Московский физико-технический институт
Высшая школа программной инженерии

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

I / III СЕМЕСТР

Лектор: *Анастасия Викторовна Зухба*

Автор: *Ширяев П.Г.*
Шаблон взят у *Клуб Теха Лекций*

осень 2023

Содержание

1 Основы теории графов

1.1 Основные определения

Определение 1.1. Граф G - пара множеств (V,E).
V - множество, элементы которого называют *вершинами*.
E - множество пар вершин.
Если пары упорядочены ($(v,v') \neq (v',v)$), то граф называют *ориентированным (орграф)*.
Если нет ($(v,v') = (v',v)$) - неориентированным (граф)

Замечание. В нашем курсе множества V,E конечные.

Пример. Ориентированные графы:

1. Односторонняя дорога
2. Расписание на день (встал $\to$ умылся $\to$ поел $\to$ ...)

Определение 1.2. Вершина и ребро *инцидентны*, если вершина является хотя бы *одним* из элементов пары.

Определение 1.3. *Петлёй* называется ребро вида (v,v) - ребро, концы которого совпадают.
Кратными рёбрами называют рёбра, соответствующие одной и той же паре (v,v')

Замечание. Отсюда, если не оговорено дальше, петель и рёбер **НЕ БЫВАЕТ** - граф *простой.*

Определение 1.4. Для неориентированного графа, *степень вершины* - количество рёбер, инцидентных ему: $\deg(v) = |\{(v,v') : \ (v,v') \in E\}|$

Определение 1.5. Смежные рёбра - рёбра, соединённые вершиной.
Смежные вершины - вершины, соединённые ребром.

Теорема 1.1. $\sum\limits_{v \in V} deg(v) = 2|E|$
Кратные рёбра не "сломают"теорему. Более того, если учитывать петли 2 раза для одной вершины, то и петли не сломают эту теорему.

Определение 1.6. Матрица смежности A - матрица $n \times n$, где

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, (i,j) \in E \\ 0, (i,j) \notin E \end{cases}$$

Определение 1.7. Матрица инцидентности - матрица, где строка описывает вершину, столбец - ребро.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, i \in j \\ 0, i \notin j \end{cases}$$

Пример. Задача, для которой может пригодиться такая матрица - расписание игр.

Замечание. Ещё граф можно задать списком смежности, таблицей в 2 столбца и |V| строк: на i - той строке в 1 столбце пишем i, во втором - $\{v : \ (i,v) \in E\}$

Определение 1.8. *Маршрут* - конечная последовательность вершин $v_1,v_2 \cdots v_k$, такая что $\forall i \in \overline{1,k-1}: \ (v_i,v_{i+1}) \in E$
Цепь - маршрут, все рёбра которого различны.
Путь - то же самое, что и цепь
Простой путь - путь, все вершины которого (кроме, возможно, начала и конца) различны.
Замкнутый маршрут (путь, простой путь) - маршрут (путь, простой путь), начало и конец которого совпадают.
Цикл - замкнутый путь. Простой цикл - замкнутый простой путь.

Определение 1.9. (в неорграфе) Две вершины v,u называют *связанными*, если $\exists$ маршрут с началом в v, концом в u. $(v \to u)$

Определение 1.10. Длиной маршрута (пути, цикла, простого цилка) называют количество рёбер в нём, с учётом возможных повторных вхождений.

Утверждение 1.1. *Если $\exists$ маршрут $v \to u$ конечной длины, то существует и путь $v \to u$, и простой путь $v \to u$.*

Доказательство. Рассмотрим маршрут $v \to u: \ (v,v_1,\cdots,v_m,u)$ Предположим, все вершины в маршруте различны (кроме, возможно, v и u). Тогда этот маршрут является простым путём: повторение ребра влечёт повторение вершины.
Теперь предположим, что маршрут содержит повторение какой-то вершины
$v_i: \ v,v_1,\cdots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\cdots,v_{j-1},v_j = v_i,v_{j+1},\cdots,u$. Заметим, что $len(v_i \to v_j) \neq 0, len(v \to v_i) + len(v_j \to u) \neq 0$ Тогда рассмотрим последовательность $v \to v_i \bigcup v_j \to u$. У нового маршрута длина $\neq 0$, причём она стала меньше хотя бы на 2.
Повторим то же самое с новым маршрутом. Мы будем это делать конечное число раз (длина маршрута конечная, каждый шаг уменьшаем хотя бы на 2), значит рано или поздно придём к тому, что у нас не будет повторений. $\square$

Определение 1.11. Связный граф - граф, у которого $\forall u,v \in V \ \exists$ путь $u \to v$