Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Семинары[1]

2023, Сентябрь-Декабрь

[1] Папка с материалами

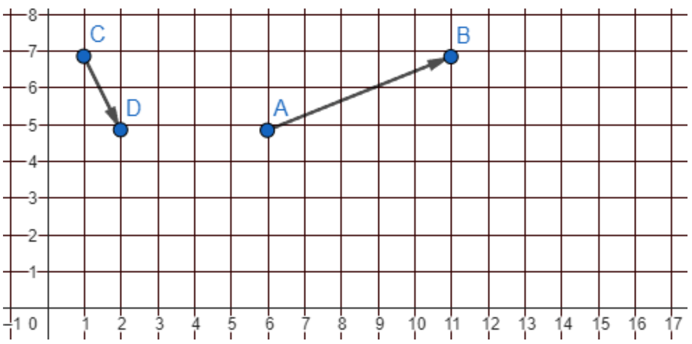
Оглавление

Аналитическая геометрия. Тест. Группа: ________. Имя: ________________________________

1) Что такое вектор?

2) Что такое базис?

3) Даны 2 вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Изобразите на бумаге векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$.



4) Запишите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ из предыдущего пункта в стандартном базисе.

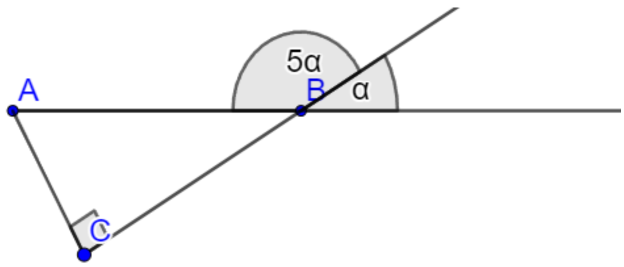
5) Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

6) Найдите скалярное произведение $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right\rangle$.

7) Пусть даны 2 точки A, B. Найдите геометрическое место точек C таких, что треугольник ABC был бы прямоугольным с гипотенузой AB.

8) Что такое число π? Чему оно приблизительно равно?

9) Найдите $\angle BAC$ в радианах.

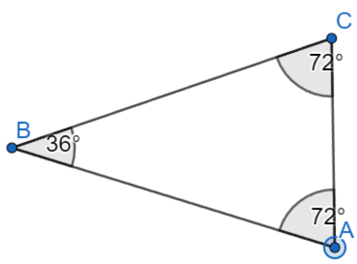


10) Известно, что $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Найдите $\cos(36^\circ)$.

11) Найдите $\sin(72^\circ)$.

12) Найдите $\cos(-36^\circ), \cos(126^\circ)$.

13) Пусть дан треугольник ABC, пусть $AC = 7$. Используя значения $\sin(36^\circ), \sin(72^\circ)$, найдите BC.



ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

Источники к прочтению:

- пособие А.Е. Умнова, Е.А. Умнова по основам матриц;
- пособие А.Е. Умнова, Е.А. Умнова по векторам;
- [Умн11, Гл. 1, §1.1-1.4, стр. 12-34];
- (Доп. источник) [Бек15, Гл. I, §1, §5.6-8, стр. 7-16, 43—47].

I. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

I.1. Определители

Вычисление определителей (14.4-14.32)

Задача 14.4(2). Вычислить определитель второго порядка:

2) $|A_6|$

Таблицы и векторы:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 14.4(5). Вычислить определитель второго порядка:

5) $|A_{77}|$

Таблицы и векторы:

$$A_{77} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Задача 14.7(3). Вычислить определитель третьего порядка:

3) $|A_{202}|$

Таблицы и векторы:

$$A_{202} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 14.7(5). Вычислить определитель третьего порядка:

5) $|A_{204}|$

Таблицы и векторы:

$$A_{204} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

I.2. Операции с матрицами

Основные операции с матрицами: умножение на число, сложение и умножение матриц (15.1-15.24)

Задача 15.2(3). Вычислить линейную комбинацию матриц:

3) $2\begin{Vmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{Vmatrix}$

Задача 15.5(1). Вычислить произведение матриц:

1) $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$

Задача 15.5(2). Вычислить произведение матриц:

2) $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix} \|2-30\|$

Задача 15.5(8). Вычислить произведение матриц:

8) $A_3 A_{205}$

Таблицы и векторы:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{205} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача 15.10(4). Проверить, существует ли произведение, и если да, то вычислить его:

4) $A_2 A_8 \boldsymbol{c}_8 A_2$.

Таблицы и векторы:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -12 & 13 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 13574 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_8 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -12 & 13 \end{pmatrix}$$

Задача 15.12(6). Транспонировать матрицу:

6) A_{390}

Таблицы и векторы:

$$A_{390} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 15.13(2). Проверить справедливость тождества:

2) $(AB)^T = B^T A^T$

Задача T.1. Описать все квадратные матрицы второго порядка, перестановочные с любой другой матрицей второго порядка. Т.е. опишите все такие матрицы $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, что для любой матрицы $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ выполнено

$$A \cdot B = B \cdot A$$

I.3. Системы линейных уравнений с определителем, отличным от 0

§ 17

Теорема I.3.1 (Правило Крамера). *Пусть дана система линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

В матричной форме ее можно записать как $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Также используется запись $\|A \mid b\|$.

Пусть $\det(A) \neq 0$. Тогда решение указанной системы единственно и может быть записано в виде $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, где A_i – матрица, полученная из A заменой i-го столбца на b:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Пример (Задача 17.2(4)). Выписать систему линейных уравнений, соответствующую данной расширенной матрице. Решить систему, пользуясь правилом Крамера:

4) $\|A_{209} \mid \boldsymbol{c}_{55}\|$

Таблицы и векторы:

$$A_{209} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_{55} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Решение. Система линейных уравнений, соответствуюшая указанной расширенной матрице:

$$A_{209}x = \boldsymbol{c}_{55} \iff \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -4 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 9 \end{cases}$$

Обозначим для простоты $A := A_{209}$. Имеем

$$\det(A) = -28 - 18 + 4 + 21 + 24 - 4 = -1.$$

Можно воспользоваться правилом Крамера. Имеем

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 10 & 7 & 2 \\ 9 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 7 & 10 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = 112 - 20 - 54 + 63 - 120 + 16 = -3$$
$$\det(A_2) = -40 + 18 - 24 + 30 + 32 - 18 = -2$$
$$\det(A_3) = 63 + 16 - 90 + 84 - 54 - 20 = -1$$
$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 3, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 2, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 1$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 17.2(5). Выписать систему линейных уравнений, соответствующую данной расширенной матрице. Решить систему, пользуясь правилом Крамера:

5) $\|A_{204} \mid \boldsymbol{c}_{56}\|$

Таблицы и векторы:

$$A_{204} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_{56} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

II. Векторы

Источники к прочтению:

- пособие А.Е. Умнова, Е.А. Умнова по основам векторов

Всюду ниже, если не оговорено иного, на плоскости или в пространстве задана декартова система координат. Если идет речь о векторе, то откладывается от начала координат, если не сказано иного.

II.1. Линейные соотношения

§ 1. Линейные соотношения

Определение II.1.1. Упорядоченный набор векторов $\beta = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ в векторном пространстве называется *базисом*, если

1) он линейно независим, т.е. невозможно составить из этих векторов нетривиальную (в которой не все коэффициенты равны нулю) линейную комбинацию, равную нуль-вектору;

2) любой другой вектор из этого пространства можно выразить линейной комбинацией векоторов $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$: для любого вектора $\boldsymbol{u}$ найдутся такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, что

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n.$$

При этом коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются *координатами вектора* $\boldsymbol{u}$ *в базисе* $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$. Координаты вектора в базисе β принято записывать в виде столбца (по-сути матрицы размерности $n \times 1$) и обозначать $[\boldsymbol{u}]_\beta$ или $\|\boldsymbol{u}\|_\beta$:

$$\|\boldsymbol{u}\|_\beta = [\boldsymbol{u}]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Можно доказать, что любой базис на плоскости состоит из 2 неколлинеарных векторов. В обратную сторону это тоже верно: любые 2 неколлинеарных вектора составляют базис для векторов плоскости. Для 3-мерного пространства есть аналогичное утверждение: любой базис в пространстве – это любые 3 некомпланарных вектора.

На плоскости есть т.н. *стандартный базис* (*канонический базис*) – базис, состоящий из векторов единичной длины, направленных по координатным осям, по оси абсцисс и ординат. Они, как правило, обозначаются $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ или $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ (см. Рисунок II.1 на стр. 11). Если не указано иного, то когда дают координаты какого-то вектора, то имеют ввиду координаты вектора именно в этом базисе. Для пространства есть аналогичный базис – векторы единичной длины $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ или $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, направленные вдоль осей OX, OY, OZ.

Пусть дан произвольный базис β. Некоторые свойства координат:

1) Пусть даны 2 вектора $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ с координатами $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ в базисе β. Тогда координаты суммы векторов $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ равны суммам соотв. координат слагаемых:

$$[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}]_\beta = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$$

2) Пусть даны вектор $\boldsymbol{u}$ с координатами $u_1, \ldots, u_n$ в базисе β и коэффициент $k \in \mathbb{R}$. Тогда координаты вектора $k\boldsymbol{u}$ равны произведению k и соотв. координат $\boldsymbol{u}$:

$$[k\boldsymbol{u}]_\beta = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{pmatrix}$$

Пример (Задача 1.10). Проверить, что векторы $\boldsymbol{a}(4,1,-1), \boldsymbol{b}(1,2,-5)$ и $\boldsymbol{c}(-1,1,1)$ образуют базис в пространстве. Найти координаты векторов $\boldsymbol{l}(4,4,-5), \boldsymbol{m}(2,4,-10), \boldsymbol{n}(0,3,-4)$ в этом базисе.

Решение.

- Докажем, что $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – базис.

  1) Докажем линейную независимость $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Пусть $\alpha_1\boldsymbol{a} + \alpha_2\boldsymbol{b} + \alpha_3\boldsymbol{c}$ – произвольная линейная комбинация $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Нам необходимо доказать, что если она равна нуль-вектору, то в таком случае обязательно $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т.е. лин. комбинация тривиальная. Имеем

$$\alpha_1\boldsymbol{a} + \alpha_2\boldsymbol{b} + \alpha_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \iff \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 + \alpha_3 c_1 = 0 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 c_2 = 0 \\ \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3 + \alpha_3 c_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

  По-сути мы получили систему линейных уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Все то же самое в матричной форме:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Напомним, что такая система будет иметь бесконечно много решений (в частности, ненулевых), если $\det(A) = 0$. В свою очередь, если $\det(A) \neq 0$, то такая система будет иметь ровно одно решение. При этом одно решение нам известно – это решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Соотв., если $\det(A) = 0$, то других решений, кроме нулевого, у системы не будет, что нам и нужно доказать. В нашем случае $\det(A) = 29$, следовательно $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ линейно независимы в пространстве.

  Мы пришли к важному выводу: **система из 3 векторов линейно независима в пространстве, если матрица, у которой по столбцам стоят координаты рассматриваемых векторов в стандартном базисе, имеет ненулевой определитель**. Для 2 векторов на плоскости это тоже верно.

  Матрица, у которой по столбцам записаны координаты нового базиса в старом, называется *матрицей перехода*. В данном случае A – матрица перехода от (стандартного, в котором изначально все было выражено) базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ к базису $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

2) Докажем, что любой другой вектор $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$ из пространства можно выразить линейной комбинацией через $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Нужно доказать, что какие бы ни были числа u_1, u_2, u_3, у уравнения

$$\alpha_1 \boldsymbol{a} + \alpha_2 \boldsymbol{b} + \alpha_3 \boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} \iff \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 + \alpha_3 c_1 = u_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 c_2 = u_2 \\ \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3 + \alpha_3 c_3 = u_3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

будет решение. Поскольку $\det(A) \neq 0$, по теореме Крамера у такой системы всегда будет (единственное) решение.

- Найдем координаты $\boldsymbol{l}(4, 4, -5)$ в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Имеем

$$\alpha_1 \boldsymbol{a} + \alpha_2 \boldsymbol{b} + \alpha_3 \boldsymbol{c} = \boldsymbol{l} \iff \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 + \alpha_3 c_1 = l_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 c_2 = l_2 \\ \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3 + \alpha_3 c_3 = l_3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

По методу Крамера:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & 1 \end{pmatrix}}{29} = \frac{8 + 20 - 5 - 10 - 4 + 20}{29} = 1, \\ \alpha_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \ldots = 1, \\ \alpha_3 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \ldots = 1 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$[\boldsymbol{l}]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Поиск координат для $\boldsymbol{m}(2, 4, -10), \boldsymbol{n}(0, 3, -4)$ абсолютно аналогичен предыдущему пункту. Запишем сразу ответ:

$$[\boldsymbol{m}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{n}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$$[\boldsymbol{l}]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{m}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{n}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Повторим важный результат: система n векторов образует базис в n-мерном пространстве (на плоскости, если $n = 2$, в пространстве, если $n = 3$), если матрица перехода к этой системе имеет определитель, отличный от нуля.

Квадратные матрицы с отличным от нуля определителем называются *невырожденными* или *обратимыми* (поскольку, напомним, наличие обратной матрицы равносильно ненулевому определителю).

Пример (без номера). Проверить, что векторы $\boldsymbol{a}(2, -1), \boldsymbol{b}(1, -4)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты вектора $\boldsymbol{u}(5, 3)$ в этом базисе.

Решение.

- Докажем, что $\beta = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ – базис. Запишем матрицу A перехода к этому базису:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\det(A) = -7 \neq 0$. Следовательно, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ – базис.

- Найдем координаты $\boldsymbol{u}(5,3)$ в базисе $\beta = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Имеем

$$\alpha_1 \boldsymbol{a} + \alpha_2 \boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \iff \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 = u_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 = u_2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

По методу Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}{-7} = \frac{-23}{-7} = \frac{23}{7},$$
$$\alpha_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{11}{-7} = -\frac{11}{7}$$

Таким образом,

$$[\boldsymbol{u}]_\beta = \begin{pmatrix} 23/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$$

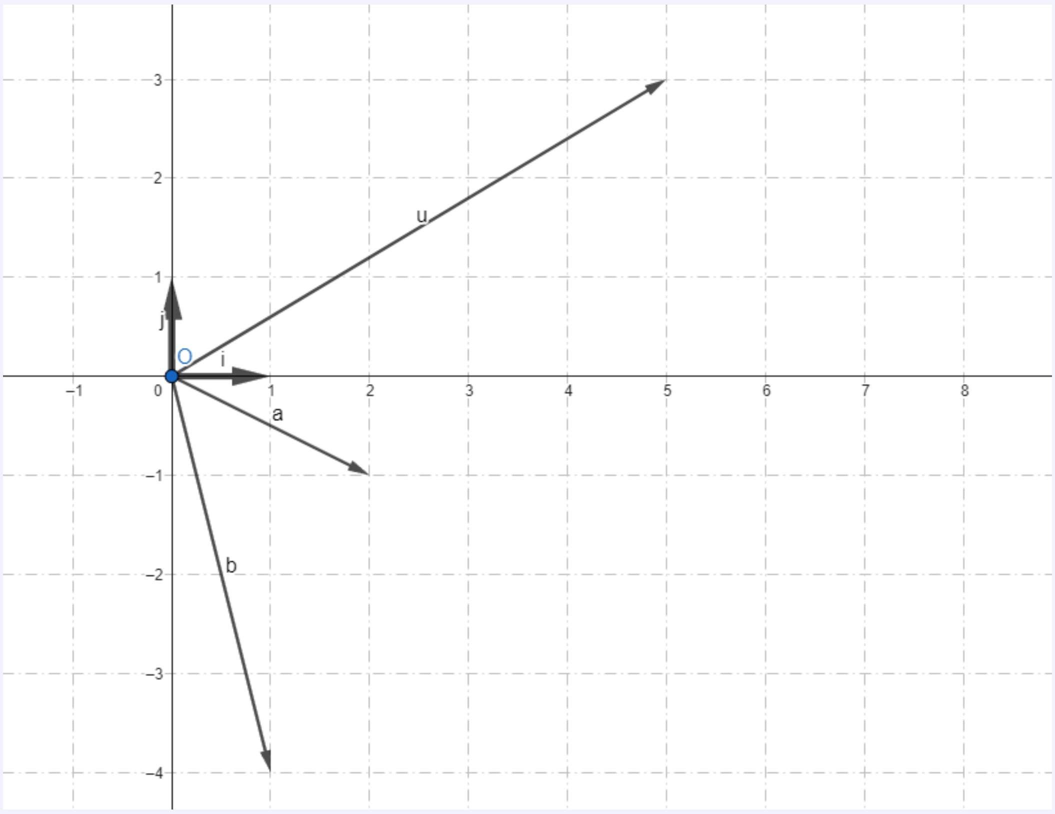


Рис. II.1: $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – стандартный базис на плоскости. Вектор $\boldsymbol{u}$ имеет координаты $5, 3$ в нем, поскольку $5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}$. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ – тоже базис, поскольку этих векторов 2 и они неколлинеарны. Попробуем выразить $\boldsymbol{u}$ в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

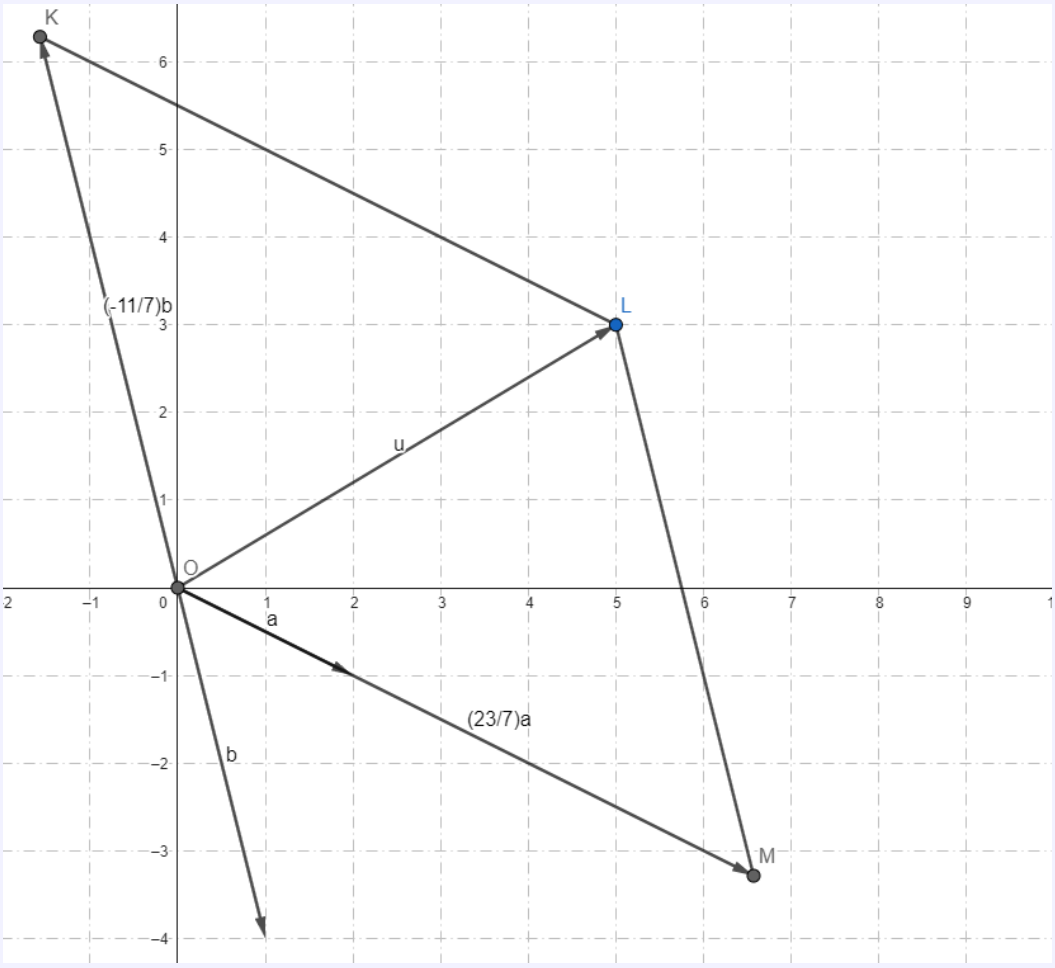


Рис. II.2: Решив систему из 2 линейных уравнений, получим, что координаты $\boldsymbol{u}$ в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ – числа $\frac{23}{7}, -\frac{11}{7}$. Действительно, $\frac{23}{7}\boldsymbol{a} - \frac{11}{7}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}$, что видно по графику (применяется правило параллелограмма сложения векторов к параллелограмму $OKLM$).

Ответ. $[\boldsymbol{u}]_\beta = \begin{pmatrix} 23/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$

Задача 1.6. Проверить, что векторы $\boldsymbol{a}(-5,-1)$ и $\boldsymbol{b}(-1,3)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $\boldsymbol{c}(-1,2)$ и $\boldsymbol{d}(2,-6)$ в этом базисе.

Задача 1.8. Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}(3,0,-2), \boldsymbol{b}(1,2,-5), \boldsymbol{c}(-1,1,1)$, $\boldsymbol{d}(8,4,1)$. Найти координаты векторов $-5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}, 3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$.

Задача 1.9. Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}(4,1,-1), \boldsymbol{b}(3,-1,0), \boldsymbol{c}(-1,1,1)$, $\boldsymbol{d}(-1,3,4)$. Найти числа α, β, γ такие, что $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=0$.

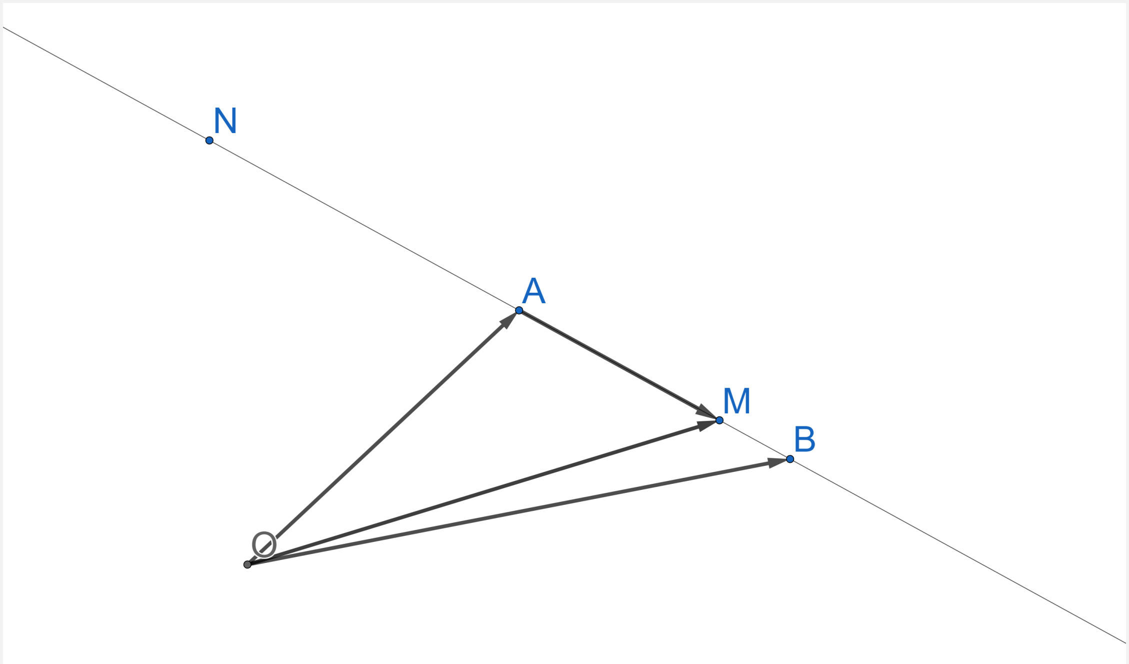
Задача 1.11(2). Проверить, будут ли компланарны векторы $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$; в случае положительного ответа указать линейную зависимость, их связывающую (здесь $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}-$ три некомпланарных вектора):

2) $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{m}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{n}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$

Задача 1.24(1). Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, найти:

1) координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, если точка M лежит на отрезке AB и $|AM|:|BM|=m:n$

Подсказка. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$. Далее надо выразить $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$. Далее надо выразить $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Получим $\overrightarrow{OM}$ через $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.



Задача 1.24(2). Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, найти:

2) координаты вектора $\overrightarrow{ON}$, если точка N лежит на прямой AB вне отрезка AB и $|AN|:|BN|=m:n$.

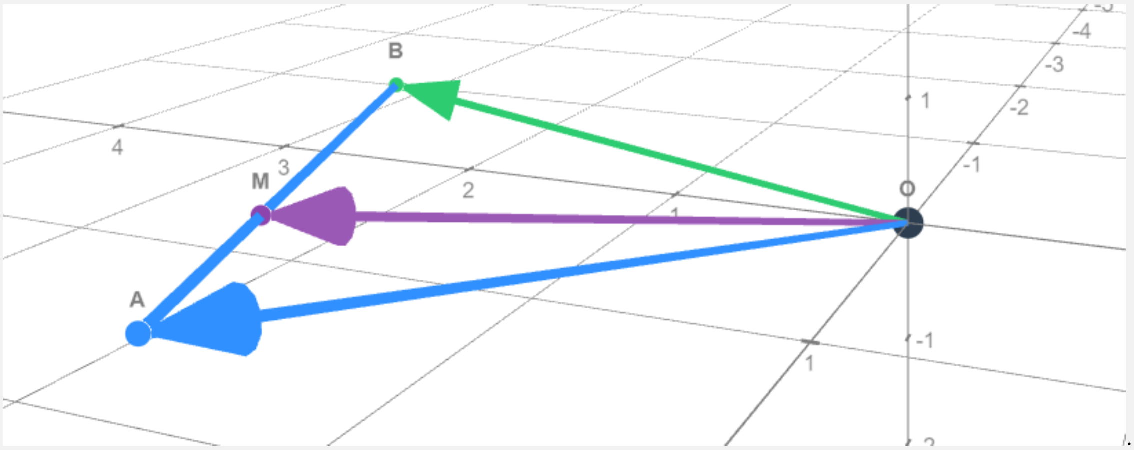
Задача 1.28(2). Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$, найти координаты:

2) точек K и L - середин ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно

Задача 1.30(1). Даны две различные точки $A\left(x_1, y_1, z_1\right), B\left(x_2, y_2, z_2\right)$. Найти координаты:

1) точки M, лежащей на отрезке AB и такой, что $|AM| : |BM| = m : n$

Подсказка. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$. Далее надо выразить $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$. Далее надо выразить $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Получим $\overrightarrow{OM}$ через $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Далее подставить координаты $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.



См. График.

Задача 1.30(2). Даны две различные точки $A\left(x_1, y_1, z_1\right), B\left(x_2, y_2, z_2\right)$. Найти координаты:

2) точки N, лежащей на прямой AB вне отрезка AB и такой, что $|AN| : |BN| = m : n$.

Задача 1.35*. Доказать, что радиус-вектор центра правильного многоугольника есть среднее арифметическое радиус-векторов его вершин.

Подсказка. Для простоты пусть центр многоугольника расположен в начале координат, а радиус его описанной окружности равен 1. Пусть у него n вершин. Вычислите координаты его вершин.

Задача 1.37. В плоскости треугольника ABC найти точку O такую, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Существуют ли такие точки вне плоскости треугольника?

Задача 1.50*. Доказать, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

Подсказка. Вспомните, что точка пересечения медиан треугольника – центр масс вершин треугольника, если в вершинах размещены одинаковые массы.

Проверка теоретических знаний. Имя:

1) Что такое матрица? Приведите пример матрицы размерности 2×3

2) Какая матрица называется симметрической? Какая называется ортогональной?

3) На доске записана матрица M_1. Запишите M_1^T.

4) На доске записаны матрицы M_2, M_3. Покажите, является ли M_3 обратной к M_2?

5) На доске записана матрица M_4. Посчитайте определитель этой матрицы.

6) В чем состоит свойство коммутативности сложения векторов? В чем состоит свойство ассоциативности?

7) Что такое линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$?

8) В каком случае вектора $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются компланарными?

9) В каком случае вектора $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются линейно независимыми?

Источники к прочтению:

- Пособие А.Е. Умнова, Е.А. Умнова по базису и координатам;
- Пособие А.Е. Умнова, Е.А. Умнова по произведениям векторов, необходимо прочитать до векторного произведения, т.е. стр. 1-2;
- [Умн11, Гл. 1, §1.5-1.8, Гл. 2, §2.1-2.3, стр. 34-60];
- (Доп. источник) [Бек15, Гл. I, §2, 3, 4, стр. 16-32].

III. Замена базиса и системы координат

III.1. Замена базиса и системы координат

§ 4. Замена базиса и системы координат

Задача 4.5. Координаты x, y каждой точки плоскости в системе координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ выражаются через координаты x', y' этой же точки в системе $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ формулами $x = 2x' - y' + 5$, $y = 3x' + y' + 2$.

1) Выразить координаты x', y' через координаты x, y.
2) Найти координаты начала O и базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ первой системы координат во второй системе.
3) Найти координаты начала O' и базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ второй системы координат в первой системе.

Задача 4.16. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а длины оснований BC и AD относятся как $2 : 3$. Найти координаты точки плоскости в системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат $E, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}$.

Задача 4.20. В тетраэдре $ABCD$ точка M - точка пересечения медиан грани BCD. Найти координаты точки пространства в системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат $M, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}$.

Задача 4.25. На плоскости даны две прямоугольные системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты x_0, y_0, а векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ получаются из векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно поворотом на один и тот же угол φ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$.

1) Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y' во второй системе.
2) Найти координаты точки во второй системе координат, если известны ее координаты x, y в первой системе.
3) Найти координаты точки O во второй системе координат.

IV. Скалярное, векторное и смешанное произведение

IV.1. Скалярное произведение векторов

§2. Скалярное произведение векторов

Задача 2.7(2). Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданными своими координатами:

2) $\boldsymbol{a}(1, -1, 1), \boldsymbol{b}(-2, 2, -2)$

Задача 2.10(2). Даны три вектора: $\boldsymbol{a}(1,-1,1), \boldsymbol{b}(5,1,1), \boldsymbol{c}(0,3,-2)$. Вычислить:

2) $|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

Задача 2.21. Длины базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ равны соответственно $3, \sqrt{2}, 4$, а углы между ними равны $\angle(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = \angle(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = 45°, \angle(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3) = 60°$. Вычислить длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $(1,-3,0)$ и $(-1,2,1)$.

Задача 2.25. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\boldsymbol{a}$ на стороны правильного треугольника.

Задача 2.27(2). Дан вектор а $(1,-1,2)$. Найти ортогональную проекцию вектора $\boldsymbol{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\boldsymbol{a}$, и ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{b}$ относительно этой прямой, если вектор $\boldsymbol{b}$ имеет координаты:

2) $(1,1,2)$

Задача 2.30. Даны три вектора $\boldsymbol{a}(4,1,5), \boldsymbol{b}(0,5,2)$ и $\boldsymbol{c}(-6,2,3)$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = = 18, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = 1, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) = 1$.

Задача 2.37. В параллелограмме $ABCD$ точки K и L - середины сторон BC и CD. Найти $|AD|$, если $|AK| = 6, |AL| = 3$, а угол $KAL = \pi/3$.

Проверка теоретических знаний. Имя:

1) Какой базис называется ортонормированным?

2) На доске записаны координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ в стандартном базисе пространства. Запишите координаты вектора $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + 7\boldsymbol{b}$.

3) На доске записаны координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ в стандартном базисе пространства. Определите, составляют ли $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ базис пространства.

4) На доске записаны координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ в стандартном базисе пространства. Найдите скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

5) Что такое матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$?

Источники к прочтению:

- Пособие А.Е. Умнова, Е.А. Умнова по произведениям векторов;
- [Умн11, Гл. 2, §2.4-2.9, стр. 61-78];
- (Доп. источник) [Бек15, Гл. I, §5, стр. 33-51].

IV.2. Векторное и смешанное произведения векторов

§ 3. Векторное и смешанное произведения векторов

Задача 3.1(1). Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}(3, -1, 2), \mathbf{b}(2, -3, -5)$

Задача 3.8(1). На векторах $\mathbf{a}(2, 3, 1)$ и $\mathbf{b}(-1, 1, 2)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти:

1) площадь этого треугольника

Задача 3.8(2). На векторах $\mathbf{a}(2, 3, 1)$ и $\mathbf{b}(-1, 1, 2)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти:

2) длины трех его высот.

Задача 3.11. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням произвольного тетраэдра, равных по длине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих этим граням, равна нулю.

Задача 3.12. Доказать, что для трех неколлинеарных векторов a, $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$.

Задача 3.13(1). Доказать тождества:

1) $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$

Задача 3.13(2). Доказать тождества:

2) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Задача 3.19(1). Найти смешанное произведение векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}(1, -1, 1), \mathbf{b}(7, 3, -5), \mathbf{c}(-2, 2, -2)$

Задача 3.20. Проверить, компланарны ли векторы, заданные своими координатами в произвольном базисе:

1) $\mathbf{a}(2, 3, 5), \mathbf{b}(7, 1, -1), \mathbf{c}(3, -5, -11)$
2) $\mathbf{a}(2, 0, 1), \mathbf{b}(5, 3, -3), \mathbf{c}(3, 3, 10)$.

Задача 3.26(1). Доказать тождества:

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 + |[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]|^2 = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 \cdot |\mathbf{c}|^2$

Задача 3.26(3). Доказать тождества:

3) $\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \mathbf{b}(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$

Задача Т.2. Тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ такова, что $\boldsymbol{a} \neq 0$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$. Верно ли, что $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$

Задача Т.3. Решить уравнение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}$ относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$, считая вектор $\boldsymbol{a}$ известным.

Опрос в начале пары

1) Что такое матрица? Приведите пример матрицы размерности 2×3
2) Какая матрица называется симметрической? Какая называется ортогональной?
3) На доске записана матрица M_1. Запишите M_1^T.
4) На доске записаны матрицы M_2, M_3. Является ли M_3 обратной к M_2?
5) На доске записана матрица M_4. Посчитайте определитель этой матрицы.
6) В чем состоит свойство коммутативности сложения векторов? В чем состоит свойство ассоциативности?
7) Что такое линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$?
8) В каком случае вектора $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются компланарными?
9) В каком случае вектора $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются линейно независимыми?

Список литературы

[Умн11] А.Е. Умнов. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра.* 3-е изд. Москва: МФТИ, 2011. URL: https://disk.yandex.ru/i/qdv8WRe3ltsqQw.

[Axl15] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right.* 3-е изд. Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer Cham, 2015. URL: https://disk.yandex.ru/i/9beIm-UmZrsAUA.

[KI15] S.N. Krivoshapko и S.N. Ivanov. *Encyclopedia of Analytical Surfaces.* Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer Cham, 2015. URL: https://disk.yandex.ru/i/UrMZXVn7axAu7Q.

[Str15] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra.* 5-е изд. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2015. URL: https://disk.yandex.ru/i/dU1i9n4YVEXODw.

[Бек15] Д.В. Беклемишев. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* 13-е изд. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: ЛАНЬ, 2015. URL: https://disk.yandex.ru/i/GL0JjqolLD-40A.

[Бек+22] Л.А. Беклемишева, Д.В. Беклемишев, А.Ю. Петрович и И.А. Чубаров. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебры.* Под ред. Д.В. Беклемишев. 9-е изд. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: ЛАНЬ, 2022. URL: https://disk.yandex.ru/i/0itaa4DHc5enGQ.