Введение в математический анализ

Тюленев Александр Иванович

(Конспектировал Иван-Чай)

12 лекция

Содержание

1 Предел композиции

Th (Предел композиции 2). *Пусть* $f : U_{\sigma_0} \to \mathbb{R}, y : \dot{U}_{\delta_0}(x_0) \to U_{\sigma_0}(y_0)$. *Пусть* f *непрерывна в* y_0 *и* $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = y_0$ *Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_0 y(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(y(x)) = f(y_0)$

Доказательство. .

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\sigma(\varepsilon) \in (0, \delta_0) \quad \forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \hookrightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon \\ \forall\sigma > 0 \quad \exists\delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0) \quad \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |y(x) - y_0| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\widetilde{\delta} = \delta(\sigma(\varepsilon)) \in (0, \delta_0).$$

$$\forall x \in \dot{U}.$$

Там дальше было надо дотехать будет □

2 Теорема об обратной функции

Lem 1. $f : X \to Y$ *- обратима на* $X \Leftrightarrow f$ *- сюръекция* $\wedge f$ *- инъекция.*

$\Leftarrow$. Пусть f - инъекция и сюръекция.
Рассмотрим $y \in Y$, т.к. f - сюрьекция.
Но т.к. f - инъекция x - единственный $\Rightarrow f^{-1}(y) = x(\text{единств})\ \exists x \in X : f(x) = y$ □

$\Rightarrow$. Т.к. f обратимо, то $\exists f^{-1} : Y \to X \Rightarrow f-$ сюрьекция.

$$\forall y \in Y \quad \exists x = f^{-1}(y) : f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Покажем, что f - инъекция. Неуспел затехать, сори $\square$

Lem 2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing$.*
Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ - строго монотонна
Тогда f - обратима и f^{-1} строго возрастает, если f возрастает, иначе убывает, если f возрастает, иначе убывает.

Доказательство. В силу предыдущей доказаной леммы достаточно доказать, что $f : X \to f(x)$ - инъективно, но это следует из строгой монотонности.

Рассморим случай строгого возрастания на X, т.к. случай убывания аналогичен. $f^{-1} : f(x) \to X$ сущ в силу инъективности f. Покажем, что она строго возрастает.

$y_1, y_2 \in f(x)$ Пусть $y_2 > y_1$ покажем, что $f^{-1}(y_2) > f^{-1}(y_1)$. Предположим противное. Т.к. f строго возрастает $y_2 = f(f^{-1}(y_2)) \leq f(f^{-1}(y_1)) = y_1 \Rightarrow y_2 < y_1$ $\square$

Th (Теорема об обратной функции)**.** *Пусть $f \in C([a,b])$ - строго монотонна на $[a,b]$. Тогда $\exists f^{-1} \in C([m,M])$ имеет характер монотонности тот же, что и f. $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$*

Доказательство. Тот факт, что $\exists f^{-1}$ имеет тот же характер монотонности, что и f вытекает из предыдущей леммы. Осталось показать непрерывность f^{-1} в любой точке $y \in [m, M]$.

Рассмотрим случай $y_0 \in (m, M)$

Т.к. $y_0 \in (m, M)$, то $x_0 \in (a, b)$

Фиксируем $\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \in (a, b)$

Рассмотрим отрезок $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subset (a, b)$. f - строго возрастает и непрерывно $\Rightarrow f$ - осуществляет биекцию $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ на $[f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$. $\delta(\varepsilon) =$

$min\{f(x_0)-f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)\}$. Рассмотрим интервал $(f(x_0)-\delta(\varepsilon), f(x_0)+\delta(\varepsilon)) \subset (f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon))$

$$(f(x_0)-\delta(\varepsilon), f(x_0)+\delta(\varepsilon)) \subset (f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)).$$

$$\Downarrow$$

$$\forall y \in (f(x_0)-\delta(\varepsilon), f(x_0)+\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(x_0)) = U_\varepsilon(f^{-1}(y_0)).$$

$\square$

Cl .1. *Пусть $f \in C((a,b))$ и строго монотонна. Тогда $\exists f^{-1} \in C((m,M))$ и строго монотонна с тем же характером, что и f*

$$m = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$$M = \sup_{x\in(a,b)} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Т.к. f - строго монотонна, то $\exists f^{-1}$ имеющая тот же характер монотонности. Покажем, что $f((a,b)) = (m,M)$

В силу обобщения о промежуточном значении $(m,M) \subset f((a,b))$, но m и M не принимаются.

Действительно, если $\exists x^* \in (a,b) : M = f(x^*) \Rightarrow \exists x^{**} \in (x^*,b) : f(x^{**}) > f(x^*) = M$ - противоречие.

Отсюда $f((a,b)) \subset (m,M) \Rightarrow f((a,b)) = (m,M)$. Далее непрерывность доказывается как в предыдущей теореме.

3 Непрерывность элементарных функций и первый замечательный предел

Def 1. *Длина кривой - супремум множества длин всех вписаных в нее ломаных, но мы этого пока не знаем.*

Lem 3. $\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \forall \pi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство. Ну там кружочки, треугольнички порисуйте и методом площадей, я не в силах это затехать. □

Th (Первый замечательный предел)**.**

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Доказательство. В силу принципа локализации рассмотрим на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$

Для x > 0:

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Для в силу четности: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$ □

Th 1. $\sin x, \cos x$ - *непрерывны.*

Доказательство. Докажем для $\sin x$, т.к. $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = \left|2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}\right| \le 2 \left|\sin \frac{x_1 - x_2}{2}\right| \le 2 \frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2|.$$

□