Введение в математический анализ

Тюленев Александр Иванович
(Конспектировал Иван-Чай)

22.09.23

Содержание

1 Топология числовой прямой

Def 1. *Пусть E - непустое множество, тогда x называется точкой прикосновения E, если $\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$.*

Def 2. *Замыканием множества E называется множество всех точек прикосновения E и обозначается clE.*

Def 3. *Множество называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием.*

$E \subset clE$.

По опеределнию $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ считаются замкнутыми.

Пример $a < b$, тогда $[a, b]$ - замкнутое множество

Доказательство. Покажем, что $\forall c[a, b]$ не является точкой прикосновения.

$$\varepsilon* = mn\left\{\frac{|a-b|}{2}, \frac{|a-c|}{2}\right\}.$$

$\square$

Def 4. *Пусть $G \subset \mathbb{R}$ - множестов. Будем оворить, что x - внутреняя точка G, если $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G$*

Def 5. *Внутренностью мнжества G называется множество всех его внутрених точек и обозначается $intG$*

Def 6. *Множество $G_1 \subset \mathbb{R}$ называется открытым, если оно совпадает со своей внутренностью.*

$\varnothing$ и $\mathbb{R}$ - открыты по определнию.

$intG \subset G$

Пример открытого множества: (a, b) - открытое множество, $a < b$

Доказательство.

$$\varepsilon = mn\left\{\frac{|x-a|}{2}, \frac{|b-x|}{2}\right\}$$

$\square$

Полуинтервал $(a, b]$ не является ни открытым ни замкнутым множеством.

Доказательство.

$$aint(a, b]b \in int(a, b].$$

$\square$

Пример $cl\mathbb{Q} = \mathbb{R}(1)$, $int\mathbb{Q} = \varnothing(2)$.

(1). В любом интервале найдется рациональная точка. $\square$

(2). $\forall(a, b)$ найдется иррациональная точка. $\square$

Докажем, что любой интервал содержит рациональную

$x =$ $\square$

Докажем, что любой интервал содержит иррациональну
Через гомотетирование открезка на $[0,2]$, содержащего $\sqrt{2}$ $\square$

Def 7. *$x \in \mathbb{R}$ называется изолированой точкой множества E, если $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap E = \{x\}$.*

Def 8. *$x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества E, елси $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow (U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing$*

St. *x - точка прикосновения $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \\ x - \end{array}\right.$*

$\Leftarrow$. Очевидно $\square$

$\Rightarrow$. Пусть x - точка прикосновения $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$, либо $\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E$ содержит не только {x}, но тогда она предельная. $\square$

Th (Критерий точки прикосновения). *Пусть $E \neq \varnothing$ - множество. Точка x является точкой прикосновения $E \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E : \lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

St. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *-числовая последовательность, тогда* $cl\,\{x_n\} = \{x_n\} \cup PL(\{x_n\})$.

Доказательство. Пусть $\exists\,\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E : \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists x = x_N \in U_\varepsilon(x) \cap E$

Пусть обратно, x - т. прикосновение множества E. $\forall k \in \mathbb{N}$ по определению $U_\varepsilon(x) \cup E \neq \varnothing, \varepsilon = \frac{1}{k}$ □

Def 9. *Множество* $K \subset \mathbb{R}$ *называется компактным, елси из* $\forall$ *последовательность точек* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т.ч.* $\exists\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in K$.

Th (Критерий компактности)**.** *Множество* $K \subset \mathbb{R}$ *- компактно* $\Leftrightarrow$ *оно ограничено и замкнуто.*

$\Leftarrow$. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, покажем, что $\exists$ сходящаяся в K подпоследовательнось.

Т.к. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена, то по т. Б-В $\exists$ подпоследовательность, которая сходится куда-то

Пусть $x* = \lim_{n\to\infty} x_n$, yj njulf ч* - частичный предел R, а k - замкнуто $\Rightarrow x* \in K$ $\square$

$\Rightarrow$. Пусть k - компактна, докажем, что она ограничена и замкнута.

Предположим, что K - неограничена $\Rightarrow \quad \forall j \in N \quad \exists x_j \in K : |x_j| > j \Rightarrow \exists \{x_j\} \subset K \lim_{j\to\infty} |x_j| = +\infty$ - противоречие $\Rightarrow$ - л $=$ огр. $\square$

Def 10. *Система множеств* $\{U_\alpha\}, \alpha \in I$ *называется покрытием множества* E*, если* $E \subset \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$

Def 11. *Система* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *называется подпокрытием, если* $J \subset I$ *и* $E \subset \cup_{p\in J} U_\beta$

Из $\forall$ открытого покрытия K можно выделиь конечное подпокрытие.

Ex 1. *Доказать, что если из* $\forall$ *любого открытого множества можно выделить конечное подпокрытие, то это множество компактно.*