Введение в математический анализ

Тюленев Александр Иванович

(Конспектировал Иван-Чай)

13.09.23

Содержание

1 Утверждения эквивалентные определению предела.

St. *Следущие утверждения эквивалентны* $\forall a \in \hat{\mathbb{R}}, c \geq 1$

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$.
3. $\forall \widetilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \widetilde{N}(\widetilde{\varepsilon}): \quad \forall n \geq \widetilde{N}(\widetilde{\varepsilon}) \hookrightarrow x_n \in U_{\widetilde{\varepsilon}*c}(a)$.
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N'(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N'(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Т.к. $c \geq 1$, то $U_\varepsilon(a) \subset U_{c*\varepsilon}(a) \Rightarrow \ \widetilde{N} = N(\varepsilon)$. □

(3) $\Rightarrow$ (2) : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) := \widetilde{N}(\widetilde{\varepsilon}) = \widetilde{N}\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) : \forall n \geq \widetilde{N}\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) \hookrightarrow x_n \in U_{\widetilde{\varepsilon}c}(a) = U_\varepsilon(a)$. □

(2) $\Rightarrow$ (4) $N'(\varepsilon) = N(\varepsilon)$. □

(4) $\Rightarrow$ (2) $N(\varepsilon) = N'(\varepsilon) + 1$. □

Def 1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется сходящейся* $\Leftrightarrow$ *она имеет конечный предел, в противном случае она называется расходящейся.*

Def 2. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется ограниченной* $\Leftrightarrow \exists M \in [0, +\infty) : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| < M$.

Def 3. *Последовательность называется бесконечно большой* $\Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

St. $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$

Ex 1. *Как связаны условия*

1. $\{x_n\}$ - *неограниченно.*

2. $\{x_n\}$ - *бесконечно большая.*

$\neg(1) \Rightarrow (2)$ Контрпример: $\{(1+(-1)^n)*n\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$

2 Лемма о непересекающихся отрезках

Lem (Лемма о непересекающихся отрезках.)**.** $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a \neq b \quad \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$.

Для $-\infty < a < b < +\infty$.

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2}.$$

$\square$

Для $-\infty < a < b = +\infty$.

$$\varepsilon = \frac{1}{|a|+1} \leq 1.$$

$U_\varepsilon(b) = (|a|+1, +\infty)$.
$U_\varepsilon(a) = \left(a - \frac{1}{1+|a|}, a + \frac{1}{1+|a|}\right) \subset (a-1, a+1)$. $\square$

Для $-\infty = a < b < +\infty$.

$$\varepsilon = \frac{1}{|b|+1}.$$

$\square$

Для $-\infty = a < b = +\infty$.

$$\varepsilon = 1.$$

$\square$

3 Свойства пределов.

Th. $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \hookrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists! \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Допустим $\exists a \in \overline{\mathbb{R}}, \exists b \in \overline{\mathbb{R}}$:
$a \neq b \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = b$.

По предывдущей лемме $\exists \varepsilon^* > 0 : U_{\varepsilon^*}(a) \cap U_{\varepsilon^*}(b) = \varnothing$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$

$n > max\,\{N_1, N_2\}$, то $x_n \in U_{\varepsilon *}(a) \cap U_{\varepsilon *}(b) = \varnothing$ - противоречие. □

Rmk. *В* $\overline{\mathbb{R}}$ *предел не единственен.*

Th. *Если последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- сходится, то она ограниченна.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$.

В частности $\exists N = N(1) : \forall n \geq N(1) \hookrightarrow |x_n| \leq |a| + 1$

$M = max\left\{|x_1, x_2, \dots |x_{N(1)}|\right\} \Rightarrow |x_n| \leq |a| + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. □

Rmk. *Обратное не верно.*

Доказательство. Контрпример $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Def 4. *Число* M *называется максимальным элементом множества* $E \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow M = \max E$, *если*

1. $M \in E$.

2. $M \geq x \quad \forall x \in E$.

Ex 2. *Доказать, что* $\sup A \in A \Leftrightarrow \sup A = \max A$.

4 Свойства пределов сходящихся последовательности, связаные с арифметическими операциями

Def 5. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно малой, если* $\exists \lim_{n\to\infty} = 0$.

Lem. *Если* $\{x_n\}$ *- ограничена,* $\{y_n\}$ *- бесконечно малая, то* $\{z_n\} := \{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- бесконечно малая.*

Доказательство. Запишем определения

$$\begin{cases} \text{x}_n \text{ - ограничена} \\ \text{y}_n \text{ - бесконечно малая} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Leftrightarrow \exists M \geq 0 : |x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in N : \forall n \geq N \hookrightarrow |y_n| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |y_n x_n| < M * \varepsilon.$$

(В силу утверждения из начала конспекта.)

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

□

Lem. *Сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- бм, то* $\{x_n \pm y_n\}$ *и* $\{x_n y_n\}$ *- бм.*

Для суммы и разности. :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \hookrightarrow x_n \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \hookrightarrow x_n \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) := \max\{N_1, N_2\} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \pm y_n \in U_\varepsilon(0).$ □

Для произведения. $\{x_n y_n\}$ - бм, т.к. $\{x_n\}$ - ограничена, $\{y_n\}$ - бм. $\square$

Lem. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{x_n - a\}$ *- бм.*

Cl. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *и* $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$*, тогда:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab.$$

Для суммы и разности. $\{(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\}_{n=1}^{\infty}$ - бм. $\square$

Для произведения. Покажем, что $\{(a_n b_n) - (ab)\}_{n=1}^{\infty}$ - бм.

$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a)$.

Рассмотрим последовательности

$\{a_n(b_n - b)\}_{n=1}^{\infty}$ - бм, как произведение ограниченной $\{a_n\}$ на бм $\{b_n - b\}$.

$\{b(a_n - a)\}_{n=1}^{\infty}$ - бм, как произведение стационарной $x_n = b$ на бм $\{b_n - b\}$. $\square$

Lem. *Пусть* $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}, x \neq 0$*, тогда* $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$.

Доказательство. Покажем, что $\{x_n\}$ - ограничена.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x).$$

В частности для $\varepsilon = \frac{|x|}{2}, \quad \exists N^* \in \mathbb{N} : \forall n \geq N^* \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x) \Rightarrow x - \frac{|x|}{2} < x_n < x + \frac{|x|}{2} \Rightarrow n \geq N^* \hookrightarrow |x_n| \geq \frac{|x|}{2} \Rightarrow n \geq N^* \hookrightarrow \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$.

$M := \left\{\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \frac{1}{|x_3|}, \dots \frac{1}{|x_{N^*}|}, \frac{2}{|x|}, \right\}$, тогда $\frac{1}{|x_n|} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ - ограничена.

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_n}{x x_n} = \frac{1}{x x_n}(x - x_n).$$

$\{x - x_n\}$ - бм, $\left\{\frac{1}{x x_n}\right\}$ - бм $\Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right\}$ - бм $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$. $\square$

Cl. *Пусть* $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. *Пусть* $x \neq 0 \wedge x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{y}{x}.$$