Лекция 3: Ориентированные графы

Ориентированным графом(орграфом) G называется пара (V, E), где V — некоторое множество, элементы которого называются вершинами, а E — множество, элементы которого называются рёбрами и являются **упорядоченными** парами вершин $(v, v') : v, v' \in V$.

Во многих ситуациях неориентированные графы можно считать частным случаем ориентированных, в которых для каждого ребра существует и обратное. Но когда речь заходит о количестве ребер, приходится соблюдать осторожность. Например, при подсчете стеменей вершин.

Степени и достижимость в орграфах

В ориентированном графе отдельно определяют **входящую** и **исходящую** степени вершин, как количество входящих и исходящих ребер соответственно.

Утверждение В ориентированном графе сумма входящих степеней всех вершин равна сумме исходящих степеней всех вершин и равна количеству ребер в графе.

Понятия маршрута, пути и простого пути звучат для ориентированного графа аналогично с той лишь разницей, что от пары последовательных вершин v_i и v_{i+1} маршрута (пути, простого пути) требуют не просто смежности, а существования ребра из v_i в v_{i+1}. То есть подчеркивается, что существует ориентрованное ребро необходимого направления.

В ориентированном графе отношение достижимости несимметрично, но можно определить симметричное отношение «достижимости в обе стороны». Будем говорить, что вершина u сильно связана с вершиной v, если v достижима из u и наоборот, то есть если есть путь из u в v, а также путь из v в u.

У ориентированных графов много приложений. В частности, орграфы используют для работы с отношением частичного порядка.

Отношение частичного порядка

Говорят, что бинарное отношение R является строгим частичным порядком, если выполнены такие свойства:

- если $R(a, b)$ и $R(b, c)$, то $R(a, c)$ (транзитивность)

- $R(a, a)$ всегда ложно (антирефлексивность)

Из этих свойств следует антисимметричность: $R(a, b)$ и $R(b, a)$ не могут выполняться одновременно. В самом деле, тогда по транзитивности (взяв $c = a$) получаем $R(a, a)$, что противоречит антирефлексивности.

Для наглядности, говоря об отношениях строгого частичного порядка, часто используют обозначение $a < b$ вместо R.

Можно определить также отношение нестрогого частичного порядка $\leq$.

- рефлексивность: $(a \leq a)$
- антисимметричность: $(a \leq b)$ и $(b \leq a) \Rightarrow (a = b)$
- транзитивность: $(a \leq b)$ и $(b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$

Если любые два элемента порядка сравнимы ($x \leq y$ или $y \leq x$), такой порядок называется **линейным**.

Порядки P и Q называются изоморфными, если есть такая биекция $\phi : P \to Q$, что $x \leq y$ равносильно $\phi(x) \leq \phi(y)$ для всех пар x, y.

Отношение частичного порядка на конечных множествах удобно изображать в виде орграфа. Вершины графа соответствую элементам множества. Если бы мы нарисовали направленные ребра для каждой пары сравнимых элементов (от большего к меньшему), то такая диаграмма получилась бы слишком громоздкой и не достаточно наглядной. Потому ребра рисуют только для тех пар $x \leq y$, для которых не существует такого элемента z, что $x \leq z \leq y$. Этих ребер достаточно, чтобы используя транзитивность однозначно восстановить частичный порядок на множестве. Для дополнительной наглядности принято "большие"элементы изображать "выше". Такой способ изображения частичного порядка на множестве называют **диаграммой Ха́ссе**.

Теорема Следующие свойства ориентированного графа равносильны:

1. Каждая сильно связная компонента состоит из одной вершины.
2. В графе нет циклов.
3. Вершины графа можно пронумеровать натуральными числами таким образом, чтобы все рёбра вели «вверх»: из вершины с меньшим номером в вершину с большим.

Идея доказательства:

- Если есть цикл, то все его вершины сильно связны.
- Если две вершины сильно связны, то можно построить замкнутый маршрут, а значит и цикл.
- В ориентированном графе без циклов есть вершина, из которой не выходит ни одного ребра.
- Выберем вершина, из которой не выходит ни одного ребра и присвоим ей наибольший номер. Если мы удалим ее вместе с ребром, то оставшаяся часть все еще будет орграфом без циклов. Далее можно продолжить доказательство по индукции.

Из данной теоремы, в частности, следует, что любой частичный порядок можно дополнить до линейного.

Семинар 3: Ориентированные графы

- Булев куб и числа в бинарной записи, как пример частичного и линейного порядка
- Транзитивное замыкание и транзитивная редукция. Диаграма Хассе, как транзитивная редукция. Построение транзитивной редукции.

Стандартное домашнее задание: неделя 3

1. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y если $y-x=3$ или $x-y=5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе
2. (a) 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг (каждая команда сыграла с каждой ровно один раз, ничьих не бывает). Говорят, что команда A сильнее B, если A выиграла у B или есть команда C, такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B. Доказать, что команда, одержавшая наибольшее число побед, сильнее любой другой.

   (b) Является ли отношение «сильнее» отношением порядка на произвольном множестве из не менее, чем трёх команд?
3. Найдите максимальное количество (простых) путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.

4. Известно, что в ориентированном графе на ≥ 2 вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?

5. Сколько есть порядков на n-элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?