Базис. Координаты вектора в базисе

Определение	*Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой. *Базисом на плоскости* называется любая *упорядоченная* пара *линейно независимых* векторов, принадлежащих этой плоскости. *Базисом в пространстве* называется любая *упорядоченная* тройка *линейно независимых* векторов.
Определение	Базис называется *ортогональным*, если образующие его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).
Определение	Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его векторы имеют единичную длину.

Теорема **Пусть дан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, тогда любой вектор $\vec{x}$ в пространстве может быть представлен и притом единственным образом в виде**

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 ,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – некоторые числа.

Определение Числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 – коэффициенты в *разложении* $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ – называются *координатами* (или *компонентами*) вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, которые принято записывать в виде столбца $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$, называемым *координатным столбцом* или *координатным представлением* вектора.

Действия с векторами в координатном представлении

Правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.

Имеет место

Теорема **В координатном представлении операции с векторами выполняются следующим образом:**

1°. ***Сравнение векторов*** **Два вектора**

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

и $$\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$$

равны тогда и только тогда, когда равны их координатные представления:

$$\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \vec{y} \right\|_g \quad \textbf{или} \quad \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 = \eta_3 \end{cases}.$$

2°. ***Сложение векторов***

Координатное представление суммы двух векторов

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

и $$\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$$

равно сумме координатных представлений слагаемых

$$\left\| \vec{x} + \vec{y} \right\|_g = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g .$$

3°. ***Умножение векторов на число***

Координатное представление произведения числа λ на вектор

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

равно произведению числа λ на координатное представление вектора $\vec{x}$:

$$\left\| \lambda \vec{x} \right\|_g = \lambda \left\| \vec{x} \right\|_g .$$

Доказательство.

Рассмотрим правило сложения векторов в координатной форме.

$$\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|_g=\left\|(\xi_1\vec{g}_1+\xi_2\vec{g}_2+\xi_3\vec{g}_3)+(\eta_1\vec{g}_1+\eta_2\vec{g}_2+\eta_3\vec{g}_3)\right\|_g=$$

$$=\left\|(\xi_1+\eta_1)\vec{g}_1+(\xi_2+\eta_2)\vec{g}_2+(\xi_3+\eta_3)\vec{g}_3\right\|_g=$$

$$=\begin{Vmatrix}\xi_1+\eta_1\\ \xi_2+\eta_2\\ \xi_3+\eta_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix}=\left\|\vec{x}\right\|_g+\left\|\vec{y}\right\|_g.$$

Теорема доказана.

Следствие **Координатное представление линейной комбинации $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$ является той же линейной комбинацией координатных представлений векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:**

$$\begin{Vmatrix}\lambda\xi_1+\mu\eta_1\\ \lambda\xi_2+\mu\eta_2\\ \lambda\xi_3+\mu\eta_3\end{Vmatrix}=\lambda\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}+\mu\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в координатном представлении записываются условия линейной зависимости и независимости векторов.

Теорема **Для того чтобы два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ на плоскости были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координатные представления $\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$ и $\left\| \vec{y} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\|$ удовлетворяли условию**

$$\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Теорема **Для того чтобы три вектора в пространстве $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ с координатными представлениями**

$$\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \vec{y} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \vec{z} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{matrix} \right\|$$

были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли условию

$$\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Задача

1) Будут ли линейно зависимыми столбцы

$$\left\|\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}2\\2\\0\end{matrix}\right\|?$$

(Отв. Нет)

2) При каких значениях параметра a будут линейно зависимыми столбцы

$$\left\|\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}2\\2\\a\end{matrix}\right\|?$$

(Отв. При $a=1$)

Декартова система координат

Определение.	Совокупность базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и точки O, в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *общей декартовой системой координат* и обозначается $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.
Определение	Система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, порождаемая ортонормированным базисом, называется *нормальной прямоугольной* (или *ортонормированной*) системой координат.

Если задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, то произвольной точке M в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\vec{r}$, начало которого находится в точке O, а конец – в точке M.

Определение	Вектор $\vec{r} = \vec{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.
Определение	Координаты радиуса-вектора точки M называются *координатами точки* M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Изменение координат при замене базиса и начала координат

Пусть даны две декартовы системы координат: “старая” $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ и “новая” $\{O',\vec{g}'_1,\vec{g}'_2,\vec{g}'_3\}$. Выразим векторы “нового” базиса, а также вектор $\overrightarrow{OO'}$ через векторы “старого” базиса. В силу свойств базиса это можно сделать всегда и притом единственным образом:

$$\begin{aligned}
\vec{g}'_1 &= \sigma_{11}\vec{g}_1+\sigma_{21}\vec{g}_2+\sigma_{31}\vec{g}_3,\\
\vec{g}'_2 &= \sigma_{12}\vec{g}_1+\sigma_{22}\vec{g}_2+\sigma_{32}\vec{g}_3,\\
\vec{g}'_3 &= \sigma_{13}\vec{g}_1+\sigma_{23}\vec{g}_2+\sigma_{33}\vec{g}_3,\\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\vec{g}_1+\beta_2\vec{g}_2+\beta_3\vec{g}_3.
\end{aligned} \tag{1}$$

Тогда справедлива

Теорема **Координаты произвольной точки в “старой” системе координат связаны с ее координатами в “новой” соотношениями**

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \sigma_{11}\xi'_1+\sigma_{12}\xi'_2+\sigma_{13}\xi'_3+\beta_1,\\
\xi_2 &= \sigma_{21}\xi'_1+\sigma_{22}\xi'_2+\sigma_{23}\xi'_3+\beta_2,\\
\xi_3 &= \sigma_{31}\xi'_1+\sigma_{32}\xi'_2+\sigma_{33}\xi'_3+\beta_3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Определение Формулы (2) называются *формулами перехода* от системы координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ к системе координат $\{O',\vec{g}'_1,\vec{g}'_2,\vec{g}'_3\}$.

Определение Матрица $\| S \| = \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{matrix} \right\|$ называется *матрицей перехода* от базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к базису $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

Теорема **Для матрицы перехода**

$$\det \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Задача

Записать формулы прямого и обратного перехода для двух декартовых систем координат, показанных на рис. 1.

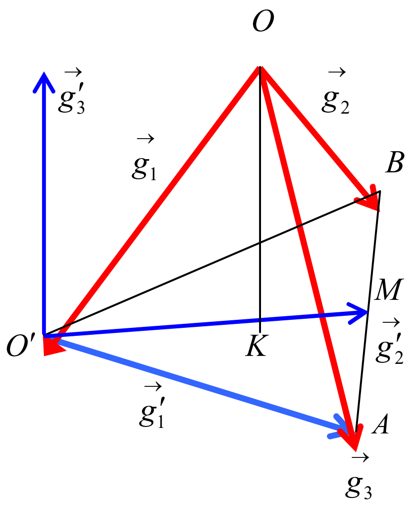


Рис. 1.

Решение

Найдем формулы перехода от системы координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$. Имеем из рис. 02.04.01. $\vec{OO'} = \vec{g}_1$. А для "новых" базисных векторов

$$\begin{aligned}
\vec{g}'_1 &= -\vec{g}_1 + \vec{g}_3 \\
\vec{g}'_2 &= -\vec{g}_1 + \frac{\vec{g}_2 + \vec{g}_3}{2} \\
\vec{g}'_3 &= -\vec{g}_1 + \vec{O'K} = -\vec{g}_1 - \frac{2}{3}\vec{g}'_2 = -\frac{1}{3}\vec{g}_1 - \frac{1}{3}\vec{g}_2 - \frac{1}{3}\vec{g}_3 .
\end{aligned}$$

Записав в виде столбцов найденные координатные разложения "новых" базисных векторов по "старым", получим *матрицу перехода*

$$\| S \| = \left\| \begin{matrix} -1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{matrix} \right\| ,$$

определитель которой равен $\frac{1}{2}$. Теперь записываем формулы *прямого перехода*

$$\begin{cases}
\xi_1 = -\xi'_1 - \xi'_2 - \frac{1}{3}\xi'_3 + 1 \\
\xi_2 = \frac{1}{2}\xi'_2 - \frac{1}{3}\xi'_3 \\
\xi_3 = \xi'_1 + \frac{1}{2}\xi'_2 - \frac{1}{3}\xi'_3
\end{cases} .$$

Найдем теперь формулы *обратного перехода*. Для этого сначала выразим векторы "старого" базиса через векторы "нового".

$$\vec{g}_1 = -\frac{2}{3}\vec{g}'_2 - \vec{g}'_3$$
$$\vec{g}_2 = \vec{OM} + \vec{MB} = (\vec{KM} - \vec{g}'_3) + (\vec{g}'_2 - \vec{g}'_1) = -\vec{g}'_1 + \frac{4}{3}\vec{g}'_2 - \vec{g}'_3$$
$$\vec{g}_3 = \vec{g}_1 + \vec{g}'_1 = \vec{g}'_1 - \frac{2}{3}\vec{g}'_2 - \vec{g}'_3.$$

Тогда матрица обратного перехода будет иметь вид

$$\|T\| = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix},$$

причем $\det\|T\| = 2$. Наконец, формулы обратного перехода будут

$$\begin{cases} \xi'_1 = & -\xi_2 + \xi_3 \\ \xi'_2 = -\frac{2}{3}\xi_1 + \frac{4}{3}\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{2}{3} \\ \xi'_3 = -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + 1 \end{cases}$$

так как $\vec{O'O} = -\vec{g}_1 = \frac{2}{3}\vec{g}'_2 + \vec{g}'_3$.

Решение получено

Формулы перехода между ортонормированными системами координат на плоскости

Рассмотрим две ортонормированные системы координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ и $\{O',\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2\}$. Получим формулы перехода для случая, показанного на рис. 1.8.3. Из геометрически очевидных соотношений

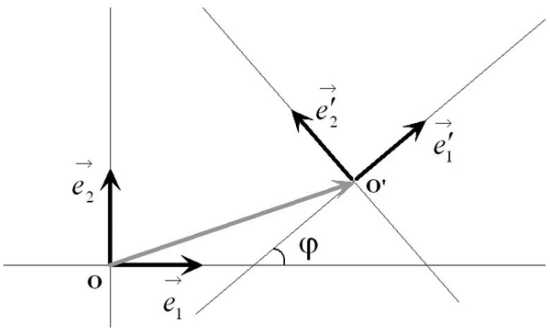
$$\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi \quad \text{и} \quad \vec{e}\,'_2 = -\vec{e}_1\sin\varphi + \vec{e}_2\cos\varphi$$

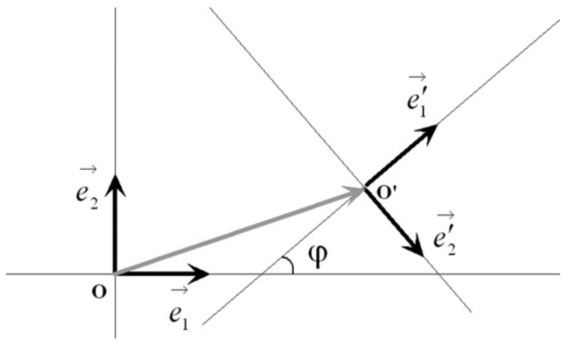
получаем матрицу перехода: $\|S\| = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \right\|$,

и если $\vec{OO'} = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|$,то “старые” координаты будут связаны с “новыми” как

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1\cos\varphi - \xi'_2\sin\varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi'_1\sin\varphi + \xi'_2\cos\varphi + \beta_2. \end{cases}$$

\





Во первом случае обе системы координат удается совместить последовательным выполнением параллельного переноса “старой” системы на вектор $\overrightarrow{OO'}$ и поворота на угол φ вокруг точки O'.

Иногда, после совмещения векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}\,'_1$, еще потребуется отражение вектора $\vec{e}_2$ симметрично относительно прямой, проходящей через совмещенные векторы. Формулы перехода будут в этом случае иметь вид

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 \cos\varphi + \xi'_2 \sin\varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi'_1 \sin\varphi - \xi'_2 \cos\varphi + \beta_2. \end{cases}$$