Дискретная математика

Зухба Анастасия Викторовна

(Конспектировал Иван-Чай)

5 лекция

Содержание

1 Сочетания

2 Сочетания с повторениями

3 Числа Фибоначчи

1 Сочетания

C_n^k или $\binom{n}{k}$ - сочетания (выбор без учета порядка) k элементов из n различных.

$$(1+x)^n = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\cdots = +x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}x_{j_4}\dots$$

.

Треугольник Паскаля

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} C_1^0 & C_1^1 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3. \end{matrix}$$

St. $C_{t+1}^k = C_t^{k-1} + C_t^k$.

Комбинаторное доказательство. Выделим некий элемент и разделим все сочетания из t + 1 по k на содержащие его и нет. □

Алгеброическое доказательство.

$$\frac{(t+1)!}{k!(t+1-k)!} = \frac{1}{(k-1)!(t-k+1)!} + \frac{t!}{k!(t-k)!}$$

$\square$

Среднее доказательство.

$$(1-x)^{t+1} = (x+1)(x+1)^t.$$

$\square$

Еще одно доказательство. Повернем треугольник паскаля

1				
1	4			
1	3	6		
1	2	3	4	
1	1	1	1	1

Значение в каждой клетке равно количеству способов прийти в нее из нижнего левого угла и C_{n+m}^n $\square$

2 Сочетания с повторениями

$\overline{C_n^k}$ - сочетания (без учета порядка) с повторениями из n элементного множества. $\overline{C_n^k} = C_{n-1+k}^k$ - Доказательство в предыдущей лекции.

Решить в целых числах уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 \cdots + x_n = k.$$

Количество решений $\overline{C_n^k}$

$$(1+x)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + \ldots C_n^n x^n.$$

Продиффиренцируем

$$n(1+x)^{n-1} = 0 + 1C_n^1x^0 + 2C_n^2x^1 + \ldots (k-1)C_n^kx^{k-1} \ldots (n-1)C_n^nx^{n-1}.$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^kx^{k-1} \quad (*)$$

St.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \quad (*, x = 1).$$

St.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^kC_n^k = 0 \quad (*, x = -1).$$

St.

$$\sum_{k=0}^{n} = \frac{C_n^k}{k+1}.$$

(Для доказательства надо проинтегрировать бином ньютона).

3 Числа Фибоначчи

Def 1.

$$F_1 = F_2 = 1.$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Задача: Количество последовательностей из 0 и 1, не содержащая двух 0 подряд.

$P_1 = 2 = F_3$

$P_2 = 3 = F_4$

$P_{n+2} = P_n + P_{n+1} = F_{n+4}$

Из того, что аналогичную последовательность можно получить отбросив от текущей 1 или 10.

St.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q^n - q^{-n}), \quad q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}..$$

Задача: $\sum = \{a_1, a_2, a_3 \dots a_n\}$ - алфавит. Введем ограничения на слова длины k.

1. a_1 и a_2 обязательно присутствуют в слове.

2. a_3 присутствует на 3-м месте.

3. a_4, a_5 стоят рядом в указоном порядке.

4. Каждая буква встречается в слове не более одного раза.

Задача о правильном порядке учета ограничения, наиболее оптимальный - 2, 3, 1, 4.

Ответ: $1 \cdot (1 + k - 4) \cdot C_{k-3}^2 \cdot 2 \cdot C_{n-5}^{k-5} \cdot (k-5)!$