Опр. Пусть A — огр. сверху множество. Число $M \in \mathbb{R}$ — супремум A, и записывается $M = \sup A$, если:

1) M — верхняя грань
2) $\forall M' < M \ \exists a_{M'} \in A: M' < a$

Опр. Если A — неогр. сверху множество, то

$\sup A := +\infty$

Теорема о существовании и единственности супремума.

$\forall$ непустого $A \subset \mathbb{R}$ супремум A существует и единственен.

В случае неогр. сверху A, сущ. и ед. $\sup A$ следует из определения.

Рассмотрим огр. сверху A:

$\Rightarrow \exists$ хотя бы одна верхняя грань.

Пусть $B = \{ M \in \mathbb{R} : M \text{ — верхняя грань } A \}$
$B \neq \varnothing$

Кроме того A расположено левее B.

В силу аксиомы непрерывности
$\exists c \in \mathbb{R}: a \leq c \leq M \quad \forall a \in A$ и $\forall M \in B$

Покажем, что $c = \sup A$.
c — верхняя грань, т.к. $a \leq c$, $\forall a \in A$

$\Rightarrow$ 1 пункт опр. супремума проверен.

Предположим, что $\exists c' < c$: c' — верхняя грань
Тогда $c' \in B$, но c было выбрано так, что
$c \leq M$, $\forall M \in B$, в частности для $M = c'$.
Пришли к противоречию.

$\Rightarrow \forall c' < c \hookrightarrow c' \notin B$

$\Leftrightarrow \neg (c' \in B) \Leftrightarrow \neg (a \leq c', \forall a \in A)$

$\Leftrightarrow \exists a_{c'} \in A: a_{c'} > c'$

Но т.к. $a_{c'} \in A$, то $a_{c'} \leq c$

Итого мы показали, что $\forall c' < c \ \exists a_{c'} \in A: c' < a_{c'} \leq c$

$\Rightarrow$ мы доказали, что $c = \sup A$.

Единственность: Предположим, что $\exists M_1 = \sup A$, $\exists M_2 = \sup A$

Пусть $M_1 > M_2$

Тогда по 2 пункту опр. супремума для M_1 $\exists a_{M_2} \in A: a_{M_2} > M_2$

$\Downarrow$

противоречит тому, что M_2 — верхняя грань

Противоречие $\rightarrow$ ч.т.д.

Утв. $M \in \overline{\mathbb{R}} = \sup A, \quad A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a \le M, \ \forall a \in A \\ \forall M' < M \ \exists a_{M'} \in A : M' < a_{M'} \le M \end{cases}$$

Действительно, для огр. A это просто определение $\sup$.

Пусть A — неогр.. Тогда $+\infty = \sup A$. Система выполняется при замене M на $+\infty$.

Наоборот, если система выполнена при $M = +\infty$, тогда A — неогр. сверху, и тогда $+\infty = \sup A$

Лемма Архимеда.

М-во натуральных чисел неогр. сверху

$\forall M' \in \mathbb{R} \quad \exists N_{M'} \in \mathbb{N} : N_{M'} > M'$.

$\square$ Предположим противное: $\mathbb{N}$ – огр. сверху

$\Downarrow$

$\exists$ верхняя грань

$\exists M = \sup \mathbb{N} < +\infty$

$\Longrightarrow \quad M' = M - 1 \hookrightarrow \exists N_{M'} \in \mathbb{N} : N_{M'} > M - 1 \Rightarrow N_{M'} + 1 > M$

Противоречие

Опр. $m \in \mathbb{R}$ – инфимум огр. снизу A, если

$$\begin{cases} m \le a, & \forall a \in A \\ \forall m' > m & \exists\, a_{m'} \in A : m \le a_{m'} < m' \end{cases}$$

$m = \inf A$

Опр. Если A – неогр. снизу, то

$\inf A = -\infty$

Теорема $\forall A \subset \mathbb{R}$:

$\exists \inf A$, $\inf A$ единственен

Утв. $m \in \overline{\mathbb{R}}$; $m = \inf A$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} m \le a, & \forall a \in A \\ \forall m' > m\ \exists\, a_{m'} \in A : & m \le a_{m'} < m' \end{cases}$$

Опр. Отображение из $\mathbb{N}$ в м-во всех отрезков на числовой прямой $\mathbb{R}$ — последовательность отрезков. $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$

Опр. Будем говорить, что $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ —

— посл. вложенных отрезков, если

$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \ \forall n \in \mathbb{N}$

Лемма Кантора или принцип вложенных отрезков

$\forall$ посл. влож. отр. $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\exists\ x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

$$\Updownarrow$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$$

$\square$ Справедливы неравенства:

1) $-\infty < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n < +\infty, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall m, n \in \mathbb{N} \hookrightarrow -\infty < a_m \leq b_n < +\infty$

$m \geq n$

$\Downarrow$

по индукции $b_m \leq b_n$

$\Downarrow$

$a_m \leq b_m \leq b_n$

если $m < n$, то $a_m \leq a_n \leq b_n$

$A := \{a_1, a_2, \dots a_n, \dots\}$

$B := \{b_1, b_2, \dots b_n, \dots\}$

$a_m \leq b_n, \ \forall m, n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

A левее B

$\Downarrow$

по акс. непрерывности $\exists\ c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_m, \ \forall n, m \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$a_n \leq c \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$c \in [a_n, b_n], \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

$\blacksquare$

Упр. Док. лемму Кантора используя вместо акс. непрерывности $\exists$ inf и sup.

Опр Последовательность влож. отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется стягивающейся, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ отрезок $[a_{m_n}, b_{m_n}]$, т.ч. его длина $< \frac{1}{n}$

Теорема Стяг. посл. влож. отрезков имеет единственную общую точку.

$$\exists!\ x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

$\square$ $\exists x$ доказано (лемма Кантора).

Предположим, что $\exists x_1, x_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$
$x_1 \neq x_2$

Т.к. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| > 0$

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{M}$$

По лемме Архимеда $\exists N > M$, $N \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{N} < \frac{1}{M} = |x_1 - x_2|$$

$\Downarrow$

т.к. система отрезков стягивающаяся,
$\exists [a_{m_N}, b_{m_N}]$, длина которого $< \frac{1}{N}$

Но по предположению x_1, x_2 всем отрезкам, в частности $x_1, x_2 \in [a_{m_N}, b_{m_N}]$

$\Downarrow$

$$|x_1 - x_2| < \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{M} < \frac{1}{N}$$

Противоречие $\blacksquare$

Теорема

Следующие утв. эквивалентны:

1) аксиома непрерывности
2) $\exists$ inf и sup у $\forall$ непустого множества
3) лемма Кантора + лемма Архимеда

Замечание.

Лемма Кантора может не работать для интервалов.

Пример. $a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(a_n, b_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \varnothing$$

$\square$. предположим $\exists\, x \geq 0 : x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right)$

$$\Downarrow$$

$$0 < x < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$n < \frac{1}{x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

противоречие с леммой Архимеда