Дискретная математика

Зухба Анастасия Викторовна
(Конспектировал Иван-Чай)

01.09.2023

1 Основные основы

Граф - это пара множеств $G(V, E)$ V - множество, элементы которого называют вершинами E - множество пар вершин $(U, U') : U, U' \in V$

Вершина и ребро инцидентны, если вершина является одним из концов ребра.

~~Петлей называется ребро вида (U, U).~~

~~Кратными называются ребра соответствующие одной и той же паре (U, U').~~

Петли и кратные ребра в нашем курсе использоваться не будут.

Степенью вершины U неориентированного гарафа $G(V, E)$ называется количество ребер инцидентных U.

$$\deg U = |\{(U, U') : (U, U') \in E\}|$$

Смежные вершины - это вершины с общим ребром.

Смежные ребра - это ребра с общей вершиной.

Th. *Лемма о рукопожатиях:*

$$\sum_{u \in V} \deg U = 2\,|E|$$

2 Хранение графа в памяти

2.1 Матрица смежности

Есть матрица A размером $|V|*|V|$, и $a_{ij} = 1$, если $(i, j) \in E$, иначе $a_{ij} = 0$.

2.2 Матрица инцидентности

Есть матрица A размера $|V| * |E|$ и там каждый столбец описывает ребро тип.

2.3 Список смежности

ну там и так все знают, как и предыдущие два пункта.

3 Маршруты, пути, цепи, связность

Маршрут - конечная последовательность вершин такая, что $(U_j, U_{j+1}) \in E \quad \forall j \in \overline{1, |V| - 1}$.

Цепь - маршрут, все ребра которого различны.

Путь в нашем курсе - синоним цепи.

Простой путь - путь, все вершины которого (кроме, возможно, начала и конца) различны.

Замкнутый маршрут/путь/простой путь, это когда совпадают начало и конец.

Цикл - замкнутый путь.

Длиной маршрута называется число ребер в нем с учетом возможных повторных вхождений.

Вершины U и V называют связными, если существует маршрут с началом в U и концом в U.

Граф называют связным, если между любыми двумя его вершинами существует путь.

St. *$\exists$ маршрут из U в $V \Rightarrow \exists$ путь и простой путь из U в V.*

Доказательство. Пусть $(U_1, U_2, U_3 \dots U_m)$ - маршрут.

Предположим все вершины различны, тогда этот маршрут является простым путем.

Предположим маршрут содержит повторение вершины U_i

Пусть $U_i = U_j$ и

$(U_1, U_2, U_3 \dots U_{i-2}, U_{i-1}) = a$

$(U_{i+1}, U_{i+2}, U_{i+3} \dots U_{j-2}, U_{j-1}) = b$

$(U_{j+1}, U_{j+2}, U_{j+3} \dots U_{k-1}, U_k) = c$

тогда aU_ibU_jc - исходный маршрут, но тогда aU_ic - тоже маршрут.