Ориентированные графы

Зухба А. В.

Определение ориентированного графа

Ориентированным графом(орграфом) G называется пара (V, E), где

- V — некоторое множество, элементы которого называются вершинами
- E — множество, элементы которого называются рёбрами и являются **упорядоченными** парами вершин $(v, v') :\ v, v' \in V$

Во многих ситуациях неориентированные графы можно считать частным случаем ориентированных, в которых для каждого ребра существует и обратное. Но когда речь заходит о количестве ребер, приходится соблюдать осторожность. Например, при подсчете стеменей вершин.

Степени в орграфе

В ориентированном графе отдельно определяют **входящую** и **исходящую** степени вершин, как количество входящих и исходящих ребер соответственно.

Утверждение В ориентированном графе сумма входящих степеней всех вершин равна сумме исходящих степеней всех вершин и равна количеству ребер в графе.

Ориентированные пути

Понятия маршрута, пути и простого пути звучат для ориентированного графа аналогично с той лишь разницей, что от пары последовательных вершин v_i и v_{i+1} маршрута (пути, простого пути) требуют не просто смежности, а существования ребра из v_i в v_{i+1}. То есть подчеркивается, что существует ориентрованное ребро необходимого направления.

В ориентированном графе отношение достижимости несимметрично, но можно определить симметричное отношение «достижимости в обе стороны». Будем говорить, что вершина u сильно связана с вершиной v, если v достижима из u и наоборот, то есть если есть путь из u в v, а также путь из v в u.

Отношение частичного порядка

Говорят, что бинарное отношение R является **строгим частичным порядком**, если выполнены такие свойства:

- если $R(a, b)$ и $R(b, c)$, то $R(a, c)$ (транзитивность)
- $R(a, a)$ всегда ложно (антирефлексивность)

Из этих свойств следует антисимметричность: $R(a, b)$ и $R(b, a)$ не могут выполняться одновременно. В самом деле, тогда по транзитивности (взяв $c = a$) получаем $R(a, a)$, что противоречит антирефлексивности.

Для наглядности, говоря об отношениях строгого частичного порядка, часто используют обозначение $a < b$ вместо R.

Отношение частичного порядка

Можно определить также отношение нестрогого частичного порядка $\leq$.

- рефлексивность: $(a \leq a)$
- антисимметричность: $(a \leq b)$ и $(b \leq a) \Rightarrow (a = b)$
- транзитивность: $(a \leq b)$ и $(b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$

Если любые два элемента порядка сравнимы ($x \leq y$ или $y \leq x$), такой порядок называется **линейным**.

Порядки P и Q называются **изоморфными**, если есть такая биекция $\phi : P \to Q$, что $x \leq y$ равносильно $\phi(x) \leq \phi(y)$ для всех пар x, y.

- Вершины графа соответствую элементам множества
- Для дополнительной наглядности принято "большие"элементы изображать "выше"
- Ребра рисуют только для тех пар $x \leq y$, для которых не существует такого элемента z, что $x \leq z \leq y$

От ориентированных графов к частичному порядку

Теорема Следующие свойства ориентированного графа равносильны:

1. Каждая сильно связная компонента состоит из одной вершины.
2. В графе нет циклов.
3. Вершины графа можно пронумеровать натуральными числами таким образом, чтобы все рёбра вели «вверх»: из вершины с меньшим номером в вершину с большим.

Определение ориентированного графа