Введение в математический анализ

Тюленев Александр Иванович

(Конспектировал Иван-Чай)

8 лекция

Содержание

1 Дисклеймер

Эта лекция еще оффициально в стадии разработки, так что она не содержит всей информации из лекции

2 Еще что-то

Nt. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- числовая последовательность.* $PL(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- замкнутое множество.*

Nt.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup PL\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = cl(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$$

Nt. $\mathbb{Q} = \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ *множество m.*

3 Предел функции.

Def 1. *Под функцией, если не оговорено обратное, понимаем(однозначное) отображение* $f : E \to \mathbb{R}$*, где* $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$*.*

Def 2. *Пусть* $\varepsilon > 0, x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$*. Тогда проколотой* ε *окресностью точки* x_0 $\dot{U_\varepsilon}(x_0 := U_\varepsilon(x_0) \setminus x_0$.

Nt. *Если* $x_0 = \pm\infty$ *или* $x_0 = \infty$ *проколотая* ε *окресность совпадает с обычной.*

Def 3 (Предела функции по Коши)**.** *Пусть* $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ *и пусть* $A \in \hat{\mathbb{R}}$*. f:* $\dot{U_\varepsilon}(x_0) \to \mathbb{R}$*. Будем говорить, что* A *- предел функции f в точке* x_0 *и записывать* $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ *или* $f(x) \to A, x \to x_0$*, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_n] : \forall x \in \dot{U_\delta}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Def 4. *Псоледовательностью Гейне в точке* $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ *называется такая числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$, *что*

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$
2. $x_n \neq x_0 \forall n \in N$

Def 5 (Предела функции по Гейне)**.** *Пусть* $x_n \in \hat{\mathbb{R}}, A \in \hat{\mathbb{R}}$. *Пусть* $f : U^{\cdot}\delta(x_n) \to \mathbb{R}$. *Будем говорить, что* $\exists \lim_{x\to x_0} f = A$ *по Гейне, если* $\forall$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in U_{\dot{\delta}}(x_0)$ *в точке* x_0 *если* $\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Th 1 (Эквивалентность определений по Коши и по Гейне)**.** *Пусть* $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}, A \in \hat{\mathbb{R}}$. *Пусть* $f : u_{\dot{\delta}}(x_n) \to \mathbb{R}$. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *(по Коши)* $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *(по Гейне)*

Коши $\Rightarrow$ *Гейне.* Возьмем произвоьную последовательность Гейне $\{x_n\} \in U_{\dot{\delta}}(x_n)$ в точке x_0.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\delta) \hookrightarrow x_n \in U_{\dot{\delta}}(x_n)..$$

В частности, если произвольней $\varepsilon > 0$, то $\forall n \geq N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow x_n \in U_\delta(x_n) \Rightarrow \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ □

Гейне $\Rightarrow$ *Коши.* Пердоположим, что $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A$ по Гейне, но не по Коши.

$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta \in (0, \delta_n] \quad \exists x \in U_{\dot{\delta}}(x_0) : f(x) \neq U_\varepsilon(A)$

$\exists\varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in U_{\dot{\frac{\delta}{n}}}(x_n) : f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$ □

4 Предел по множеству

Def 6. $E \subset \mathbb{R}$ - *Непустое множество,* $x_n \in \hat{\mathbb{R}}$. *Будем говорить, что* x_n - *предельная точка множества* E, *если*

$$\forall\delta > 0 \quad U^{\cdot}(x_0) \cap E \neq \varnothing.$$

.

Def 7 (Предела по множесту)**.** . *Пусть* $A \in \hat{\mathbb{R}}, x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$. *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}, E \neq \varnothing$ *и* x_n *- предельная точка множества* E. *Будем говорить, что* A *предел* f *по множеству* E *при* $x \to x_0$*, если:*

По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E \cap U_{\dot{\delta}}(x_n) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

По Гейне $\forall$ *последовательности Гейне* $\{x_n\} \subset E$ *в точке* $x_0 \hookrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Lem 1. *Пусть* $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$. *Пусть* $A \in \hat{\mathbb{R}}, x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$. *Пусть* x_0 *- предельная точка для* E_1 *и для* E_2. *Тогда в силу утверждения эквивалентности*

там крч предел по объеденению E1 и E2 тоже самое что два предела по E1 и по E2

Слева на право.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x) > 0 : \forall x.$$

□

Def 8 (Функция Дирихле)**.** . $f(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \quad 1, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Lem 2. *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ *- предельная точка множества* E. *Пусть* $\forall$ *последовательности Гейне в точке* $x_0 \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \hat{\mathbb{R}}$

Доказательство. □

Def 9 (Критерий Коши для функции)**.** .