Введение в математический анализ

Тюленев А.И.

Конспектировал Иван-Чай

Если будут ошибки дайте пизды @coolstory_bob

06.09.2023

Содержание

Def 1. *Расширенная числовая прямая* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cap \{+\infty\} \cap \{-\infty\}$.

1 Верхняя и нижняя грань множества

Def 2. *Число* M *называется верхней гранью числового (непустого) множества* $A \subset \mathbb{R}$, *если* $a \leq M \quad \forall a \in A$.

Def 3. *Число* M *называется нижней гранью числового (непустого) множества* $A \subset \mathbb{R}$, *если* $a \geq M \quad \forall a \in A$.

2 Супремум

Def 4. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}$ *- ограниченное сверху множество. Число* $M \in \mathbb{R}$ *называется супремумом* A *и записывается* $M = \sup A$, *если*

- M *- является верхней гранью* $A \Leftrightarrow \forall a \in A \hookrightarrow a \leq M$.
- $\forall M' \leq M \quad \exists a(M') \in A : M' < a(M') \leq M$.

Def 5. *Если* $A \subset \mathbb{R}$ *- неограниченно сверху, то* $\sup A := +\infty$.

3 Теорема о существовании и единственности супремума

Th (Теорема о существовании и единственности супремума)**.**

$$\forall A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing \quad \exists! \sup A$$

Доказательство. Для неограниченного сверху $A \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \sup A := +\infty$

Для ограниченного сверху $A \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \quad \exists$ верхняя грань

Пусть $B = \{M \in \mathbb{R} : M-$ верхняя грань $\}$, тогда $B \neq \varnothing \quad \wedge A$ расположенно левее B

По аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq M \quad \forall a \in A, \forall M \in B$

Покажем, что $c = \sup A$:

1. Т.к. $a \leq c \quad \forall a \in A \Rightarrow c$ - верхняя грань.

2. Предположим, что $\exists c' < c : c'$ - верхняя грань A. Тогда $c' \in B$, но c было выбрано так, что $c \leq M \quad \forall M \in B$, в частности $c \leq c'$ - противоречие. $\Rightarrow$ $\forall c' < c \hookrightarrow c' \notin B \Leftrightarrow \neg\,(c' \in B) \Leftrightarrow \neg(\forall a \in A \hookrightarrow a \leq c') \Leftrightarrow \exists a(c') \in A : a(c') > c'$, но т.к. $a(c') \in A$, то $a(c') \leq c$. Т.е. $\forall c' < c \quad \exists a(c') \in A : c' < a(c') \leq c$

Единственность:

Допустим $\exists M_1 \in \mathbb{R} : M_1 = \sup A \quad \wedge \exists M_2 \in \mathbb{R} : M_2 = \sup A$. Пусть $M_1 > M_2$, но тогда по 2 пункту определения супремума для M_1: $\exists a(M_2) \in A : a(M_2) > M_2 \Rightarrow M_2$ - не верхняя грань, противоречие. $\square$

St. $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \overline{\mathbb{R}} \\ a \leq M \quad \forall a \in A \\ \forall M' < M \exists a(M') \in A : M' < a(M') \leq M \end{cases}$

4 Инфинум

Def 6. $m \in \mathbb{R}$ - *называется инфинумом ограниченного снизу множества, если* $\begin{cases} m \leq a \quad \forall a \in A \\ \forall m' > m \quad \exists a(m') \in A : m \leq a(m') < m' \end{cases}$

Def 7. *Если* A *- неограниченно сверху, то* $\inf A := -\infty$.

Th (Теорема о существовании и единственности инфинума)**.**

$$\forall A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing \quad \exists! \inf A$$

St. $m = \inf A \begin{cases} m \in \overline{\mathbb{R}} \\ m \le a \quad \forall a \in A \\ \forall m' > m \quad \exists a(m') \in A : m \le a(m') < m' \end{cases}$

St. *Аксиома непрерывности* $\Leftrightarrow$ *Теорема о существовании и единственности супремума и Теорема о существовании и единственности инфинума.*

5 Лемма архимеда

Th (Лемма Архимеда)**.**

$$\forall M' \in \mathbb{R} \quad \exists N(M') \in \mathbb{N} : N(M') > N$$

Доказательство. Предположим, что $\mathbb{N}$ - ограниченно сверху $\Rightarrow \exists$ верхняя грань и конечный супремум $M = \sup \mathbb{N} < +\infty \Rightarrow M' = M - 1 : \exists N(M') \in \mathbb{N} : N(M') > M - 1 \Rightarrow N(M') + 1 > M$ - противоречие. $\square$

6 Лемма Кантора

Def 8. *Отображение из* $\mathbb{N}$ *в множество всех отрезков на числовой прямой* $\mathbb{R}$ *назовем последовательностью отрезков и обозначим* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$.

Def 9. *Будем говорить, что* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ *- последовательность вложенных отрезков, если* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \, \forall n \in \mathbb{N}$.

Th (Лемма Кантора или принцип вложенных отрезков)**.** $\forall$ *последовательности вложеннных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty} \hookrightarrow \exists x \in \cap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \Leftrightarrow \cap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Доказательство. Справедливо неравенство $-\infty < a_n \le a_{n+1} \cdots \le b_{n+1} \le b_n < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall m, n \in \mathbb{N} \hookrightarrow -\infty < a_m \le b_n < +\infty$.

$m \ge n \Rightarrow$ по индукции $b_m \le b_n \Rightarrow a_m \le b_m \le b_n$.

$n < m \Rightarrow a_m \leq a_n \leq b_n$.

$A := \{a_1, a_2, a_3 \dots\}$.

$B := \{b_1, b_2, b_3 \dots\}$.

Из того, что $a_m \leq b_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ вытекает, что A расположенно левее B $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in [a_n, b_n] \quad \forall \mathbb{N}$ $\Rightarrow c \in \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$. □

Ex 1. *Доказать лемму Кантора без аксиомы непрерывности с использованием супремума и инфинума.*

7 Стягивающяяся система вложенных отрезков

Def 10. *Последовательность вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ *называется стягивающейся, если* $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists$ *отрезок* $\left[a_{m(n)}, b_{m(n)}\right] : \left|\left[a_{m(n)}, b_{m(n)}\right]\right| < \frac{1}{n}$.

Th. *Стягивающяяся последовательность вложенных отрезков имеет единственную общую точку.* $\Leftrightarrow \exists! x \in \cap_{n=1}^{+\infty} \ \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$.

Доказательство. Предположим, что $\exists x_1, x_2 : x_1 \in \cap_{n=1}^{+\infty} \ \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty} \wedge x_1 \in \cap_{n=1}^{+\infty} \ \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty} \wedge x_1 \neq x_2$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| > 0$.

$\frac{1}{M} := |x_1 - x_2|$.

По лемме архимеда $\exists N \in \mathbb{N} : N > M \Rightarrow \frac{1}{N} < |x_1 - x_2| \Rightarrow$ в силу того, что система отрезков стягивающяяся $\exists \left[a_{m(n)}, b_{m(n)}\right] : \left|\left[a_{m(n)}, b_{m(n)}\right]\right| < \frac{1}{n}$. В частности $x_1, x_2 \in \left[a_{m(n)}, b_{m(n)}\right] \Rightarrow |x_1 - x_2| < \frac{1}{n}$ - противоречие. □

Th (3 принципа непрерывности числовой прямой)**.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

- *Аксиома непрерывности.*

- $\exists \inf A, \exists \sup A \quad \forall A \neq \varnothing$.

- *Лемма Кантора и лемма Архимеда.*

St. *Лемма Кантора может не работать для интервалов.*

St. *Пример:*

$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$b_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(a_n, b_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \varnothing$

Доказательство. Предположим $\exists x > 0$:

$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow n < \frac{1}{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ - противоречие с лемой архимеда. $\square$