

Введение в математический анализ

Тюленев А.И.

Конспектировал Иван-Чай

Если будут ошибки дайте пизды @coolstory_bob

06.09.2023

Содержание

- 1 Верхняя и нижняя грань множества
- 2 Супремум
- 3 Теорема о существовании и единственности супремума
- 4 Инфинум
- 5 Лемма архимеда
- 6 Лемма Кантора
- 7 Стягивающаяся система вложенных отрезков

Def 1. *Расширенная числовая прямая $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cap \{+\infty\} \cap \{-\infty\}$.*

1 Верхняя и нижняя грань множества

Def 2. *Число M называется верхней гранью числового (непустого) множества $A \subset \mathbb{R}$, если $a \leq M \quad \forall a \in A$.*

Def 3. *Число M называется нижней гранью числового (непустого) множества $A \subset \mathbb{R}$, если $a \geq M \quad \forall a \in A$.*

2 Супремум

Def 4. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - ограниченное сверху множество. Число $M \in \mathbb{R}$ называется супремумом A и записывается $M = \sup A$, если*

- M - является верхней гранью $A \Leftrightarrow \forall a \in A \hookrightarrow a \leq M$.
- $\forall M' < M \quad \exists a(M') \in A : M' < a(M') \leq M$.

Def 5. Если $A \subset \mathbb{R}$ - неограниченно сверху, то $\sup A := +\infty$.

3 Теорема о существовании и единственности супремума

Th (Теорема о существовании и единственности супремума).

$$\forall A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset \quad \exists! \sup A$$

Доказательство. Для неограниченного сверху $A \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \sup A := +\infty$

Для ограниченного сверху $A \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \exists$ верхняя грань

Пусть $B = \{M \in \mathbb{R} : M - \text{верхняя грань}\}$, тогда $B \neq \emptyset \wedge A$ расположено левее B

По аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq M \quad \forall a \in A, \forall M \in B$

Покажем, что $c = \sup A$:

1. Т.к. $a \leq c \quad \forall a \in A \Rightarrow c$ - верхняя грань.
2. Предположим, что $\exists c' < c : c' - \text{верхняя грань } A$. Тогда $c' \in B$, но c было выбрано так, что $c \leq M \quad \forall M \in B$, в частности $c \leq c'$ - противоречие. $\Rightarrow \forall c' < c \hookrightarrow c' \notin B \Leftrightarrow \neg(c' \in B) \Leftrightarrow \neg(\forall a \in A \hookrightarrow a \leq c') \Leftrightarrow \exists a(c') \in A : a(c') > c'$, но т.к. $a(c') \in A$, то $a(c') \leq c$. Т.е. $\forall c' < c \quad \exists a(c') \in A : c' < a(c') \leq c$

Единственность:

Допустим $\exists M_1 \in \mathbb{R} : M_1 = \sup A \wedge \exists M_2 \in \mathbb{R} : M_2 = \sup A$. Пусть $M_1 > M_2$, но тогда по 2 пункту определения супремума для M_1 : $\exists a(M_2) \in A : a(M_2) > M_2 \Rightarrow M_2$ - не верхняя грань, противоречие. \square

$$\text{St. } M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \overline{\mathbb{R}} \\ a \leq M \quad \forall a \in A \\ \forall M' < M \exists a(M') \in A : M' < a(M') \leq M \end{cases}$$

4 Инфинум

Def 6. $m \in \mathbb{R}$ - называется инфинумом ограниченного снизу множества, если

$$\begin{cases} m \leq a & \forall a \in A \\ \forall m' > m & \exists a(m') \in A : m \leq a(m') < m' \end{cases}$$

Def 7. Если A - неограниченно снизу, то $\inf A := -\infty$.

Th (Теорема о существовании и единственности инфинума).

$$\forall A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset \quad \exists! \inf A$$

$$\text{St. } m = \inf A \quad \begin{cases} m \in \overline{\mathbb{R}} \\ m \leq a & \forall a \in A \\ \forall m' > m & \exists a(m') \in A : m \leq a(m') < m' \end{cases}$$

St. Аксиома непрерывности \Leftrightarrow Теорема о существовании и единственности супремума и Теорема о существовании и единственности инфинума.

5 Лемма архимеда

Th (Лемма Архимеда).

$$\forall M' \in \mathbb{R} \quad \exists N(M') \in \mathbb{N} : N(M') > M'$$

Доказательство. Предположим, что \mathbb{N} - ограничено сверху $\Rightarrow \exists$ верхняя грань и конечный супремум $M = \sup \mathbb{N} < +\infty \Rightarrow M' = M - 1 : \exists N(M') \in \mathbb{N} : N(M') > M - 1 \Rightarrow N(M') + 1 > M$ - противоречие. \square

6 Лемма Кантора

Def 8. Отображение из \mathbb{N} в множество всех отрезков на числовой прямой \mathbb{R} назовем последовательностью отрезков и обозначим $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$.

Def 9. Будем говорить, что $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ - последовательность вложенных отрезков, если $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$.

Th (Лемма Кантора или принцип вложенных отрезков). \forall последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty} \hookrightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Доказательство. Справедливо неравенство $-\infty < a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \hookrightarrow -\infty < a_m \leq b_n < +\infty.$$

$$m \geq n \Rightarrow \text{по индукции } b_m \leq b_n \Rightarrow a_m \leq b_m \leq b_n.$$

$$n < m \Rightarrow a_m \leq a_n \leq b_n.$$

$$A := \{a_1, a_2, a_3 \dots\}.$$

$$B := \{b_1, b_2, b_3 \dots\}.$$

Из того, что $a_m \leq b_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ вытекает, что A расположено левее B
 $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in [a_n, b_n] \quad \forall n$
 $\Rightarrow c \in \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$. □

Ex 1. Доказать лемму Кантора без аксиомы непрерывности с использованием супремума и инфимума.

7 Стягивающаяся система вложенных отрезков

Def 10. Последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ называется стягивающейся, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists$ отрезок $[a_{m(n)}, b_{m(n)}] : |[a_{m(n)}, b_{m(n)}]| < \frac{1}{n}$.

Th. Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков имеет единственную общую точку. $\Leftrightarrow \exists! x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$.

Доказательство. Предположим, что $\exists x_1, x_2 : \begin{cases} x_1 \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty} \\ x_2 \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty} \\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| > 0.$$

$$\frac{1}{M} := |x_1 - x_2|.$$

По лемме архимеда $\exists N \in \mathbb{N} : N > M \Rightarrow \frac{1}{N} < |x_1 - x_2| \Rightarrow$ в силу того, что система отрезков стягивающаяся $\exists [a_{m(n)}, b_{m(n)}] : |[a_{m(n)}, b_{m(n)}]| < \frac{1}{n}$. В частности $x_1, x_2 \in [a_{m(n)}, b_{m(n)}] \Rightarrow |x_1 - x_2| < \frac{1}{n}$ - противоречие. \square

Th (3 принципа непрерывности числовой прямой). *Следующие утверждения эквивалентны:*

- *Аксиома непрерывности.*
- $\exists \inf A, \exists \sup A \quad \forall A \neq \emptyset.$
- *Лемма Кантора и лемма Архимеда.*

St. *Лемма Кантора может не работать для интервалов.*

St. *Пример:*

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(a_n, b_n) = (0, \frac{1}{n})$$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$$

Доказательство. Предположим $\exists x > 0 :$

$$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} (0, \frac{1}{n}) \Rightarrow n < \frac{1}{x} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \text{противоречие с лемой архимеда.} \quad \square$$