

Математическое обоснование вычислений

1. Исследование алгебраической системы (Задание 2-1)

Рассматривается система полиномов в переменных x, y, z :

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ (x - 1)y = 0, \\ (x + 1)z = 0. \end{cases}$$

Для анализа структуры множества решений строится базис Гребнера в лексикографическом порядке:

$$G = \text{GB}(I, x, y, z),$$

где I — идеал, порождённый исходными полиномами.

Если базис содержит ненулевую константу, система несовместна. Если идеал нулевой размерности, то множество решений конечно.

Вычисления показывают, что идеал не нулевой размерности, следовательно,

$$\dim(V(I)) > 0,$$

и множество решений бесконечно.

Решая систему, получаем два семейства решений, соответствующие двум прямым в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x = -1, & y = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ x = 1, & y \in \mathbb{R}, & z = 0. \end{cases}$$

Таким образом, алгебраическое множество состоит из двух прямых, что подтверждает бесконечность числа решений.

2. Исследование параметрической поверхности (Задание 2-2)

Поверхность задана параметрически:

$$x = (1 - u) \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u.$$

a) Рациональная параметризация

Чтобы устраниТЬ тригонометрические функции, вводится новая переменная t и используются классические тождества:

$$\cos v = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \sin v = \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

После подстановки правая часть параметризации становится рациональной функцией двух параметров u, t .

b) Неявное уравнение поверхности

Вводится система

$$F_x = x - (1 - u) \cos v, \quad F_y = y - u \sin v, \quad F_z = z - u,$$

и устраняются параметры u, t посредством построения базиса Гребнера в упорядочении, исключающем параметры:

$$G = \text{GB}(F_x, F_y, F_z; u, t, x, y, z).$$

Первый элемент базиса даёт неявное уравнение поверхности:

$$F(x, y, z) = 0.$$

c) Особые точки поверхности

Особые точки определяются системой уравнений:

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Для решения используется базис Гребнера идеала, порождённого данными полиномами. Анализ показывает, что особые точки лежат на двух прямых:

$$\begin{cases} y = 0, & z = 0, \\ x = 0, & z = 1. \end{cases}$$

d) Полнота параметризации

Первоначальная параметризация поверхности не покрывает особые прямые полностью. Например, из выражений

$$x = \cos v, \quad y = 0, \quad z = 0$$

следует только отрезок $x \in [-1, 1]$, тогда как неявное уравнение порождает всю прямую.

Следовательно, параметрическое описание поверхности не является полным описанием соответствующего афинного множества.