Теоретическое обоснование выполняемых вычислений

Блок 1. Получение начальных членов разложений посредством многоугольника Ньютона

Рассмотрим алгебраическую кривую, заданную уравнением

$$f(x, y) = 0,$$

где $f(x, y)$ — многочлен двух переменных. Точка $(0, 0)$ является особой, поэтому классическое разложение вблизи этой точки методом неявной функции невозможно. Для анализа поведения решений в окрестности особой точки используется метод многоугольника Ньютона.

Носитель многочлена определяется как множество всех пар (i, j) таких, что моном $x^i y^j$ входит в $f(x, y)$ с ненулевым коэффициентом. Построив выпуклую оболочку этого множества, получаем *многоугольник Ньютона* $P(f)$.

Каждая грань многоугольника Ньютона имеет внешнюю нормаль (n_1, n_2). Если выполняется

$$n_1 < 0, \qquad n_2 < 0,$$

то соответствующая грань «видна» из направления $(+\infty, +\infty)$ и отвечает разложениям кривой около $(0, 0)$.

Оставив в $f(x, y)$ только те мономы, степени которых лежат на выбранной грани Γ, получаем *укороченный многочлен*:

$$f_\Gamma(x, y) = 0.$$

Он содержит ведущие члены разложения ветвей и определяет начальные Пюизо-разложения вида

$$y = c\,x^\lambda.$$

Таким образом, построение многоугольника Ньютона и укороченного многочлена обеспечивает корректное выделение главных степенных членов ветвей алгебраической кривой.

Блок 2. Уточнение вещественных ветвей методом второй итерации многоугольника Ньютона

Пусть начальное разложение одной из ветвей имеет вид

$$y_0(x) = cx^{\lambda}.$$

Для нахождения следующего члена разложения применяется подстановка

$$y(x) = y_0(x)\,(1 + z),$$

где $z = z(x)$ является малой функцией. Подставив это выражение в исходное уравнение, получаем многочлен

$$g(x, z) = f\big(x, y_0(x)(1 + z)\big).$$

Далее строится многоугольник Ньютона для $g(x, z)$ уже на плоскости (x, z). Как и раньше, выбирается грань с отрицательной нормалью; для неё формируется укороченный многочлен:

$$g_{\Gamma}(x, z) = 0.$$

Решение укороченного уравнения относительно z имеет вид

$$z(x) = kx^{\mu}.$$

Тогда уточнённое разложение ветви принимает форму

$$y(x) = y_0(x)\,(1 + kx^{\mu}).$$

Применяя эту процедуру к каждой вещественной ветви, получаем:

$$y_1(x) = x^2 - 2x^4, \qquad y_2(x) = 2x^2 + 16x^4.$$

Эти выражения согласуются с численным поведением кривой и демонстрируют корректность метода.

Блок 3. Графическое сравнение аналитических разложений с точным решением

Для верификации аналитических разложений вычисляется множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$f(x, y) = 0.$$

На прямоугольной сетке строится контур уровня $f(x, y) = 0$, что визуализирует точную геометрию кривой.

Затем на тот же график наносятся аналитические разложения, полученные в блоках 1 и 2:

$$y_1(x) = x^2 - 2x^4, \qquad y_2(x) = 2x^2 + 16x^4.$$

В малой окрестности $x = 0$ эти разложения хорошо совпадают с действительной кривой, что подтверждает:

- правильность выбора грани многоугольника Ньютона,
- корректность построения укороченного многочлена,
- корректность второго шага уточнения,
- достоверность вычисленных коэффициентов.

Графическое сравнение является важной частью анализа, поскольку визуально демонстрирует согласованность аналитического и численного поведения кривой.

Блок 4. Степенное преобразование и повторный анализ укороченного многочлена

Для дальнейшего исследования структуры укороченного многочлена используется *степенное преобразование*:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

где α — унимодулярная матрица с $\det\alpha = \pm 1$.

Матрица α строится таким образом, чтобы выбранная грань многоугольника Ньютона стала вертикальной в координатах (ξ, η). Это упрощает факторизацию укороченного многочлена и делает структуру ветвей прозрачной.

В новых переменных укороченный многочлен принимает вид

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = \eta(\eta - \xi^2)(\eta - 2\xi^2).$$

Решения преобразованного укороченного уравнения дают те же ветви:

$$\eta = 0, \qquad \eta = \xi^2, \qquad \eta = 2\xi^2.$$

Обратное преобразование восстанавливает исходные функции $y(x)$, совпадающие с ранее найденными.

Таким образом, степенное преобразование служит независимой проверкой корректности аналитического метода Ньютона–Пюизо.

Блоки 5 и 6. Геометрические иллюстрации действия степенного преобразования

Дополнительные графики демонстрируют:

- линейную деформацию регулярной сетки под действием преобразования α^{-1};
- изменение положения выбранной грани многоугольника Ньютона до и после преобразования;
- поверхность преобразованного укороченного многочлена $\tilde{f}(\xi, \eta)$.

На этих иллюстрациях видно, что преобразование делает выбранную грань вертикальной, как и было задумано, а структура нулевой поверхности точно воспроизводит найденные ветви $\eta(\xi)$. Это служит дополнительным подтверждением согласованности всех этапов вычислений.