Введение в математический анализ

Тюленев Александр Иванович

(Конспектировал Иван-Чай)

9 лекция

Содержание

1 Дисклеймер

Эта лекция еще в разработки, так-что она не содержит всей информации из лекции +

ГДЕ-ТО(ПОЧТИ ВЕЗДЕ) ПРЕДЕЛ ПО МНОЖЕСТВУ ЗАПИСАН КАК ОБЫЧНЫЙ

2 Условие Коши

Th 1 (Условие Коши)**.** *Пусть* $f : \dot{U}_{\delta_0} \to \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0] : \forall x_1, x_2 \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon|.$$

Th (Критерий Коши)**.** *Пусть* $f : \dot{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. *Следущие условия эквивалентны.*

1. f *удовлетворяет усовию Коши в* x_0
2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} = a \in \mathbb{R}$

(1) ⇒ (2). Пусть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, \delta_0] : \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, \delta_0] : \quad \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

□

(2) ⇒ (1). Поскольку определения по Коги и по Гейне эквивалентны докажем,что из критерия Коши следует существование предела по Гейне.

Зафиксируем произвольную последовательность Гейне в точке x_0.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N(\delta) \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \dot{U}_\delta(x_0).$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m \geq N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Получилось условие Коши для $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, отсюда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.

Для произвольной последовательности Гейне в точке x_0

$$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Но в силу предыдущей леммы A не зависит от выбора x_n. $\square$

Nt. *Критерий Коши работает и для пределов по множеству.*

Доказательство. Доказательсвто аналогично предыдущему. $\square$

Th (Принцип локализации)**.** *Пусть*

$$\exists \overline{\delta} \in (0, +\infty) : f(x) = g(x) \forall x \in \dot{U}_{\overline{\delta}}(x_0).$$

Тогда

3 Односторонний предел и т. Вейерштрассе

Def 1. *Пусть* $f : \dot{U}^+_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}, \quad \dot{U}^+_{\delta_0}(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$. *Будем говорить, что* $A \in \hat{\mathbb{R}}$ *является правостороним пределом* f *в* x_0, *если*

$$\lim_{x\to x_{0_{x\in \dot{U}^+_{\delta_0}(x_0)}} = A.}$$

Def 2. *Функция называется нестрого возрастающей(убывающей) на* $x \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing$, *если* $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$.

Аналогично определяется строгое возрастание/убываение на X, строгая/нестрогая монотонность на X.

Def 3.

$$\sup_{x\in X} f(x) = \sup\{f(x), x \in X\}.$$

$$\inf_{x\in X} f(x) = \inf\{f(x), x \in X\}.$$

$$\max_{x\in X} f(x) = \max\{f(x), x \in X\}.$$

$$\min_{x\in X} f(x) = \min\{f(x), x \in X\}.$$

Запишем в кванторах

$$\sup_{x\in X} f(x) = M \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \quad \forall x \in X \\ \forall M' < M \quad \exists x' \in X \quad f_(x') > M' \end{cases}$$

$$\sup_{x\in X} f(x) = M \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \quad \forall x \in X \\ \forall \varepsilon > 0 \quad exx_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M) \end{cases}$$

Th (Теорема Вейерштрассе)**.** *Пусть* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. *Пусть* f *нестрого возрастает на* (a, b). *Тогда*

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$

$$\exists \lim_{x\to x_0+0} = \inf_{x\in(a,b)} f(x).$$

Докажем (1) т.к. (2) аналогично.

$$E = \{f(x) : x \in (a, b)\}.$$

$$\exists \sup E = M \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in (a, b) : \quad f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M).$$

Но f нестрогов возрастает на $(a, b) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M) \quad \forall x \in [x_\varepsilon, b)$

Но тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) = b - x_\varepsilon : \forall x \in \dot{U}^-_{\delta(\varepsilon)}(b) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$ $\square$

4 Арифметические операции с пределами функции

Th 2. *Пусть* $x \neq \varnothing, x_0$ *- предельная точка. Пусть* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = a_1 \in \mathbb{R}$ *Пусть* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = a_2 \in \mathbb{R}$ *Тогда*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = a_1 \pm a_2$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = a_1 \cdot a_2$.

Доказательство. Для доказательства следует использовать определение предела по Гейне, т.к. для последовательностей подобные свойства уже доказаны. □

Lem 1 (Лемма о сохранение знаков)**.** *Пусть* $f : x \to \mathbb{R}$, x_0 *- предельная точка* X*. Пусть* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$*. Тогда* $\exists \overline{\delta} > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\overline{\delta}}(x_0) \cap X \hookrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ sign f(x) = sign a \end{cases}$$

Cl 2.1. *Пусть* $f, g : X \to \mathbb{R}, X \neq \varnothing, x_0$ *- предельня точка* X*. Пусть* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0$*. Тогда* $\exists \overline{\delta} > 0 : g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \dot{U}_{\overline{\delta}}(x_0) \cap X$

Доказательство. Следует из леммы о сохранение знаков и о пределе частичного для последовательности. □

5 О предельном переходе в неравенство

Th (О трех милиционерах)**.** *Пусть* $f, g, h : X \to \mathbb{R}, x_0$ *- предельная точка для* X*. Пусть* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$*. Тогда* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$*.*

Доказательство. По Гейне. □

Th 3 (О предельном переходе в неравенство)**.** *Пусть* $f, g : X \to \mathbb{R}$, x_0 *- предельная точка для* X*. Пусть* $\begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}} \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ *тогда, если* $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow A \leq B$*.*

Nt. *Строгое неравенство может не сохраниться при предельном переходе.*

6 Нижний и верхний предел последовательности

Def 4. *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}, x_0$ *- предельная точка.*