Лекция 1: Неориентированные графы

Графом(неориентированным) G называется пара (V, E), где V — некоторое множество, элементы которого называются вершинами, а E — множество, элементы которого называются рёбрами и являются **не**упорядоченными парами вершин $(v, v') : v, v' \in V$.

Петлей называют ребро (v, v'), у которого $v = v'$.

Ребра называют **кратными**, если они соответствуют одной и той же паре верщин (v, v').

Тут происходит небольшое столкновение терминологии, потому как если E — множество пар (v, v'), то все пары различны по определению множества. Потому если мы хотим создать граф с кратными ребрами, то определение множества вершин придется несколько изменить. Например, вместо того чтобы отождествить ребро и пару вершин сказать, что кажлому ребру соответствует пара вершин.

Если не оговорено иначе, мы будем считать граф **простым**, то есть без петель и кратных ребер.

Вершина и ребро называются **инцидентными**, если вершина является для этого ребра концевой. Обратите внимание, что термин “инцидентность” применим только к вершине и ребру.

Две вершины называются **смежными**, если они инцидентны одному ребру. Два ребра называются **смежными**, если они инцедентны одной вершине.

Иногда вместо математических терминов "смежный"и "инцедентный"будет удобно употреблять разговороне "соседний".

Степень вершины - это количество рёбер, инцидентных указанной вершине.

$$deg(v) = |\{(v, v') : (v, v') \in E,\ v' \in V\}|$$

Вершину степени 0 называют **изолированной**. Вершину степени 1 называют **листом** или **висячей вершиной**.

Теорема Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер.

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

Следствие В любом графе количество вершин с нечетной степенью четно.

Если в исходном графе выделить несколько вершин и несколько рёбер (между выбранными вершинами), то мы получим подграф исходного графа.

Граф $G'(V', E')$ является **подграфом** графа $G(V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. (То, что ребра E' соединяют только вершины V' мы получаем автоматически, сказав, что G' — граф.)

Маршрутом в графе $G(V, E)$ называют последовательность смежных вершин графа. То есть последовательность вершин $v_1, v_2, \ldots v_k$ называется маршрутом, если $(v_i, v_{i+1}) \in E \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. (В маршруте мы не требуем, чтобы ребра были различными, и вполне допустим фрагмент v, v', v.)

Маршрут, в котором все ребра различны, называют **цепь** или **путь**.

Длиной пути называют количество ребер в данном пути.

Путь называется **простым**, если в нём нет повторяющихся вершин (кроме, возможно, первой и последней).

Замечание: В некоторых источниках можно встретить и другие определения. Нпример, иногда считают, что "путь"это синоним "маршрута а не "цепи". В данном курсе мы будем придерживаться введенной терминологии, но на самом деле это не будет иметь большого значения в дальнейшем.

Маршрут (путь) называется **замкнутым**, если его первые и последняя вершина совпадают.

Замкнутый путь називается **циклом**. Замкнутый простой путь называется **простым циклом**. (Напоминание: мы считаем, что у простого пути не могут повторятся ни ребра, ни вершины кроме, возможно, начала и конца. А значит, длина простого цикла не меньше 3.)

Две вершины называют **связанными**, если существует путь между двумя этими вершинамито (то есть путь с началом в одной из вершин и концом в другой).

Утверждение. Если между двумя вершинами существует маршрут, то существует и путь, и простой путь.

Расстоянием $\rho(u, v)$ между двумя связанными вершинами u и v называется длина кратчайшего пути, их соединяющего.

Граф называется **связным**, если между любыми двумя его вершинами существует путь.

Наибольшее расстояние между вершинами в связном графе называют **диаметром** графа.

Предположим, наш граф всетаки не связен. Тогда он распадется на несколько частей, называемых компонентами связности.

Компонентой связности графа G называется его максимальный по включению связный подграф.

Теорема Если граф имеет $|V|$ вершин и $|E|$ ребер, то в нем не меньше $|V-E|$ связных компонент. В частности, если граф связен, то $|E| \geq |V|-1$.

* Необязательные утверждения и определения

Мультиграф — граф с кратными ребрами.
Псевдограф — граф с петлями.
Граф называют **взвешенным**, если каждому ребру сопоставлено число – вес ребра (или иногда говорят длина ребра.

Семинар 1: Неориентированные графы

Формулировка различных задач на языке графов. Решение задач на связность.

Стандартное домашнее задание: неделя 1

1. Найдите число рёбер в полном графе K_n.
2. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которого равны 4, 4, 4, 4, 2.
3. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?
4. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).
5. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?