# Введение в математический анализ

Тюленев Александр Иванович

(Конспектировал Иван-Чай)

22.09.23

# Содержание



# 1 Топология числовой прямой

**Def 1.** *Пусть* $E$ *- непустое множество, тогда* $x$ *называется точкой прикосновения* $E$*, если* $\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$.

**Def 2.** *Замыканием множества* $E$ *называется множество всех точек прикосновения* $E$ *и обозначается* $clE$.

**Def 3.** *Множество называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием.*

$E \subset clE$.

По опеределнию $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ считаются замкнутыми.

Пример $a < b$, тогда $[a, b]$ - замкнутое множество

*Доказательство.* Покажем, что $\forall c \notin [a, b]$ не является точкой прикосновения.

$$\varepsilon* = min\left\{\frac{|a-b|}{2}, \frac{|a-c|}{2}\right\}.$$

□

**Def 4.** *Пусть* $G \subset \mathbb{R}$ *- множестов. Будем оворить, что* $x$ *- внутреняя точка* $G$*, если* $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G$

**Def 5.** *Внутренностью мнжества* $G$ *называется множество всех его внутрених точек и обозначается* $intG$

**Def 6.** *Множество* $G_1 \subset \mathbb{R}$ *называется открытым, если оно совподает со своей внутренностью.*

$\varnothing$ и $\mathbb{R}$ - открыты по определнию.

$intG \subset G$

Пример открытого множества: $(a, b)$ - открытое множество, $a < b$

*Доказательство.*

$$\varepsilon = min\left\{\frac{|x-a|}{2}, \frac{|b-x|}{2}\right\}$$

□

Полуинтервал $(a, b]$ не является ни открытым ни замкнутым множеством.

*Доказательство.*

$$a \notin int(a, b]$$

$$b \in int(a, b].$$

□

Пример: $cl\mathbb{Q} = \mathbb{R}(1)$, $int\mathbb{Q} = \varnothing(2)$.

*(1).* В любом интервале найдется рациональная точка. □

*(2).* $\forall(a, b)$ найдется иррациональная точка. □

*Докажем, что любой интервал содержит рациональную точку.* **Это доказательство пока в разработке** □

*Докажем, что любой интервал содержит иррациональную точку.* Через гомотетирование открезка на $[0, 2]$, содержащего $\sqrt{2}$ □

**Def 7.** *$x \in \mathbb{R}$ называется изолированой точкой множества $E$, если $\exists\varepsilon > 0$ : $U_\varepsilon(x) \cap E = \{x\}$.*

**Def 8.** *$x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $E$, елси $\forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow (U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing$*

**St.** *$x$ - точка прикосновения $\Leftrightarrow$ $x$ - изолированая точка $\vee$ $x$ - предельная точка*

$\Leftarrow$. Очевидно $\square$

$\Rightarrow$. Пусть x - точка прикосновения $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$, либо $\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E$ содержит не только {x}, но тогда она предельная. $\square$

**Th** (Критерий точки прикосновения)**.** *Пусть $E \neq \varnothing$ - множество. Точка $x$ является точкой прикосновения $E \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E : \lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

**St.** *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ -числовая последовательность, тогда $cl\,\{x_n\} = \{x_n\} \cup PL(\{x_n\})$.*

*Доказательство.* Пусть $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E : \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x = x_N \in U_\varepsilon(x) \cap E$

Пусть обратно, x - т. прикосновение множества E. $\forall k \in \mathbb{N}$ по определению $U_\varepsilon(x) \cup E \neq \varnothing, \varepsilon = \frac{1}{k}$ $\square$

**Def 9.** *Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется компактным, елси из $\forall$ последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т.ч. $\exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in K$.*

**Th** (Критерий компактности)**.** *Множество $K \subset \mathbb{R}$ - компактно $\Leftrightarrow$ оно ограничено и замкнуто.*

$\Leftarrow$ . Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, покажем, что $\exists$ сходящаяся в К подпоследовательнос.

Т.к. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена, то по т. Б-В $\exists$ подоследовательность, которая сходится куда-то

Пусть $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$, но тогда $x^*$ - частичный предел $R$, а $k$ - замкнуто $\Rightarrow x^* \in K$ $\square$

$\Rightarrow$. Предположим, что K - неограничено $\Rightarrow \quad \forall j \in N \quad \exists x_j \in K : |x_j| > j \Rightarrow$ $\exists \{x_j\} \subset K \lim_{j\to\infty} |x_j| = +\infty$ - противоречие $\Rightarrow$ x $=$ ограничена $\square$

**Def 10.** *Система множеств* $\{U_\alpha\}, \alpha \in I$ *называется покрытием множества* $E$*, если* $E \subset \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$

**Def 11.** *Система* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *называется подпокрытием, если* $J \subset I$ *и* $E \subset \cup_{p \in J} U_\beta$

Из $\forall$ открытого покрытия K можно выделиь конечное подпокрытие.

**Ex 1.** *Доказать, что если из* $\forall$ *любого открытого множества можно выделить конечное подпокрытие, то это множество компактно.*