Московский физико-технический институт
Высшая школа программной инженерии

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

I / III СЕМЕСТР

Лектор: *Анастасия Викторовна Зухба*

h\nu

Автор: *Ширяев П.Г.*

Шаблон взят у *Клуб Теха Лекций*

осень 2023

Содержание

1 Основы теории графов

1.1 Основные определения

Определение 1.1. Граф G - пара множеств (V,E).
V - множество, элементы которого называют *вершинами*.
E - множество пар вершин.
Если пары упорядочены ($(v,v') \neq (v',v)$), то граф называют *ориентированным (орграф)*.
Если нет ($(v,v') = (v',v)$) - неориентированным (граф)

Замечание. В нашем курсе множества V,E конечные.

Пример. Ориентированные графы:

1. Односторонняя дорога
2. Расписание на день (встал $\rightarrow$ умылся $\rightarrow$ поел $\rightarrow$ ...)

Определение 1.2. Вершина и ребро *инцидентны*, если вершина является хотя бы *одним* из элементов пары.

Определение 1.3. *Петлёй* называется ребро вида (v,v) - ребро, концы которого совпадают.
Кратными рёбрами называют рёбра, соответствующие одной и той же паре (v,v')

Замечание. Отсюда, если не оговорено дальше, петель и рёбер **НЕ БЫВАЕТ** - граф *простой.*

Определение 1.4. Для неориентированного графа, *степень вершины* - количество рёбер, инцидентных ему: $\deg(v) = |\{(v,v') : \ (v,v') \in E\}|$

Определение 1.5. Смежные рёбра - рёбра, соединённые вершиной.
Смежные вершины - вершины, соединённые ребром.

Теорема 1.1. $\sum\limits_{v \in V} deg(v) = 2|E|$
Кратные рёбра не "сломают"теорему. Более того, если учитывать петли 2 раза для одной вершины, то и петли не сломают эту теорему.

Определение 1.6. Матрица смежности A - матрица $n \times n$, где

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, (i,j) \in E \\ 0, (i,j) \notin E \end{cases}$$

Определение 1.7. Матрица инцидентности - матрица, где строка описывает вершину, столбец - ребро.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, i \in j \\ 0, i \notin j \end{cases}$$

Пример. Задача, для которой может пригодитьсыя такая матрица - расписание игр.

Замечание. Ещё граф можно задать списком смежности, таблицей в 2 столбца и |V| строк: на i - той строке в 1 столбце пишем i, во втором - $\{v : \ (i,v) \in E\}$

Определение 1.8. *Маршрут* - конечная последовательность вершин $v_1,v_2 \cdots v_k$, такая что $\forall i \in \overline{1,k-1}: \ (v_i,v_{i+1}) \in E$
Цепь - маршрут, все рёбра которого различны.
Путь - то же самое, что и цепь
Простой путь - путь, все вершины которого (кроме, возможно, начала и конца) различны.
Замкнутый маршрут (путь, простой путь) - маршрут (путь, простой путь), начало и конец которого совпадают.
Цикл - замкнутый путь. Простой цикл - замкнутый простой путь.

Определение 1.9. (в неорграфе) Две вершины v,u называют *связанными*, если $\exists$ маршрут с началом в v, концом в u. $(v \to u)$

Определение 1.10. Длиной маршрута (пути, цикла, простого цилка) называют количество рёбер в нём, с учётом возможных повторных вхождений.

Утверждение 1.1. *Если $\exists$ маршрут $v \to u$ конечной длины, то существует и путь $v \to u$, и простой путь $v \to u$.*

Доказательство. Рассмотрим маршрут $v \to u: \ (v,v_1,\cdots,v_m,u)$ Предположим, все вершины в маршруте различны (кроме, возможно, v и u). Тогда этот маршрут является простым путём: повторение ребра влечёт повторение вершины.
Теперь предположим, что маршрут содержит повторение какой-то вершины
$v_i: \ v,v_1,\cdots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\cdots,v_{j-1},v_j = v_i,v_{j+1},\cdots,u$. Заметим, что $len(v_i \to v_j) \neq 0, len(v \to v_i) + len(v_j \to u) \neq 0$ Тогда рассмотрим последовательность $v \to v_i \bigcup v_j \to u$. У нового маршрута длина $\neq 0$, причём она стала меньше хотя бы на 2.
Повторим то же самое с новым маршрутом. Мы будем это делать конечное число раз (длина маршрута конечная, каждый шаг уменьшаем хотя бы на 2), значит рано или поздно придём к тому, что у нас не будет повторений. □

Определение 1.11. Связный граф - граф, у которого $\forall u,v \in V \ \exists$ путь $u \to v$

Определение 1.12. Компонента связности - максимальный по включению связный подграф,

1.2 Дерево

Определение 1.13. Дерево - связный граф без циклов.

Замечание. В некоторых источниках, где нет ограничения на повторение вершин/рёбер, определение может звучать так: *Дерево - связный граф без циклов длины >2*

Определение 1.14. Дерево - граф, у которого между любыми двумя вершинами $\exists!$ путь.

Определение 1.15. Дерево - связный граф, у которого $|E| = |V| - 1$

Определение 1.16. Дерево - граф без циклов, в котором $|E| = |V| - 1$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: От противного: наличие двух путей влечёт наличие цикла
$2 \Rightarrow 3$: Индукция по количеству вершин: для 2 верно. Если $|V| \leq k$ - удалим ребро, посмотрим на компоненты связности.
$3 \Rightarrow 4$: От противного: пусть 3 выполняется, то и 4. Если есть цикл, то есть и простой цикл. Рассмотрим простой цикл $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_1$ Возьмём любую другую вершину u_1. У неё есть кратчайший путь к циклу. Возьмём остальные в цикле $u_2, \ldots$. Будем рассмтатривать первые рёбра. Они все должны быть различны.

Лемма 1.1. *$\forall u,t$ не из цикла рассмотрим кратчайший путь к v_1. Тогда первые рёбра таких путей попарно различны.*

Доказательство. От противного: пусть есть какое-то ребро, которое входит 2 раза. То есть по нему мы прошли и $v_1 \to v_2$, и $v_2 \to v_1$ Путь длина кратчайшего пути из 1 и 2 вершин - n_1,n_2 соответственно. Тогда $1 + n_2 < n_1, 1 + n_1 < n_2$ - противоречие □

Но тогда оценка снизу на количество рёбер снизу $n + (|V| - n) = |V|$ - противоречие.

$4 \Rightarrow 1$: Пусть у графа k компонент связноти. Каждая из компонент связности - дерево (циклов нет). Для каждой выполняется $|E_i| = |V_i| - 1$. Если мы всё сложим, то получим $|E| = |V| - k \Rightarrow k = 1$ □

1.3 Эйлеров и Гамильтонов путь и цикл.

Определение 1.17. Эйлеров путь - путь, проходящий по каждому ребру ровно по одному разу.

Определение 1.18. Эйлеров цикл - замкнутый Эйлеров путь

Определение 1.19. Гамильтонов путь - путь, проходящий через каждую вершину по одному разу

Определение 1.20. Гамильтонов цикл - замкнутый Гамильтонов путь.

Теорема 1.2. *В связном графе существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин чётные*

Доказательство. $\Rightarrow$ Выпишем Эйлеров цикл: для каждой вершины (кроме начала он же конец) она встречается рядом с 2 своими рёбрами (входит в вершину, и исходит из). Значит, если у нас k рёбер, то у любой вершины степень 2k. Начальная же вершина тоже встречается чётное число раз
$\Leftarrow$ Индукция по количеству циклов. Берём вершину графа и какую-нибудь вершину. Выпишем цепочку смежных рёбер, пока не встретим повторение. Таким образом мы нашли простой цикл. А почему мы найдём цикл? Каждый раз когда мы проходим через вершину, мы уменьшаем её степень на 2 (входим и выходим). Значит, если мы смогли войти в вершину (не начальную), то сможем и выйти.
Выкинув этот цикл из графа, вновь получим граф, степени вершин которого четны. Таким образом, каждый граф из условия задачи можно представить в виде объединения реберно непересекающихся циклов. Для каждого цикла существует другой из этого семейства, который с ним пересекается (граф связный). Два реберно непересекающихся цикла, имеющих общую вершину, всегда объединяются в один: достаточно стартовать с общей вершины, пройти сначала один цикл, а затем другой. Таким образом, мы объединим все найденные циклы в один и получим эйлеров цикл. □

Теорема 1.3. *В связном графе существует Эйлеров путь тогда и только тогда, когда степени всех вершин, кроме, может быть двух, чётны.*

1.4 Двудольные графы

Определение 1.21. Граф G ($L\bigcup R$) называется двудольным, если $\exists$ разбиение вершин $V = L\bigcup R$, $L\bigcap R = \varnothing$: $\forall (u,v) \in E$: $u \in L, v \in R$

Определение 1.22. L,R называют *долями*

Теорема 1.4. *Граф двудольный* $\Leftrightarrow$ *в нём нет циклов нечётной длины.*

Доказательство. $\Rightarrow$: очевидно - любой цикл начинается и заканчивается в той же доле
$\Leftarrow$: Просто выберем вершину и красим в другой цвет соседние вершины, Если какая то вершина оказалась покрашена в 2 цвета - мы нашли и чётный, и нечётный пути, а значит нашли нечётный цикл □

Определение 1.23. Паросочетание - подграф, который является двудольным графом, степени вершин которого не больше 1.

Теорема 1.5. *(Холл) В двудольном графе* $\exists$ *паросочетание покрывающее все вершины* L $\Leftrightarrow$ $\forall V_L \subseteq L$ *в совокупности* $\geq |V_L|$ *соседей в* R.

Доказательство. $\exists$ такое паросочетание $\Rightarrow$ $\forall V_L \subseteq L$ $\exists$ хотя бы V_L соседей.
И в другую сторону: индукция по $|L|$. $|L| = 1$ очевидно.
Пусть верно $\forall |L| < n$. Покажем для $|L| = n$. Есть два варианта:

- $\exists k$, $\exists V_L \subset L$: $|V_L| = k$, и у V_L ровно $|V_L|$ соседей. Рассмотрим любое подмножество $U \subseteq L \backslash V_L$. У $V_L \cup U$ $\geq |V_L \cup U|$ соседей в правой доле, а значит у U не менее U соседей. А далее применим предположение индукции.

- Такого k не найдется, то есть $\forall V_L \subset L$ не менее $|V_L| + 1$ соседей в правой доле. Возьмем произвольное ребро, добавим его в паросочетание, и удалим инцедентные ему вершины в обеих долях. У оставшегося графа $|L|$ уменьшился на 1, причем $\forall V_L \subset L$ есть не менее $|V_L| + 1$ вершин в правой доле. Применим предположение индукции.

□

1.5 Орграфы

Напоминание. Если пары упорядочены $((v,v') \neq (v',v))$, то граф называют *ориентированным (орграф)*. Если нет $((v,v') = (v',v))$ - неориентированным (граф)

Замечание. Если есть рёбра (u,v) и (v,u), то они кратными не считаются.

Определение 1.24. В орграфе отдельно определены входящая и исходящая степени вершин, как количество входящих и исходящих рёбер соответственно.

Утверждение 1.2. *В орграфе сумма входящих степеней = сумма исходящих степеней.*

Определение 1.25. В орграфе для определения пути требуется не только смежность, но и направление.

Определение 1.26. Вершины u и v сильно связны, если $\exists$ пути $u \to v$, $v \to u$

Замечание. Сильная связность влечёт цикл.

Определение 1.27. Бинарное отношение $\sim$ называют отношением эквивалентности, если выполняются следующие свойства:

1. $a \sim a$ - рефлексивность
2. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ - симметричность
3. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ - транзитивность

Определение 1.28. Бинарное отношение R называется строгим частичным порядком, если выполняются следующие свойства:

1. $R(a,a)$ всегда ложно - антирефлексивность
2. Если $R(a,b)$ и $R(b,c)$, то $R(a,c)$ - транзитивность

Замечание. Из этих свойств следует антисимметричность: $R(a,b), R(b,a) \Rightarrow R(a,a)$ - противоречие.
Для наглядности вместо R используем обозначение $<$

Определение 1.29. Бинарное отношение R называется нестрогим частичным порядком и обозначается $\leq$, если выполняются следующие свойства:

1. $a \leq a$ всегда истина - рефлексивность
2. Если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$ - транзитивность
3. $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow \ a = b$ - антисимметричность

Определение 1.30. Если любые два элемента порядка сравнимы, такой порядок называют линейным.

Определение 1.31. Порядки P,Q изоморфны, если $\exists \phi$ - биекция: $x \leq y \Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y) \ \forall x,y$

Определение 1.32. Диаграмма Ха́ссе - способ изображения частичного порядка на множестве с помощью орграфа, в котором элементы представлены вершинами, а их отношения - рёбрами.
В диаграмме Хассе не проводится ребро, если его можно восстановить по транзитивности. Строже говоря, мы не проводим ребро $x \leq y$, если $\exists z : x \leq y \leq z$
Также, в диаграмме Хассе принято "большие" элементы изображать "выше".

Теорема 1.6. *Следующие свойства ориентированного графа равносильны:*

1. *Каждая сильно связная компонента состоит из одной вершины*
2. *В графе нет циклов*
3. *Вершины графа можно пронумеровать натуральными числами таким образом, чтобы все рёбра вели из вершины с меньшим номером в вершину с большим. (можно выполнить топологическую сортировку)*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2 Контрапозиция: если в графе есть цикл, то есть компонента сильной связности размером хотя бы 2.
2 $\Rightarrow$ 3 В ориентированном графе без циклов есть вершина, из которой не выходит ни одного ребра. Выберем её, а затем повторим процесс по индукции.
3 $\Rightarrow$ 1 Контрапозиция: возьмём a,b из 1 КСС. С одной стороны число на a должно быть меньше, чем b, т.к. есть путь $a \to b$ Но с другой, число номер a должно быть больше (аналогично) - противоречие $\square$

2 Основы комбинаторики

Напоминание. (Правило суммы) Пусть есть два множества: $A,B : A \cap B = \varnothing, |A| = m, |B| = n$. Тогда выбрать один элемент из этих множеств можно $m + n$ способами

Напоминание. (Правило произведения) Пусть есть два множества: $A,B : A \cap B = \varnothing, |A| = m, |B| = n$. Тогда выбрать один элемент из A, другой из B можно $m \cdot n$ способами

Пример. Сколько есть 5значных чисел в 7-ричной системе счисления (могут быть нули)?
Ответ: 7^5

Напоминание. Принцип Дирихле: Если n кроликов сидят в $m < n$ клетках, то $\exists$ клетка, в которой > 1 кролика.

Определение 2.1. Сочетание (размещение) - способы выбора элементов из множеств, причём порядок неважен (важен в случае размещения) .
Выборка с возвращениями - то же самое, что выборка с повторениями.

Определение 2.2. k-размещение n-элементного множества без повторений обозначается $A_n^k = \frac{n!}{k!}$

Определение 2.3. k-размещение n-элементного множества с повторениями обозначается $\overline{A_n^k} = n^k$

Определение 2.4. k-сочетание n-элементного множества без повторений обозначается $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Определение 2.5. k-сочетание n-элементного множества с повторениями обозначается $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$

Определение 2.6. n-размещение n-элементного множества без повторений называется *перестановкой*, и равно $n! = n(n-1)\dots 1$
Причём $0! = 1$

Способы основных приёмов в комбинаторике:

1. Правила суммы и произведения.
2. Если при подсчёте количества чего-либо, каждый элемент был учтён равное количество раз, то для получения ответа достаточно просто разделить на это число
3. Биекция (кодирование).

Утверждение 2.1. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Доказательство. n элементов поставим "подряд" - $n!$ способов. Первые k из них выбраны, внутри порядок не важен - делим на $k!$ способов
Порядок последних n-k нам неважен, поэтому делим на $(n-k)!$ способов. □

Теорема 2.1. $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$

Доказательство. Закодируем каждое такое сочетание. Пусть единицы - наши элементы - их k штук, а нули - наши "перегородки" - их n-1 (делим на n групп) Суммарно мест - $n + k - 1$ - C_{n+k-1}^{k} Каждая такая расстановка взаимно однозначно задаёт k-сочетание n-элементного множества с повторениями: покажем как.
Кодируем позицию 0 и 1: запишем 1 подряд такое кол-во раз, которое встречается в выборке первый элемент, потом запишем 0, и т.д.
Декодируем из 0 и 1: добавляем в первую группу пока единицы. Как только встретили 0 - переходим в следующую группу. □

Пример. Есть 300 одинаковых белых шариков, 3 одинаковых ящика. Сколькими способами можно разложить шарики?

Решение. Есть три варианта

1. Во всех трёх одинаковое количество шариков - 1 способ, обозначим S_1

2. В двух одинаковое, в третьем - нет. 150 (кол-во способов для одного из ящиков, должно быть чётно, но 100 пропускаем), обозначим за S_2

3. Пусть все ящики различны. (S_3). Тогда всего способов разбить будет C_{302}^{2} - 2 перегородки и 300 шариков.
   Но с другой стороны, это S_1 - есть одна ситуация, когда во всех ящиках повторяется, $+3S_2$ - есть 3 варианта для коробки с уникальным кол-вом шаров $+3!S_3$ - есть 3! вариантов уникальных положений коробки.
   Таким образом, $C_{302}^{2} = S_1 + 3S_2 + 6S_3$, откуда находим S_3, а отсюда и ответ. равный $S_1 + S_2 + S_3$