Математический анализ

Тюленев Александр Иванович

(Конспектировал Иван-Чай)

01.09.2023

1 Сатанистские символы

1.1 Логические операции

$\wedge$ - и

$\vee$ - или

$\neg$ - нет

1.2 Кванторы

$\forall$ - для любого (квантор всеобщности)

$\exists$ - существует

$\exists!$ - существует и только один

$\hookrightarrow$ - выполняется

1.3 Еще обозначения

$:=$ - равно по определению

$:$ - такой, что

$\Rightarrow$ - следует

$\Leftrightarrow$ - равносильно

1.4 Операции над множеством

A, B - множества обозначаются большими буквами

a, b - элементы маленькими

$\varnothing$ - пустое множество

$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$

2 Определения

Def 1. *Множество X называется бесконечным, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad X$ содержит n различных элементов.*

Def 2. *Пусть X, Y - непустыве множества, тогда декартово произведение*

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

Def 3. *Задано соответствие f из X в Y, если в $X \times Y$. выделено подмножество $G_f \subset X \times Y$.*

Def 4. *Если $(x, y) \in G_f$, то говорят, что y поставлен в соответствие x.*

Def 5. *Область определения*

$$D_f := \{x \in X : \exists y \in Y \hookrightarrow (x, y) \in G_f\}$$

Def 6. *Область значений*

$$E_f := \{y \in Y : \exists x \in X \hookrightarrow (x, y) \in G_f\}$$

Def 7. *Если $D_f = X$, то говорят, что задано многозначное отображение из X в Y.*

Def 8. *$X, Y \neq \varnothing$ Будем говорить, что $f : X \to Y$ отображение, если*

$$\begin{cases} D_f = X \\ \forall x \in X \quad \exists! \quad y \in Y : (x, y) \in G_f \end{cases}$$

Def 9. *Композицией отображения f и g называется отображение $h = g \cdot f$, если $h = g(f(x))$, где X, Y, Z - непустые множества, $f : X \to Y, \quad g : Y \to Z$ - отображения.*

Def 10. *Отображение* $f : X \to Y$ *- инъекция, если* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Def 11. *Отображение* $f : X \to Y$ *- сюръекция, если* $E_f = Y$.

Def 12. *Отображение* $f : X \to Y$ *называют обратимым, если* $\exists f^{-1} : Y \to X$ *такое, что*

$$\begin{cases} f \cdot f^{-1} = Id_Y \\ f^{-1} \cdot f = Id_X \end{cases}$$

при этом f^{-1} *называют обратным к* f.

Def 13. $Id_A := \{(a, a) : a \in A\}$

3 Множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел

3.1 Натуральные и целые числа

Это материал лекции, на которую мы случайно не туда попали. Потом и ее законспектирую тоже.

3.2 Рациональные числа

Def. $\mathbb{Q}$ *- множество всех рациональных чисел.*
$\mathbb{Q}$ *- множество несократимых дробей вида* $\frac{n}{m}$, *где* $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

3.3 Действительные числа

Def. A *расположено левее* B, *если* $\forall a \in A$ *и* $\forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$, *где* A, B *- непустые множества.*

Def. *Множеством действительных чисел* $\mathbb{R}$ *называется непустое множество* R, *на котором введены бинарные операции* $"+" : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *и* $"*" : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *и отношение порядка* $" \leqslant "$, *которое удволетворяет следующим 15 аксиомам*

1. $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$
4. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0.$
5. $ab = ba \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$
6. $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$
8. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a\frac{1}{a} = 1.$
9. $a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$
10. $a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leqslant b \vee b \leqslant a.$
11. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\, (a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c).$
12. *если* $a \leqslant b$, *то* $\forall c \geqslant 0 \hookrightarrow ac \leqslant bc \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$
13. $a \leqslant b \wedge b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$
14. *Если* $a \leqslant b \wedge b \leqslant a$, *то* $a = b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$
15. *Аксиома непрерывности:* $\forall A, B \subset \mathbb{R}$, *если* A *расположено левее* B, *то* $\exists c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b \quad \forall a \in A$ *и* $b \in B$.

Def. *(1) - (4) - Абелева группа по сложению.*

Def. *(1) - (9) - алгеброическое поле.*

4 Ограниченность

Def. *Множество* $A \subset \mathbb{R}$ *называется ограниченным сверху, если* $\exists m \in \mathbb{R} : a \leqslant M \quad \forall a \in A$.

Def. *Множество* $A \subset \mathbb{R}$ *называется ограниченным снизу, если* $\exists m \in \mathbb{R} : a \geqslant M \quad \forall a \in A$.

Def. *Множество* A *называется ограниченным, если оно ограниченно сверху и снизу.*

Def. *Множество* $A \subset \mathbb{R}$ *называется неограниченным сверху, если* $\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists a(m) \in A : a(m) > m$.

Def. *Множество* $A \subset \mathbb{R}$ *называется неограниченным снизу, если* $\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists a(m) \in A : a(m) < m$.