Введение в математический анализ

Тюленев Александр Иванович

(Конспектировал Иван-Чай)

5 лекция

Содержание

1 Предельный переход в неравенство

Lem 1. *Пусть* $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim_{n\to\infty} y_n = B$, $A < B$

Тогда $\exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N \hookrightarrow x_n < y_n$

Доказательство.

$$\exists \varepsilon^* > 0 : U_{\varepsilon^*}(A) \cap U_{\varepsilon^*}(B) = \varnothing.$$

$$A < B \Rightarrow \forall x \in U_{\varepsilon^*}(A), \forall y \in U_{\varepsilon^*}(B) \hookrightarrow x < y..$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(A).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \hookrightarrow y_n \in U_\varepsilon(B).$$

$$N := max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\} : \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_{\varepsilon^*}(A) \wedge y_n \in U_{\varepsilon^*}(B) \Rightarrow .$$

$$x_n < y_n.$$

$\square$

Th 1 (Теорема о предельном переходе в неравенство)**.** *Пусть* $\begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} x_n = A \in \overline{\mathbb{R}} \\ \exists \lim_{n\to\infty} y_n = B \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$

пусть $\exists N \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \quad \forall n \geq N$, *Тогда* $A \geq B$

Доказательство. Предположим, что $A > B$. По только что доказаной лемме $\exists N^* : \forall n \geq N^* \hookrightarrow x_n > y_n$

$$\widetilde{N} := max\{N, N^*\} : \quad \forall n \geq \widetilde{N} \hookrightarrow \begin{cases} x_n \leq y_n \\ x_n > y_n \end{cases}$$

Противоречие. ☐

St. *Пусть* $\exists N \in \mathbb{N} : x_n < y_n \quad \forall n \geq N,$
$x_n \to A, n \to \infty,$
$y_n \to B, n \to \infty.$
Тогда не обязательно $A < B$.

Контрпример.

$$y_n = \frac{1}{n}.$$
$$x_n = -\frac{1}{n}.$$

☐

Nt. *Предельный переход может портить строгие неравенства и превращать их в нестрогие.*

Cl 1.1. $\left.\begin{aligned} x_n \geq a, a \in \mathbb{R} \\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n = A \in \overline{\mathbb{R}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \geq a.$

Доказательство. Положим $y_n = a$. $\forall n \in \mathbb{N}$ применим предыдущее утверждение(теорему о предельном переходе в неравенство). ☐

2 Теорема о двух милиционерах

Th (Теорема о двух милиционерах $\Leftrightarrow$ теорема о трех последовательностях)**.** *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- числовые последовательности. Пусть* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} b_n = c \in \mathbb{R}$. *Пусть* $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \leq c_n \leq b_n$. *Тогда* $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \forall n \geq N \hookrightarrow a_n \in U_\varepsilon(C).$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 : \forall n \geq N \hookrightarrow b_n \in U_\varepsilon(C).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = max\{N_1, N_2, N\} \hookrightarrow \begin{cases} a_n \in U_\varepsilon(c) \\ b_n \in U_\varepsilon(c) \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_n \in U_\varepsilon(c) \quad \forall n \geq N \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

□

Th 2. *Пусть* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *и* $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \hookrightarrow y_n \geq x_n$. *Тогда* $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. *Аналогично для* $-\infty$.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{N}(\varepsilon) = max\{N(\varepsilon), N\} \in \mathbb{N} :$$

$$\forall n \geq \overline{N}(\varepsilon) \hookrightarrow y_n \geq x_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

□

3 Пределы монотонных последовательностей

Def 1. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется нестрого возрастающей(нестрого убывающей), если* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} \geq x_n (x_{n+1} \leq x_n)$.

Def 2. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется строго возрастающей(строго убывающей), если* $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} > x_n (x_{n+1} < x_n)$.

Def 3. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется монотонной, если она нестрого убывающая или нестрого возрастающая.*

Th (О пределе монотонной последовательности)**.** *Любая монотонная последовательность имеет предел в* $\overline{\mathbb{R}}$.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *нестрого возрастает, то* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *нестрого убывает, то* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$.

Докажем для нестрого возрастающей.

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \le M \quad \forall a \in A \\ \forall M' < M \quad \exists a \in A : M' < a \le M \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in U_\varepsilon(M) \cap A.$$

$$M = \sup x_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : X_{N(\varepsilon)} \in U_\varepsilon(M).$$

$$\{x_n\} \text{ - возростает.}$$

$$\Downarrow$$

$$x_n \ge x_{N(\varepsilon)} \quad \forall n \ge N(\varepsilon).$$

$$\Downarrow$$

$$x_n \in U_\varepsilon(M) \quad \forall n \ge N(\varepsilon). \quad (x_n \le M)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \ge N(\varepsilon) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(M).$$

$$\Downarrow$$

$$M = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

$\square$

4 Подпоследовательности и частичные пределы

Def 4. *Пусть дана числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Последовательность* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *называется подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*, если существует строго возрастающая последовательность* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$: $y_k = x_{n_k} \forall k \in \mathbb{N}$.

Def 5. *Будем говорить, что* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *- частичный предел последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*, если* $\exists \{x_{n_k}\}$ *- подпоследовательность* $\{x_n\}$: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$

Th (Критерий частичного предела)**.** *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- числовая последовательность. Пусть* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *Следущие условия эквивалентны.*

1. A *- ч.п.* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. $\forall \varepsilon > 0$ *в* $U_\varepsilon(A)$ *содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
3. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : x_n \in U_\varepsilon(A)$.

$(1) \Rightarrow (2)$. Пусть A - ч.п. $\Rightarrow \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, возрастающая: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$.

Т.к. $\exists$ бесконечно много чисел $k \in \mathbb{N} : k \geq K(\varepsilon)$, в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

$(2) \Rightarrow (3)$. Фиксируем произвольный $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $I(\varepsilon)$ - это те натуральные индексы, что $x_n \in U_\varepsilon(A) \quad \forall n \in I(\varepsilon)$. Тогда

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in I(\varepsilon) : n \geq N.$$

Но т.к. ε было выбрано произвольно

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} : x_n \in U_\varepsilon(A).$$

□

$(3) \Rightarrow (1)$. Построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$.

$$n_1 = 1.$$

Поскольку при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $N \geq 1 + n_1 \quad \exists n \geq 1 + n_1 : x_n \in U_{\frac{1}{2}}(A)$ если построенны $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ $x_{n_i} \in U_{\frac{1}{i}}(A)$.

$$n_{k+1} = n\left(\frac{1}{k+1}, n_k + 1\right).$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(A).$$

$$\Downarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k = n\left(\frac{1}{k}, n_{k-1}\right) \in \mathbb{N} \quad x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(A).$$

$$\Downarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \in \mathbb{N} : \forall j \geq k \hookrightarrow x_{n_j} \in U_{\frac{1}{k}}(A).$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : \forall k \geq K(\varepsilon) \hookrightarrow x_{n_k} \in U_\varepsilon(A).$$

□

5 Теорема Больцано - Вейерштрасса

Th (Теорема Больцано - Вейерштрасса)**.** *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная числовая последовательность. $\exists$ хотя бы один конечный частичный предел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Поскольку $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена $\exists M \geq 0 : |x_n| \leq M$.

Далее считаем $M > 0$, т.к. при $M = 0$ доказываемое утверждение очевидно.

Пусть $I^1 = [-M, M]$. Выберим как I^2 половину отрезка I^1, содержащую значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Такая найдется, иначе в I^1 содержится конечное число значений элементов последовательности.

Предположим мы построили последовательность $I^1 \subset I^2 \subset \dots \subset I^k$: I^j содержит значения бесконечного количества элементов последовательности $\forall j \leq k$. Разделим I^k на два конгруентных отрезка и выберем как I^{k+1} половину, содержащую значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. (Такая найдется по указаным выше причинам.)

В итоге получим бесконечную последовательность вложенных отрезков $I^1 \subset I^2 \subset \dots \subset I^k$, которая еще и стягивающаяся, т.к. $\left|I^k\right| = \frac{|I^{k-1}|}{2^{k-1}}$. Из этого $\exists x^* = \cap_{k=1}^{\infty} I^k$.

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ в $U_{\varepsilon}(x^*)$ содержатся значения бесконечного количества элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, чтобы доказать, что x^* - ч.п..

Действительно, из определения предела и из того, что $x^* \in I^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists K(\varepsilon) : x^* \in I^{K(\varepsilon)} \subset U_{\varepsilon}(x^*) \Rightarrow$ по построению получаем, что в $I^{k(\varepsilon)}$ содержится бесконечное количество значений элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$