Введение в математический анализ

Тюленев Александр Иванович

(Конспектировал Иван-Чай)

6 лекция

Содержание

1 Частичные пределы

Th 1. *Если* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- неограничена сверху, то* $+\infty$ *является ее частичным пределом.*

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- неограничена снизу, то* $-\infty$ *является ее частичным пределом.*

Докажем для случая ограниченности сверху. Заметим, что если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена сверху, то $\forall n \in \mathbb{N}$ отбросим первые N элементов и снова получим последовательность неограниченную сверху. Т.е. рассмотрим $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n+N}\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : y_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\Downarrow$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k > N : x_k > \frac{1}{eps}.$$

$+\infty$ - частичный предел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по критерию частичного предела. $\square$

Th (Обобщенная теорема Больцаро-Вейерштрасса)**.** *Любая числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет хотя бы один частичный предел в* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

Def 1. $PL\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) := \{L \in \overline{\mathbb{R}} : L -$ *частичный предел* $\}$

Def 2. *Пусть* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq M, \forall a \in A \\ \forall M' < M \quad \exists x \in A : M' < a \leq M. \end{cases}$

Def 3. *Пусть* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. $m = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq m, \forall a \in A \\ \forall m' > m \quad \exists x \in A : m \leq a < m'. \end{cases}$

2 Верхний и нижний частичный предел

Def 4. *Верхний предел*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup PL(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Def 5. *Нижний предел*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf PL(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Lem 1. *Пусть* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$*. Тогда* $PL(x_n) = A$*.*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_{\varepsilon}(A).$$

Возьмем произвольную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и покажем, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$.

$$n_k \geq k \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) = N(\varepsilon) : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_{\varepsilon}(A).$$

□

Th 2. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- произвольная числовая последовательность, тогда*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \in PL(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \in PL(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Докажем для верхнего предела. Обозначим $M = \sup PL(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$

Из определения sup

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap PL(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \neq \varnothing.$$

$$\Downarrow$$

$$\exists c \in PL(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) : c \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(M).$$

По критерию частичного предела в $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(c)$ содержится значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$c \in U_{\frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow U_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset U_{\varepsilon}(M).$$

Из этого $U_{\varepsilon}(M)$ содержит значения бесконечного количества значений элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, но ε был выбран произвольно. $\Rightarrow M$ - частичный предел. $\square$

Th 3. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- числовая последовательность, тогда*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} x_k \right).$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} x_k \right).$$

Докажем для верхнего предела.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \sup_{k\geq n} x_k.$$

Заметим, что $y_{n+1} \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Если $y_n = +\infty$ хотя бы при одном $n \in \mathbb{N}$, то $y_n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Получается монотонная последовательность, которая по теореме Вейерштрасса имеет предел равный ее inf.

Докажем, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_n$, для этого докажем, что $c \leq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_n$, если c - частичный предел.

Пусть $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - подпоследовательность последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$

Если $y_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$

Дальнейшая часть лекции пока в разработке, довольствуемся тем, что имеем