Матанализ

Тюленев Александр Иванович

(Конспектировал Иван-Чай)

08.09.2023

Содержание

1 Какое-то доказательство

Здесь должно быть доказательство того, что из леммы Кантора и леммы архимеда следует аксиома непрерывности, но оно комплексное и ненулевая действительная часть появится, тогда и только тогда, когда выйдет запись лекции на лектории фпми. Прошу понять и простить.

2 Счетные и несчетные множества

Def 1. *Отображение $f : X \to Y$ называется биекцией из X на Y, если оно и сюръекция и инъекция $\Leftrightarrow$ оно обратимо.*

Def 2. *Множество X называется конечным, если $\exists n \in \mathbb{N}$ и биекция X на $\{1, \dots n\}$, в противном случае оно называется бесконечным.*

Def 3. *Будем говорить, что X и Y равномощны, если $\exists$ биекция X на Y.*

Обозначим равномощность множеств A и B, как $A \leftrightarrow B$.

Def 4. *Будем говорить, что мощность множествва Y не меньше мощности X, если $\exists Y' \subset Y : Y$ и X равномощны.*

Def 5. *Множество X называется счетным, если оно бесконечно и X равномощно $\mathbb{N}$.*

Def 6. *Множество X называется несчетным, если оно бесконечно и не равномощно $\mathbb{N}$.*

Th. $\mathbb{Q}$ - *счетно.*

Доказательство. "Разместим"все рациональные числа в "таблице"

N\Z	0	1	-1	2	-2	...
1	0	1	-1	2	-2	...
2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	...
3	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Будем двигаться "по змейке при этом пропуская повторяющиеся числа. За счет этого получим инъекцию из $\mathbb{N}$ в Q. Т.к. $\forall a = \frac{p}{q}$ найдется квадрат в котором есть это число змейка в него попадет $\Rightarrow$ это сюрьекция. $\square$

Th. *Множество* $\mathbb{R}$ *- несчетно*

Доказательство. $\mathbb{R}$ бесконечно, поскольку содержит $\mathbb{N}$, покажем, что $\neg \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{R}$

Допустим, что $\exists \mathbb{N} \leftrightarrow^x \mathbb{R}, x(n) \equiv x_n$

Построим последовательность $J_k \subset J_{k-1} \dots J_3 \subset J_2 \subset J_1 : \forall k \in \mathbb{N} \quad x_k \notin J_k \Rightarrow \{x_1, x_2 \dots x_k\} \cap J_k = \varnothing \forall k \in \mathbb{N}$ $\square$

Ex 1. *Доказать* $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z}, \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$.

Ex 2. *Докозать, что* $[0,1] \leftrightarrow (0,1] \leftrightarrow [0,1) \leftrightarrow (0,1) \leftrightarrow \mathbb{R}$.

3 Последовательности

Def 7. *Последовательностью будем называть отображение* $x : N \to \mathbb{R}$ *При этом* $x(n) \equiv X \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Def 8. *Элементом последовательности называется пара* (n, x_n).

Def 9. *При этом числа* $x_n, n \in \mathbb{N}$ *называют значениями последовательности.*

Def 10. *Вся последовательность обозначается* $\{x_n\} \equiv \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Def 11. $\widehat{\mathbb{R}} := \overline{\mathbb{R}} \cap \{\infty\}$.

Def 12. *Если* $a \in \mathbb{R}$, *то* $U(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Def 13. $U(+\infty) := (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$.

Def 14. $U(-\infty) := (-\frac{1}{\varepsilon}, -\infty)$.

Def 15. $U(\infty) := (-\frac{1}{\varepsilon}, -\infty) \cap (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$.

4 Пределы

Def 16. *Будем говорить, что элемент* $a \in \widehat{\mathbb{R}}$ *является пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$ *и писать* $\lim_{n\to\infty} X_n = a$ *, если* $\forall\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$.

St. *Пример:*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Доказательство. $\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$:
$\forall \quad n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$. □