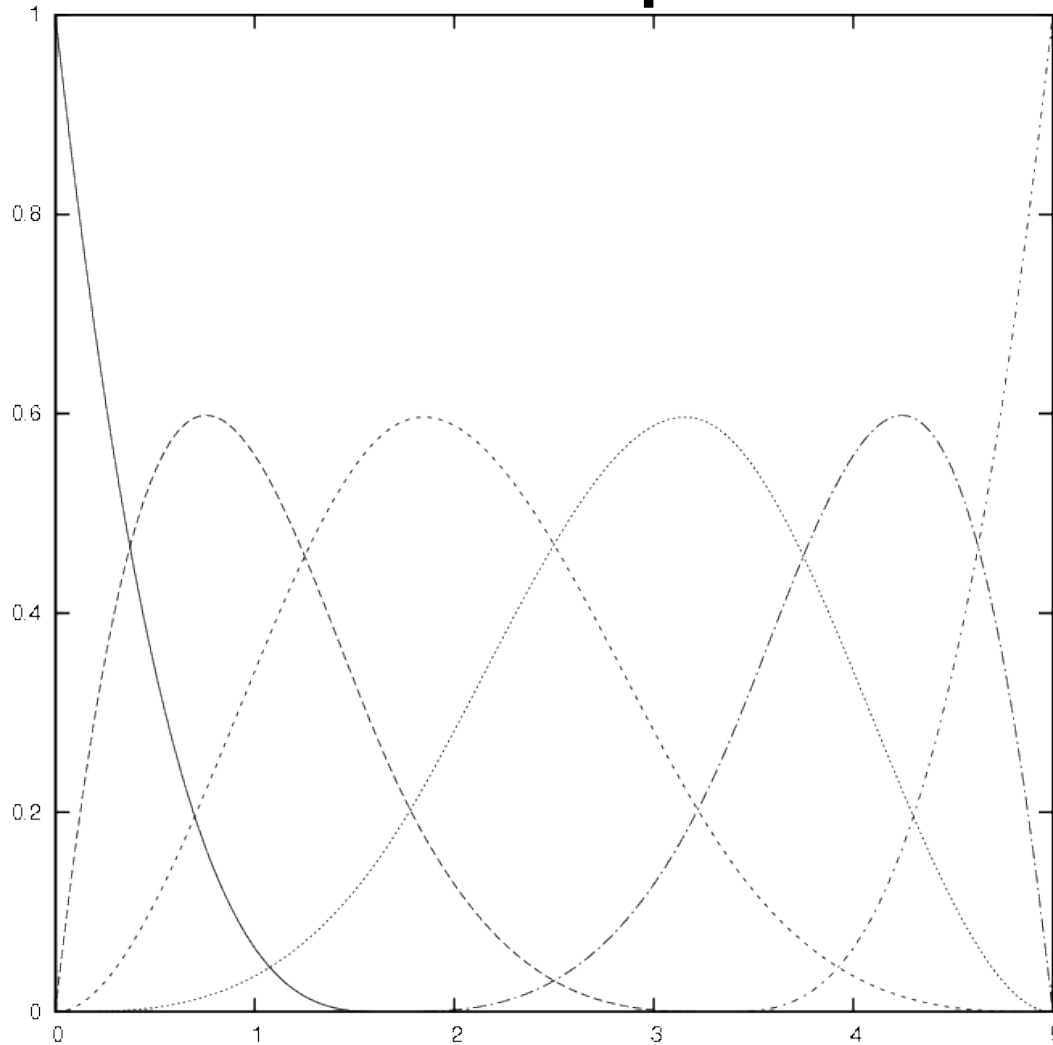
$$U = \{0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5\} \quad d=1 \quad m+1=8 \quad n+1=6$$

B-Splines



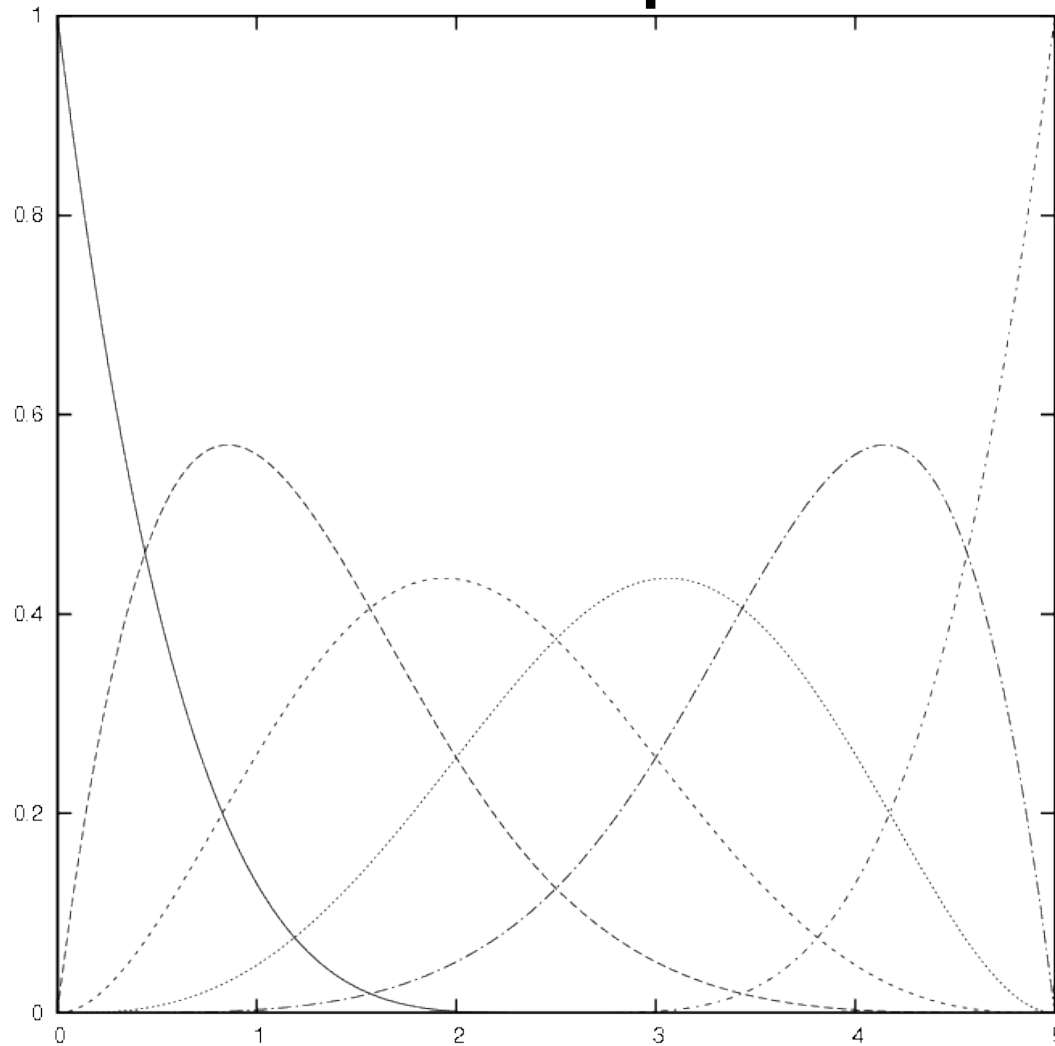
$$U = \left\{0, 0, 0, \frac{5}{4}, \frac{10}{4}, \frac{15}{4}, 5, 5, 5\right\} \quad d=2 \quad m+1=9 \quad n+1=6$$

B-Splines



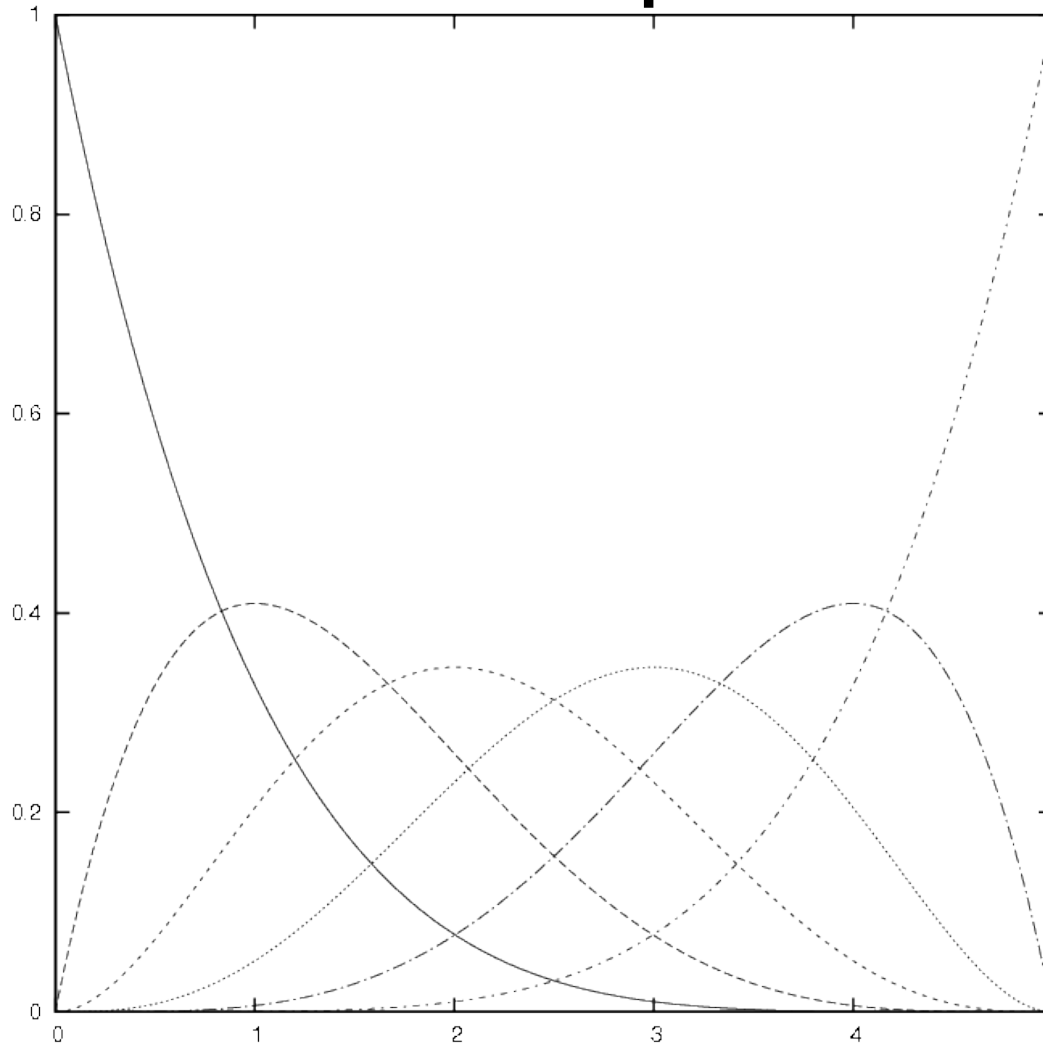
$$U = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{15}{3}, 5, 5, 5, 5 \right\} \quad d=3 \quad m+1=10 \quad n+1=6$$

B-Splines



$$U = \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{5}{2}, 5, 5, 5, 5, 5 \right\} \quad d=4 \quad m+1=11 \quad n+1=6$$

B-Splines

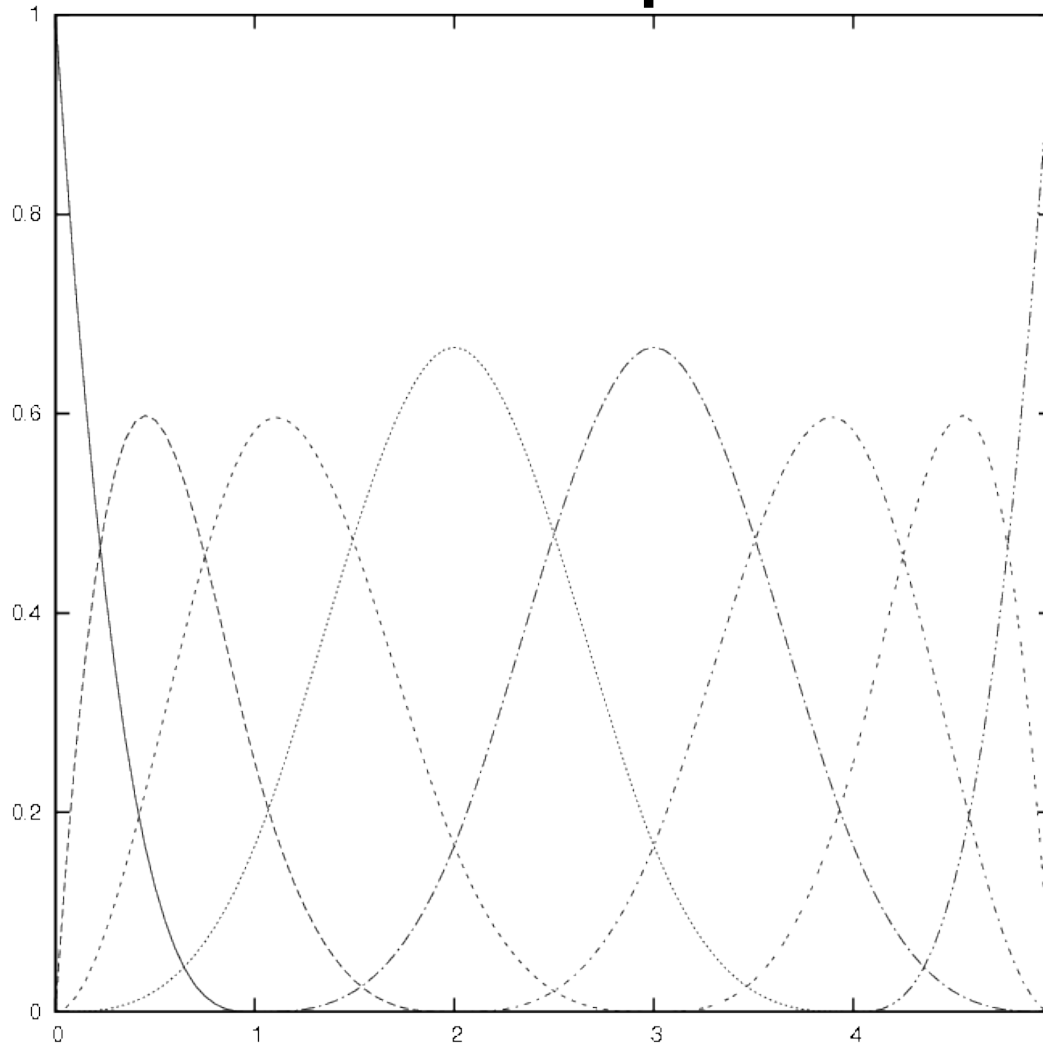


$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5\}$ $d=5$ $m+1=12$ $n+1=6$
 Polynômes de Bernstein (à un facteur sur u près)¹⁵⁰

B-Splines

- Propriétés des fonctions de forme B-spline
 - $N_i^d(u) = 0$ en dehors de l'intervalle $[u_i, u_{i+d+1}[$
 - Dans l'intervalle $[u_i, u_{i+1}[$, au plus $d+1$ fonctions $N_*^d(u)$ sont non nulles : N_{i-d}^d, \dots, N_i^d
 - $N_i^d(u) \geq 0 \quad \forall i, d \text{ et } u$ (FF non négatives)
 - Pour $u \in [u_i, u_{i+1}[$, $\sum_{j=i-d} N_j^d(u) = 1$ (partition de l'unité)
 - Toutes les dérivées de $N_i^d(u)$ existent à l'intérieur de l'intervalle $[u_i, u_{i+1}[$. A un nœud, $N_i^d(u)$ est $d-k$ fois différentiable, k étant la multiplicité du nœud.
 - Sauf pour $d=0$, $N_i^d(u)$ atteint exactement un maximum

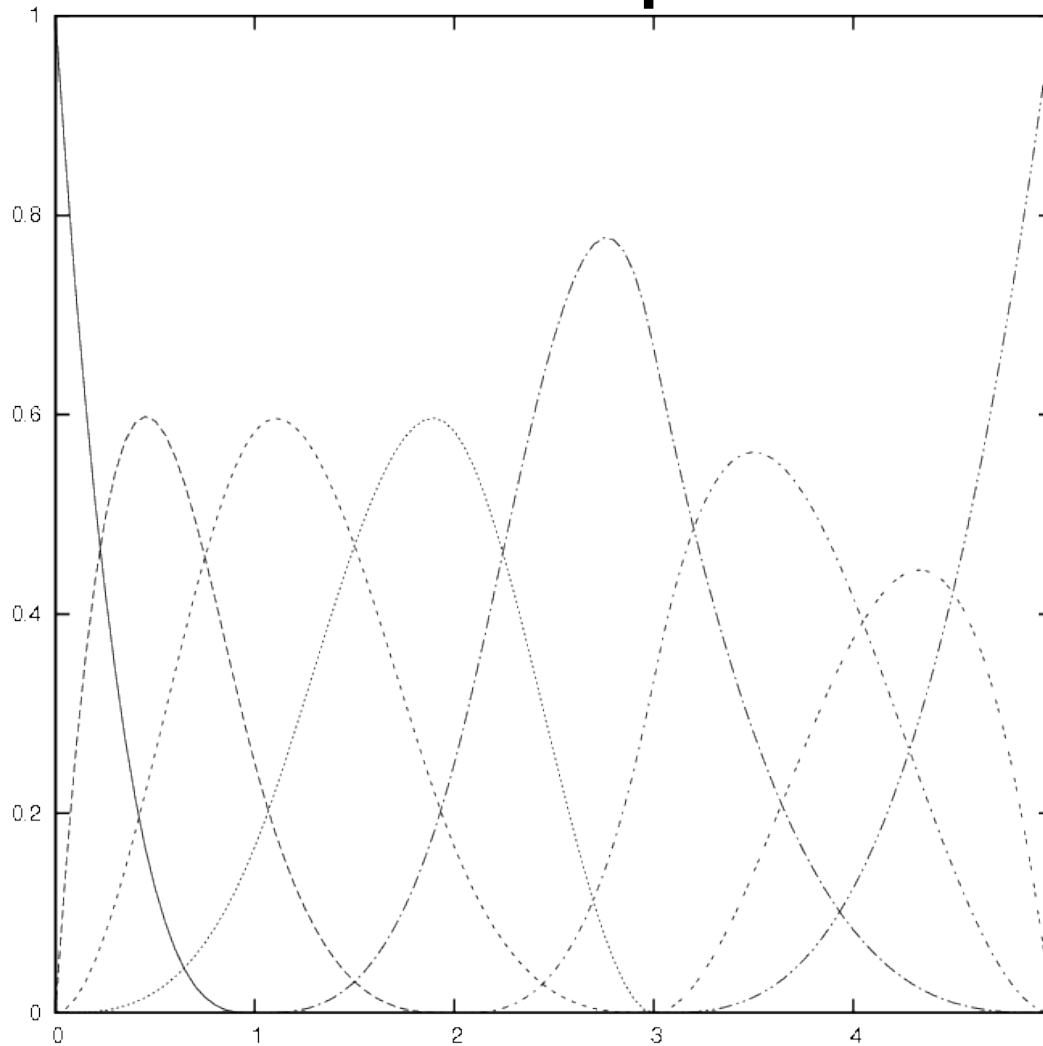
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5\} \quad d=3 \quad m+1=12 \quad n+1=8$$

Le noeud $u=3$ est de multiplicité 1

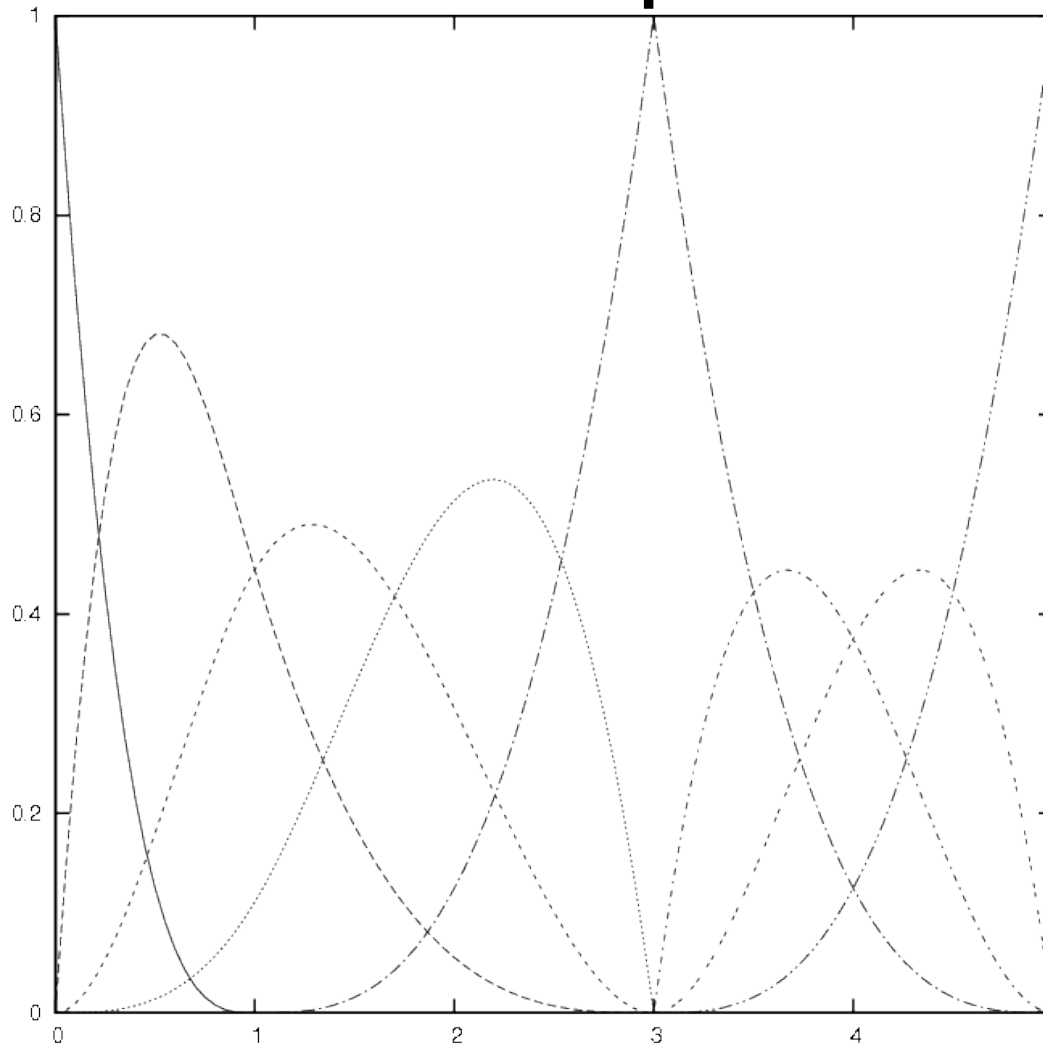
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 5\} \quad d=3 \quad m+1=12 \quad n+1=8$$

Le noeud $u=3$ est de multiplicité 2

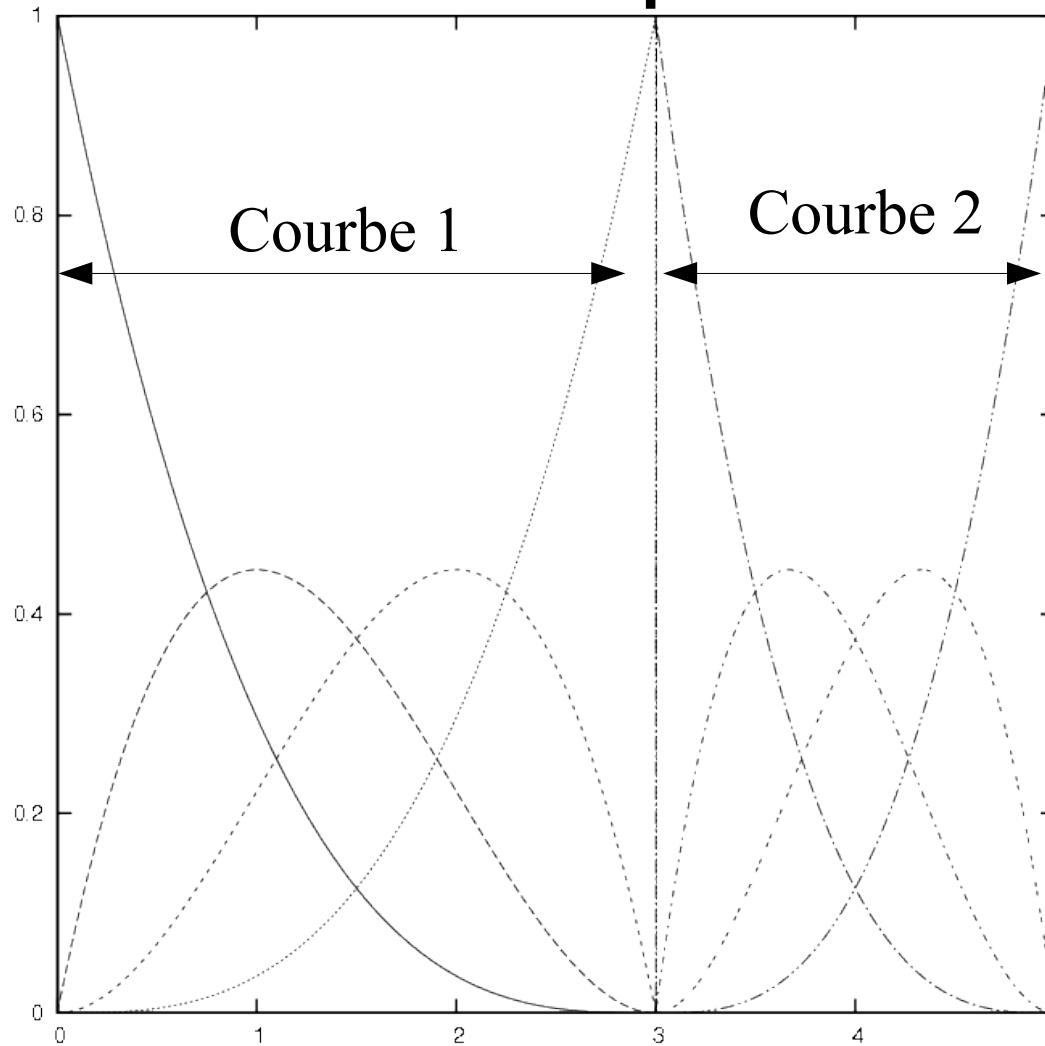
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\} \quad d=3 \quad m+1=12 \quad n+1=8$$

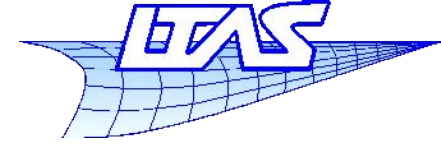
Le noeud $u=3$ est de multiplicité 3

B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\} \quad d=3 \quad m+1=12 \quad n+1=8$$

Le noeud $u=3$ est de multiplicité 4



- Dérivées d'une fonction de forme B-spline
 - Définition par récurrence

$$\frac{d^k N_i^d}{d u^k} = N_i^{d,(k)} = d \left(\frac{N_i^{d-1,(k-1)}}{u_{i+d} - u_i} - \frac{N_{i+1}^{d-1,(k-1)}}{u_{i+d+1} - u_{i+1}} \right)$$

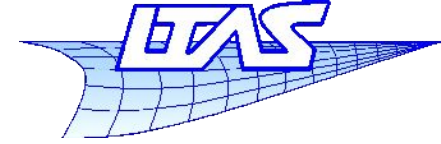
- k ne devrait pas excéder d : toutes les dérivées d'ordre supérieur sont nulles.

B-Splines

- Les caractéristiques des fonctions de forme impliquent que la courbe B-Spline

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^d(u) \quad U = \{u_0, \dots, u_m\}, \quad u_i \leq u_{i+1}, \quad i = 0 \dots m-1$$

- interpole P_0 et P_n , (seulement si la séquence nodale admet $d+1$ répétitions au début et à la fin !)
- est invariante par transformation affine ,
- est contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle (car $P(u)$ est une combinaison à coefficients positifs des points de contrôle)



(suite)

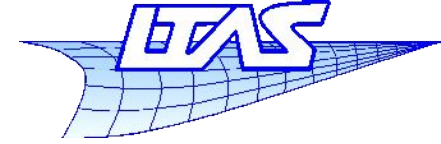
- est à *variation décroissante* : le nombre de points d'inflexion est inférieur aux nombres d'ondulations du polygone caractéristique
- est convexe si le polygone caractéristique est convexe,
- est de longueur inférieure ou égale à celle du polygone de contrôle.
- est invariante par transformation linéaire de la séquence nodale $u' = au + b$, $a > 0$

B-Splines

- Points de contrôle, degré et séquence nodale
 - On associe un point de contrôle pour chaque fonction de forme N_i^* . On a $n+1$ points de contrôle.
 - Le degré d est choisi par l'utilisateur.
 - La séquence nodale (qui définit les intervalles du paramètre sur lesquels la courbe a une définition polynomiale unique) est enfin construite. On a $m+1=n+d+2$ noeuds (avec $d+1$ répétitions au début et à la fin)
 - Il reste donc $n-d$ valeurs du paramètre à fixer (sans compter les extrémités)

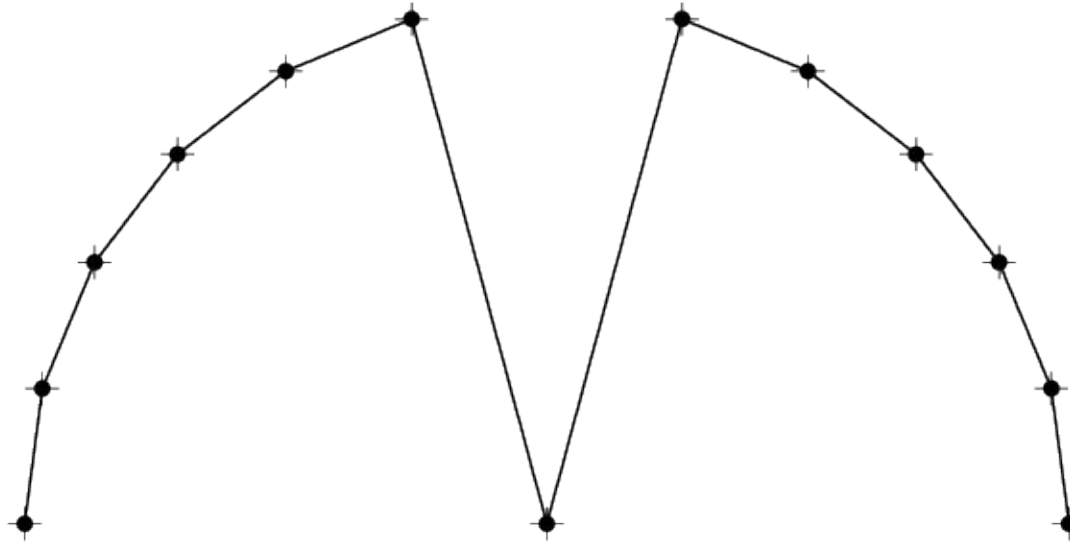
Infographie

B-Splines



- Exemples géométriques
 - Nombre de points de contrôle constant
 - On augmente le degré
 - Répartition des nœuds uniforme (sauf aux extrémités)
 - Pour quel degré a-t-on la meilleure approximation des points de contrôle ??

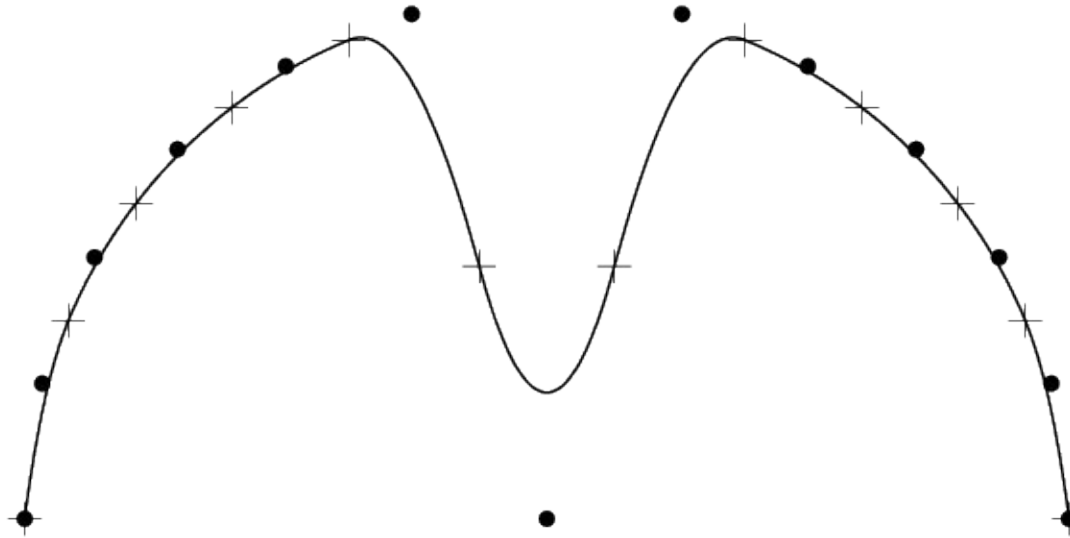
B-Splines



Degré 1

0 0 0.0833333 0.166667 0.25 0.333333 0.416667 0.5 0.583333 0.666667 0.75 0.833333 0.916667 1 1

B-Splines

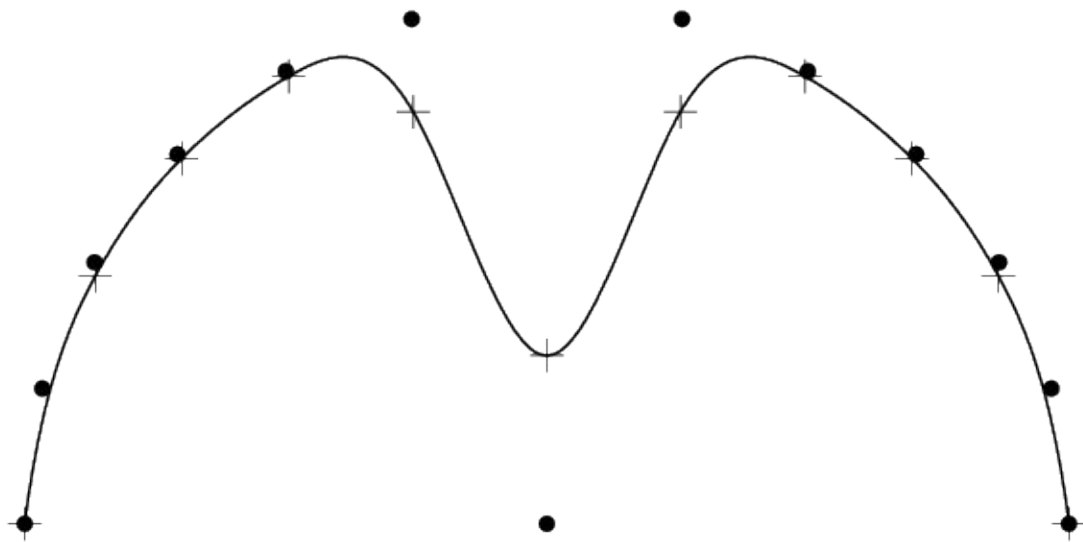
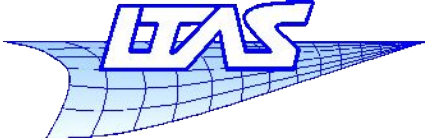


Degré 2

0 0 0 0.0909091 0.181818 0.272727 0.363636 0.454545 0.545455 0.636364 0.727273 0.818182 0.909091 1 1 1

Infographie

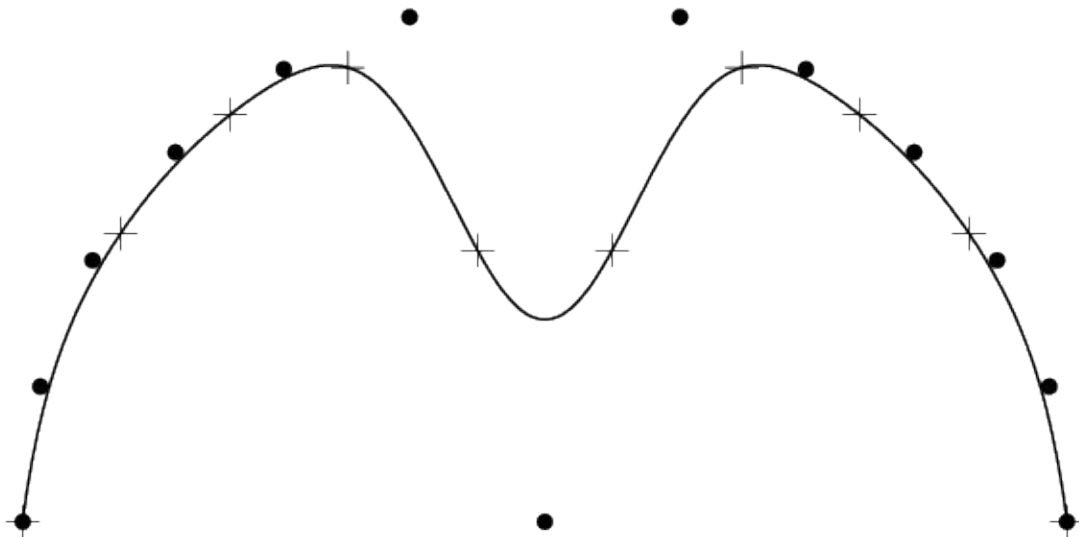
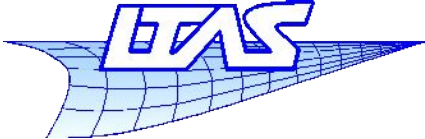
B-Splines



Degré 3

 0 0 0 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1 1 1

Infographie B-Splines

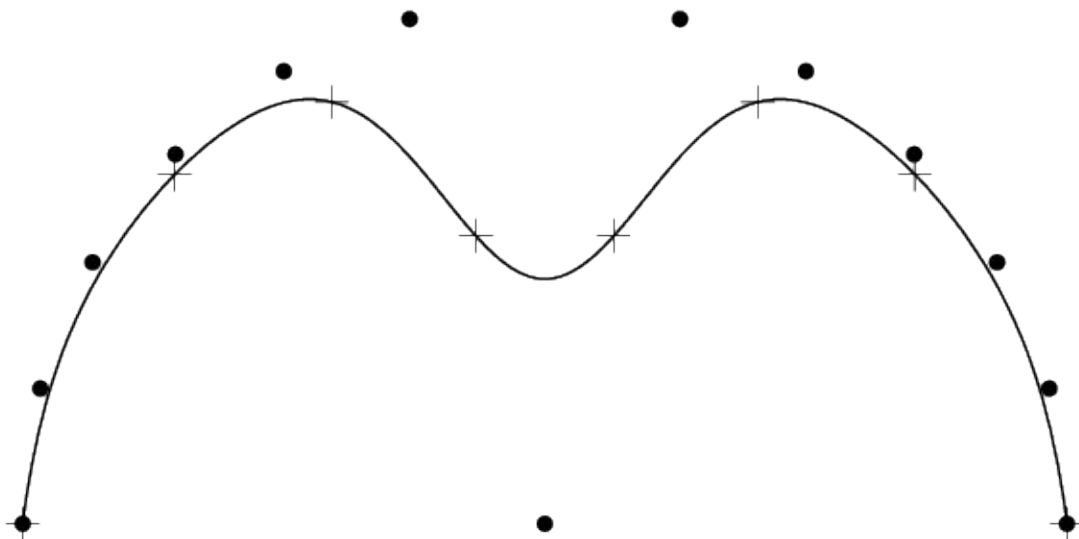
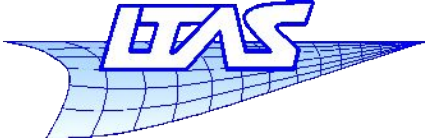


Degré 4

 0 0 0 0 0 0.111111 0.222222 0.333333 0.444444 0.555556 0.666667 0.777778 0.888889 1 1 1 1

Infographie

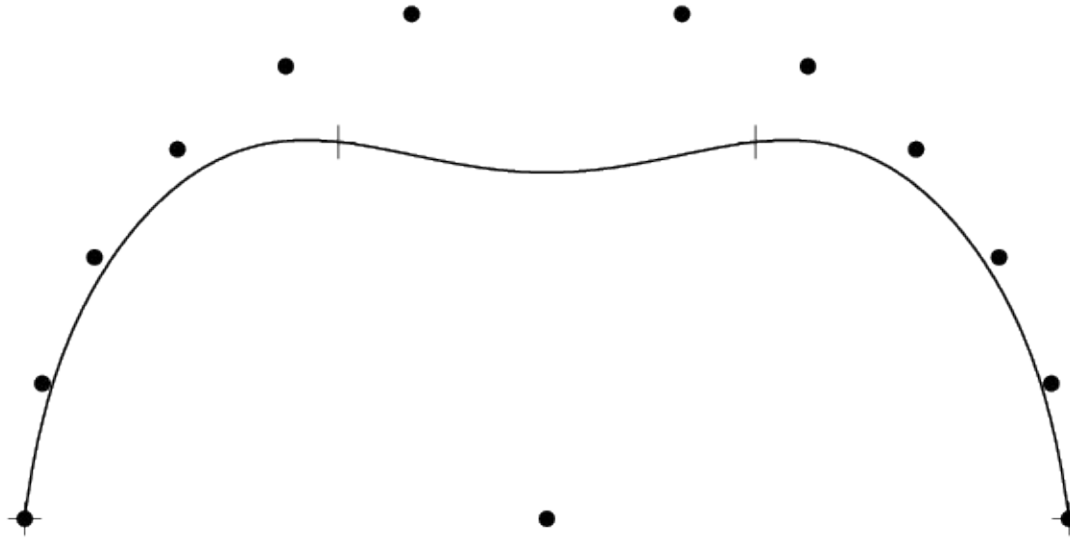
B-Splines



Degré 6

 0 0 0 0 0 0 0.142857 0.285714 0.428571 0.571429 0.714286 0.857143 1 1 1 1 1 1

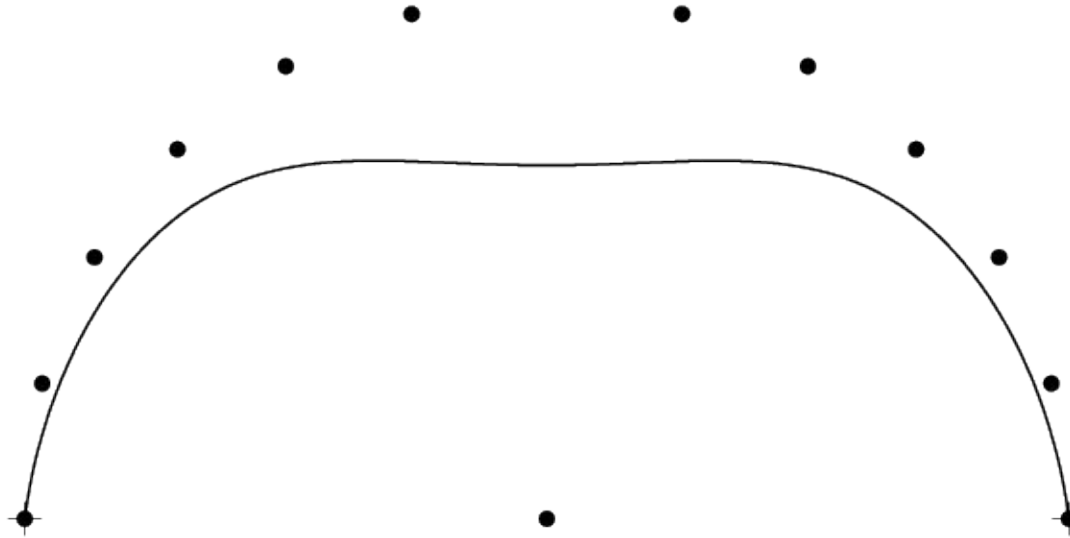
B-Splines



Degré 10

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.333333 0.666667 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

B-Splines



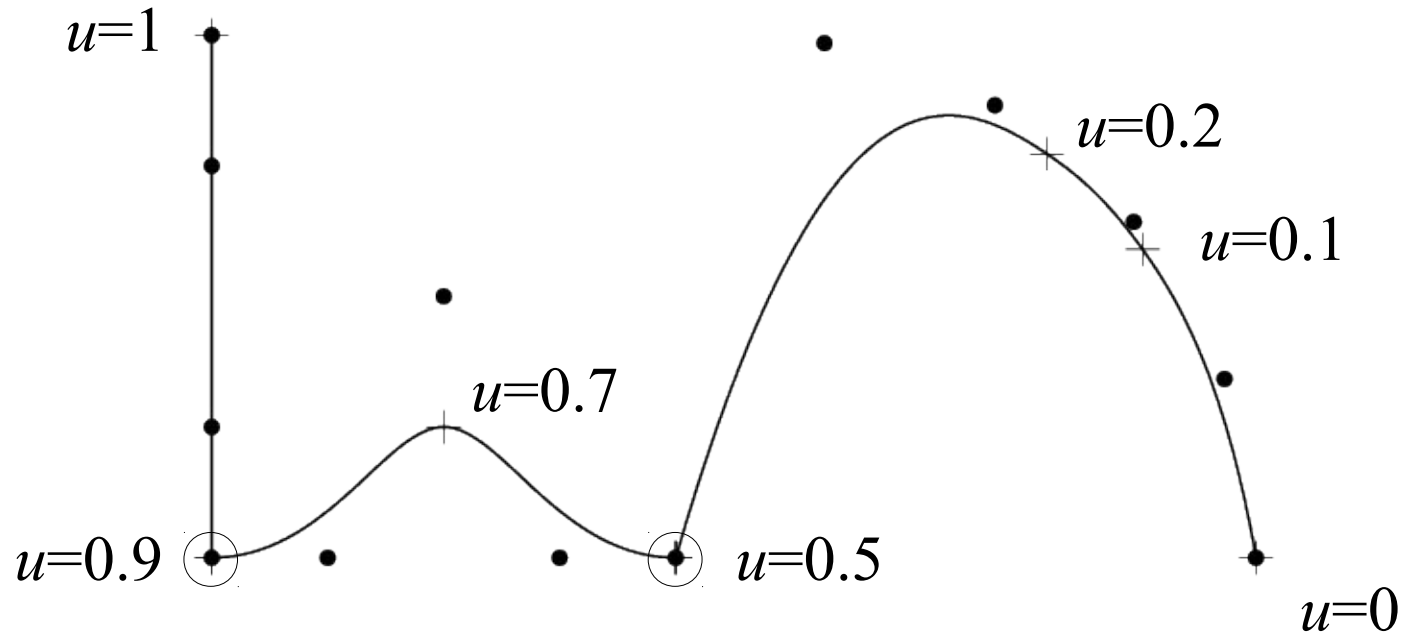
Degré 12 (Bézier)

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

B-Splines

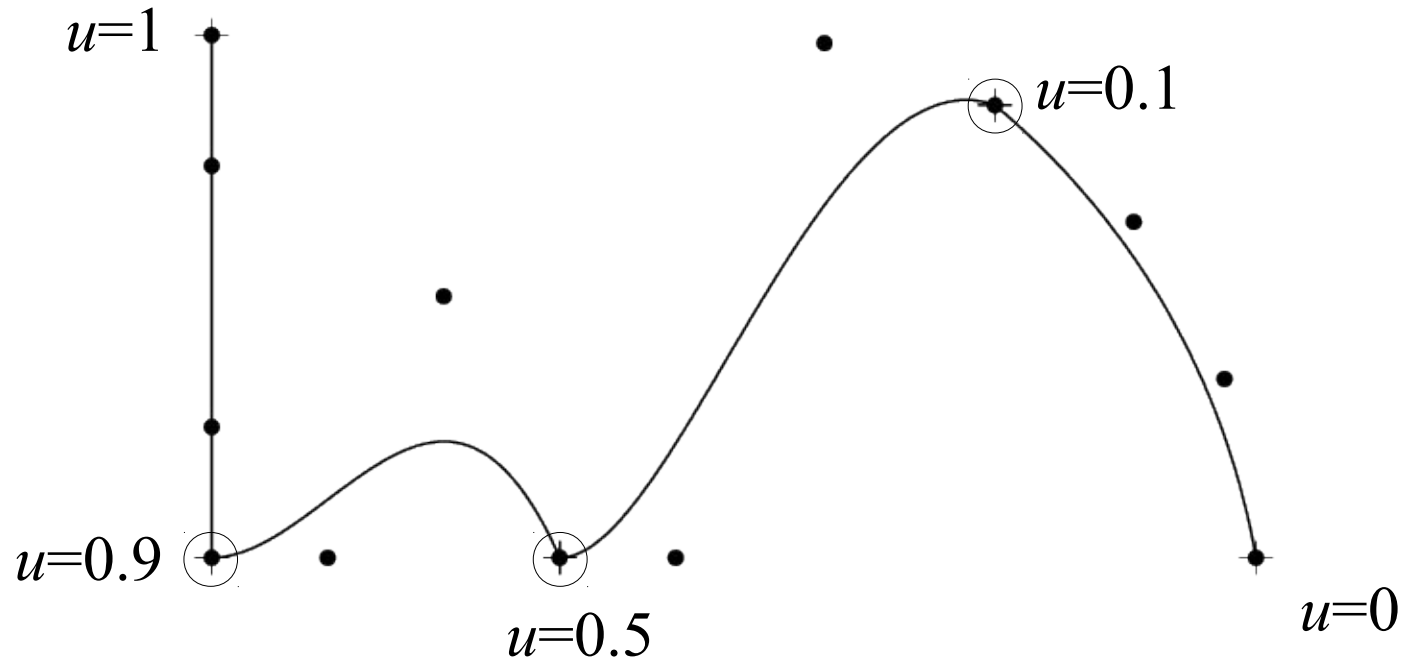
- Imposer des points de passage (et une continuité C_0)
 - Revient à positionner des nœuds de multiplicité d dans la séquence nodale

B-Splines



Degré 3
 0 0 0 0 0.1 0.2 0.5 0.5 0.5 0.7 0.9 0.9 0.9 1 1 1 1

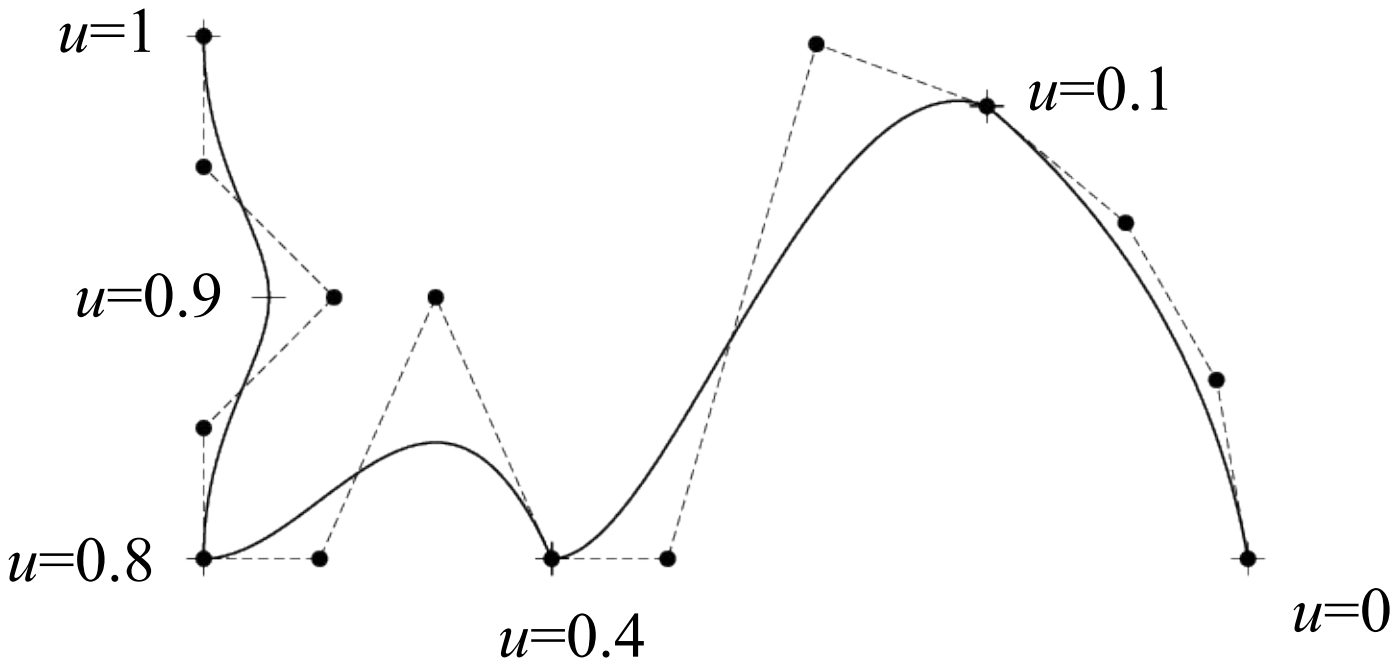
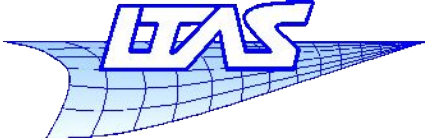
B-Splines



Degré 3 (4 courbes de bézier de continuité C_0)
 0 0 0 0 0.1 0.1 0.1 0.5 0.5 0.5 0.9 0.9 0.9 1 1 1 1

Infographie

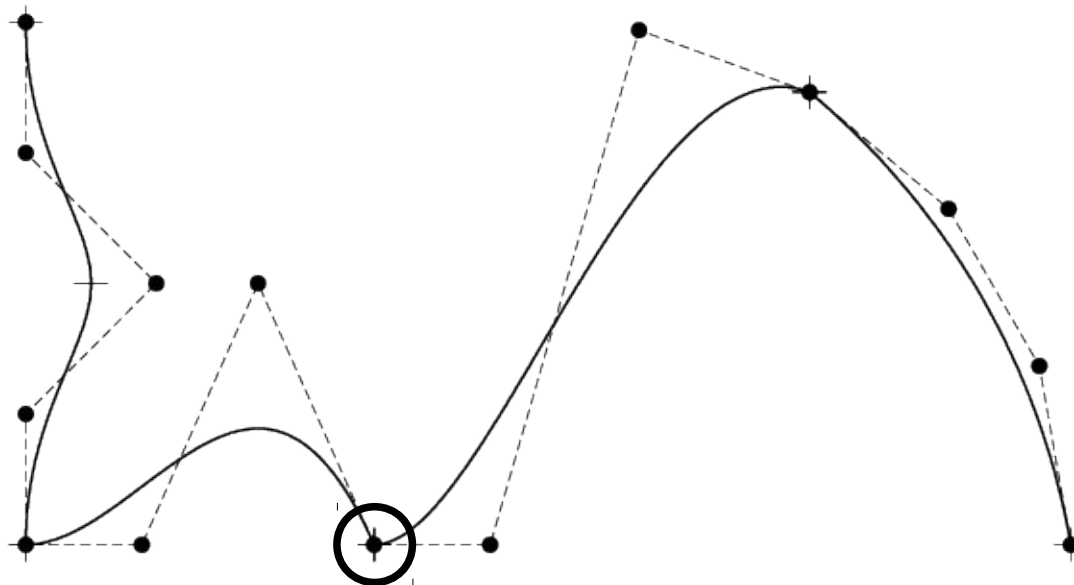
B-Splines



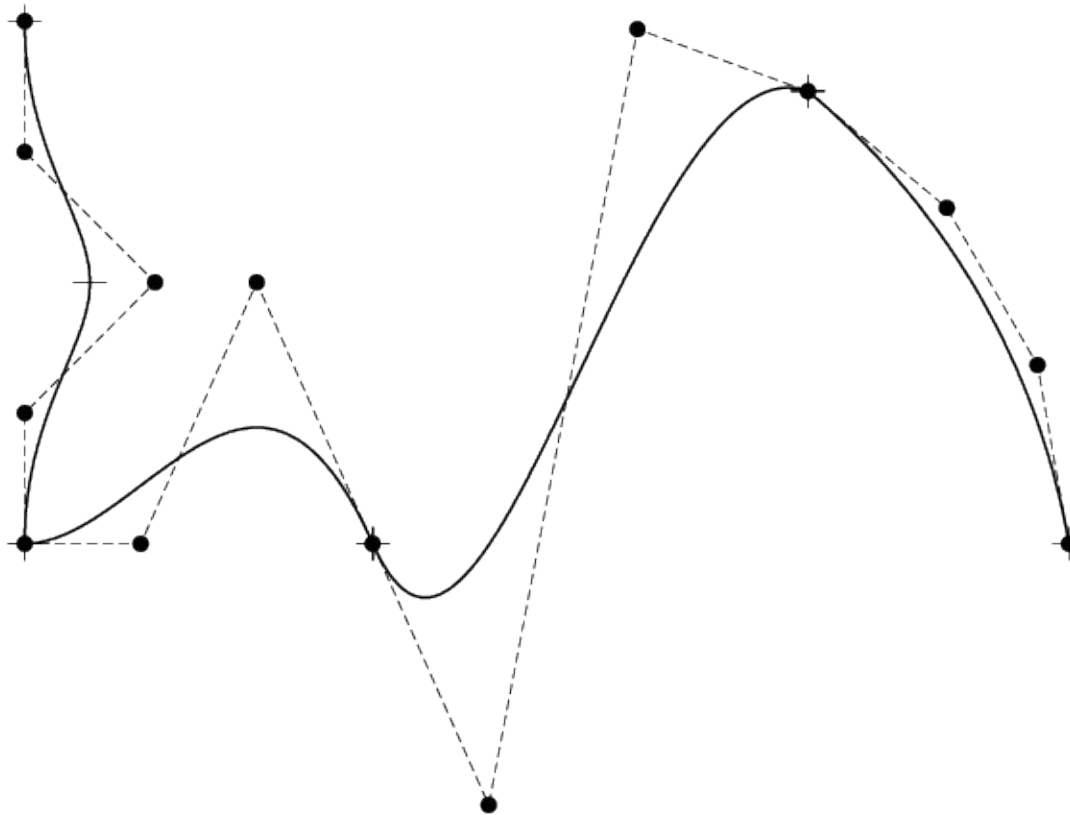
Degré 3 (3 courbes de bézier de continuité C_0 + 1 bspline deg 3 avec 4pts de contrôle)
 0 0 0 0 0.1 0.1 0.1 0.4 0.4 0.4 0.8 0.8 0.8 0.9 1 1 1 1

B-Splines

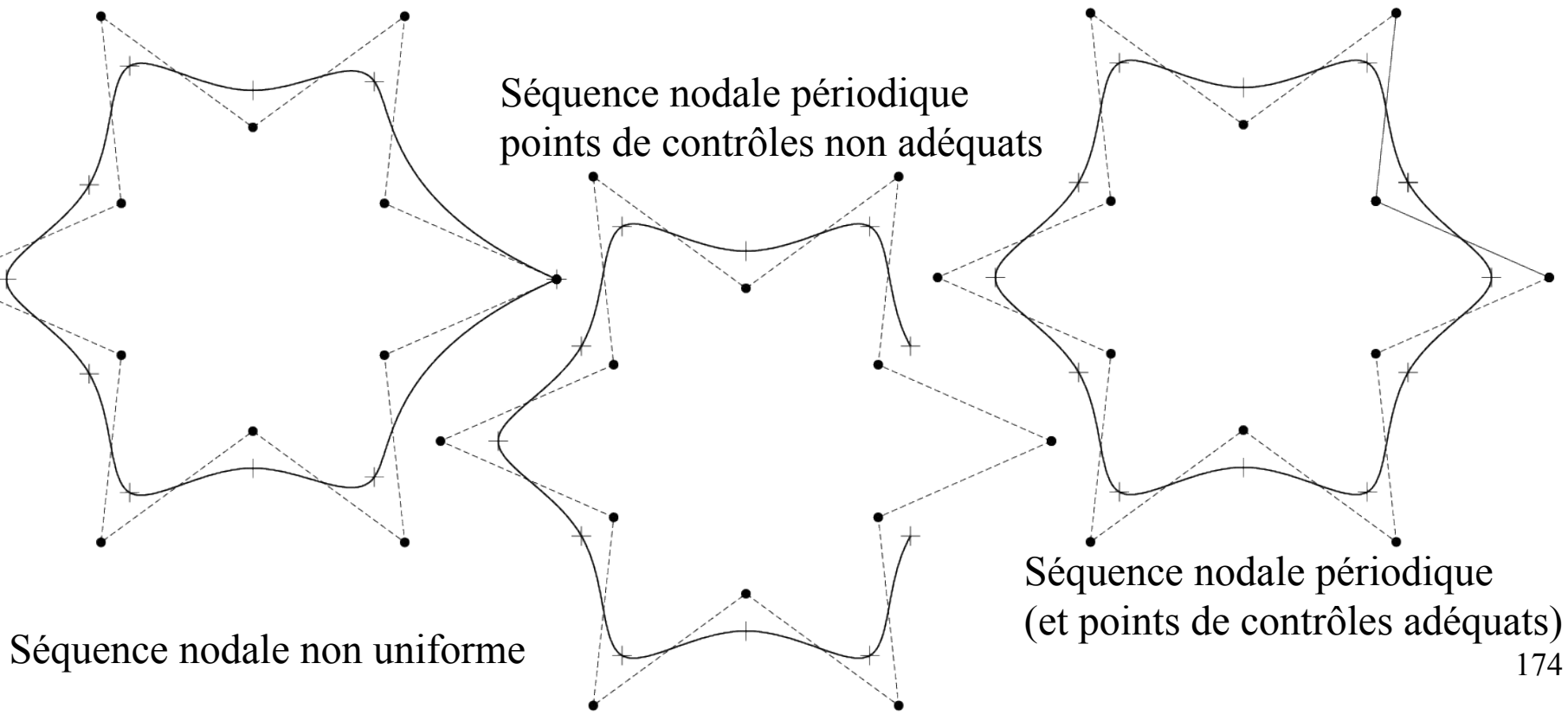
- Et si on veut imposer des points de passage **et** une certaine continuité C_k ?
- Ajouter / aligner des points de contrôle de manière similaire au cas des courbes de Bézier.



B-Splines

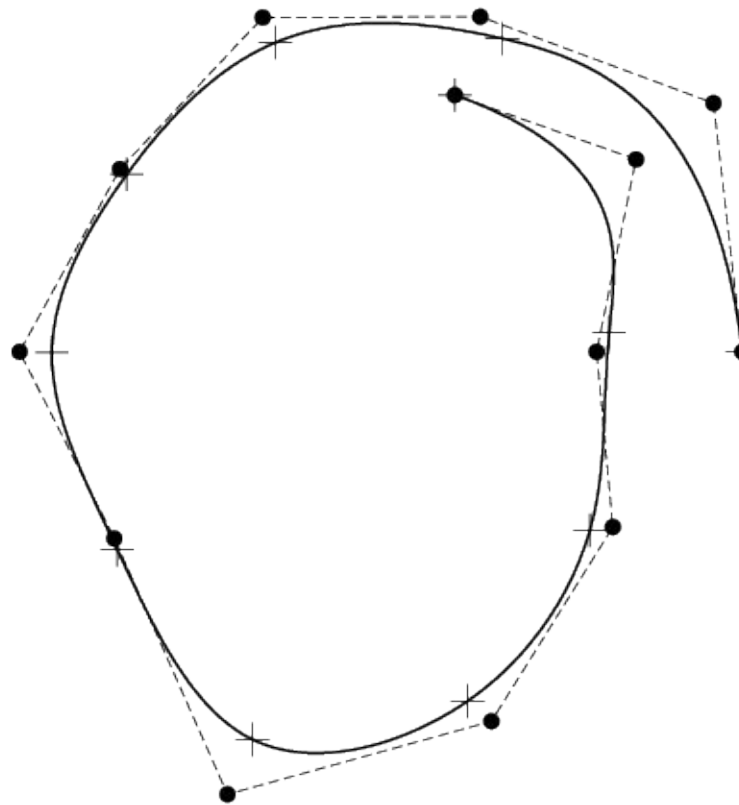


- Courbes périodiques
 - Se traitent en modifiant la séquence nodale et en répétant les points de contrôle.



B-Splines

Séquence nodale non uniforme interpolant les premier et dernier points de contrôle.

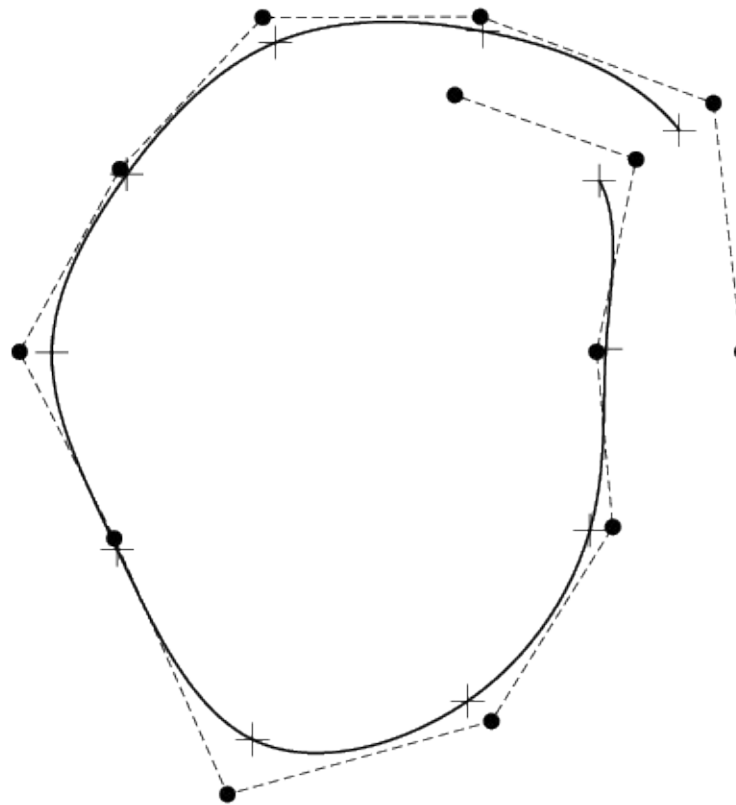


Degré 3

0 0 0 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1 1 1

B-Splines

Séquence nodale périodique
(mais points de contrôles placés
de façon non adéquate)

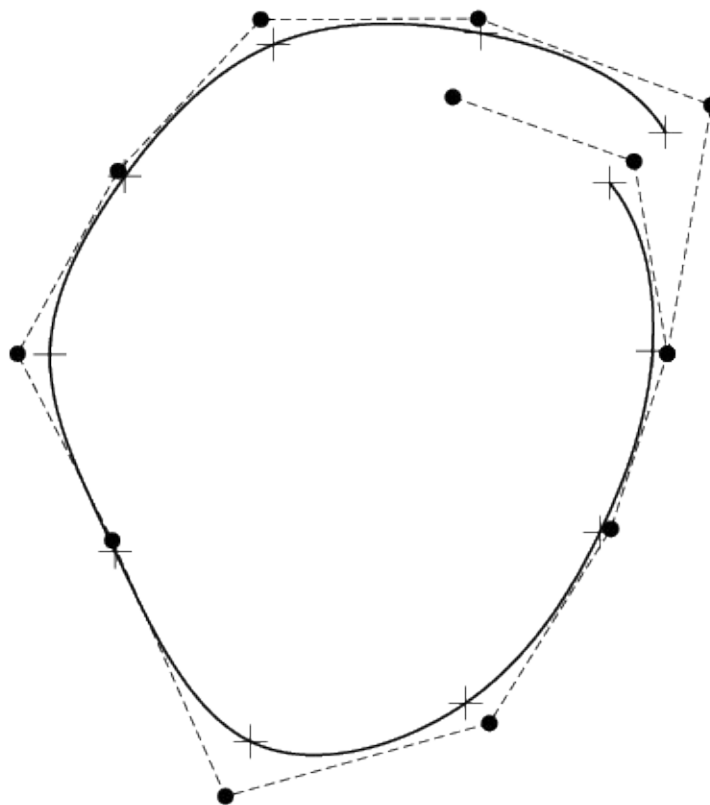
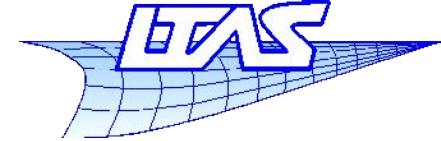


Degré 3

-0.3 -0.2 -0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3

Infographie

B-Splines

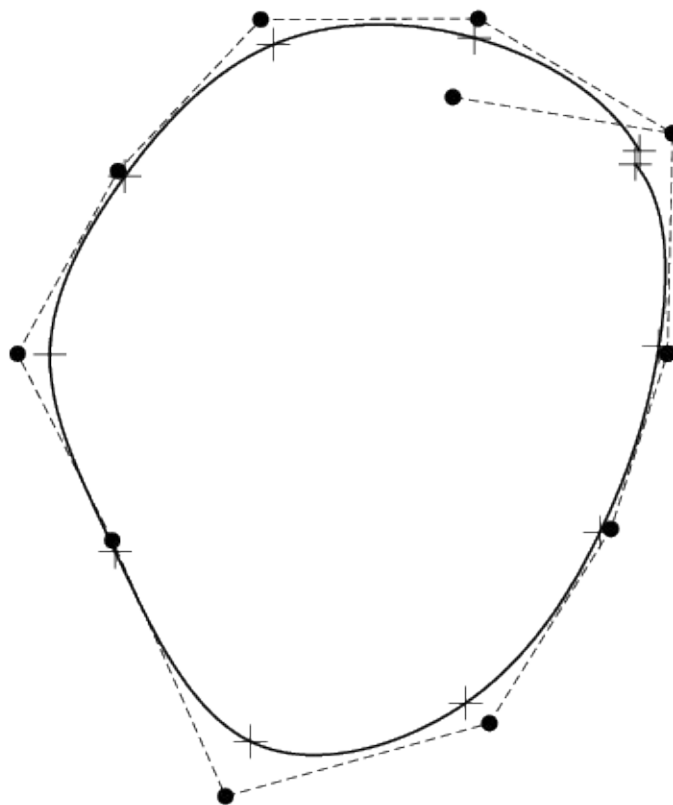
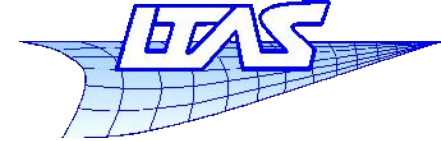


Degré 3

-0.3 -0.2 -0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3

Infographie

B-Splines

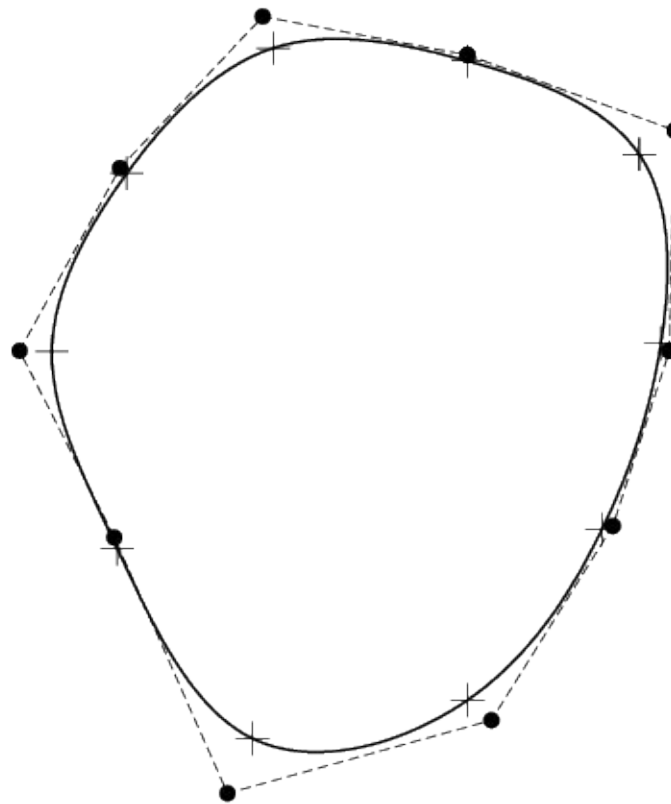


Degré 3

-0.3 -0.2 -0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3

B-Splines

Séquence nodale périodique
+ points de contrôles placés
de façon adéquate (répétés)
= courbe périodique

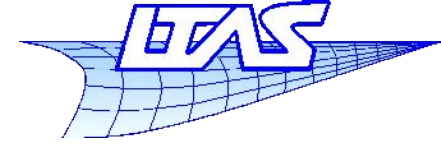


Degré 3

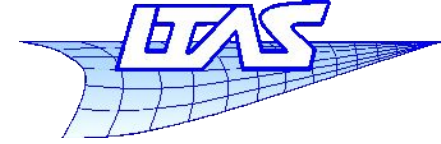
-0.3 -0.2 -0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3

Infographie

B-Splines



- Algorithmes pour la manipulation des courbes B-Splines
 - Algorithme d'insertion de noeud de Boehm
 - Évaluation de la courbe (Algorithme de Cox-de Boor)
 - Dérivées et hodographes
 - Restriction/accroissement de l'intervalle utile d'une courbe
 - Élévation de degré
 - Subdivision récursive



- Algorithme d'insertion de noeud de Boehm

L'idée est de déterminer le polygone de contrôle de la courbe après avoir ajouté un ou plusieurs nœuds dans la séquence nodale.

La courbe est inchangée suite à cette modification : ni la forme ni la paramétrisation ne sont affectées.

Intérêt :

- Évaluation de la courbe
- Subdivision de la courbe
- Ajout de points de contrôle

B-Splines

- Soit $P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^d(u)$ une courbe de B-Spline construite sur la séquence nodale : $U = \{u_0, \dots, u_m\}$
- Soit $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1}[$ un nœud à insérer
- La nouvelle séquence nodale est la suivante :
 $\bar{U} = \{\bar{u}_0 = u_0, \dots, \bar{u}_k = u_k, \bar{u}_{k+1} = \bar{u}, \dots, \bar{u}_{m+1} = u_m\}$
- La nouvelle représentation de la courbe est :

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n+1} Q_i \bar{N}_i^d(u)$$

- Les $\bar{N}_i^d(u)$ sont les fonctions de forme définies sur \bar{U} , les Q_i sont les $n+2$ nouveaux points de contrôle.
- Comment définir les Q_i ?

B-Splines

- Posons $P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^d(u) = \sum_{i=0}^{n+1} Q_i \bar{N}_i^d(u)$
 - On écrit la relation pour $n+2$ valeurs distinctes de u .
(a, b, \dots)
 - On obtient un système bande, non singulier, à $3(n+2)$ inconnues (en 3D)

$$\begin{pmatrix} \bar{N}_0^d(a) & \bar{N}_1^d(a) & \cdots \\ \bar{N}_0^d(b) & \bar{N}_1^d(b) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n P_i N_i^d(a) \\ \sum_{i=0}^n P_i N_i^d(b) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- C'est un peu lourd à résoudre et suppose de bien choisir les valeurs de a, b, \dots

B-Splines

■ Utilisation des propriétés des fonctions de forme

- On a $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1}[$. Dans cet intervalle $[u_k, u_{k+1}[$, on a $N_i^d(u) \neq 0$ ssi $i \in \{k-d, \dots, k\}$ (support compact)
- De la même manière, $\bar{N}_i^d(u) \neq 0$ ssi $i \in \{k-d, \dots, k+1\}$ et $u \in [u_k, u_{k+1}[$. On a donc :

$$P(u) = \sum_{i=k-d}^k P_i N_i^d(u) = \sum_{i=k-d}^{k+1} Q_i \bar{N}_i^d(u)$$

$$N_i^d(u) = \bar{N}_i^d(u) \text{ pour } i \in \{0, \dots, k-d-1\}$$

$$N_i^d(u) = \bar{N}_{i+1}^d(u) \text{ pour } i \in \{k+1, \dots, n\}$$

Pour $i \in \{k-d, \dots, k\}$ on a la relation suivante (admise)

$$N_i^d(u) = \frac{\bar{u} - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+d+1} - \bar{u}_i} \bar{N}_i^d(u) + \frac{\bar{u}_{i+d+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{i+d+2} - \bar{u}_{i+1}} \bar{N}_{i+1}^d(u)$$

- Preuve en partant de la définition des FF (degré 0) cf livre Leon

B-Splines

- $N_i^d(u) = \bar{N}_i^d(u)$ pour $i \in \{0, \dots, k-d-1\}$
implique $P_i = Q_i$ pour $i \in \{0, \dots, k-d-1\}$
- $N_i^d(u) = \bar{N}_{i+1}^d(u)$ pour $i \in \{k+1, \dots, n\}$
implique $P_i = Q_{i+1}$ pour $i \in \{k+1, \dots, n\}$
- $$N_i^d(u) = \frac{\bar{u} - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+d+1} - \bar{u}_i} \bar{N}_i^d(u) + \frac{\bar{u}_{i+d+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{i+d+2} - \bar{u}_{i+1}} \bar{N}_{i+1}^d(u)$$

On substitue dans

$$\sum_{i=k-d}^k P_i N_i^d(u) = \sum_{i=k-d}^{k+1} Q_i \bar{N}_i^d(u)$$

B-Splines

$$N_i^d(u) = \frac{\bar{u} - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+d+1} - \bar{u}_i} \bar{N}_i^d(u) + \frac{\bar{u}_{i+d+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{i+d+2} - \bar{u}_{i+1}} \bar{N}_{i+1}^d(u) \quad \text{dans} \quad \sum_{i=k-d}^k P_i N_i^d(u) = \sum_{i=k-d}^{k+1} Q_i \bar{N}_i^d(u)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{u} - \bar{u}_{k-d}}{\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_{k-d}} \bar{N}_{k-d}^d(u) + \frac{\bar{u}_{k+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+2} - \bar{u}_{k-d+1}} \bar{N}_{k-d+1}^d(u) \right) P_{k-d} \\ & + \left(\frac{\bar{u} - \bar{u}_{k-d+1}}{\bar{u}_{k+2} - \bar{u}_{k-d+1}} \bar{N}_{k-d+1}^d(u) + \frac{\bar{u}_{k+3} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+3} - \bar{u}_{k-d+2}} \bar{N}_{k-d+2}^d(u) \right) P_{k-d+1} \\ & + \dots \\ & + \left(\frac{\bar{u} - \bar{u}_k}{\bar{u}_{k+d+1} - \bar{u}_k} \bar{N}_k^d(u) + \frac{\bar{u}_{k+d+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+d+2} - \bar{u}_{k+1}} \bar{N}_{k+1}^d(u) \right) P_k \\ & = \bar{N}_{k-d}^d(u) Q_{k-d} + \dots + \bar{N}_{k+1}^d(u) Q_{k+1} \end{aligned}$$

B-Splines

- En factorisant et remplaçant la séquence nodale \bar{U} par U , on obtient :

$$\begin{aligned}
 0 = & \bar{N}_{k-d}^d(u) \left(Q_{k-d} - P_{k-d} \right) \\
 & + \bar{N}_{k-d+1}^d(u) \left(Q_{k-d+1} - \frac{\bar{u} - u_{k-d+1}}{u_{k+1} - u_{k-d+1}} P_{k-d+1} - \frac{u_{k+1} - \bar{u}}{u_{k+1} - u_{k-d+1}} P_{k-d} \right) \\
 & \quad \vdots \\
 & + \bar{N}_k^d(u) \left(Q_k - \frac{\bar{u} - u_k}{u_{k+d} - u_k} P_k - \frac{u_{k+d} - \bar{u}}{u_{k+d} - u_k} P_{k-1} \right) + \bar{N}_{k+1}^d(u) \left(Q_{k+1} - P_k \right)
 \end{aligned}$$

- On pose

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+d} - u_i} \\
 1 - \alpha_i &= \frac{u_{i+d} - \bar{u}}{u_{i+d} - u_i} \quad \text{avec } i \in \{k-d+1, \dots, k\}
 \end{aligned}$$

... on obtient

$$Q_{k-d} = P_{k-d}$$

$$Q_i = \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} \text{ pour } i \in \{k-d+1, \dots, k\}$$

$$Q_{k+1} = P_k$$

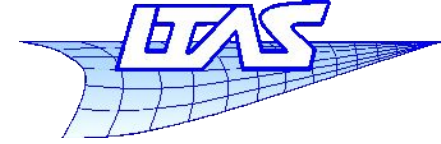
On avait :

$$P_i = Q_i \text{ pour } i \in \{0, \dots, k-d-1\}$$

$$P_i = Q_{i+1} \text{ pour } i \in \{k+1, \dots, n\}$$

donc en définitive :

$$Q_i = \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq k-d \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+d} - u_i} & k-d+1 \leq i \leq k \\ 0 & i \geq k+1 \end{cases}$$

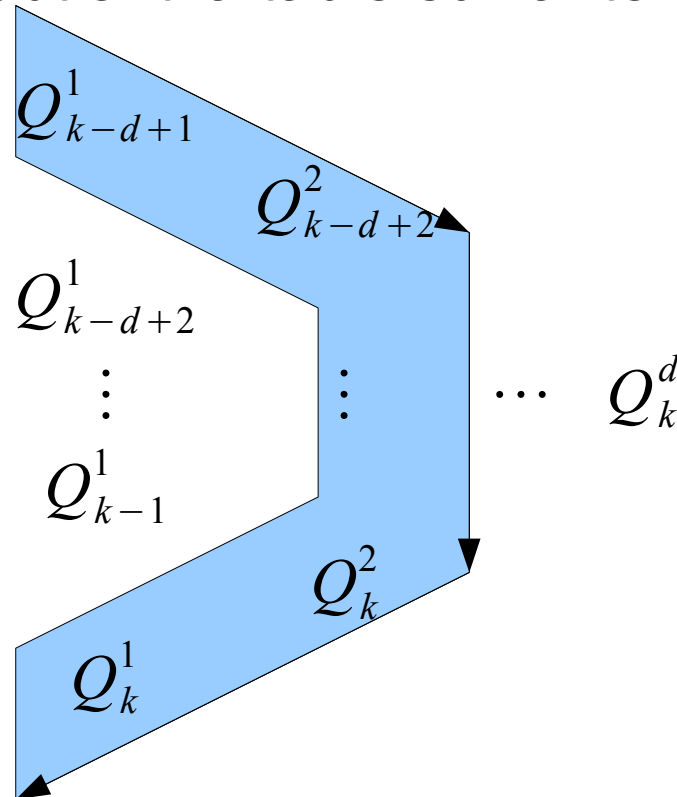


■ Généralisation

- Supposons $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1}[$ de multiplicité s ($0 \leq s < d$). On veut l'insérer r fois avec $r + s \leq d$.
- On note Q_i^r les points de contrôle de la r -ième insertion
- On a :

$$Q_i^r = \alpha_i^r Q_i^{r-1} + (1 - \alpha_i^r) Q_{i-1}^{r-1} \quad \text{avec} \quad \alpha_i^r = \begin{cases} 1 & i \leq k - d + r - 1 \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+d-r+1} - u_i} & k - d + r \leq i \leq k - s \\ 0 & i \geq k - s + 1 \end{cases}$$

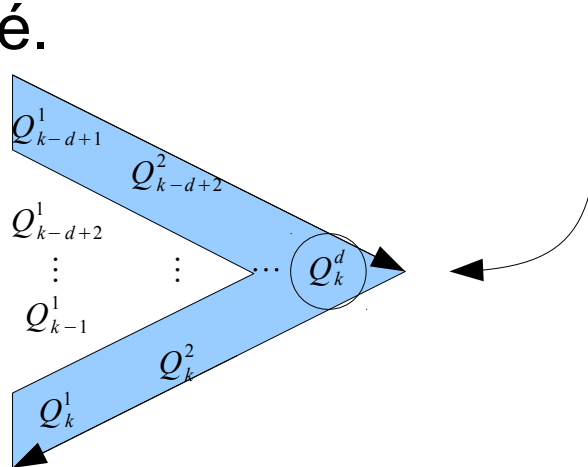
- On obtient la table suivante :



- Le nombre total de nouveaux points de contrôle est $d-s+r-1$ qui en remplacent $d-s-1$.

B-Splines

- L'utilisation de l'algorithme d'insertion de nœud avec pour résultat une multiplicité de $d=r+s$ impose à la courbe de passer par le dernier point de contrôle inséré.

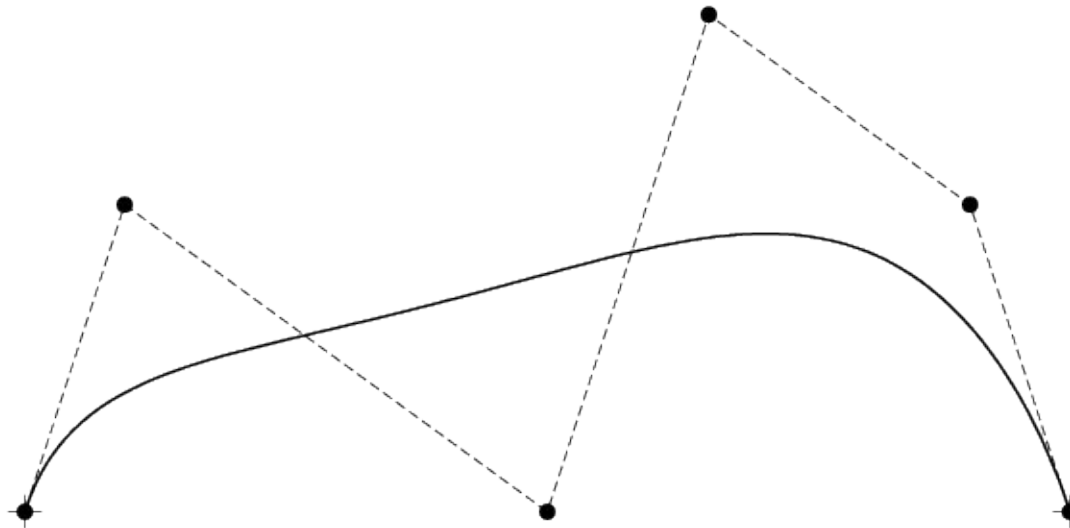


- On peut utiliser cet algorithme pour calculer la position d'un point de la courbe connaissant le paramètre.
 - C'est précisément l'algorithme de Cox-de Boor. La séquence de points P_i^j n'est autre que les Q_i^j indiqués sur le graphe, cf suite

B-Splines

- Cas $r+s=d+1$: On effectue l'insertion de multiplicité $r-1$ puis on insère un noeud supplémentaire afin de « couper » la courbe B-spline en deux parties indépendantes.
- Revient à dupliquer le dernier point de contrôle Q_k^d
- Permet d'extraire une portion de B-spline.

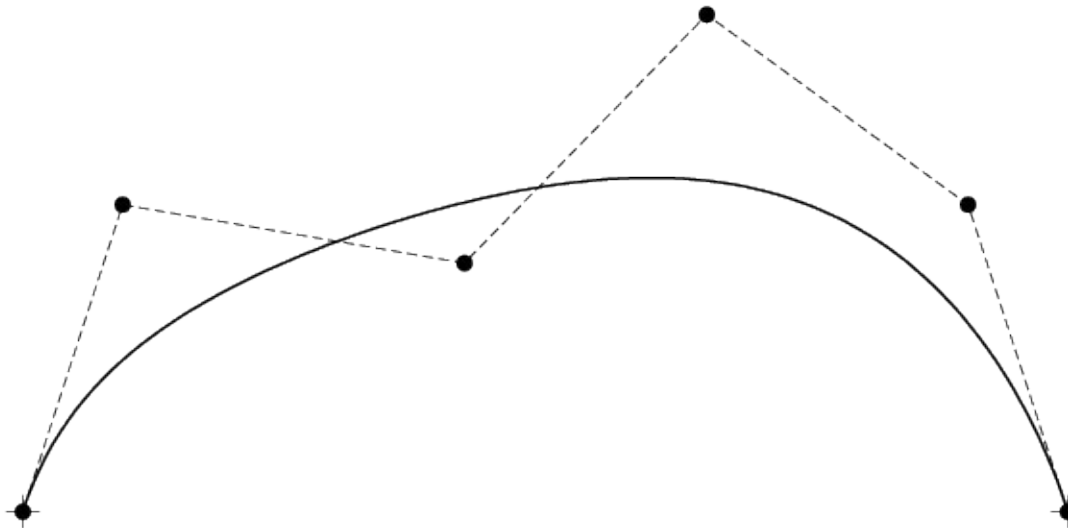
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

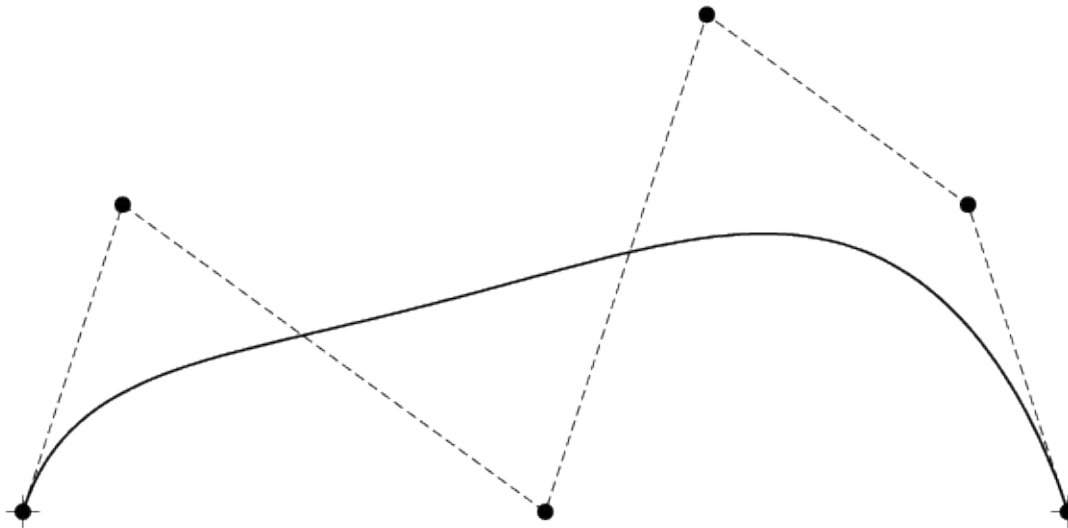
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

B-Splines

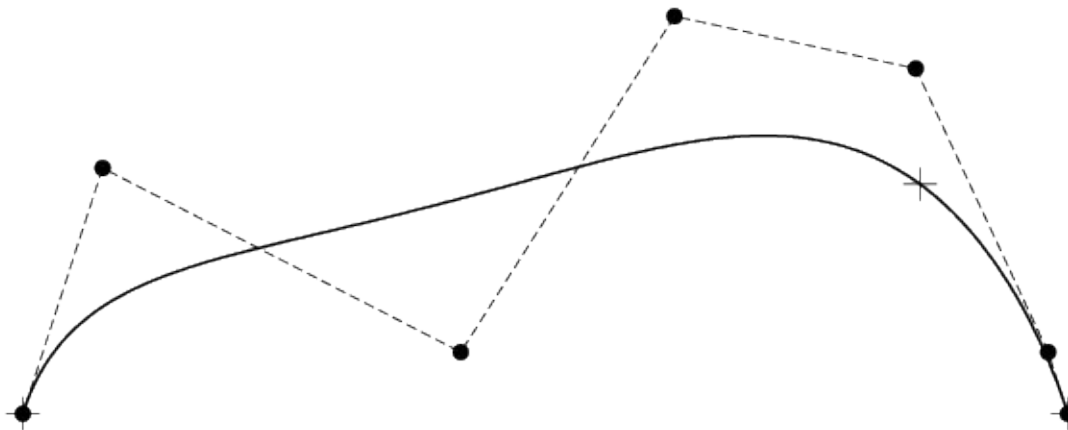
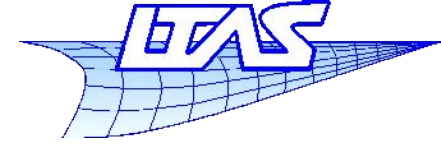


$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

Infographie

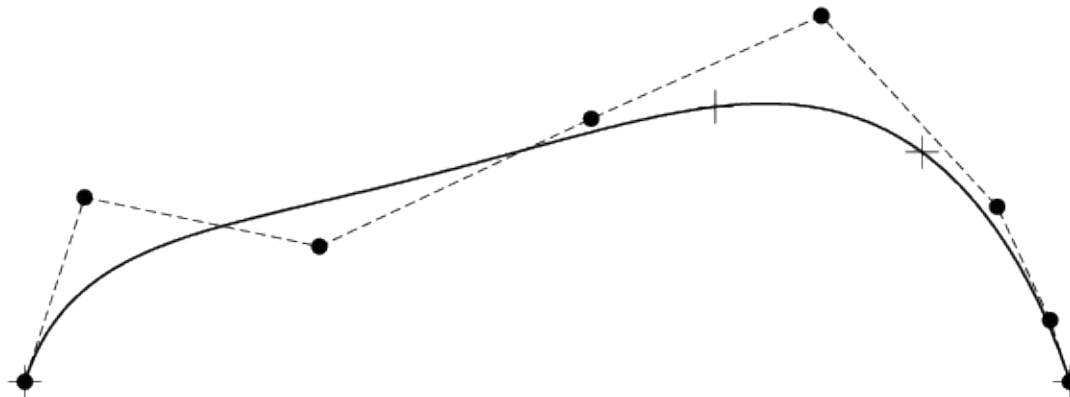
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

B-Splines

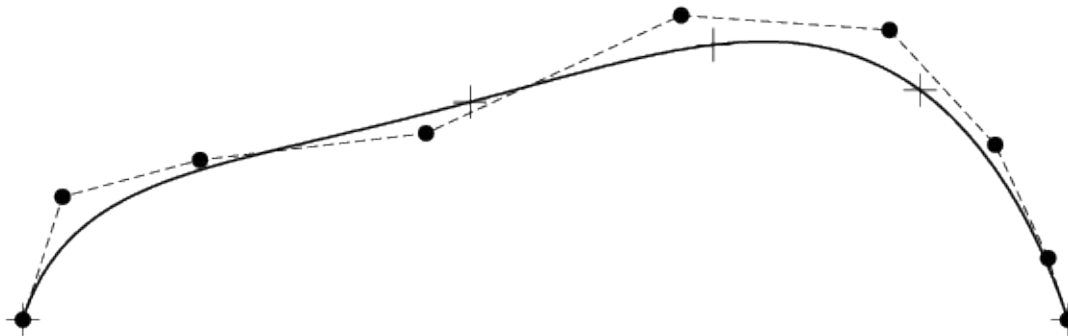
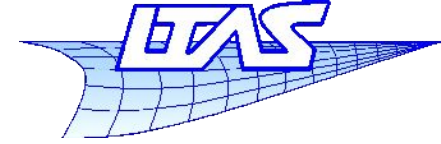


$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

Infographie

B-Splines

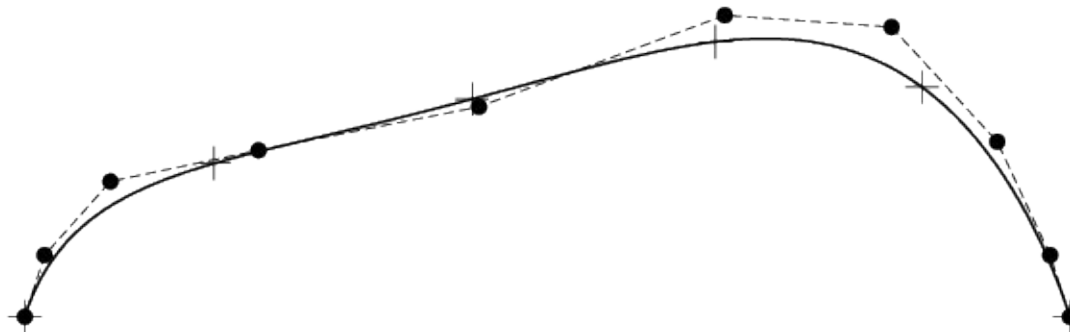
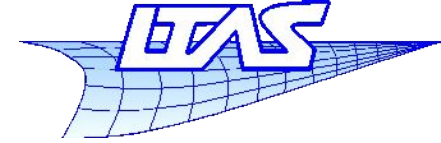


$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

Infographie

B-Splines

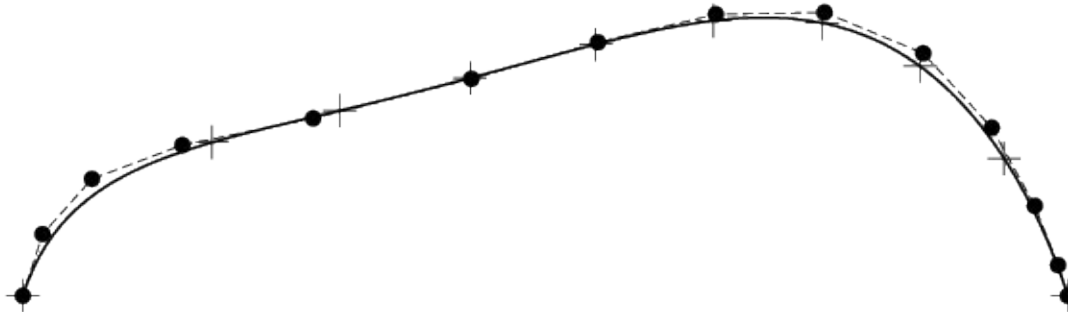
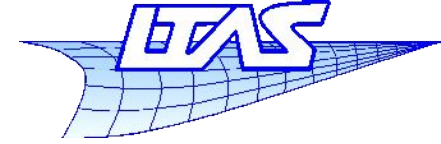


$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

Infographie

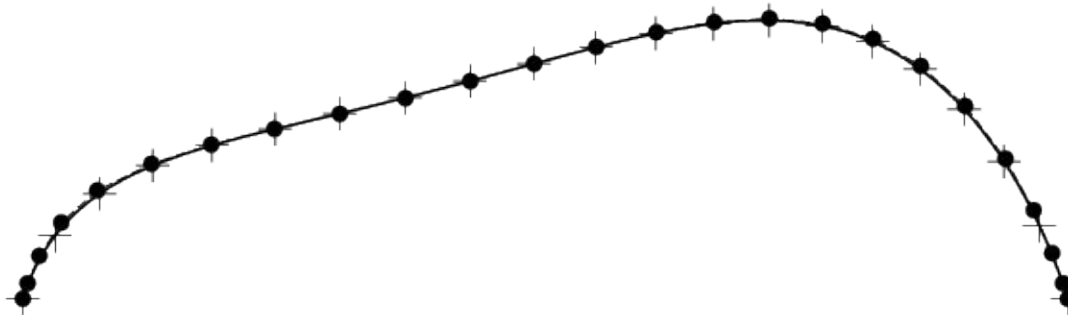
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

B-Splines

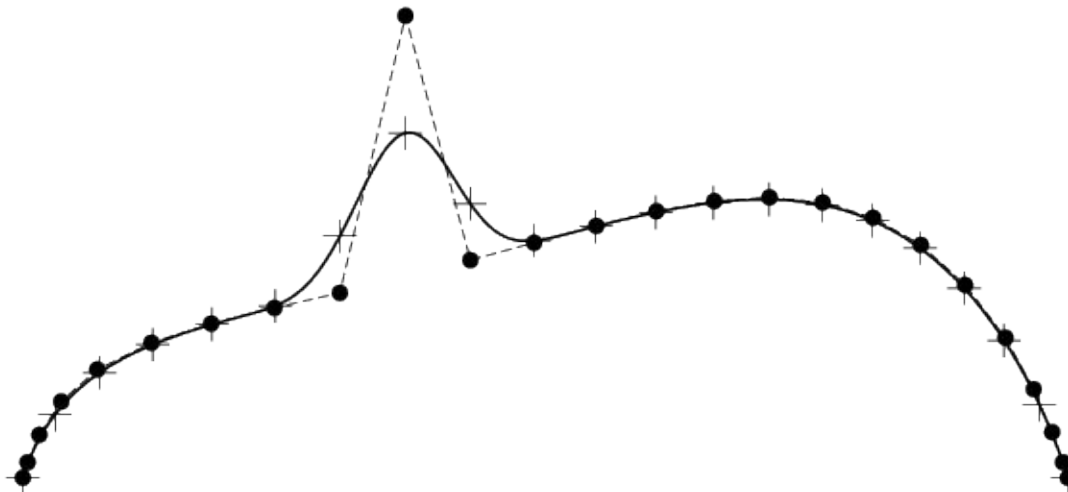
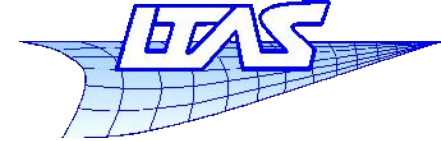


$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.05, 0.1, \dots, 0.95, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

Infographie

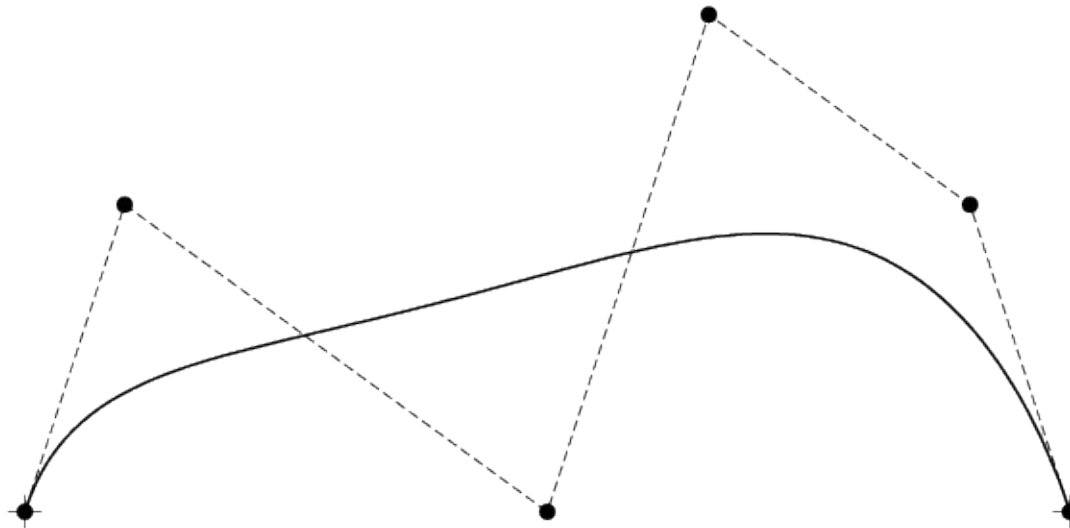
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.05, 0.1, \dots, 0.95, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

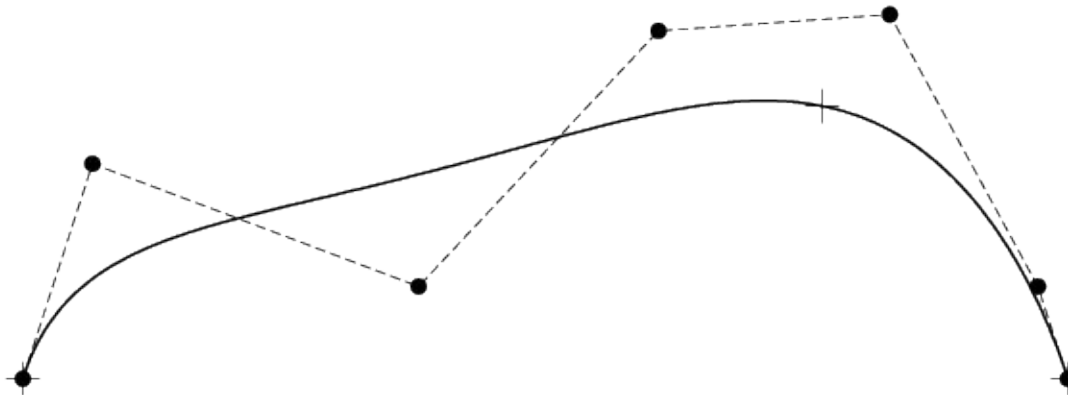
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

B-Splines

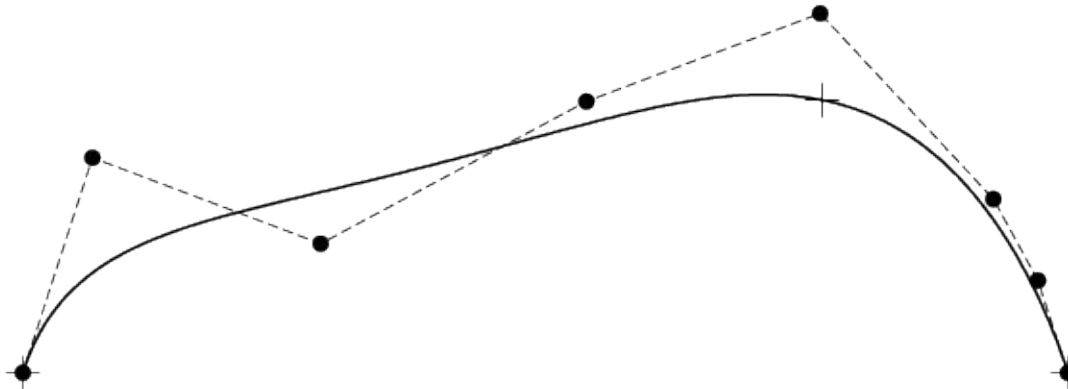
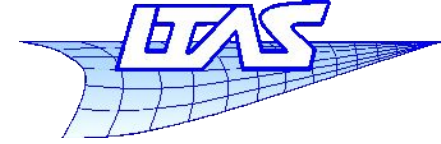


$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.3, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

Infographie

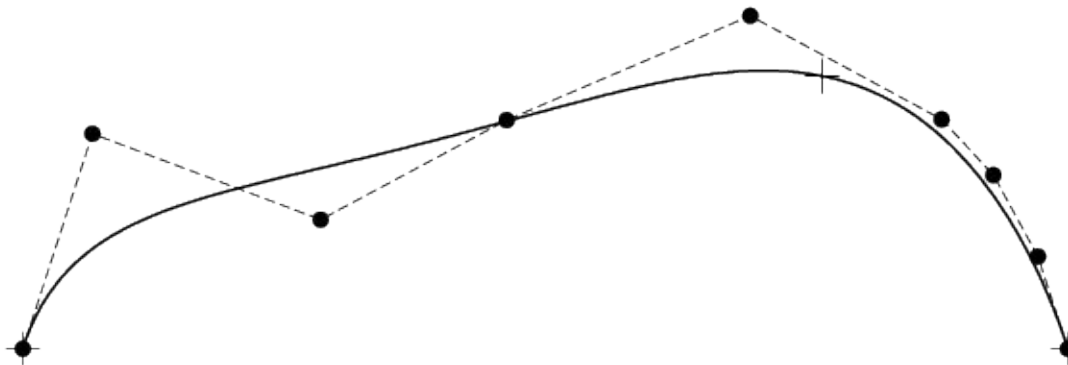
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.3, 0.3, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

B-Splines

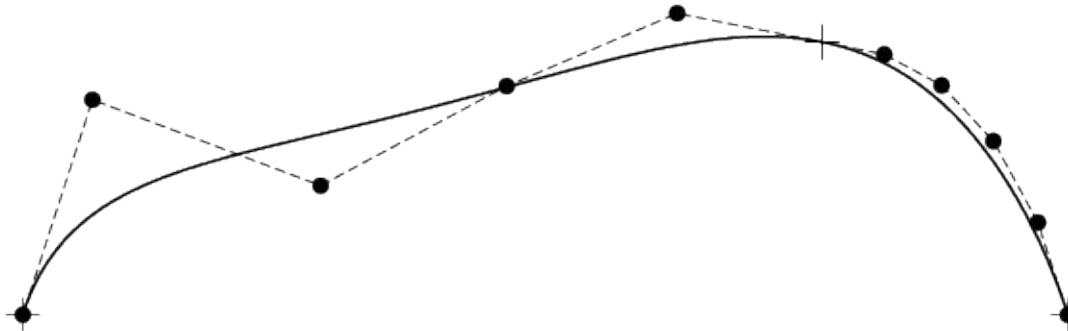
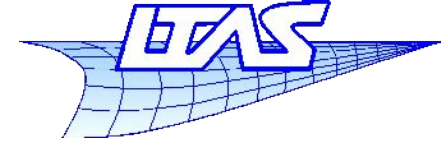


$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.3, 0.3, 0.3, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

Infographie

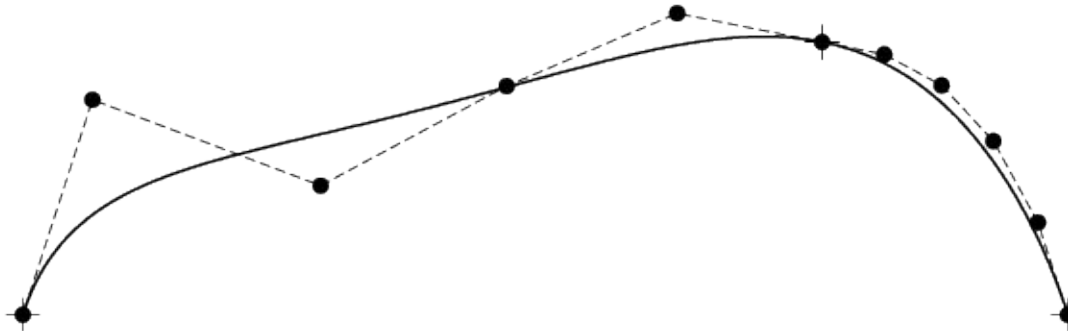
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

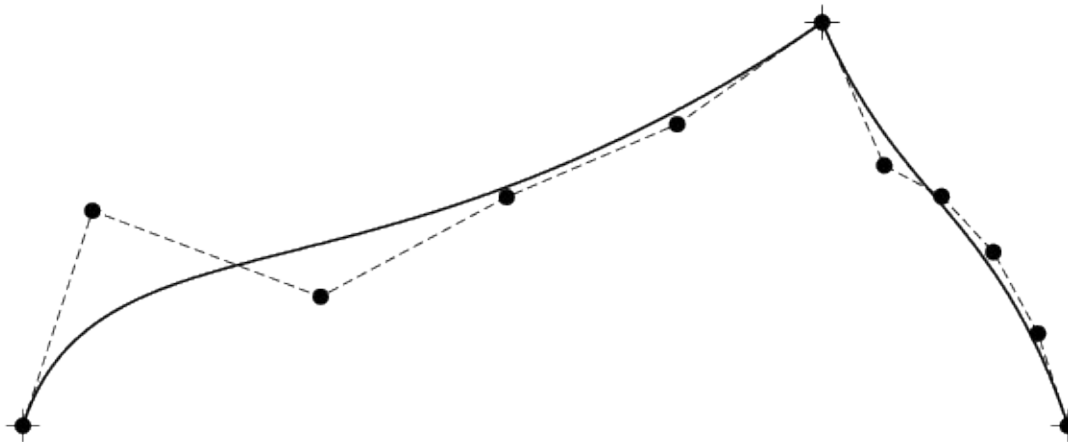
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Degré 5

B-Splines

- Calcul d'un point d'une courbe B-Spline
 - Par l'utilisation des fonctions de forme
 - 1 – Trouver l'intervalle nodal dans lequel se trouve u

$$u \in [u_i, u_{i+1}[$$
 - 2 – Calculer les fonctions de formes non nulles

$$N_{i-d}^d(u), \dots, N_i^d(u)$$
 - 3 – Multiplier les valeurs des ff non nulles avec les bons points de contrôle

$$P(u) = \sum_k N_k^d(u) P_k \quad i-d \leq k \leq i$$
 - Par l'algorithme de Cox-de Boor

B-Splines

- Algorithme (simplifié) de Cox-de Boor :

Déterminer l'intervalle de u : $u \in [u_i, u_{i+1}[$
 Initialisation de P_j^0 $i \in \{d, d+1, \dots, m-d-1\}$
 Pour k de 1 à d
 Pour j de i à $i-d+k$

$$P_j^k = \left(\frac{u - u_j}{u_{j+d+1-k} - u_j} \right) P_j^{k-1} + \left(\frac{u_{j+d+1-k} - u}{u_{j+d+1-k} - u_{j-1}} \right) P_{j-1}^{k-1}$$

 Finpour
 Finpour
 P_i^d est le point recherché.

- Quelle est sa complexité ?

- quadratique en fonction du degré d .

B-Splines

■ Exemple de calcul

$$P_0^0 = (0, 1) \quad P_1^0 = (2, 3) \quad P_2^0 = (5, 4) \quad P_3^0 = (7, 1) \quad P_4^0 = (6, -1) \quad P_5^0 = (6, -2)$$

$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3\} \quad d = 3 \quad u = 3/2$$

■ Détermination de l'intervalle

$$1 \leq 3/2 < 2, u_4 = 1 \rightarrow i = 4$$

$$P_j^k = \left(\frac{u - u_j}{u_{j+d+1-k} - u_j} \right) P_j^{k-1} + \left(\frac{u_{j+d+1-k} - u}{u_{j+d+1-k} - u_{j-1}} \right) P_{j-1}^{k-1}$$

■ Itération 1

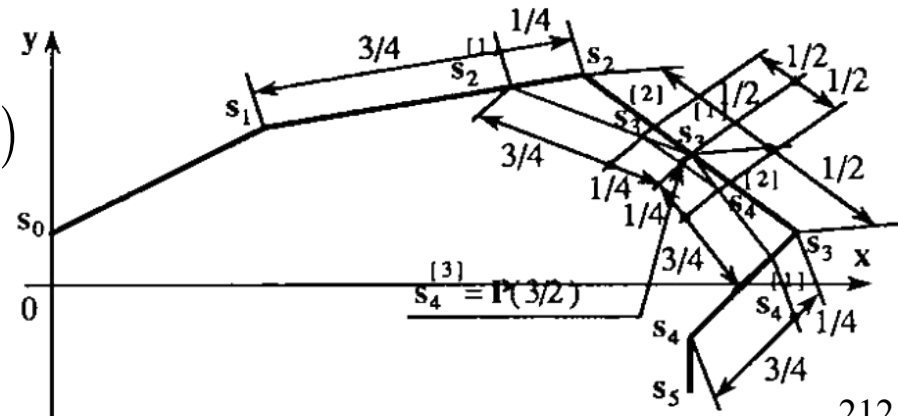
$$P_4^1 = (27/4, 1/2) \quad P_3^1 = (6, 5/2) \quad P_2^1 = (17/4, 15/5)$$

■ Itération 2

$$P_4^2 = (99/16, 2) \quad P_3^2 = (89/16, 45/16)$$

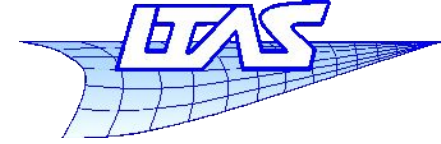
■ Itération 3

$$P_4^3 = (47/8, 77/32) = P(3/2)$$



Infographie

B-Splines

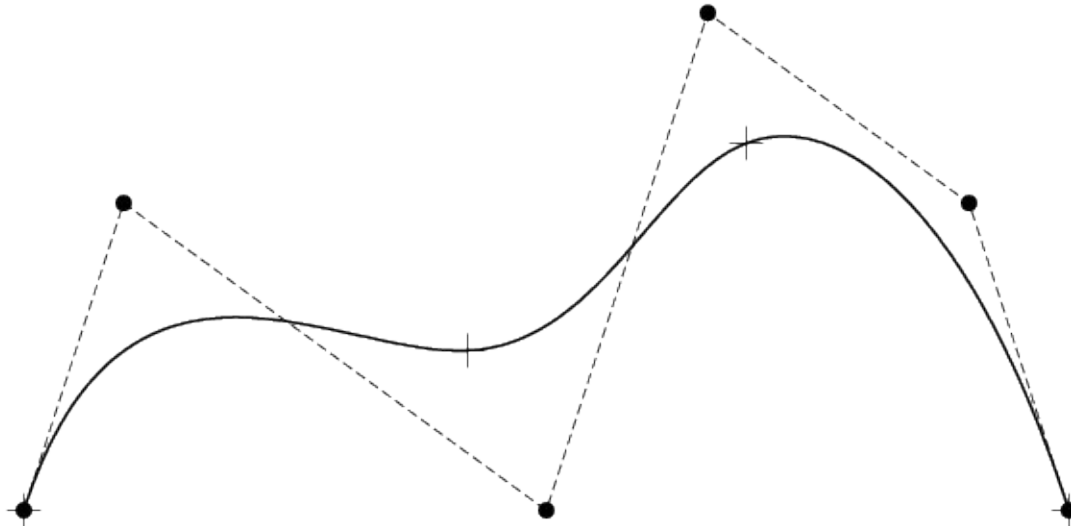


- L'algorithme est similaire à celui de De Casteljau pour les courbes de Bézier
 - Il se construit sur une restriction de l'ensemble des points de contrôle ($d+1$ points)
 - Sur cette restriction, il est identique, aux coefficients près liés à la séquence nodale (éventuellement non uniforme)
 - L'algorithme complet est un peu plus long que celui décrit ici (possibilité d'avoir $0/0$: on pose conventionnellement $0/0 = 0$!)

- Transformation d'une courbe en segments de Bézier
 - On sature chaque nœud distinct jusqu'à ce que sa multiplicité soit égale à d .
 - Ceci est fait à l'aide de l'algorithme d'insertion de nœud de Boehm.
 - La courbe n'est pas modifiée !
 - On obtient alors une séquence nodale de la forme :

$$U = \{ \underbrace{a, a, a, a}_{d+1 \text{ fois}}, \underbrace{b, b, b}_d \text{ fois}, \underbrace{c, c, c}_d \text{ fois}, \dots, \underbrace{z, z, z, z}_{d+1 \text{ fois}} \}$$
 - Chaque valeur distincte de u correspond à un des point de contrôle de la courbe.

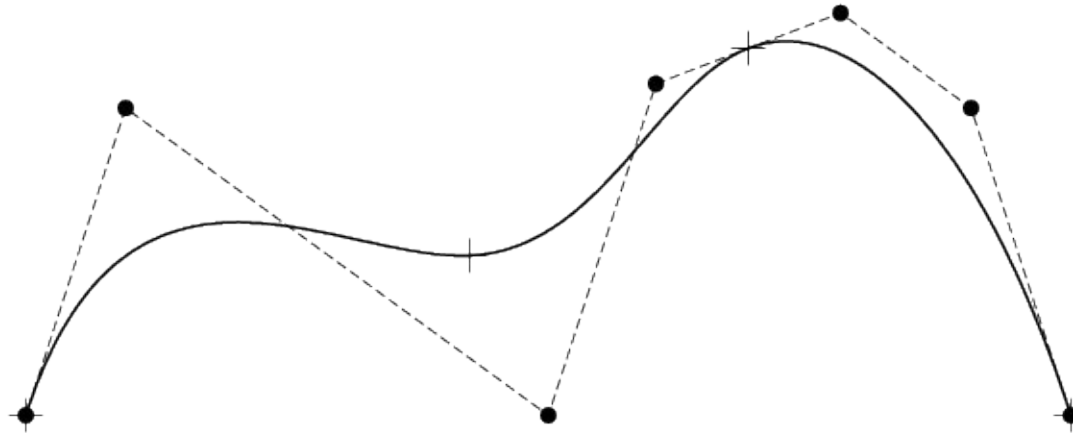
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

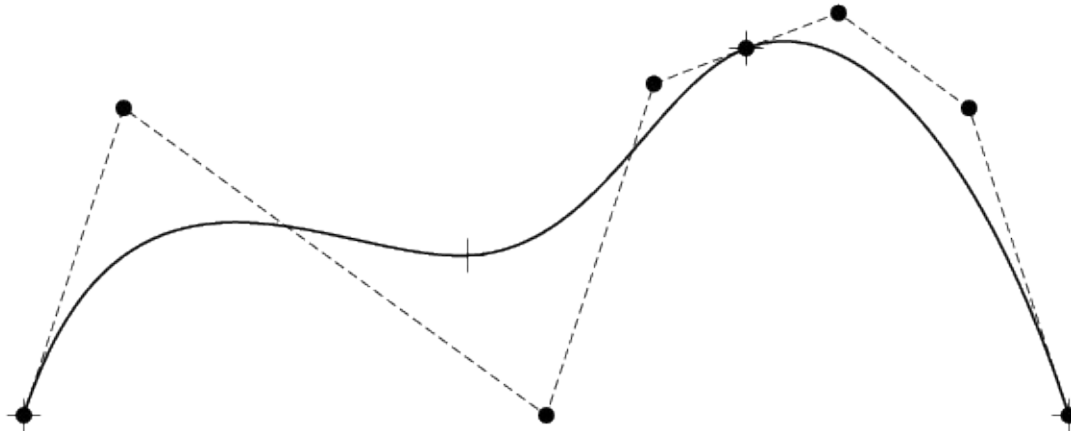
Degré 3

B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

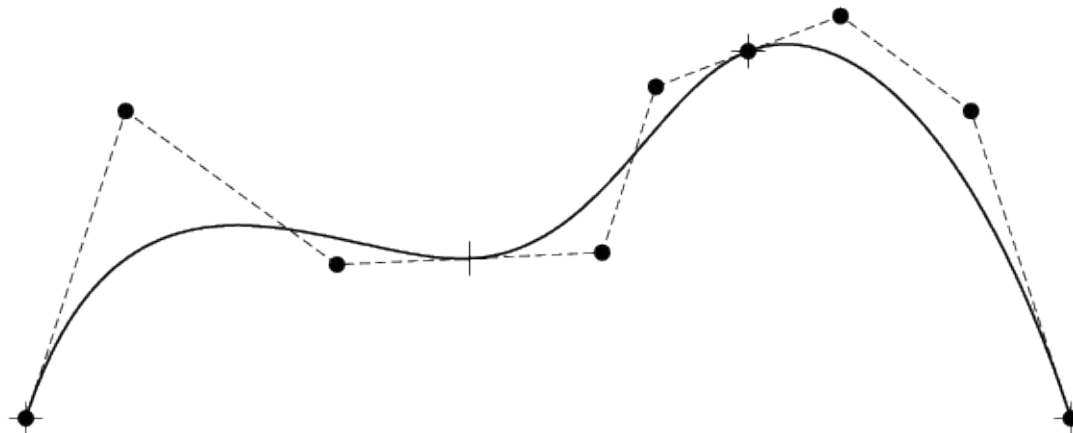
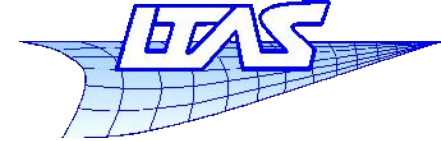
B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

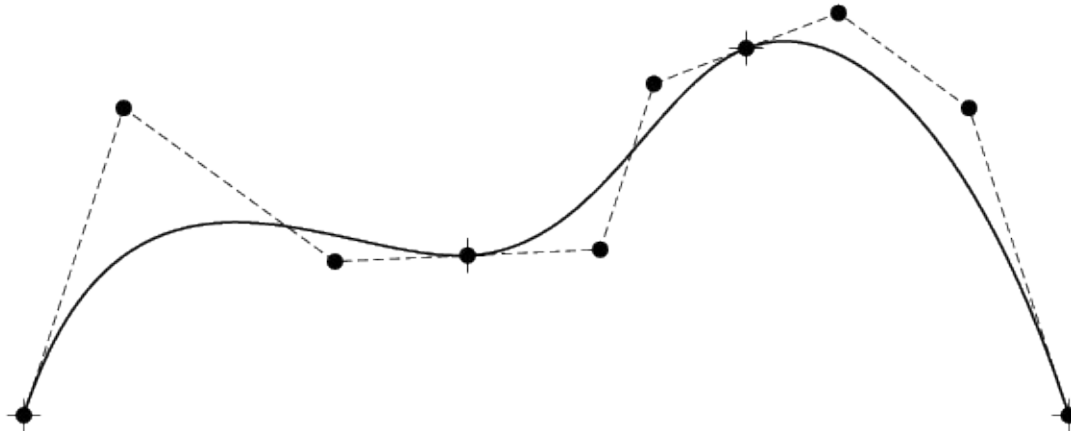
Infographie

B-Splines



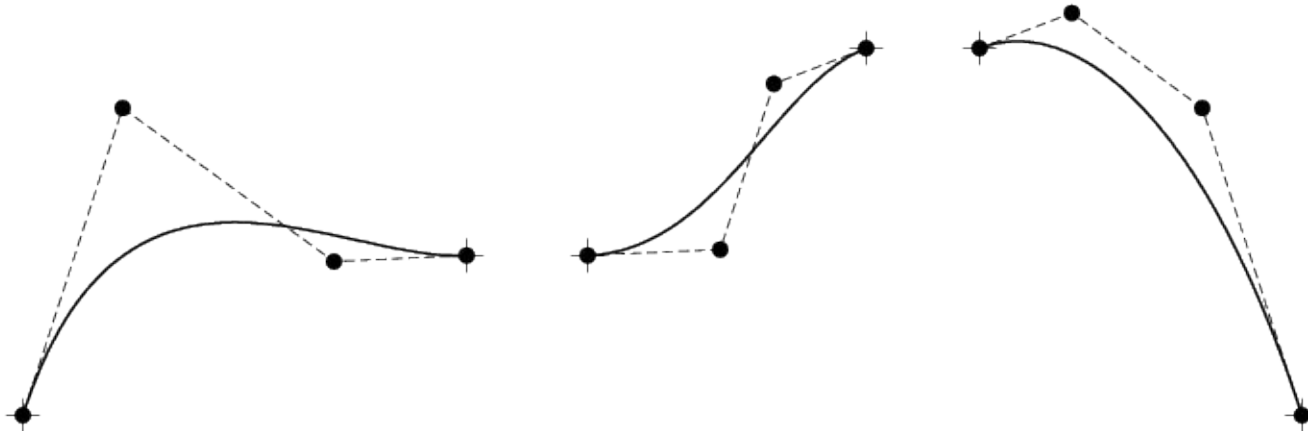
$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

B-Splines



$$U = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

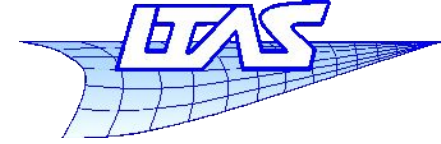
B-Splines



Bézier n°3
4 PC
Degré 3

Bézier n°2
4 PC
Degré 3

Bézier n°1
4 PC
Degré 3



- Quelques conclusions
 - Souplesse
 - Faible ordre
 - Continuité
 - Courbes périodiques
 - Coniques ?