(Конспектировал Иван-Чай)

Содержание

1 Ассоциативность умножения матриц

St. *A(BC) = (AB)C*

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m*n}, B \in \mathbb{R}^{n*p}, c \in \mathbb{R}^{p*q}$.

Сравним размеры

$(AB) \in \mathbb{R}^{m*n}$, $(AB)C \in \mathbb{R}^{m*q}$.

$(BC) \in \mathbb{R}^{n*q}$, $A(BC) \in \mathbb{R}^{m*q}$.

Проверим поэлементно

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

$((AB)C)_{jl} = \sum_{j=1}^{k}(AB)_{ij}c_{jl} =$
$= \sum_{j=1}^{k}(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj})c_{jl} =$
$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}c_{jl} =$
$= \sum_{j=1}^{k} a_{ik}\sum_{k=1}^{p} b_{kj}c_{jl} =$
$= (A(BC))_{ij}$.

□

2 Свойства векторов

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.
3. $\forall \vec{a} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
4. $\forall \vec{a} \quad (-1)\vec{a}$ - противоположный, $\vec{a} + (-\vec{a})$.
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall \vec{a} \quad (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.

6. $\forall \vec{a} \quad 1\vec{a} = a$.

7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{a} \quad (\alpha + \beta)\, \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

8. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \quad \alpha \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

3 Векторные пространства

Def 1. *Множество называется замкнутым относительно операции, если результат этой операции над элементами этого множества всегда относится к нему.*

Def 2. *Множество векторов, замкнутое относительно линейных операций называется векторным пространством.*

Def 3. *Если одно векторное пространство является подмножесвтом другого назовем его подпространством.*

Def 4. $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 \dots$ *- линейная комбинация векторов.*

Def 5. *Линейная комбинация тривиальная, если* $\alpha_i = 0 \quad \forall i$, *иначе нетривиальная.*

Def 6. *Набор векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n \dots$ *- называется линейно зависимым, если* $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \, : \, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots \alpha_n^2 > 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{a}_i \neq 0 \Leftrightarrow$ *Существует их нетривиальная комбинация, равная нулю.*

St. *Если в наборе есть* $\vec{0}$, *то этот набор ЛЗ.*

St. *Если набор* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$ *- ЛЗ, то набор*
$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n \vec{b}_1 \vec{b}_2, \dots \vec{b}_m$ *- ЛЗ.*

St. *Если набор ЛНЗ* $\Rightarrow$ *его любой непустой поднабор тоже линейно независим.*

Доказательство. От противного крч. $\square$

Th. *Пусть* $\vec{x} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 \dots$ *- единственное разложение* $\vec{x} \Rightarrow$ *набор* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \dots$ *- ЛНЗ.*

Доказательство. $(\alpha_1 - \beta_1)\vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{a}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\vec{a}_3 = \vec{0}$

Обратное: Допустим $\exists \gamma_1, \gamma_2 \dots :$
$\gamma_1\vec{a}_1 + \gamma_2\vec{a}_2 \dots = \vec{0}$, тогда $(\gamma_1 + \alpha_1)\vec{a}_1 + (\gamma_2 + \alpha_2)\vec{a}_1 = \vec{x}$ - противоречие. □

Th. *Набор ЛЗ* $\Leftrightarrow \exists$ *вектор из набора равный линейной комбинации остальных.*

Доказательство. $\exists \alpha_1, \alpha_2 \dots > 0 : \alpha_1\vec{a}_1 + \dots = \vec{0}$, тогда $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a_3} \dots$.

Там еще как-то в обратную было. □

St. *Система из одного вектора - ЛЗ* $\Leftrightarrow$ *он нулевой.*

St. *Система из 2 векторов ЛЗ* $\Leftrightarrow$ *они колониарны.*

St. *Система из 3 векторов ЛЗ* $\Leftrightarrow$ *они компланарны.*

St. *Система из 4 векторов ЛЗ всегда.*

Доказательство. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны

1. $\vec{a} + \vec{b}$ - колониарны $\Leftrightarrow$ они лз.
2. $\vec{a} + \vec{b}$ - неколониарны $\Rightarrow \quad \exists \alpha, \beta : \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$ - ЛЗ.

В обратку наоборот. □