# Дискретная математика

Зухба Анастасия Викторовна

(Конспектировал Иван-Чай)

01.09.2023

# 1

Компонента связности - это связный подграф, максимальный по включению

1. Дерево - связный граф без циклов
2. Между любыми двумя вершинами $\exists!$ простой путь
3. Связный граф, в котором $|V| = |E| - 1$
4. Граф без циклов, в котором $|V| = |E| - 1$

*Доказательство.* (1) -> (2)

Пусть есть два маршрута между двумя вершинами, тогда есть цикл $\square$

*Доказательство.* (2) -> (3)

По индукции для количества ребер

База: $|V| = 1$

Переход: Пусть (2) $\Rightarrow$ (3) для $|V| \leq k$

Рассмотрим граф с $|V| = k + 1$

Удаление ребра приведет к тому, что граф распадется на две компоненты связности с $k_1$ и $k_2$ количеством вершин

Для каждого из подграфов: $k_1 + k_2 = k + 1 \Rightarrow k_1 \leq k \wedge k_2 \leq k$ Выполняется (2), а значит, по предположению индукции, выполняется и (3)

Значит для исходного графа $1 + (k_1 - 1) + (k_2 - 1) = k_1 + k_2 - 1 = k$ - ребер верно (3) $\square$

*Доказательство.* $(3) \Rightarrow (4)$

Пусть (3) - истинно, но в графе есть цикл(а значит и простой цикл)

Рассмотрим простой цикл $U_1, U_2, U_3 \ldots U_n, U_1$ длины $n$ (тогда имеет и $n$ ребер

Для каждой вершины $U_i$ не из цикла рассмотрим кратчайший путь к $U_1$

**St.** *Первые ребра всех путей различны*

Тогда $|E| \geq k + n$ - противоречие, где $k$ - количество вершин вне цикла $\square$

*Доказательство.* $(4) \Rightarrow (1)$

Пусть у графа $k$ компонент связности, тогда каждая компонента связности - дерево, а значит для нее верно $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$

$\sum_{i=1}^{k} |E_i| = \sum_{i=1}^{k} (|V_j| - 1) = |V| - k \Rightarrow k = 1 \quad \square$

Эйлеров путь - путь, который проходит по каждому ребру ровно по одному разу

Эйлеров цикл - замакнутый эйлеров путь

Гамельтонов путь - путь, который проходит через каждую вершину по 1 разу

Гамельтонов цикл - замкнутый гамельтонов путь

Граф называется эйлеровым, если в нем существет эйлеров цикл

**Th.** *В связном графе* $\exists$ *эйлеров цикл* $\Leftrightarrow \deg U \mod 2 = 0 \quad \forall U \in V$

*Доказательство.* Рассмотрим эйлеров цикл, каждая вершины кроме начала и конца встречается рядом с 2 своими ребрами, ребра не повторяются $|E| = 1 + 2m + 1$ $\square$

*Доказательство.* Рассмотрим граф, все степени которого четны. В нем всегда будет простой цикл. Разобьем его на не пересекающиеся по ребрам простые циклы. Пусть его можно разбить на m циклов указанным способом, докажем по индукции для m

База: $m = 1$ - граф содержит эйлеров цикл Переход: Предположим, что граф разбивается не более чем на $m$ простых циклов $\forall m \leq k$, тогда для него $\exists$ эйлеров цикл.

$m = k + 1$ Рассмотрим один из простых циклов $U_1, U_2, U_3 \ldots U_i$ $\square$

**Th.** *В связном графе $\exists$ эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ в графе не более двух вершин нечетной степени*