

Введение в математический анализ

Тюленев Александр Иванович
(Конспектировал Иван-Чай)

9 лекция

Содержание

- 1 Односторонний предел и т. Вейерштрассе
- 2 Арифметические операции с пределами функции
- 3 О предельном переходе в неравенство
- 4 Нижний и верхний предел последовательности

Th 1 (Условие Коши). Пусть $f : \dot{U}_{\delta_0} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0] : \forall x_1, x_2 \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon|.$$

Th (Критерий Коши). Пусть $f : \dot{U}_{\delta_0}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны.

1. f удовлетворяет условию Коши в x_0

2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

(1) \Rightarrow (2). Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, \delta_0] : \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \hookrightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

\Downarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, \delta_0] : \quad \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(x_0) \hookrightarrow |f(x_1) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |f(x_2) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

□

(2) \Rightarrow (1). Поскольку определения по Коши и по Гейне эквивалентны докажем, что из критерия Коши следует существование предела по Гейне.

Зафиксируем произвольную последовательность Гейне в точке x_0 .

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N(\delta) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in \dot{U}_{\delta}(x_0).$$

\Downarrow

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq N(\delta(\varepsilon)) \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Получилось условие Коши для $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, отсюда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.

Для произвольной последовательности Гейне в точке x_0

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Но в силу предыдущей леммы A не зависит от выбора x_n . □

Nt. *Критерий Коши работает и для пределов по множеству.*

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему. □

Th (Принцип локализации). *Пусть*

$$\exists \bar{\delta} \in (0, +\infty) : f(x) = g(x) \forall x \in \dot{U}_{\bar{\delta}}(x_0).$$

Тогда

1 Односторонний предел и т. Вейерштрассе

Def 1. Пусть $f : \dot{U}_{\delta_0}^+(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $\dot{U}_{\delta_0}^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$. Будем говорить, что $A \in \hat{\mathbb{R}}$ является правосторонним пределом f в x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \atop x \in \dot{U}_{\delta_0}^+(x_0)} f(x) = A.$$

Def 2. Функция называется нестрого возрастающей (убывающей) на $x \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, если $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$.

Аналогично определяется строгое возрастание/убывание на X , строгая/нестрогая монотонность на X .

Def 3.

$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup\{f(x), x \in X\}.$$

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf\{f(x), x \in X\}.$$

$$\max_{x \in X} f(x) = \max\{f(x), x \in X\}.$$

$$\min_{x \in X} f(x) = \min\{f(x), x \in X\}.$$

Запишем в кванторах

$$\sup_{x \in X} f(x) = M \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, & \forall x \in X \\ \forall M' < M & \exists x' \in X \quad f(x') > M' \end{cases}$$

$$\sup_{x \in X} f(x) = M \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, & \forall x \in X \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M) \end{cases}$$

Th (Теорема Вейерштрассе). Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Пусть f нестрого возрастает на (a, b) . Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} = \inf_{x \in (a, b)} f(x).$$

Докажем (1) т.к. (2) аналогично.

$$E = \{f(x) : x \in (a, b)\}.$$

$$\sup E = M \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in (a, b) : f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M).$$

Но f нестрого возрастает на $(a, b) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M) \quad \forall x \in [x_\varepsilon, b)$

Но тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) = b - x_\varepsilon : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}^-(b) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$

□

2 Арифмитические операции с пределами функций

Th 2. Пусть $x \neq \emptyset, x_0$ - предельная точка. Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = a_1 \in \mathbb{R}$ Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = a_2 \in \mathbb{R}$ Тогда

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = a_1 \pm a_2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = a_1 \cdot a_2.$$

Доказательство. Для доказательства следует использовать определение предела по Гейне, т.к. для последовательностей подобные свойства уже доказаны. \square

Lem 1 (Лемма о сохранение знаков). Пусть $f : x \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ - предельная точка X . Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$. Тогда $\exists \bar{\delta} > 0 : \forall x \in \dot{U}_{\bar{\delta}}(x_0) \cap X \hookrightarrow$
$$\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ \text{sign} f(x) = \text{sign} a \end{cases}$$

Cl 2.1. Пусть $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}, X \neq \emptyset, x_0$ - предельная точка X . Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$. Тогда $\exists \bar{\delta} > 0 : g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \dot{U}_{\bar{\delta}}(x_0) \cap X$

Доказательство. Следует из леммы о сохранение знаков и о пределе частичного для последовательности. \square

3 О предельном переходе в неравенство

Th (О трех милиционерах). Пусть $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ - предельная точка для X . Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$.

Доказательство. По Гейне. \square

Th 3 (О предельном переходе в неравенство). Пусть $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка для X . Пусть $\begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}} \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ тогда, если $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow A \leq B$.

Nt. Строгое неравенство может не сохраниться при предельном переходе.

4 Нижний и верхний предел последовательности

Def 4. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - предельная точка.