# Произведения векторов

## 1°. Скалярное произведение

*Скалярным произведением ненулевых* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В случае, если хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор, скалярное произведение *считается* равным нулю.

Скалярное произведение обозначается как $(\vec{a},\vec{b})$. По определению:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\cos\varphi\,;\ 0 \le \varphi \le \pi\,,$$

где $\varphi$ - угол между векторами-сомножителями. Если $\vec{b} \ne \vec{o}$, то имеет место равенство $(\vec{a},\vec{b}) = \left|\vec{b}\right| \text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

*Свойства скалярного произведения*
\

1°. $(\vec{a},\vec{b})=0$ при $\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}\neq\vec{o}$, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *взаимно ортогональны*;

2°. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (коммутативность);

3°. $(\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2,\vec{b})=\lambda_1(\vec{a}_1,\vec{b})+\lambda_2(\vec{a}_2,\vec{b})$ (линейность);

4°. $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2\geq 0\ \forall\vec{a};\quad |\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$;

(условия $(\vec{a},\vec{a})=0$ и $\vec{a}=\vec{o}$ равносильны);

5°. При $\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}\neq\vec{o}$ $\quad\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

## 2°. Векторное произведение

*Векторным произведением неколлинеарных* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что

1°. $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi$ угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$; $0<\varphi<\pi$.

2°. Вектор $\vec{c}$ ортогонален вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$.

3°. Тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ правая.

В случае, когда сомножители коллинеарны (в том числе, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор), векторное произведение *считается* равным нулевому вектору.

Векторное произведение обозначается как $[\vec{a},\vec{b}]$.

*Свойства векторного произведения*

1°. $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2°. Для коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

3°. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ (*антикоммутативность*, следует из определения и нечетности функции $\sin\varphi$)

4°. $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$.

5°. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ (*дистрибутивность*).

### 3°. Смешанное произведение

*Смешанным* (или *векторно-скалярным*) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначаемым как $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, называется число $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$.

*Свойства смешанного произведения*

1°. Абсолютная величина смешанного произведения векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Знак смешанного произведения положительный, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, и отрицательный, если - левая.

2°. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$ ;

3°. $(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

4°. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$ ,

Отметим, наконец, что смешанное произведение равно нулю, если среди сомножителей имеется хотя бы одна пара равных.

4°. Двойное векторное произведение

*Двойным векторным произведением* векторов $\vec{a}$ , $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор [ $\vec{a}$ [ $\vec{b}$ $\vec{c}$ ]].

*Свойство двойного векторного произведения*

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b}) \, ,$$

Задача *Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $5\vec{a}-4\vec{b}$ ортогональны?*

Решение

Если векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $5\vec{a}-4\vec{b}$ ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю. Поэтому, с учетом коммутативности скалярного произведения и условий $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$,

$$0=(\vec{a}+2\vec{b},5\vec{a}-4\vec{b})=(\vec{a},\vec{a})-4(\vec{a},\vec{b})+10(\vec{b},\vec{a})-8(\vec{b},\vec{b})=$$

$$=|\vec{a}|^2+6(\vec{a},\vec{b})-8|\vec{b}|^2=6(\vec{a},\vec{b})-3.$$

Откуда $(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}$ и, следовательно, $\cos\varphi=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\frac{\pi}{3}$.

Решение получено.

Задача . *Показать, что векторное произведение пары векторов не изменится, если ко второму сомножителю прибавить вектор, коллинеарный первому.*

Решение

Пусть даны $[\vec{a},\vec{b}]$ и $\vec{c}=\lambda\vec{a}$. Найдем $[\vec{a},\vec{c}]$.

$$[\vec{a},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}+\lambda\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b}]+\lambda[\vec{a},\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b}],$$

поскольку $[\vec{a},\vec{a}]=\vec{o}$.

Решение получено

.

Заметим, что одновремено нами показано, что, по векторному произведению и одному из его сомножителей однозначно указать второй сомножитель невозможно.

Задача

*Найти, лежащий в плоскости векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*, вектор* $\vec{x}$*, если*

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{x}) = \alpha, \\ (\vec{b},\vec{x}) = \beta, \end{cases}$$

*а векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *неколлинеарны.*

Решение

Векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ образуют базис в своей плоскости. Поэтому вектор $\vec{x}$ можно (и притом единственным образом) разложить по этому базису

$$\vec{x} = \xi\vec{a} + \eta\vec{b} \quad .$$

Коэффициенты разложения найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{a})\xi + (\vec{a},\vec{b})\eta = \alpha, \\ (\vec{b},\vec{a})\xi + (\vec{b},\vec{b})\eta = \beta. \end{cases}$$

Решение получено.

Задача

*Найти вектор* $\vec{x}$*, если*

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{x}) = \alpha, \\ (\vec{b},\vec{x}) = \beta, \\ (\vec{c},\vec{x}) = \gamma, \end{cases}$$

*а векторы* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *некомпланарны.*

Решение

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ линейно независимые, поэтому линейно независимы и векторы $[\vec{a},\vec{b}]$, $[\vec{b},\vec{c}]$ и $[\vec{c},\vec{a}]$, которые образуют базис в пространстве. Поэтому вектор $\vec{x}$ можно (и притом единственным образом) разложить по этому базису $\vec{x} = \xi[\vec{a},\vec{b}] + \eta[\vec{b},\vec{c}] + \kappa[\vec{c},\vec{a}]$ .

Коэффициенты разложения найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{a},\vec{b},)\xi + (\vec{a},\vec{b},\vec{c},)\eta + (\vec{a},\vec{c},\vec{a},)\kappa = \alpha \ , \\ (\vec{b},\vec{a},\vec{b},)\xi + (\vec{b},\vec{b},\vec{c},)\eta + (\vec{b},\vec{c},\vec{a},)\kappa = \beta \ , \\ (\vec{c},\vec{a},\vec{b},)\xi + (\vec{c},\vec{b},\vec{c},)\eta + (\vec{c},\vec{c},\vec{a},)\kappa = \gamma \ , \end{cases}$$

которая по свойствам смешанного произведения равносильна системе

$$\begin{cases} (\vec{a},\vec{b},\vec{c},)\eta = \alpha \ , \\ (\vec{b},\vec{c},\vec{a},)\kappa = \beta \ , \\ (\vec{c},\vec{a},\vec{b},)\xi = \gamma \ . \end{cases}$$

Решение получено.

Задача *Найти все векторы $\vec{x}$, удовлетворяющие соотношению*

$$[\vec{a},\vec{x}]+[\vec{x},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}],$$

***Если** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **неколлинеарны.***

Решение

Умножим обе части данного уравнения скалярно на $\vec{b}$, получим

$$([\vec{a},\vec{x}],\vec{b})+([\vec{x},\vec{b}],\vec{b})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{b}) \text{ или } (\vec{a},\vec{x},\vec{b})+(\vec{x},\vec{b},\vec{b})=(\vec{a},\vec{b},\vec{b}).$$

Согласно свойствам смешанного произведения $(\vec{x},\vec{b},\vec{b})=(\vec{a},\vec{b},\vec{b})=0$, то есть $(\vec{a},\vec{x},\vec{b})=0$ и, значит, векторы $\vec{a},\vec{x}$ и $\vec{b}$ компланарны и линейно зависимы. В этом случае вектор $\vec{x}$ может быть представлен как линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следовательно, $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

Найдем теперь при каких значениях $\alpha$ и $\beta$ вектор $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ будет удовлетворять исходному уравнению.

.

Подставляя, получим

$$[\vec{a},\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}]+[\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{b}]=\alpha[\vec{a},\vec{a}]+\beta[\vec{a},\vec{b}]+\alpha[\vec{a},\vec{b}]+\beta[\vec{b},\vec{b}]=(\alpha+\beta)[\vec{a},\vec{b}],$$

то есть необходимо, чтобы $\alpha+\beta=1$. Поэтому решение исходного уравнения имеет вид $\vec{x}=\alpha\vec{a}+(1-\alpha)\vec{b}, \quad \forall\alpha$.

Решение получено.

Задача . *Найти вектор* $\vec{x}$ *из системы уравнений*

$$\begin{cases} [\vec{a},\vec{x}] = \vec{b}, \\ (\vec{c},\vec{x}) = \alpha \end{cases}.$$

*Векторы* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *и число* $\alpha$ *считать известными.*

Решение

Умножив обе части первого уравнения векторно слева на $\vec{c}$ и применив формулу для двойного векторного произведения, получим

$$[\vec{c},[\vec{a},\vec{x}]] = \vec{a}(\vec{c},\vec{x}) - \vec{x}(\vec{c},\vec{a}) = [\vec{c},\vec{b}]$$

$$\alpha\,\vec{a} - \vec{x}(\vec{c},\vec{a}) = [\vec{c},\vec{b}],$$

поскольку, в силу второго уравнения системы, $(\vec{c},\vec{x}) = \alpha$ .

Откуда окончательно получаем

$$\vec{x} = \frac{\alpha\,\vec{a} - [\vec{c},\vec{b}]}{(\vec{c},\vec{a})}, \quad (\vec{c},\vec{a}) \neq 0 .$$

Если же $(\vec{c},\vec{a}) = 0$ , то при $\alpha\,\vec{a} \neq [\vec{c},\vec{b}]$ решений нет, а для случая $\begin{cases} (\vec{c},\vec{a}) = 0, \\ \alpha\,\vec{a} = [\vec{c},\vec{b}] \end{cases}$ решением будет являться любой вектор вида $\vec{x} = -\dfrac{[\vec{a},\vec{b}]}{\left|\vec{a}\right|^2} + \tau\,\vec{a}$ ; $\forall\tau$

Решение получено.