

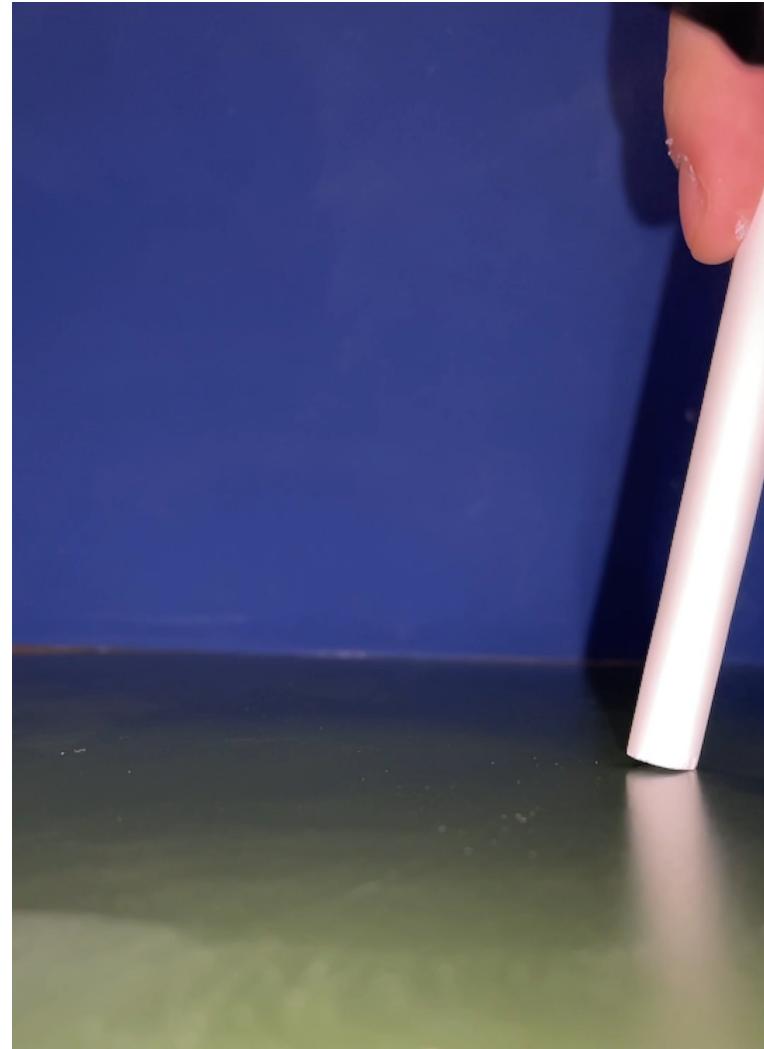


Problem No 11

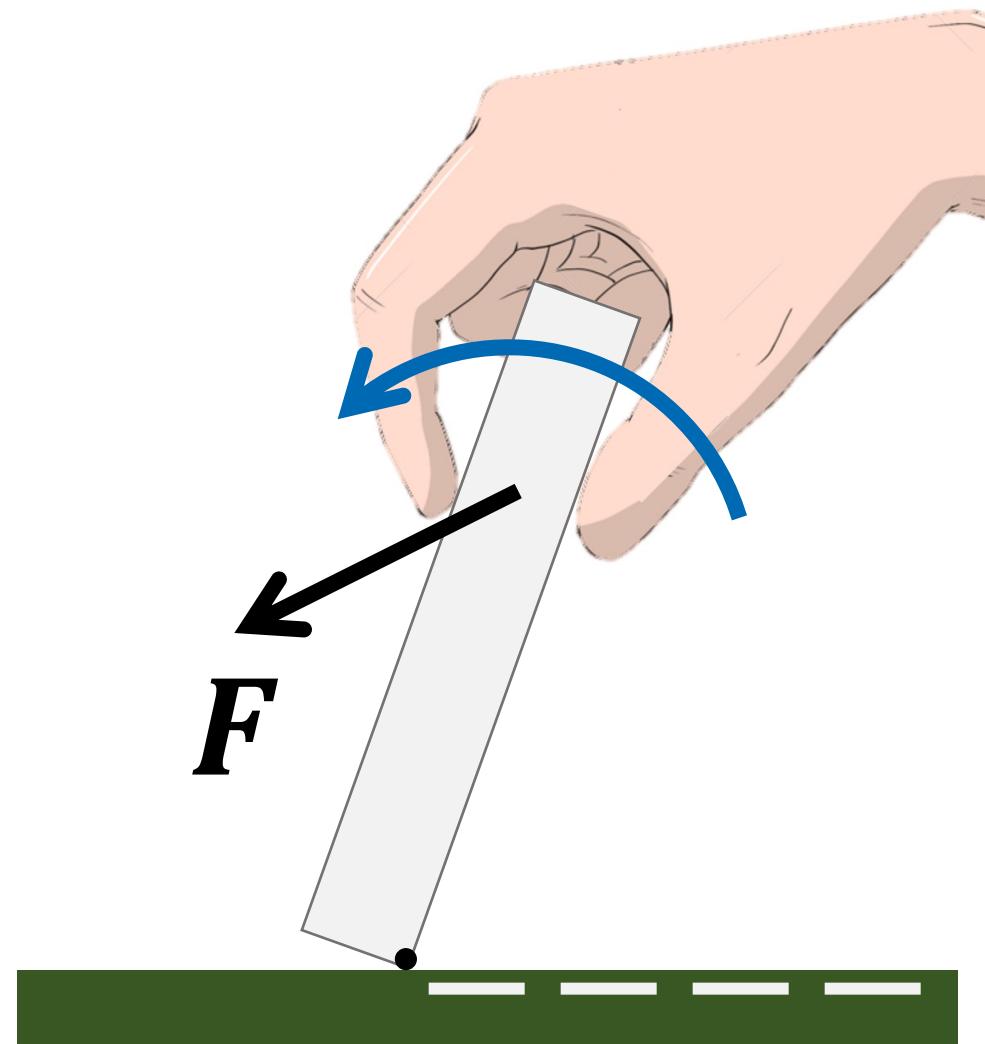
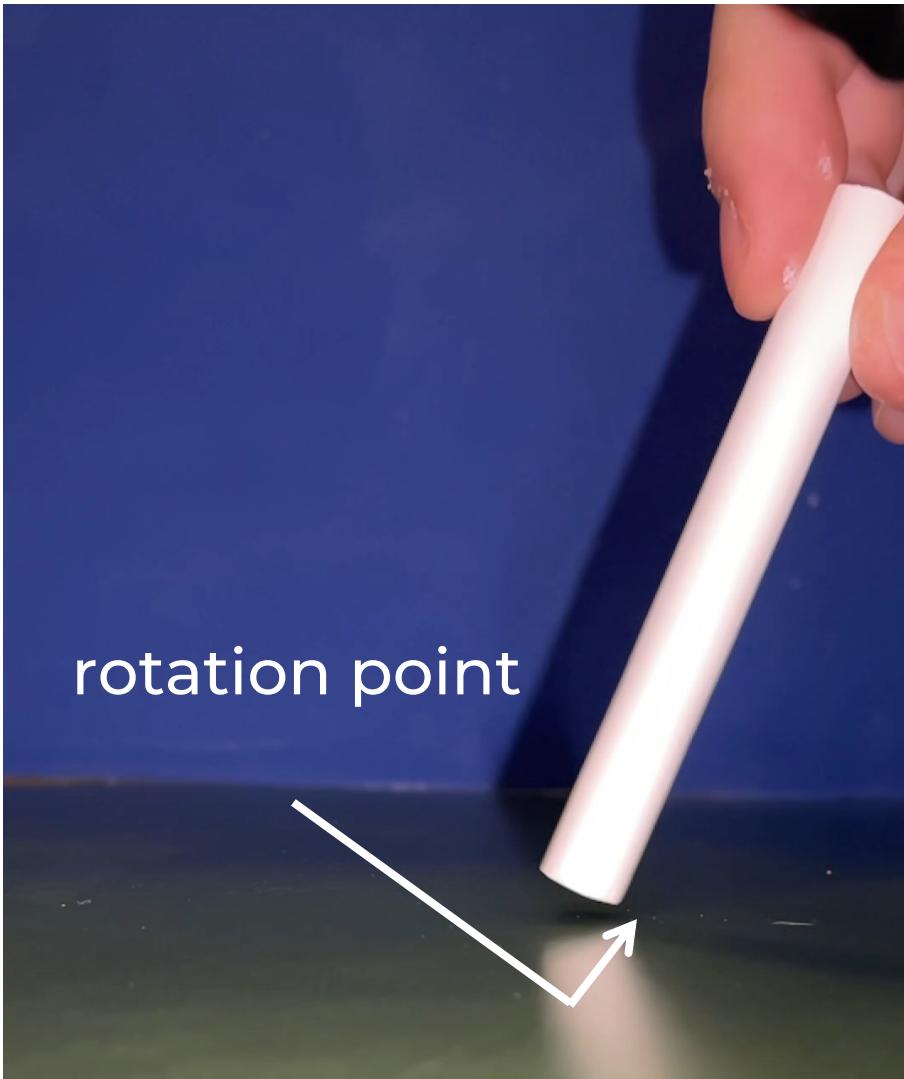
The chalk trick

Sophia Kaniukova

It is possible to draw continuous lines in a blackboard with chalk. However, by changing the angle of contact, the line drawn on the board **becomes a dotted line**, though the movement is still continuous. **What parameters from the relative movement** between the chalk and the board can **be inferred from the resulting trace**? Is it possible to infer anything about **the dimensions of the chalk**?



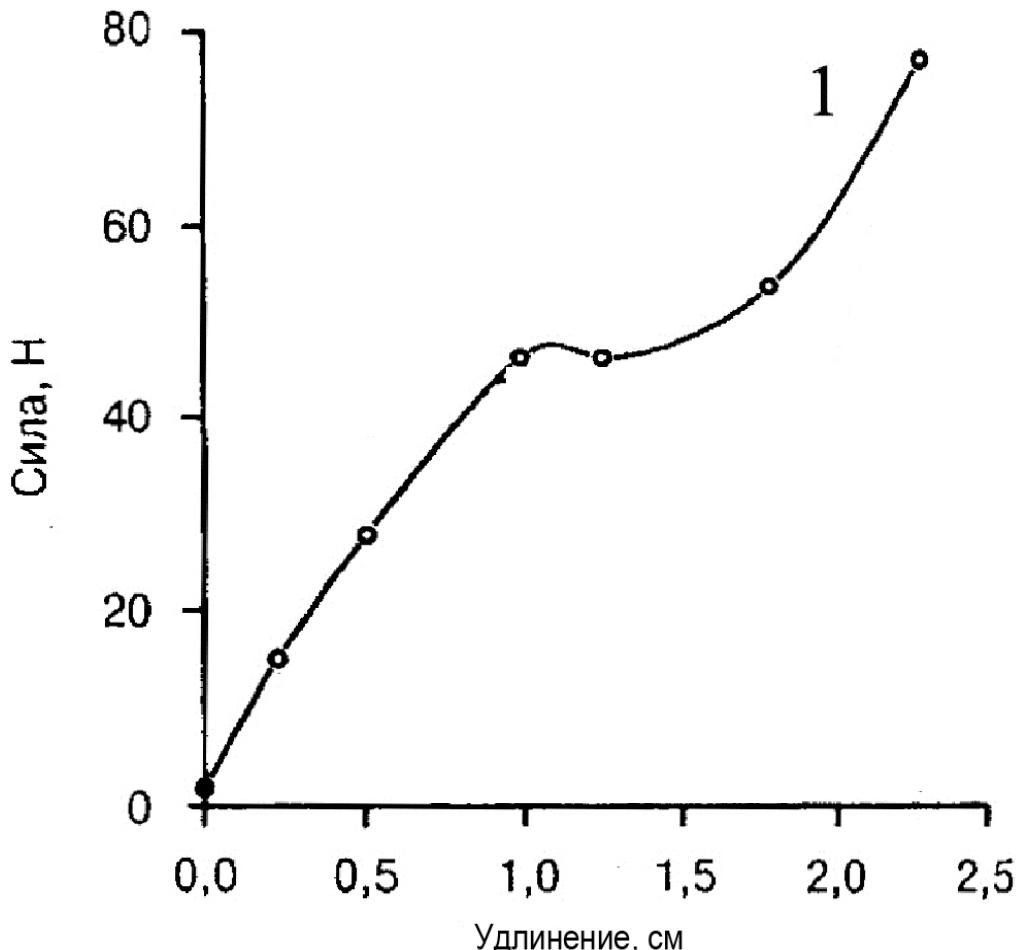
Hand influence



1. Dotted line appearance

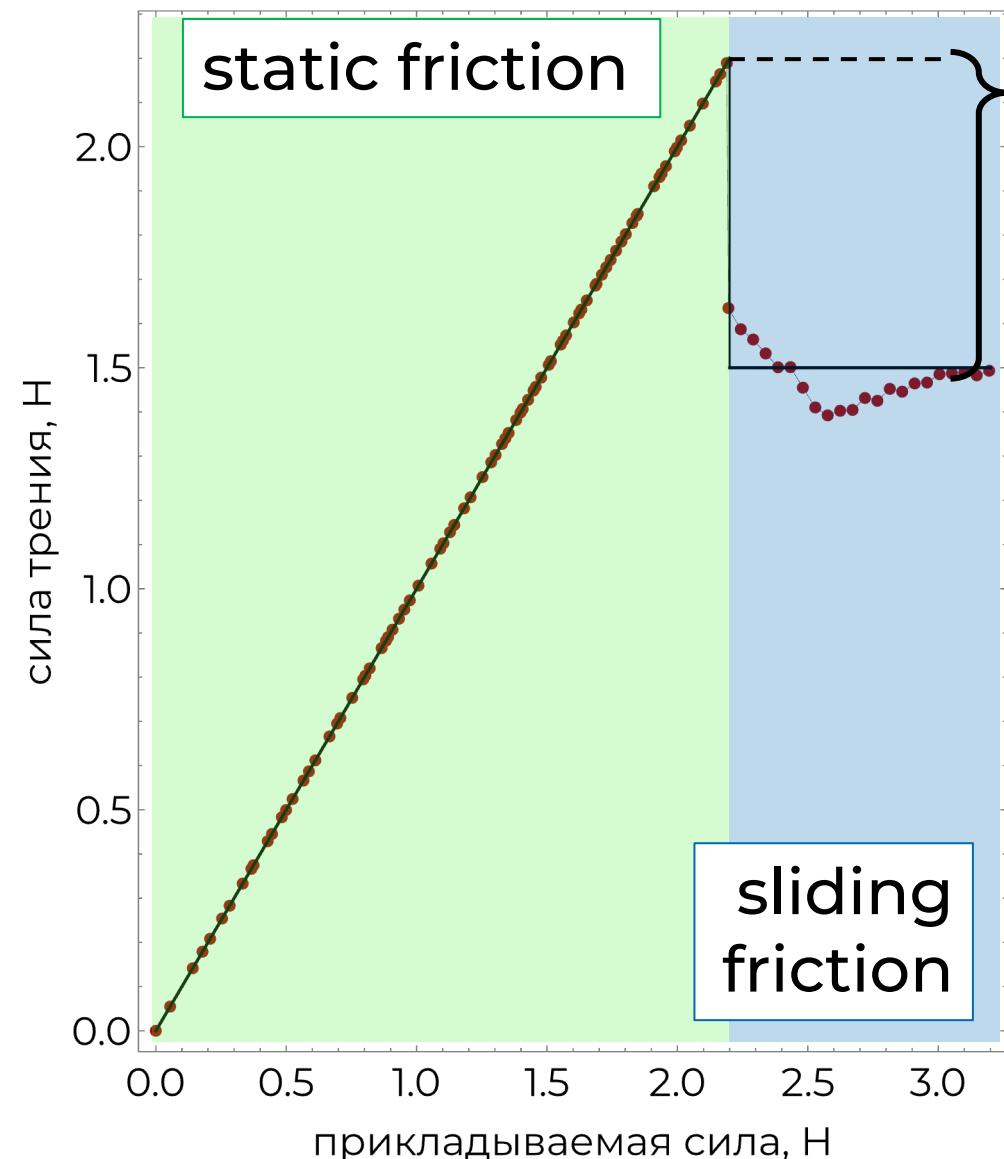
Hand influence

Кичайкина, Н.Б. Биомеханика двигательных действий /Н.Б.
Кичайкина, А.В. Самсонова : учебно-методическое пособие /Под
ред Н.Б. Кичайкиной.- СПб: НГУ им. П.Ф. Лесгафта, 2014

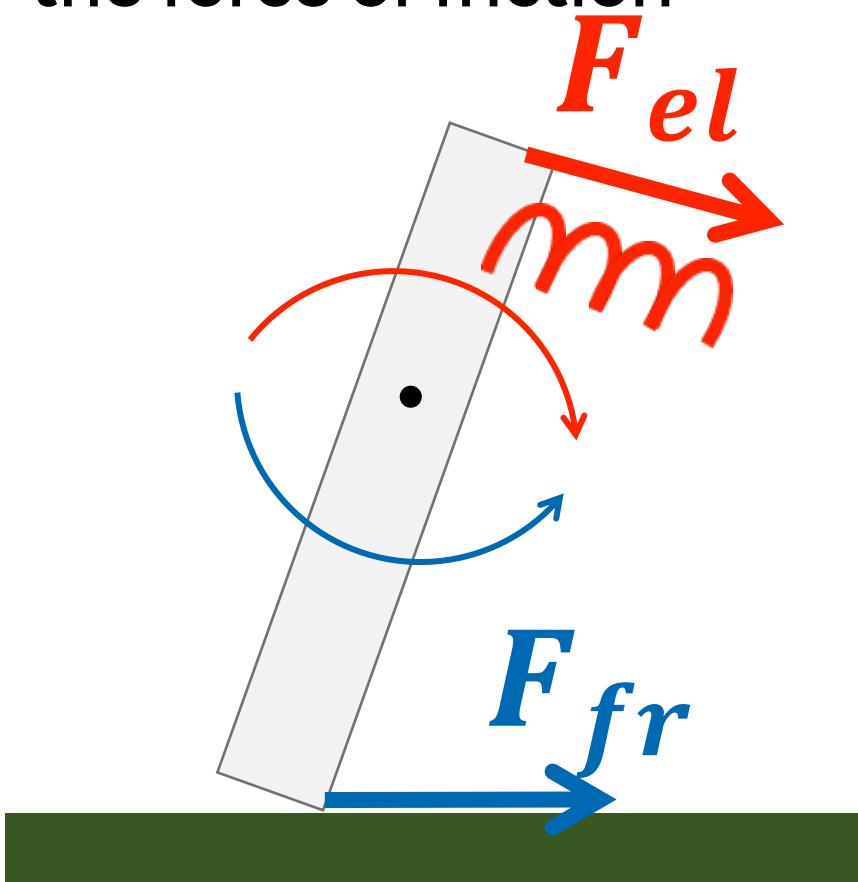


1. Dotted line appearance

Hand influence



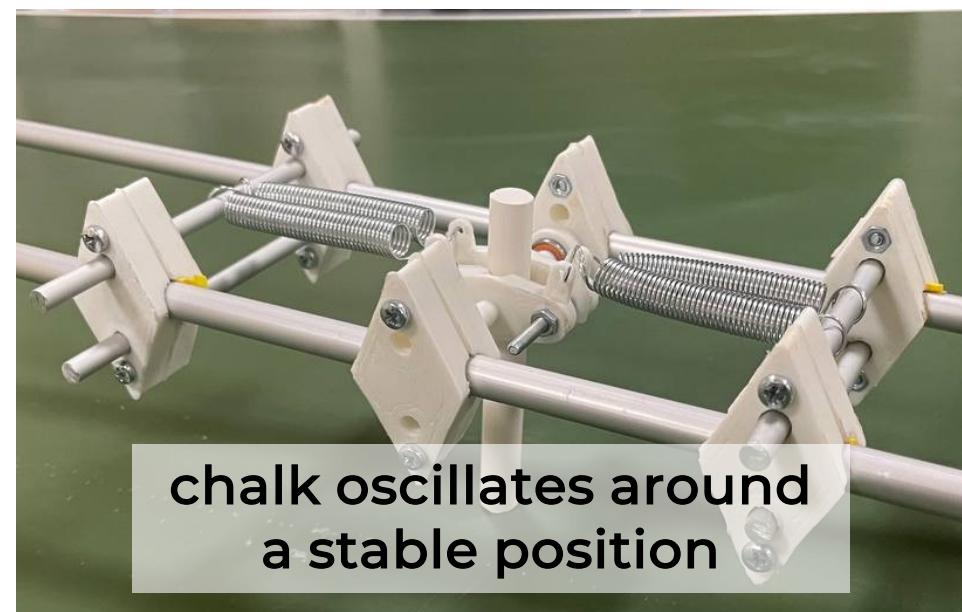
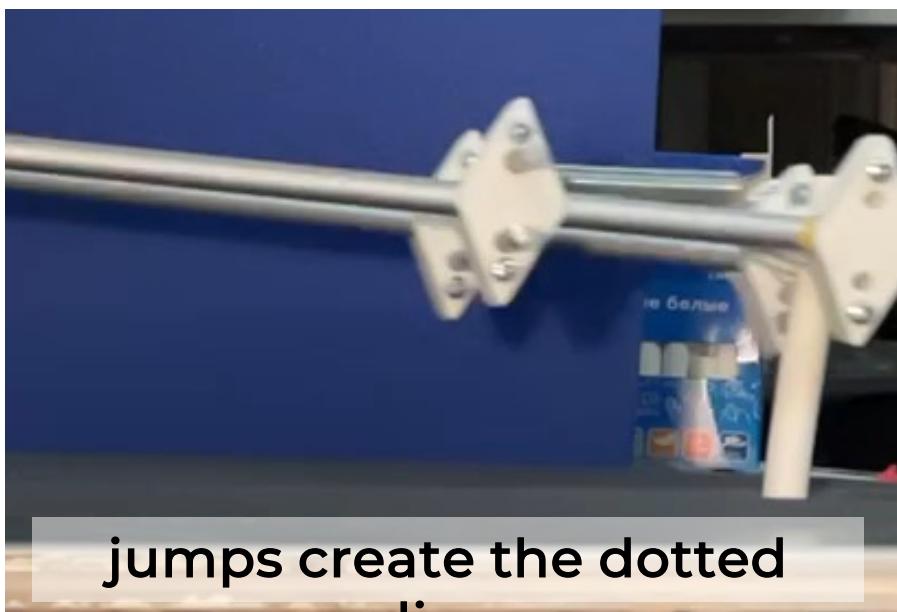
sharp decrease in
the force of friction



1. Dotted line appearance

Human factor

Acknowledgements to Aleksei Cherkasov



Overview



Phenomenon reasons

Hand influence. Experimental setup.

2

Direct problem solution

Motion equations. Calculation model drafting. Penleve paradox.

3

Model verification

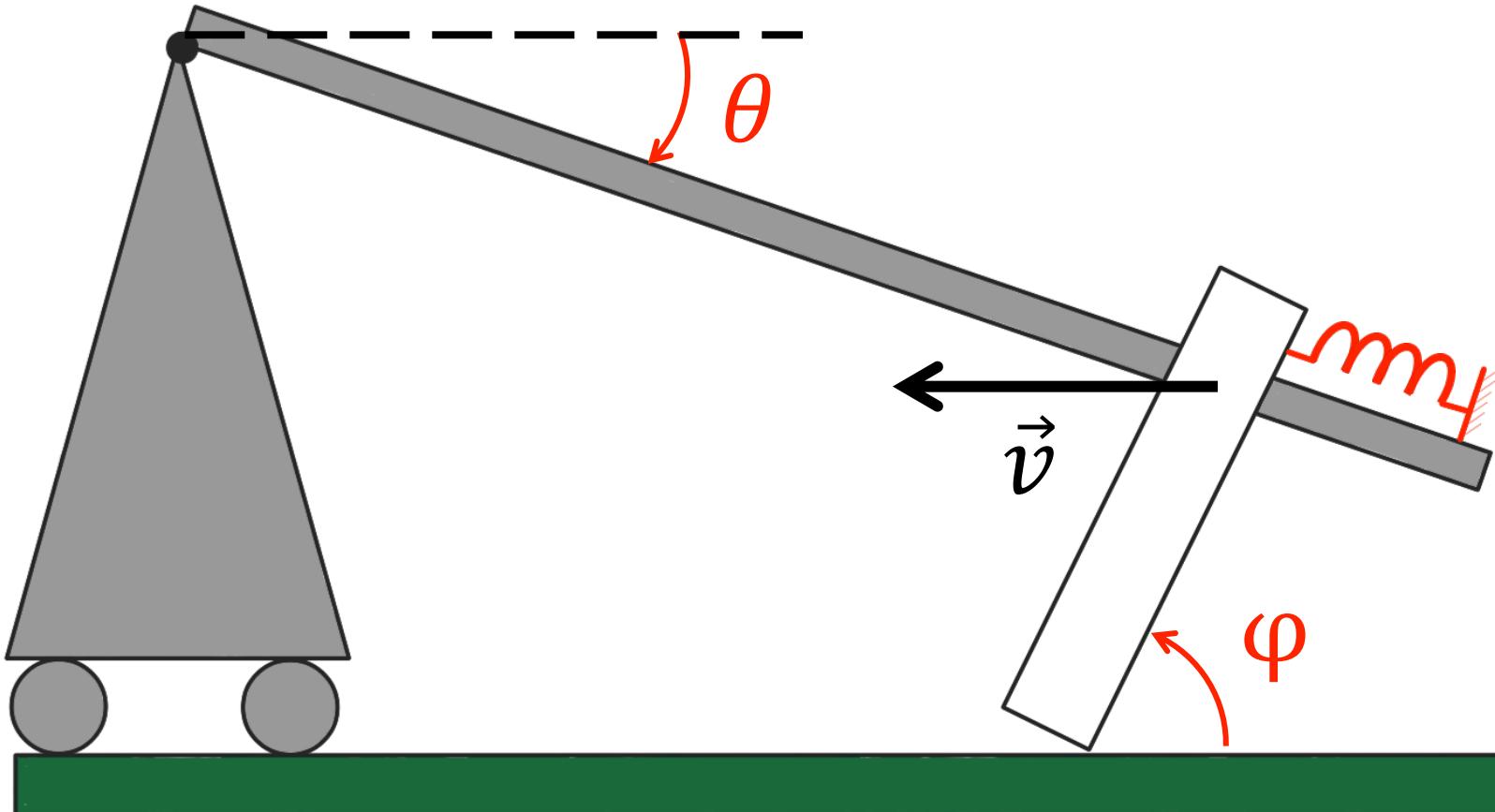
Search for a predictive parameter.

4

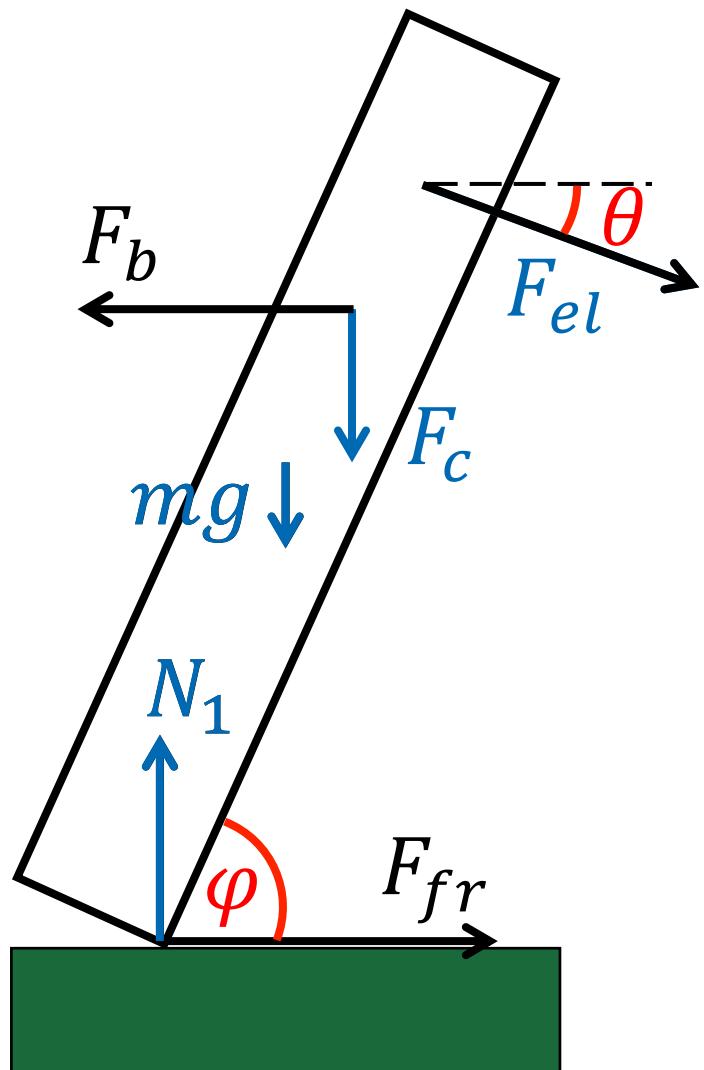
Inverse problem solution

Motion parameters definition. Restoring value precision.

Mechanical system with 2 degrees of freedom



II Newton's law



projection Oy:

$$m\ddot{y} = -F_c + N_1 - mg - F_{el} \sin \theta$$

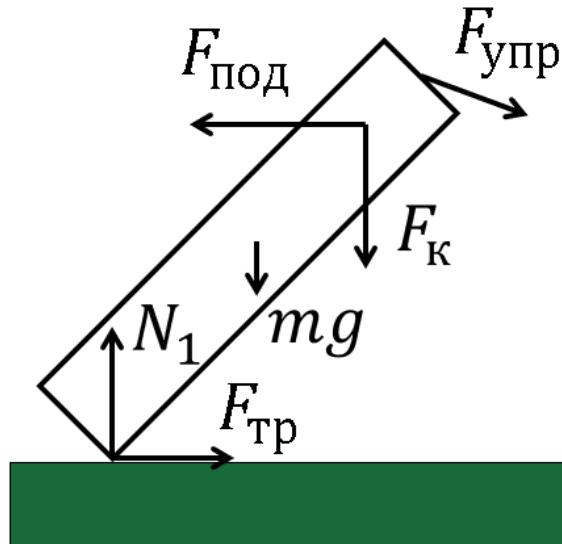
projection Ox:

$$m\ddot{x} = F_b + F_{el} \cos \theta - F_{fr}$$



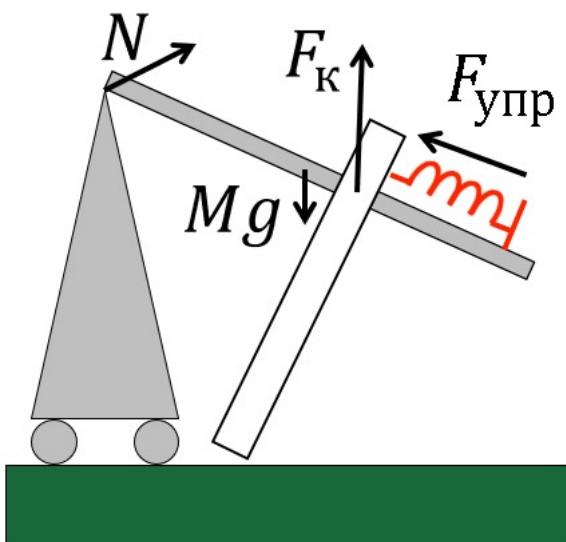
torque equation

Torque equation



$$J_2 \overrightarrow{\epsilon_{\varphi+\theta}} = \overrightarrow{M_N} + \overrightarrow{M_{F_{тр}}} + \\ + \overrightarrow{M_{mg}} + \overrightarrow{M_{F_{упр}}} - m[\vec{v}_o \times \vec{v}_c] + \overrightarrow{M_{F_{\Pi}}}$$

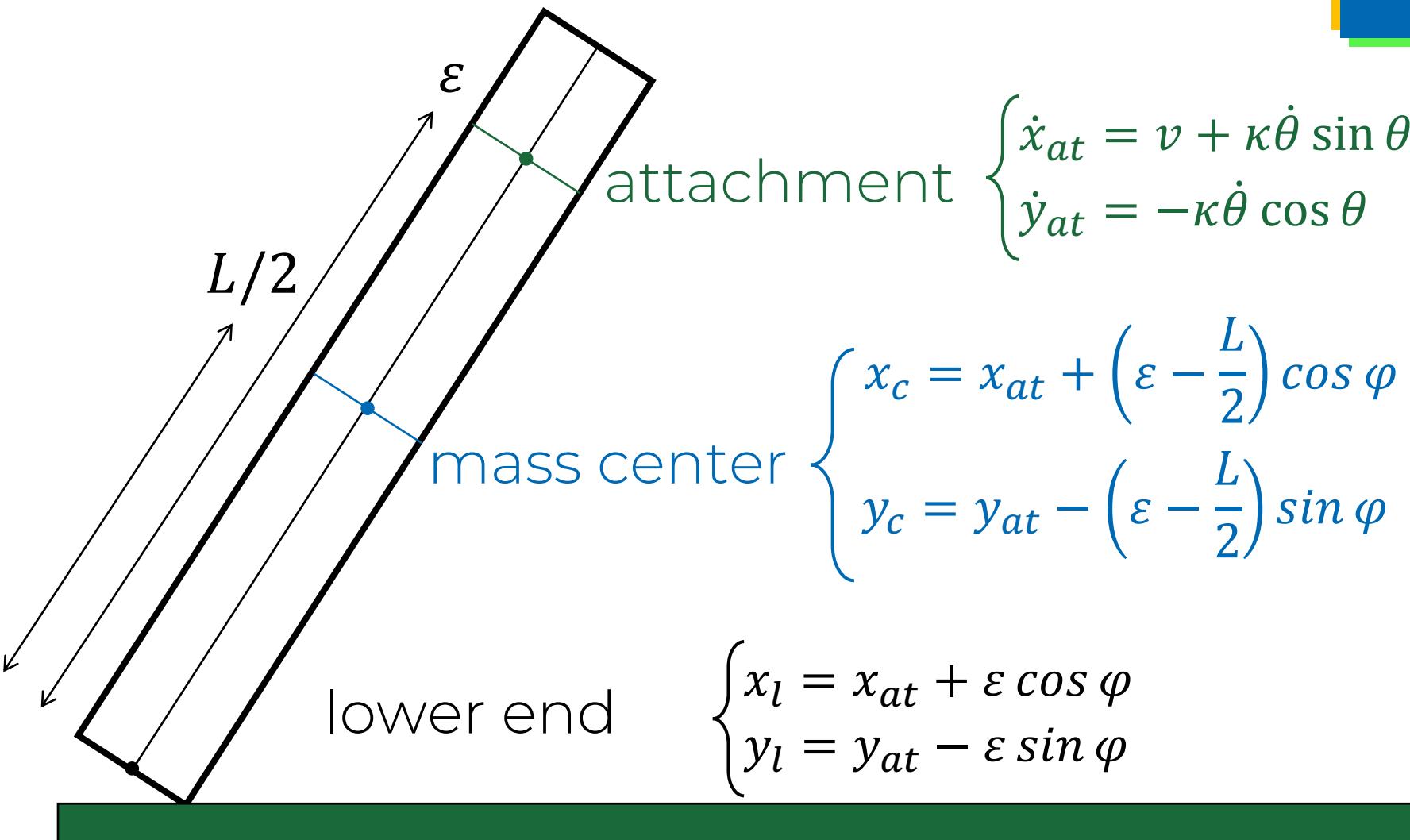
theorem for moving point



$$J_1 \overrightarrow{\epsilon_{\theta}} = \overrightarrow{M_{Mg}} + \overrightarrow{M_{F_{\Pi}}} + \overrightarrow{M_{N_2}} - \\ - m[\vec{v}_A \times \vec{v}_c]$$

theorem for moving point

Kinematic connections



Linear complementarity problem

5 variables vs 4 equations:

F_K – construction pressure force

F_H – force in bearing

N_1 – reaction force (contact with board)

θ – tilt angle of the construction shoulder

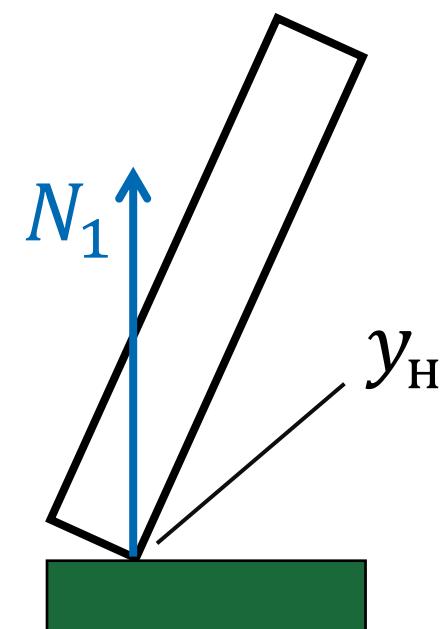
φ – tilt angle of the chalk



$$N_1 = 0 \\ \Leftrightarrow \text{no surface contact}$$

$$\ddot{y}_H = 0 \\ \Leftrightarrow \text{surface contact}$$

$$N_1 \cdot \ddot{y}_H = 0$$



Leine, R. I., Brogliato, B., & Nijmeijer, H. (2002). Periodic motion and bifurcations induced by the Painlevé paradox. European Journal of Mechanics - A/Solids, 21(5), 869–896.

Overview



Phenomenon reasons

Hand influence. Experimental setup.



Direct problem solution

Motion equations. Calculation model drafting. Penleve paradox.

3

Model verification

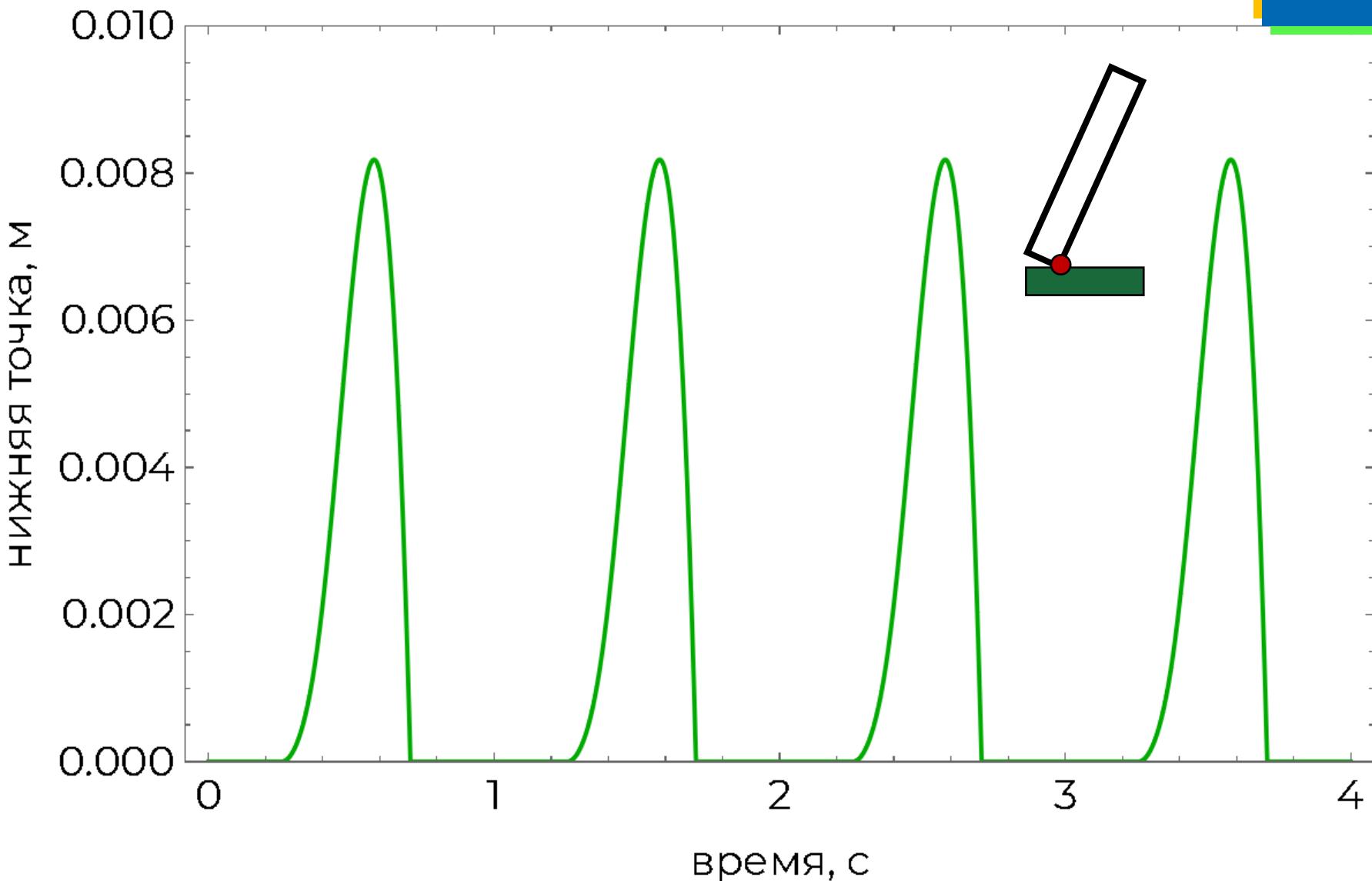
Search for a predictive parameter.

4

Inverse problem solution

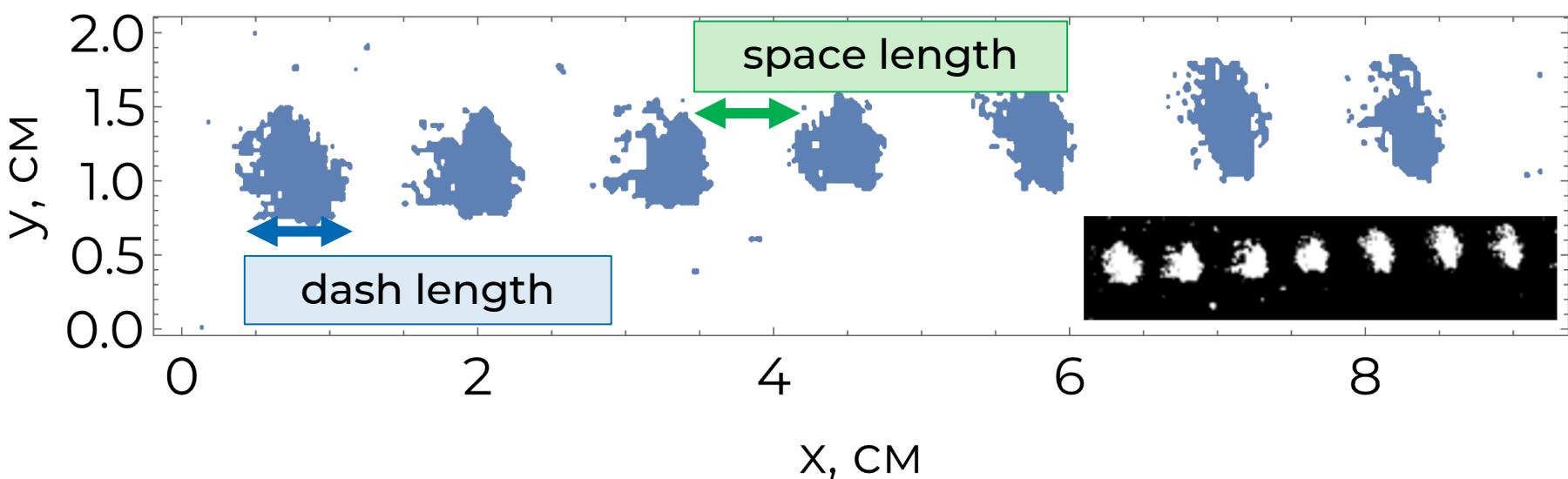
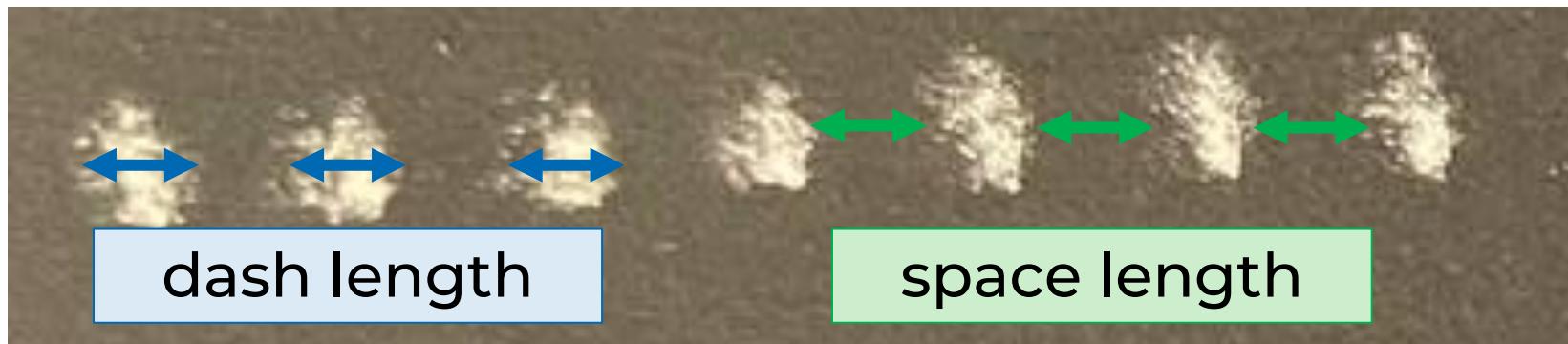
Motion parameters definition. Restoring value precision.

Theoretical trajectory



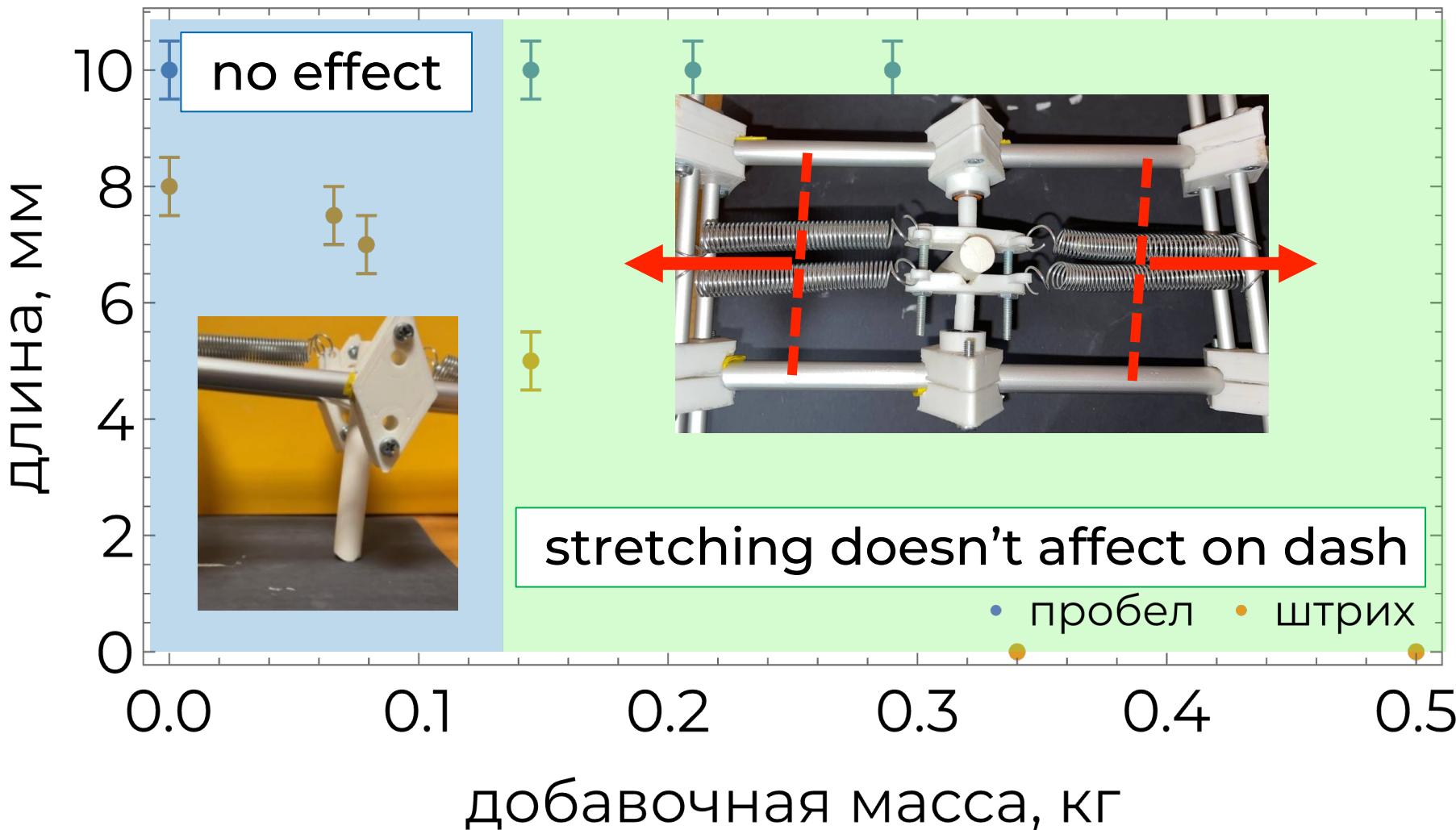
5. Search for a predictive parameter

Dotted line parameters



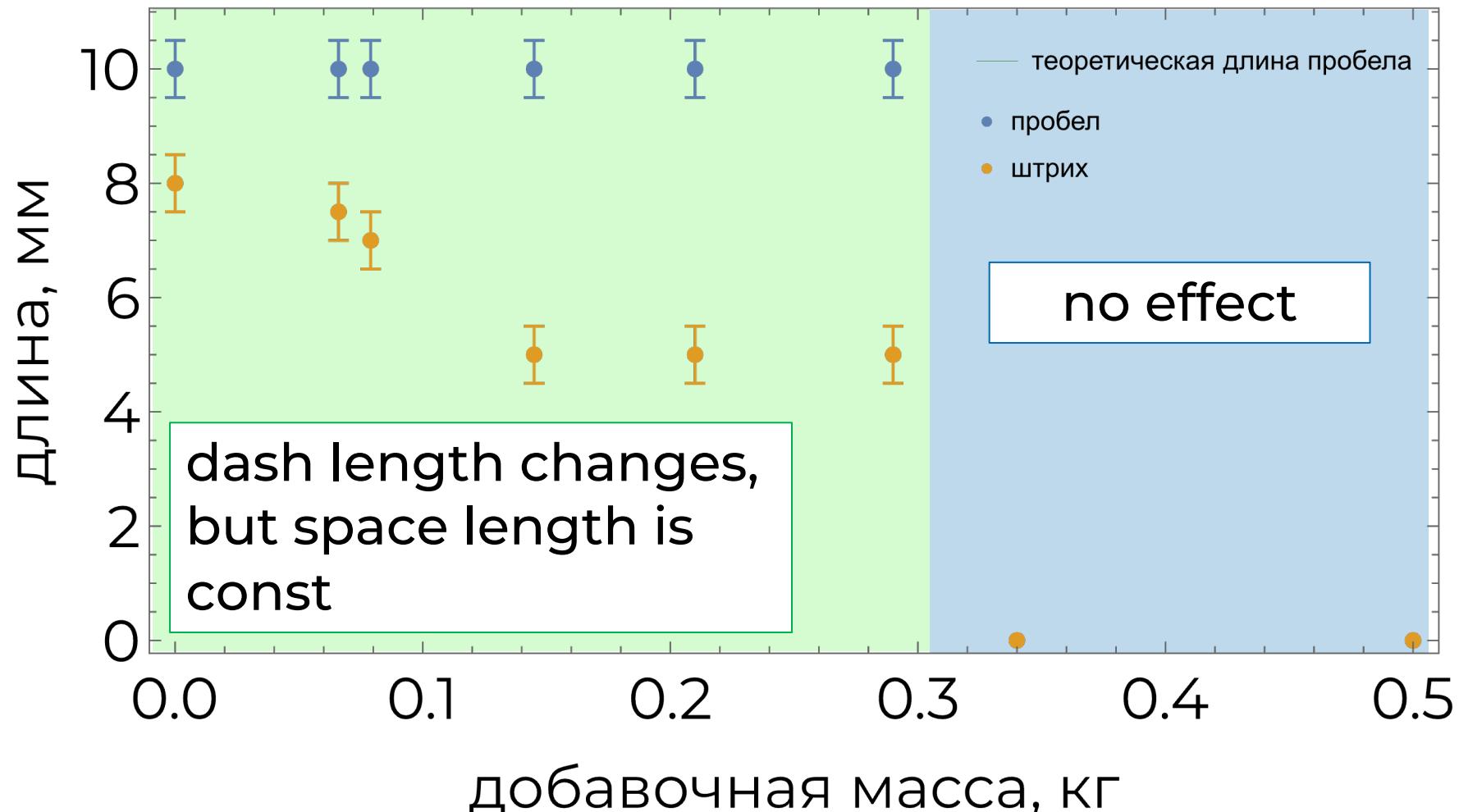
Dash vs elastic force

symmetrically increase the stretching of the springs, keeping the initial angle, speed 8.9 cm/s, 3 exp. point per point



Dash vs inertia

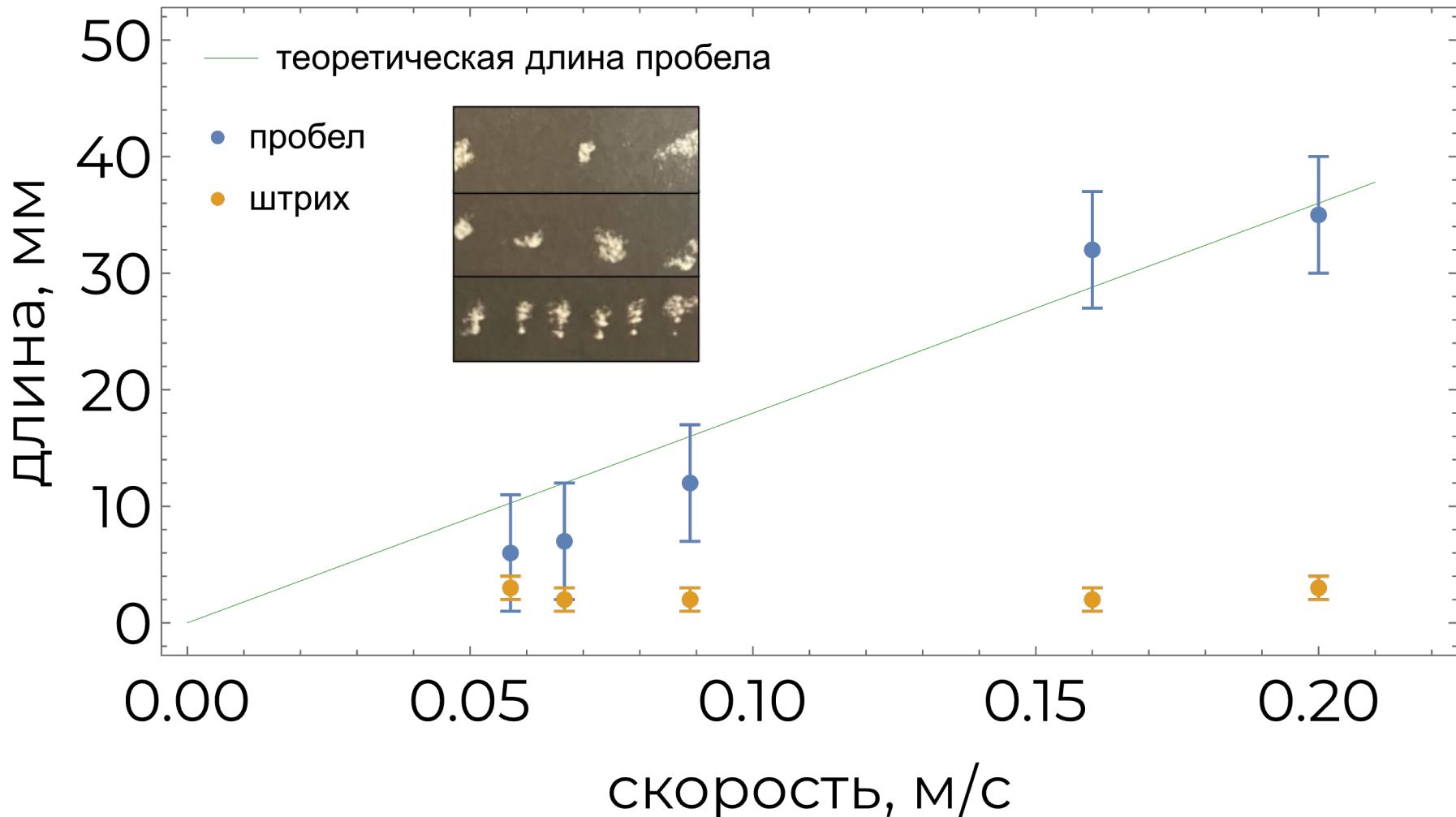
Add a point mass to the fixture, increasing the moment of inertia of the structure, speed 8.9 cm/s, 3 exp. point per point



Dash vs velocity

change the speed of the screwdriver, 3 exp. point per point

linear dependency \Rightarrow flight time is const

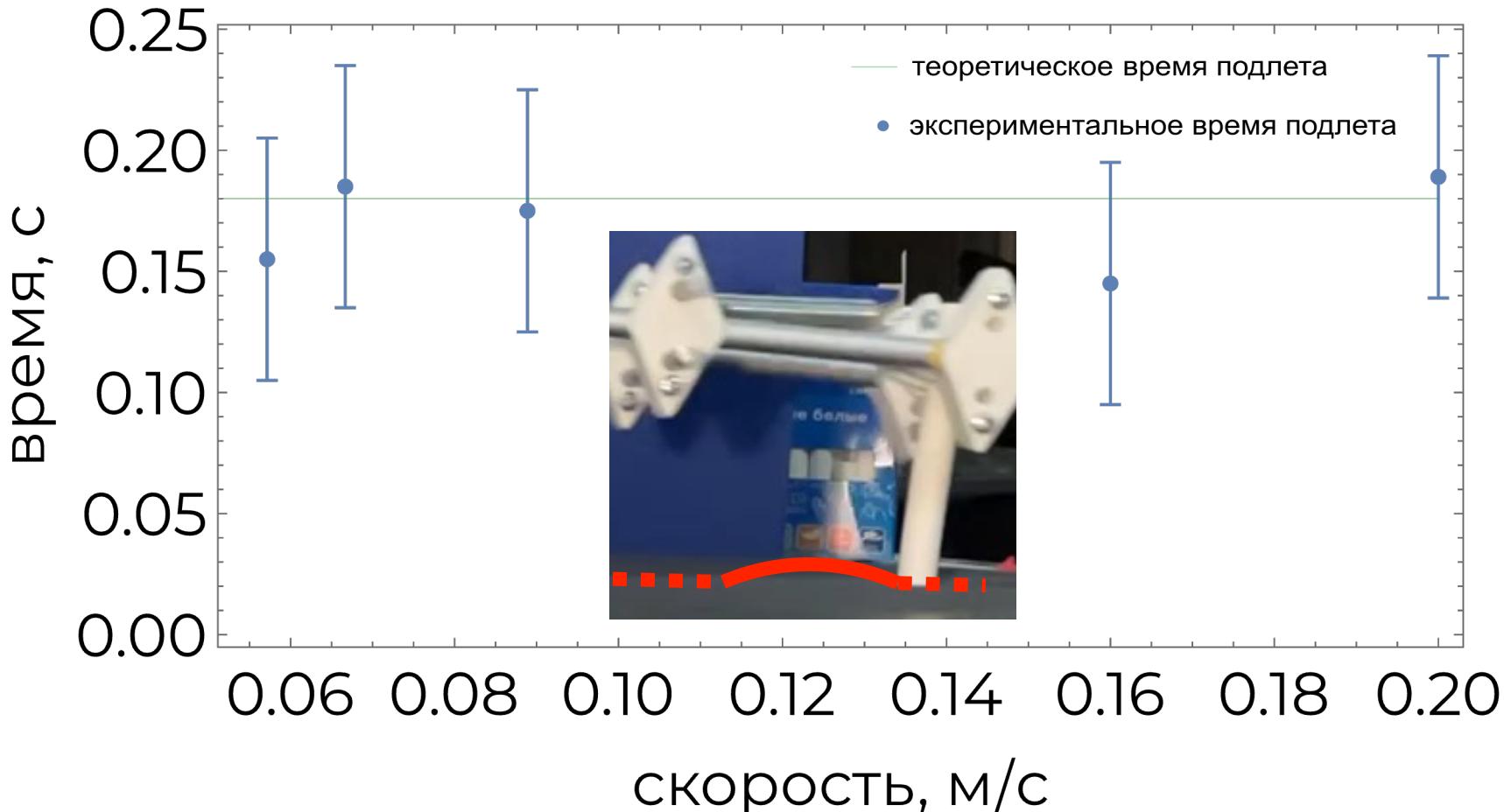


Flight time vs velocity

change the speed of the screwdriver, 3 exp. point per point

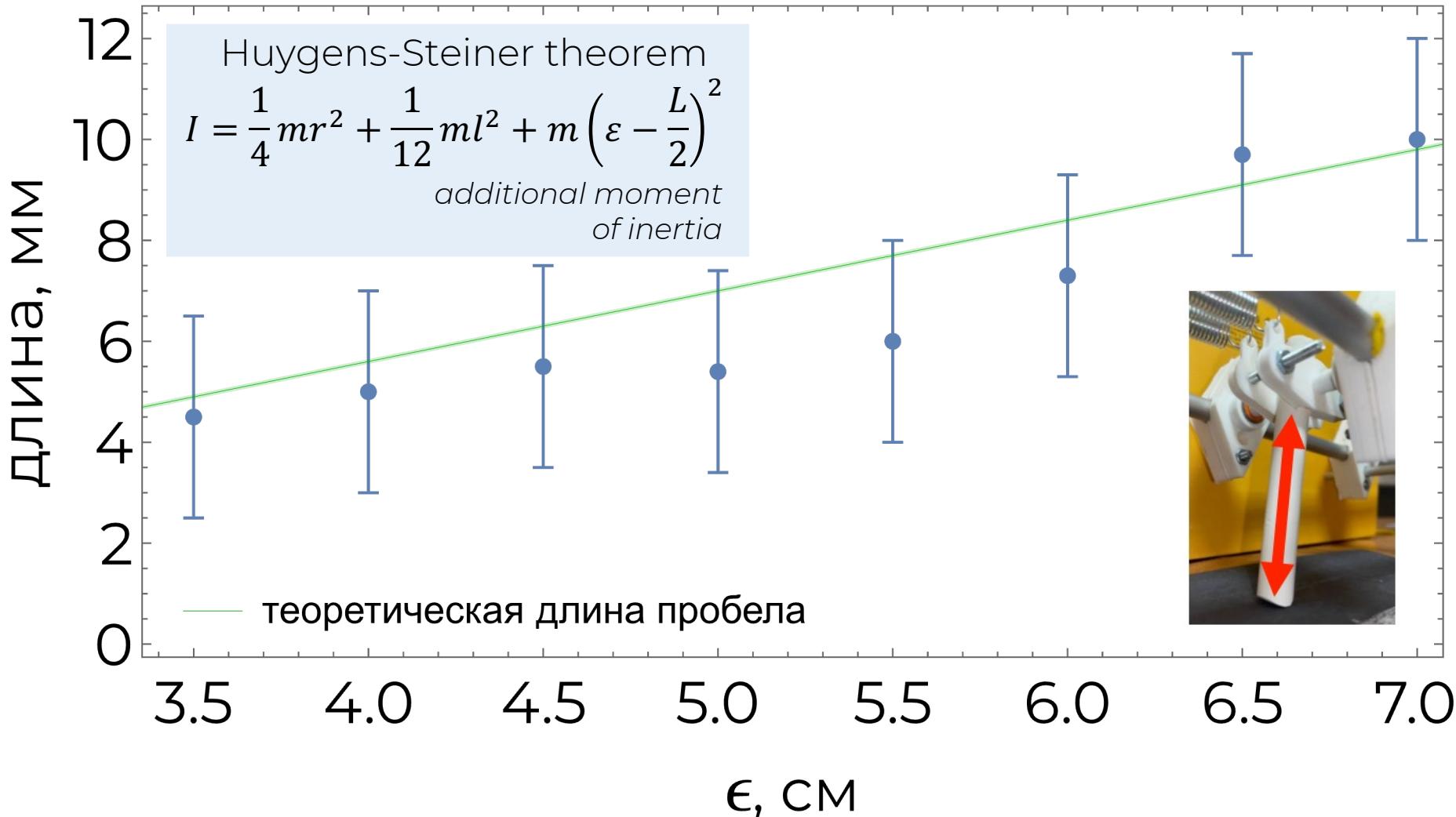
flight time doesn't depends on velocity ⇒

velocity is restored by the length of the space



Dash length vs chalk inertia

Change the distance from the attachment point to the contact point with the surface \Rightarrow change the additional moment of inertia.



Overview



Phenomenon reasons

Hand influence. Experimental setup.



Direct problem solution

Motion equations. Calculation model drafting. Penleve paradox.



Model verification

Search for a predictive parameter.

4

Inverse problem solution

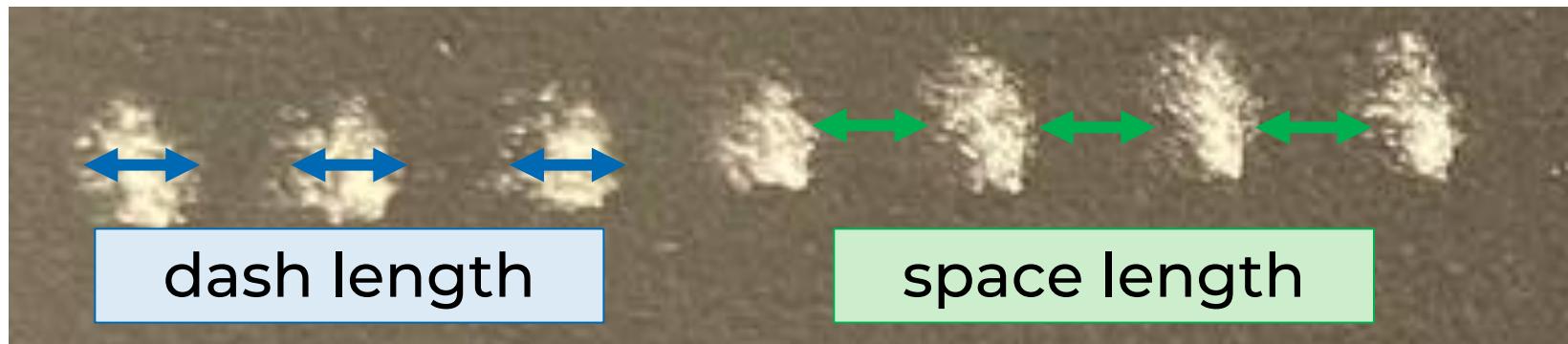
Motion parameters definition. Restoring value precision.

Motion parameters

What parameters from the relative movement between the chalk and the board can **be inferred from the resulting trace?**

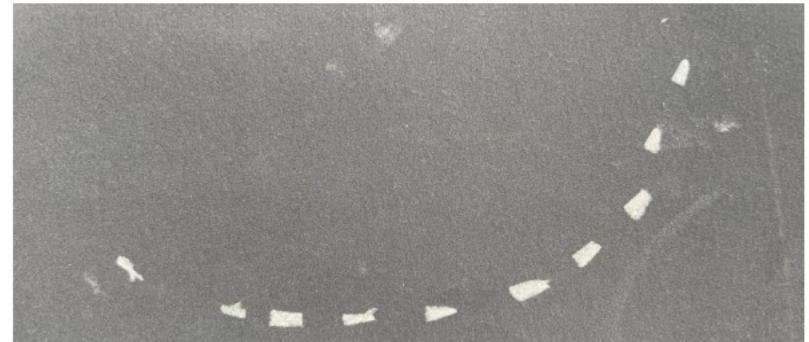
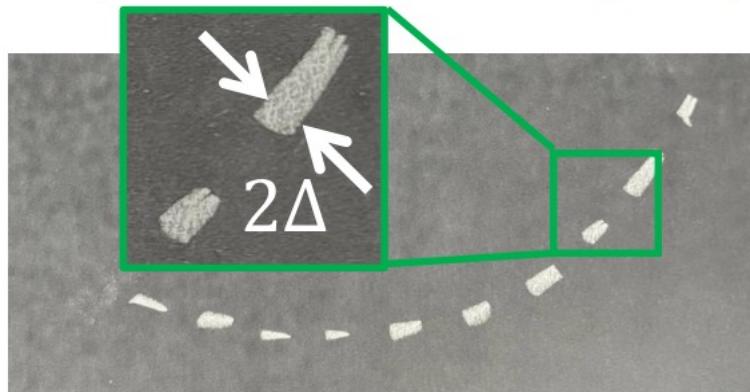
image processing
velocity
acceleration

⇒ trajectory
⇒ space length
⇒ velocity

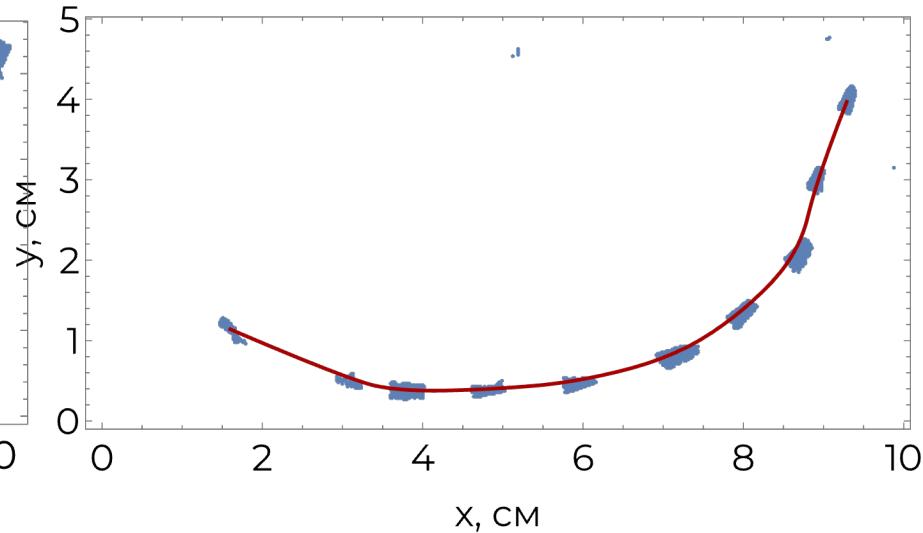
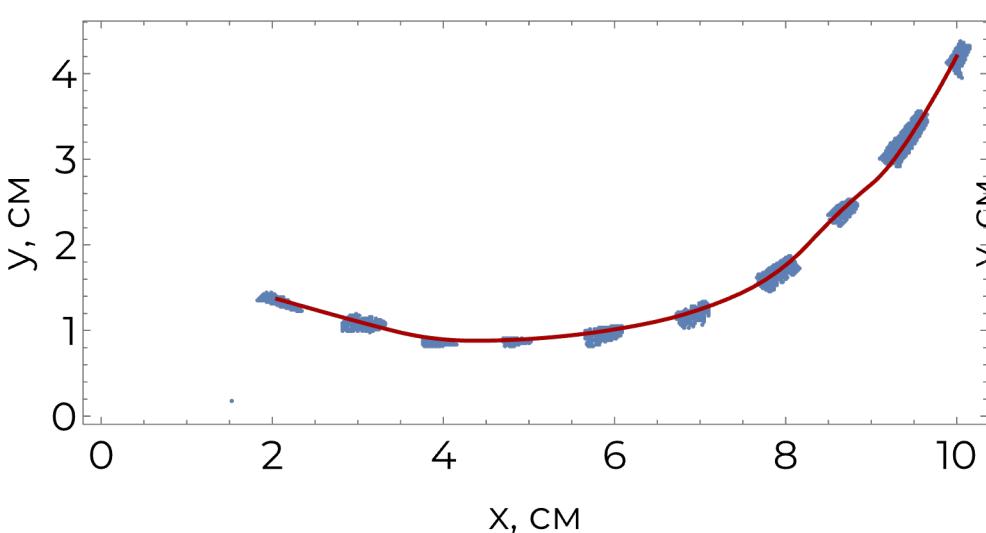


Trajectory

Different experimental dashed lines

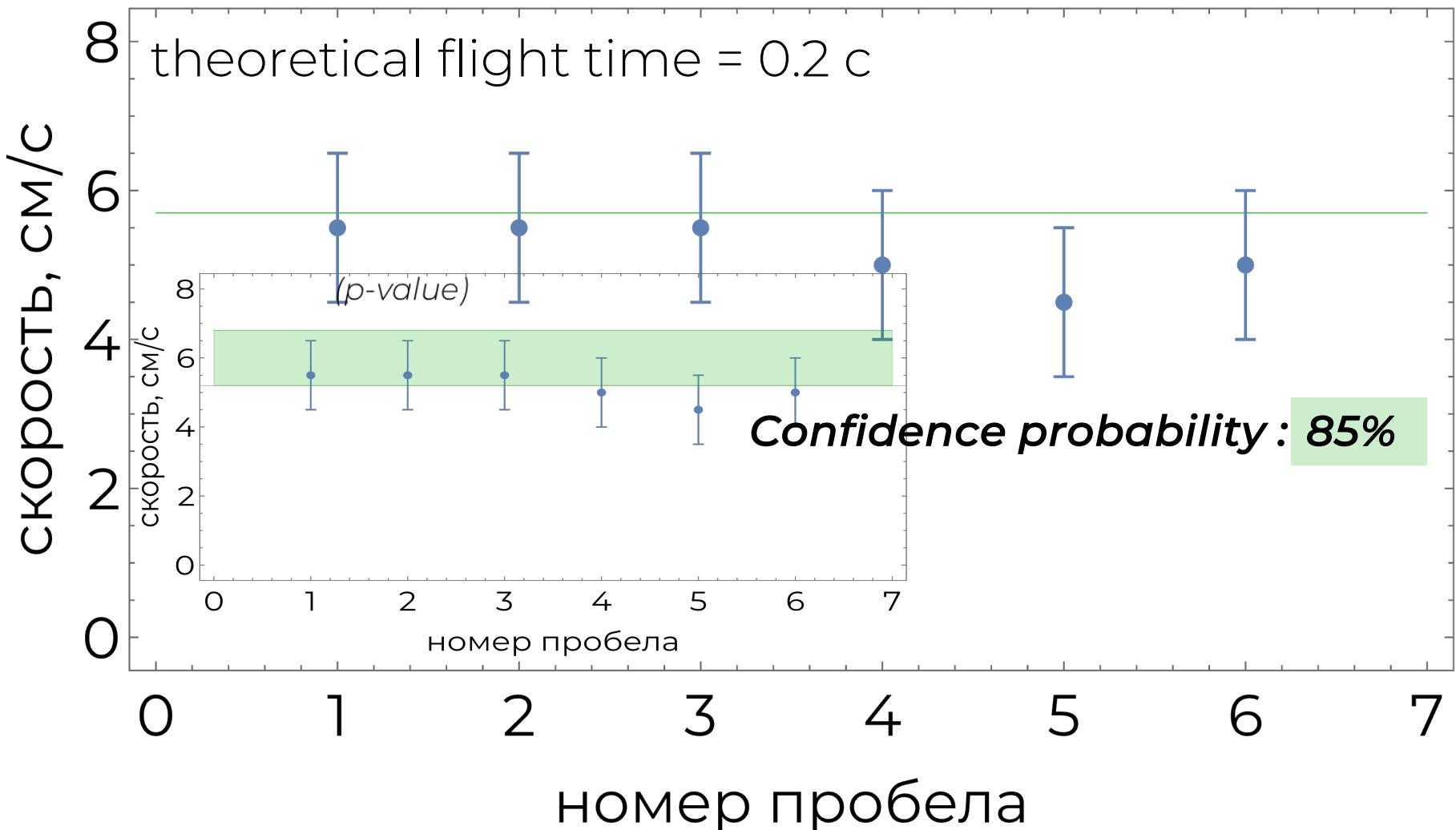


Binarization and digitization of images, obtaining trajectories:

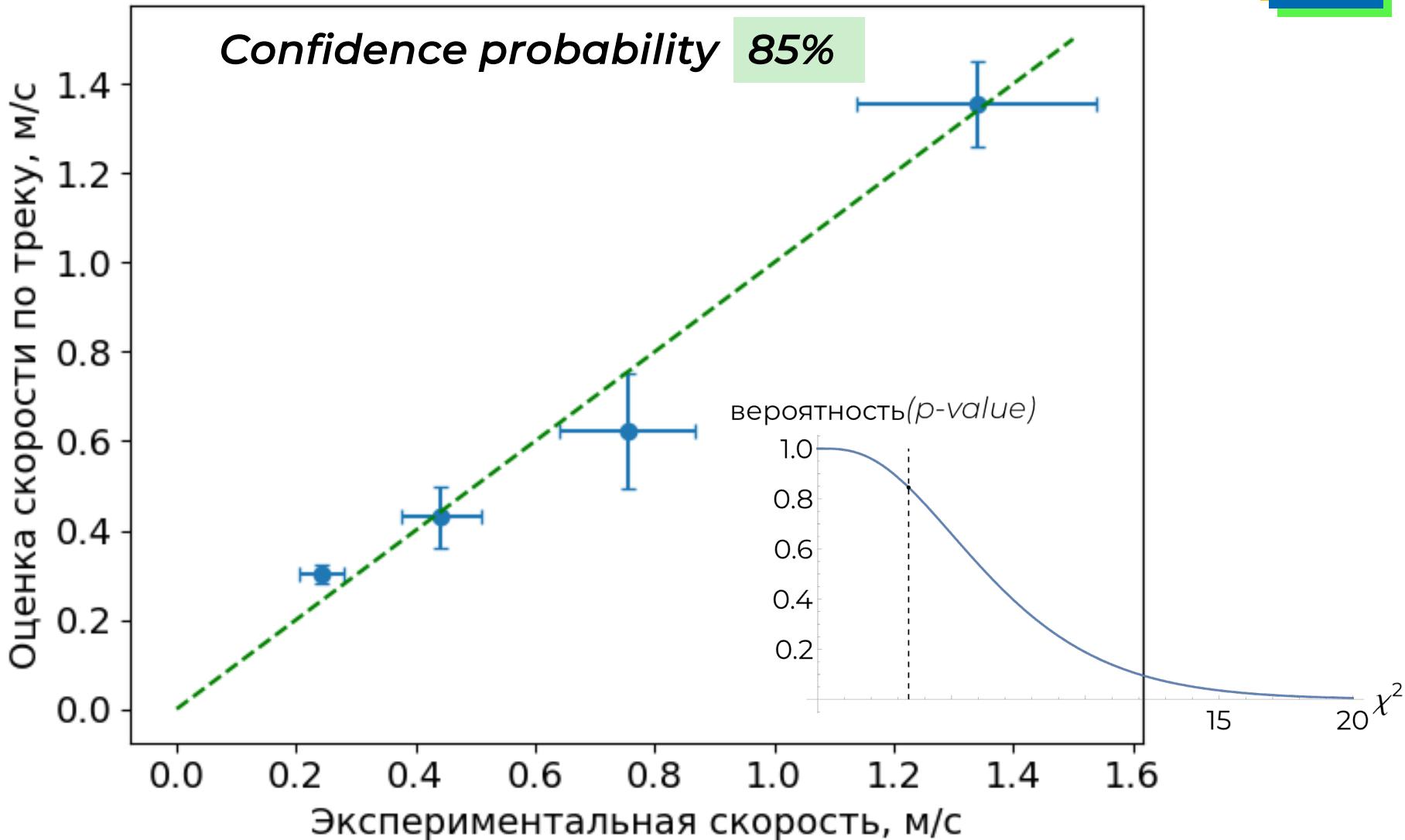


Velocity

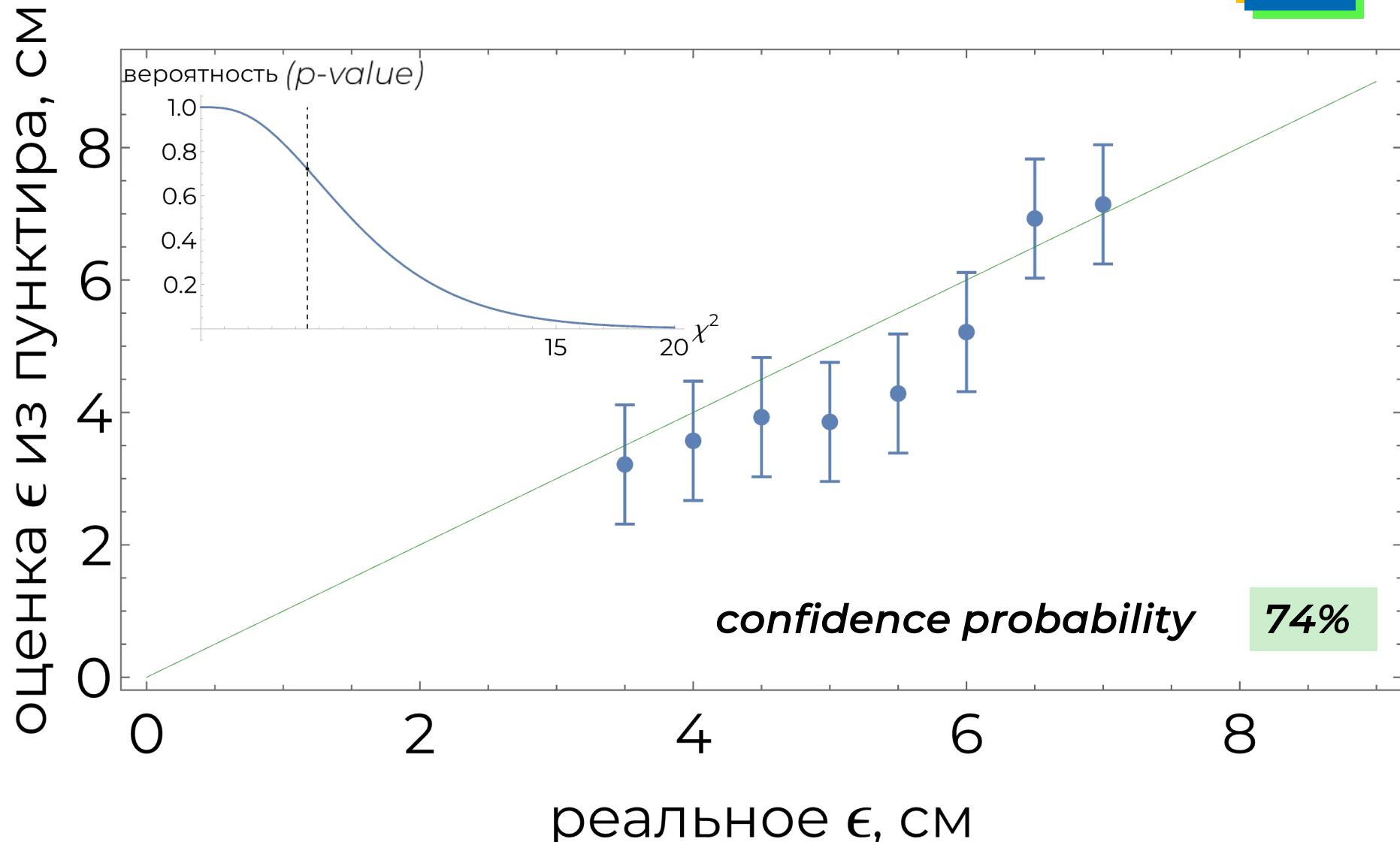
Determination of the velocity for the same experiments.



Velocity



Distance ϵ



Conclusion

The main parameters of movement are singled out:
trajectory, speed, acceleration;

Параметры движения

21

работа с изображением \Rightarrow траектория

скорость \Rightarrow длина пробела

ускорение \Rightarrow скорость

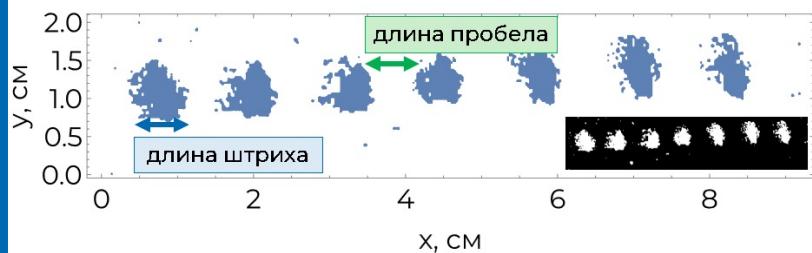


Параметры пунктира

14

новление параметров движения

The main parameters of trace are singled out: **dash length, space length;**

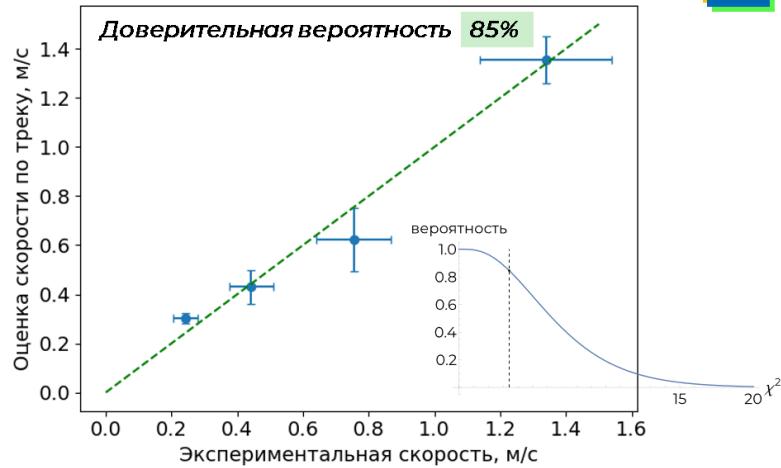


5. Поиск предсказательного параметра

Conclusion

Flight time doesn't depend on the velocity \Rightarrow **velocity** can be inferred only from space length (**acceleration from velocity**), **trajectory** - image processing

Скорость



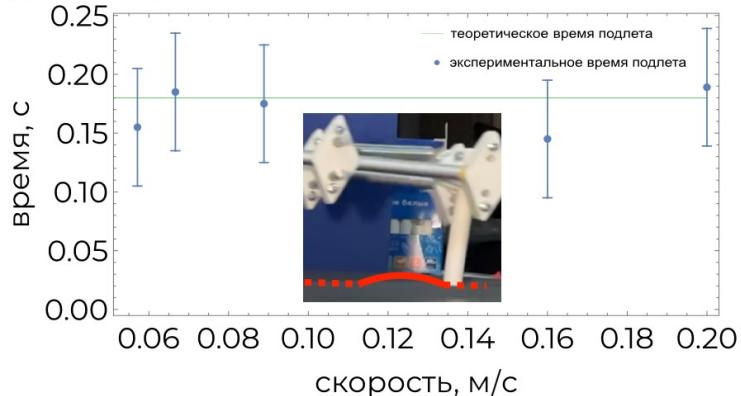
6. Восстановление параметров движения

24

Время подлета vs скорость

Меняем скорость вращения шуруповерта, 3 эксп. на точку

время подлета не зависит от скорости \Rightarrow по длине пробела восстанавливается скорость



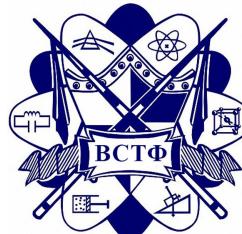
5. Поиск предсказательного параметра

The predicted velocity value is recovered from the chalk trace with an **accuracy of more than 80%**

Задача №11

Трюк с мелом

София Канюкова



Спасибо за внимание!



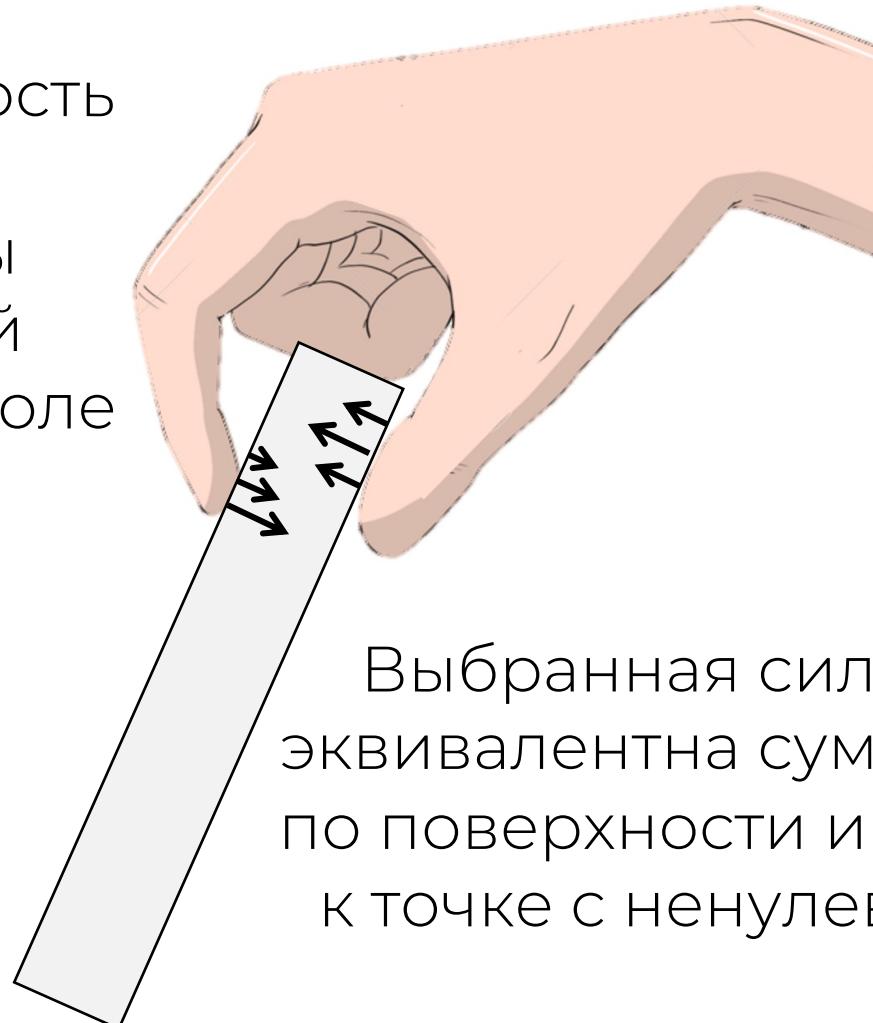
Также рассмотрено:

- Модель мышцы;
- Зависимость толщины линии;
- Длина пунктира от начального угла;
- Зависимость пунктира от трения;
- Воспроизводимость явления;

Дополнительные слайды

Существование момента упругой силы

Несимметричность
удерживания и
различные силы
сжатия в каждой
точке создают поле
сил.



Выбранная сила упругости
эквивалентна сумме всех сил
по поверхности и приложена
к точке с ненулевым плечом

Физика мышц

Трехкомпонентная модель мышцы Хилла

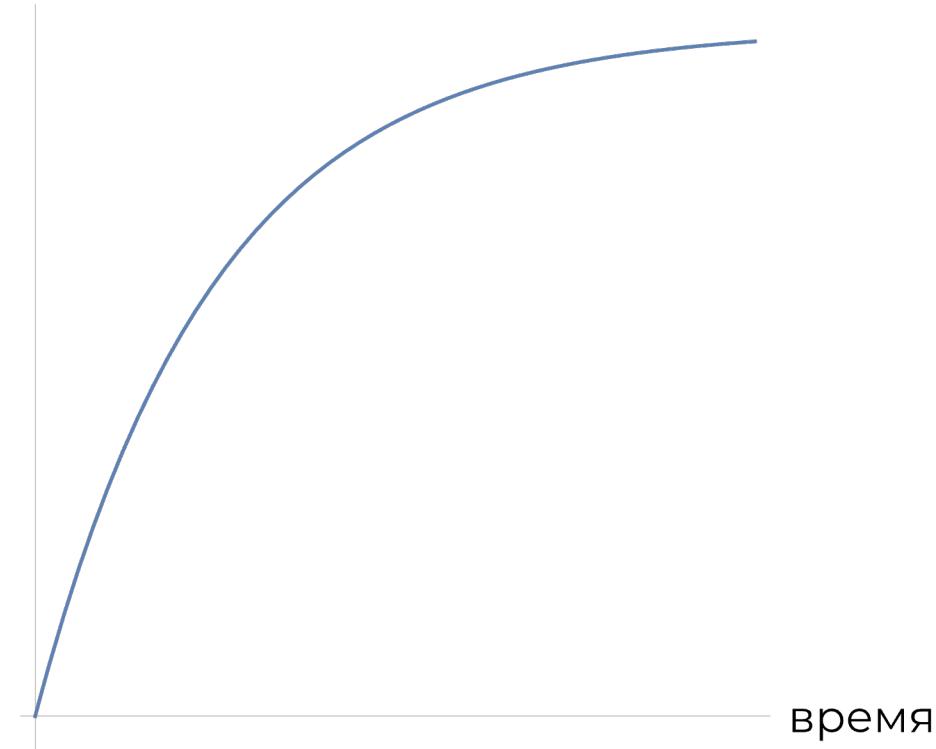


изменение длины

$$\sigma = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{вяз}}$$

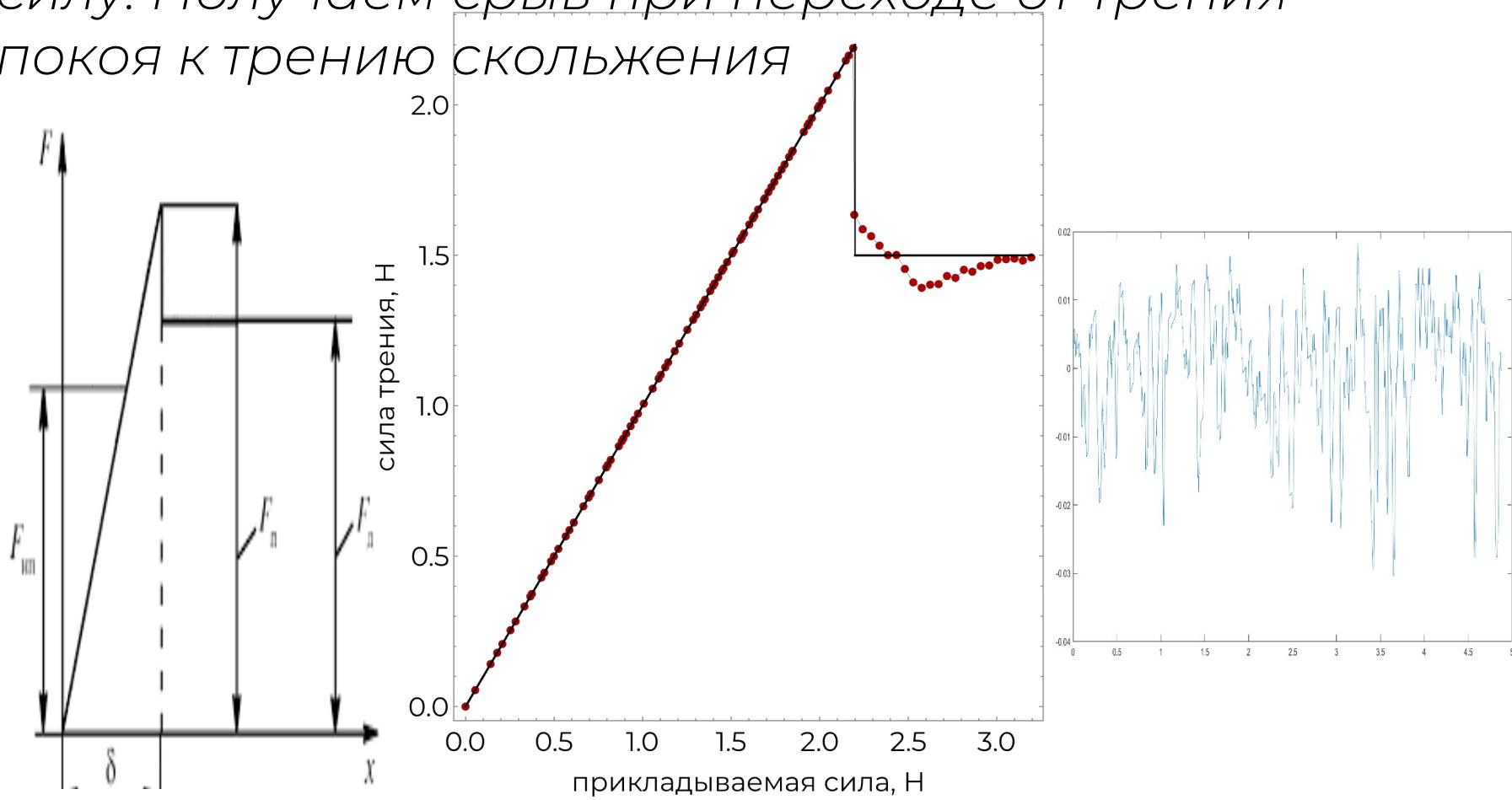


$$\sigma = \varepsilon E + \eta \dot{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta/E}}\right)$$

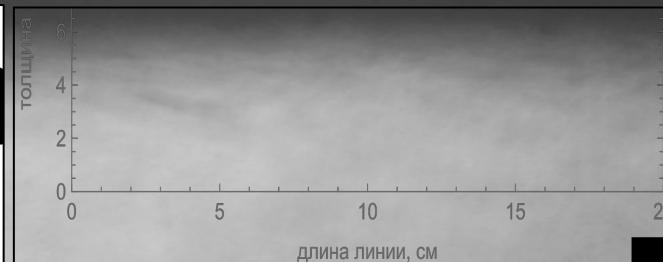


Трение мела

Методика получения – смещаем динамометр до момента отрыва, постепенно увеличивая силу. Получаем срыв при переходе от трения покоя к трению скольжения

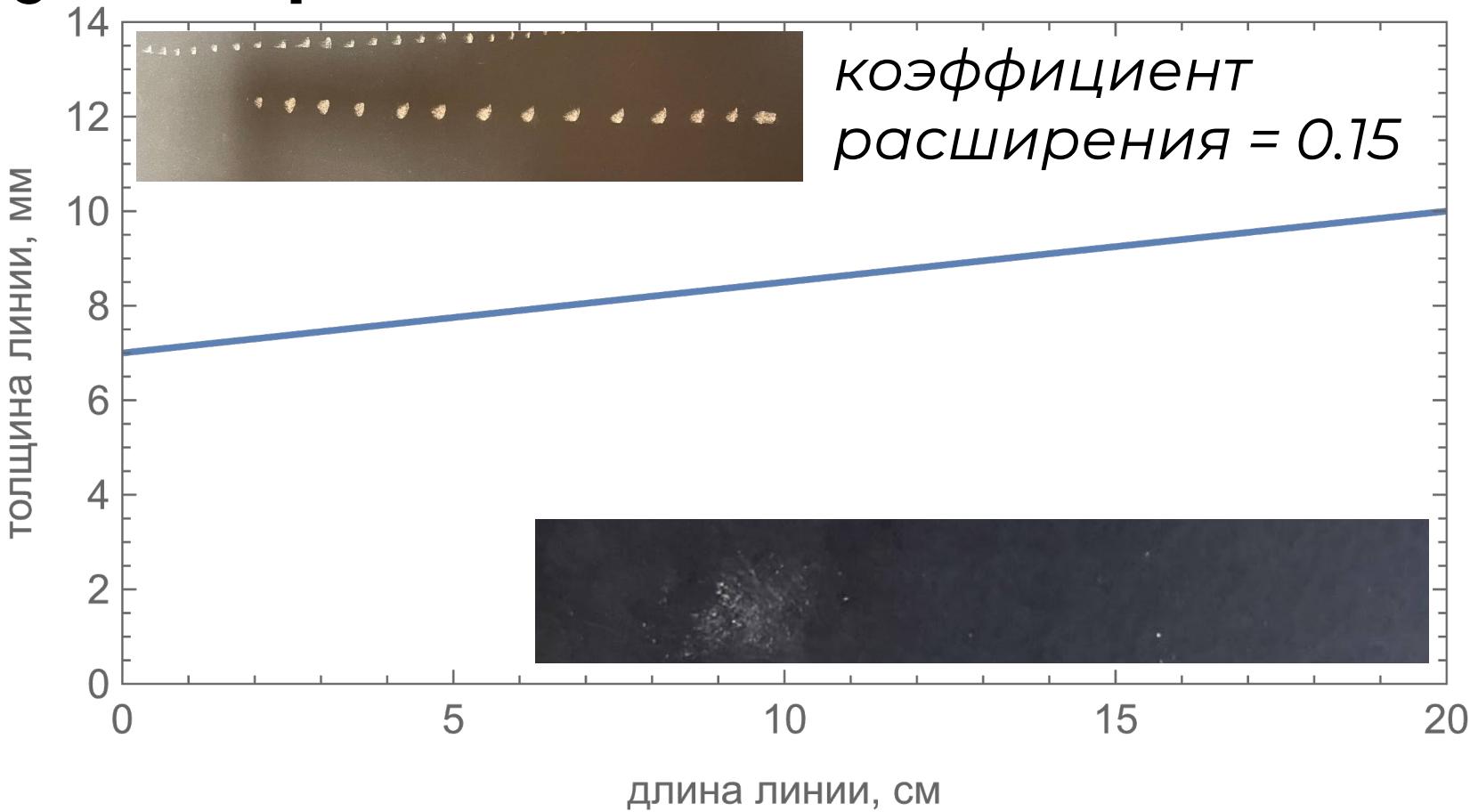


Трение мела и поверхности



1 mm

Увеличение ширины пунктира



Можно восстанавливать время работы установки при условии заданной постоянной скорости

Точка касания в зависимости от степени истертости мела



Меловая линия в зависимости от силы нажатия



Самое слабое взаимодействие с поверхностью создавало видимую линию ⇒ полет определяется длиной пробела

Сохранность длины мела

длина мела, см

время, с

Уравнения движения

II закон Ньютона (мел)

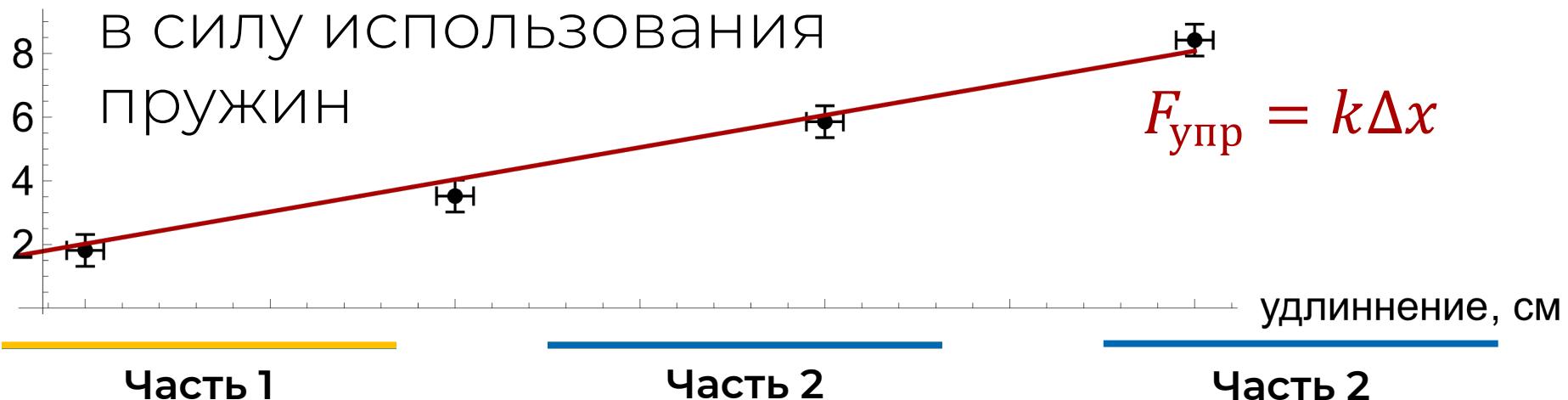
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{N}_1 + \vec{F}_k + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_{\Pi} + m\vec{g} + \vec{F}_{upr}$$

↓

Ох: $\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_{\Pi} + F_{upr} \cos \theta - F_{tr} \\ m\ddot{y} = -F_k + N_1 - mg - F_{upr} \sin \theta \end{array} \right.$

Оу:

сила, Н



Уравнения движения

Теорема об изменении момента импульса (мел):

теорема записана для
движущейся точки

$$J_2 \overrightarrow{\epsilon_{\varphi+\theta}} = \overrightarrow{M_N} + \overrightarrow{M_{F_{\text{тр}}}} + \overrightarrow{M_{mg}} + \overrightarrow{M_{F_{\text{упр}}}} - m[\vec{v}_o \times \vec{v}_c] + \overrightarrow{M_{F_{\Pi}}}$$

момент соответствующей
силы



$$J_2 (\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}) = mg \cos \varphi \left(\varepsilon - \frac{L}{2} \right) + F_{\text{тр}} \varepsilon \sin \varphi - F_{\text{упр}} \rho \sin(\pi - \theta - \varphi) - N_1 \varepsilon \cos \varphi - m \left((\dot{\theta} \kappa \cos \varphi) \dot{x}_c - (v - \dot{\theta} \kappa \sin \theta) \dot{y}_c \right) - 2m\dot{\varphi} \left(\varepsilon - \frac{L}{2} \right) \dot{\theta} \cos \varphi \sin \varphi$$

сила Кориолиса

Уравнения движения

Теорема об изменении момента импульса (конструкция):

Запишем для точки контакта плеча и платформы, чтобы избавиться от силы реакции в соединительном подшипнике:

$$J_1 \overrightarrow{\epsilon_\theta} = \overrightarrow{M_{Mg}} + \overrightarrow{M_{F_\Pi}} + \overrightarrow{M_{N_2}} - m [\overrightarrow{v_A} \times \overrightarrow{v_c}]$$

теорема записана для движущейся точки



$$J_1 \ddot{\theta} = -F_\Pi k \sin \theta + F_k k \cos \theta + Mg \frac{l}{2} \cos \theta - v \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta$$

Уравнения движения

Итоговая система:

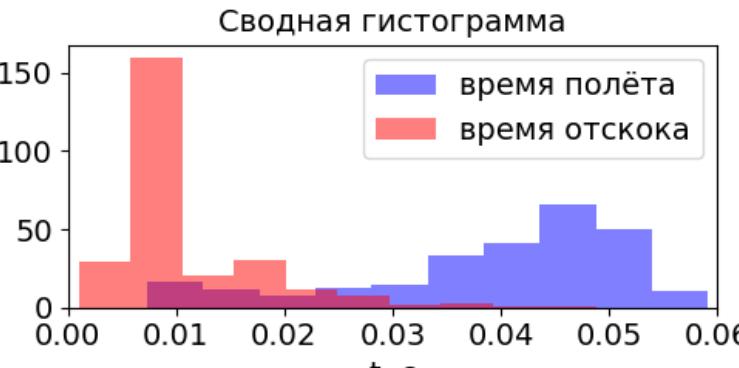
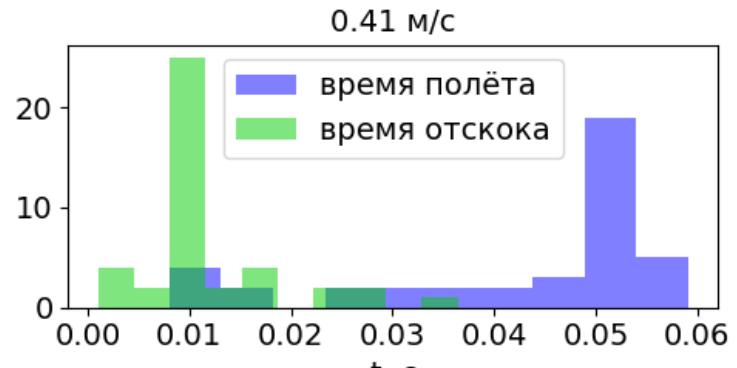
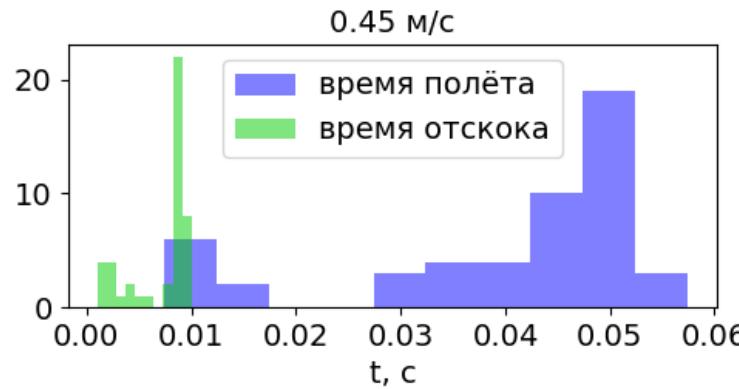
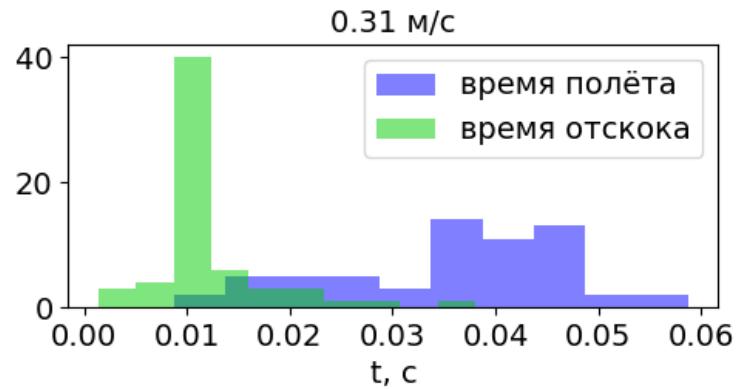
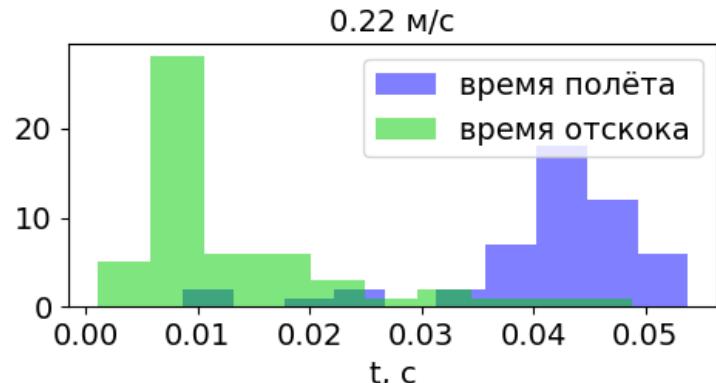
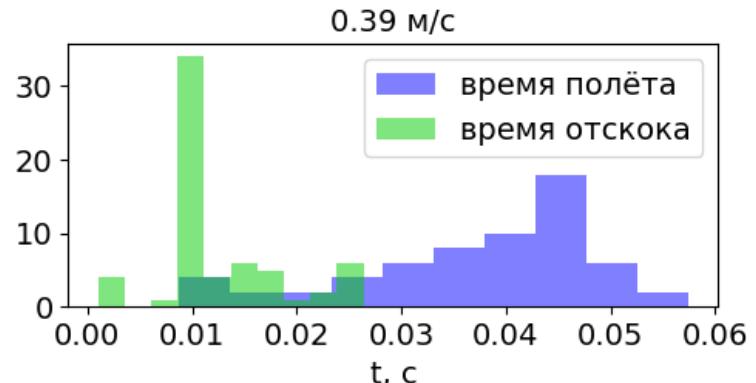
$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_{\Pi} + F_{\text{упр}} \cos \theta - F_{\text{тр}} \\ m\ddot{y} = -F_{\text{к}} + N_1 - mg - F_{\text{упр}} \sin \theta \\ J_1 \ddot{\theta} = -F_{\Pi} \kappa \sin \theta + F_{\text{к}} \kappa \cos \theta + Mg \frac{l}{2} \cos \theta - \nu \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ J_2 (\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}) \\ = mg \cos \varphi \left(\varepsilon - \frac{L}{2} \right) + F_{\text{тр}} \varepsilon \sin \varphi - F_{\text{упр}} \rho \sin(\pi - \theta - \varphi) - N_1 \varepsilon \cos \varphi \\ - m \left((\dot{\theta} \kappa \cos \varphi) \dot{x}_c - (\nu - \dot{\theta} \kappa \sin \theta) \dot{y}_c \right) - 2m \dot{\varphi} \left(\varepsilon - \frac{L}{2} \right) \dot{\theta} \cos \varphi \sin \varphi \end{array} \right.$$

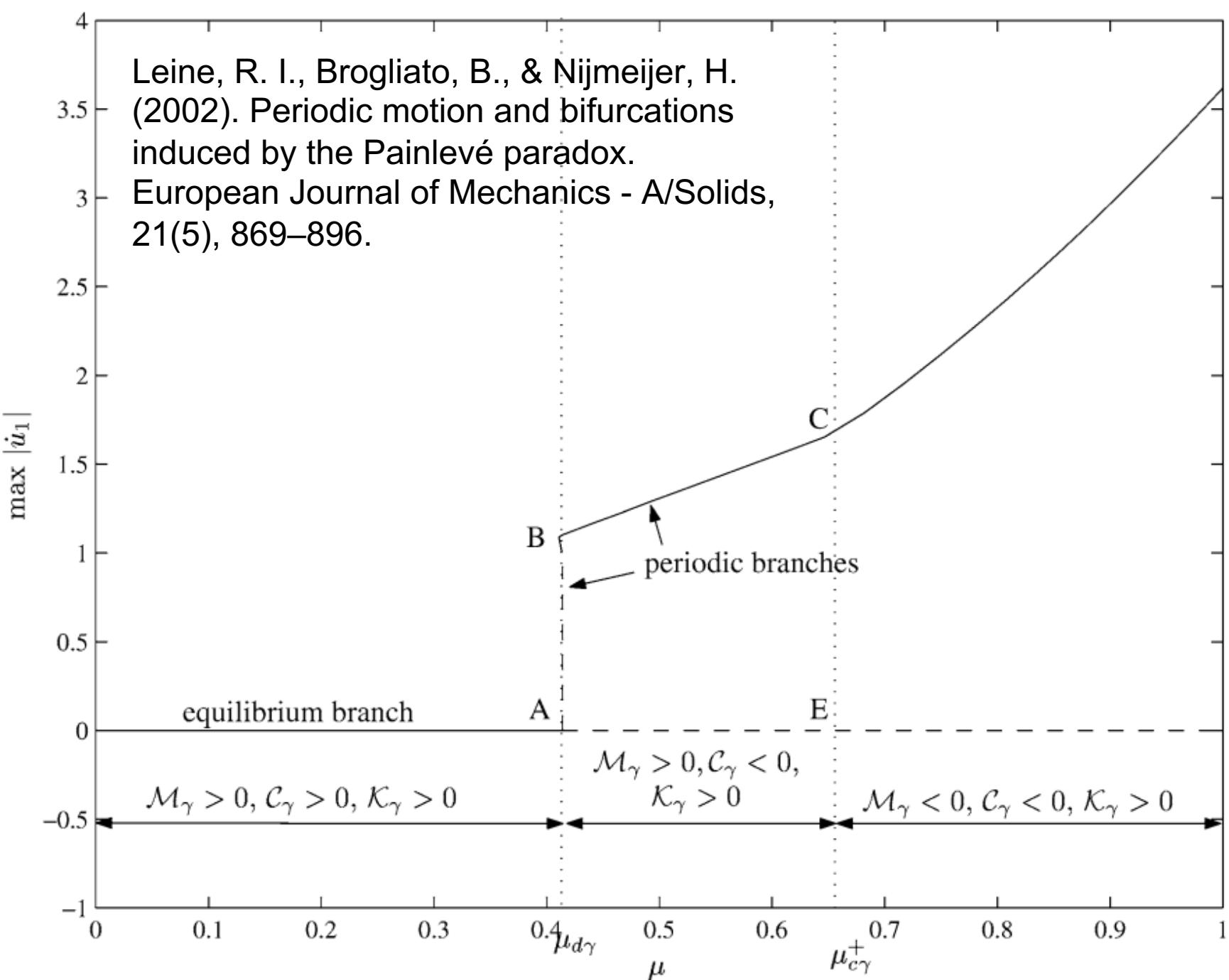
**определяемые
функции**

неизвестные
функции

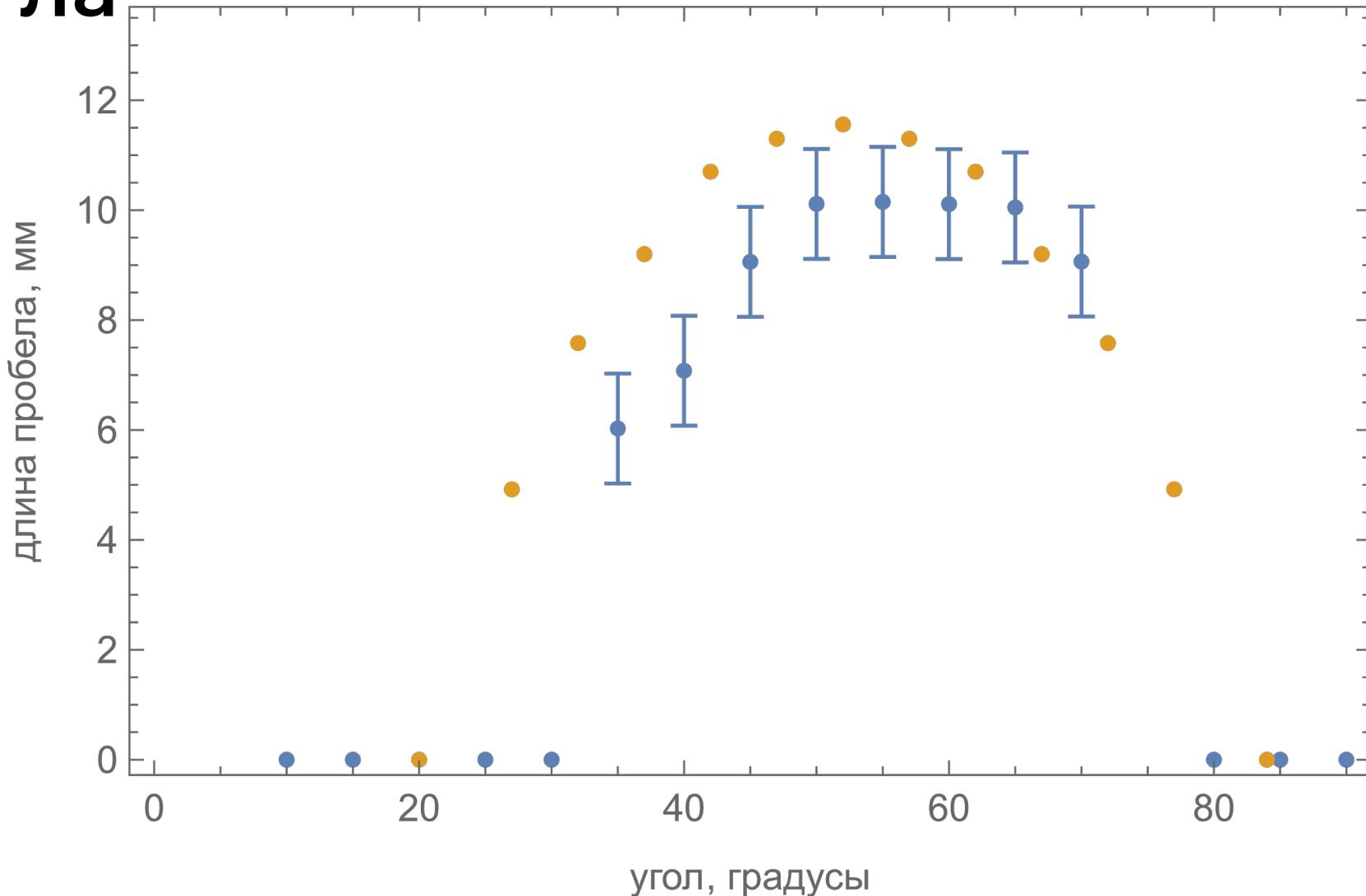
**связываемые
функции**

Сходство точек





Зависимость от начального угла



Критерий возникновения прыжков

$$0 = F_{\Pi} + F_{\text{упр}} \cos \theta - F_{\text{тр}}$$

$$0 = -F_{\text{к}} + N_1 - mg - F_{\text{упр}} \sin \theta$$

$$0 = -F_{\Pi} \kappa \sin \theta + F_{\text{k}} \kappa \cos \theta + Mg \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$0 = mg \cos \varphi \left(\varepsilon - \frac{L}{2} \right) + F_{\text{тр}} \varepsilon \sin \varphi - F_{\text{упр}} \rho \sin(\pi - \theta - \varphi) - N_1 \varepsilon \cos \varphi$$



Найдем положение равновесия;

Линеаризуем вокруг положения равновесия;



Leine, R. I., Brogliato, B., & Nijmeijer, H. (2002). Periodic motion and bifurcations induced by the Painlevé paradox. European Journal of Mechanics - A/Solids, 21(5), 869–896.

$$\partial \ddot{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, dx = Ae^{\lambda t}, Re(\lambda) > 0 \Rightarrow \text{устойчиво}$$

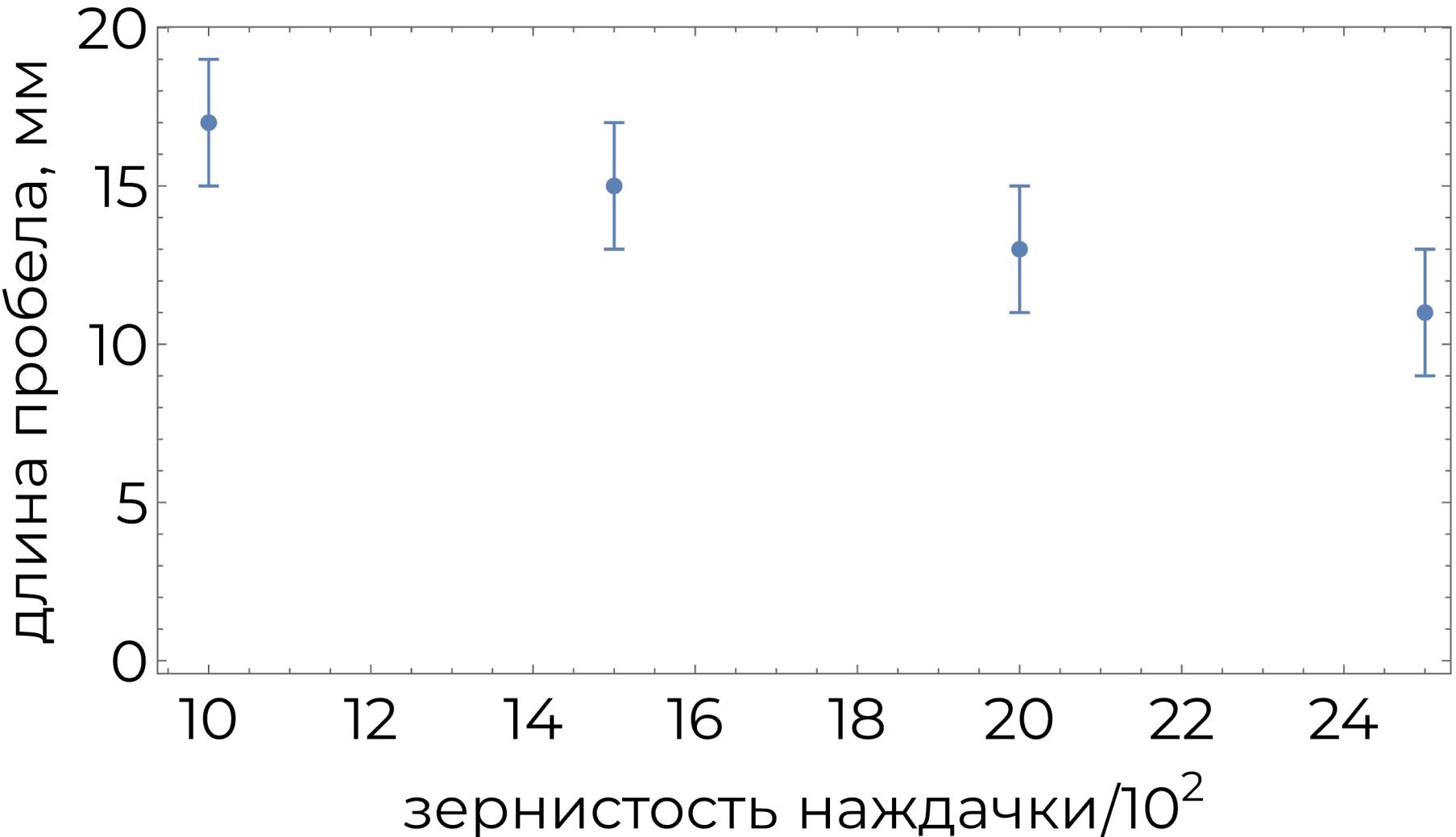
$$\partial \ddot{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, dx = Ae^{\lambda t}, Re(\lambda) \leq 0 \Rightarrow \text{не устойчиво}$$

Критерий подрыва

$$\begin{aligned}
 & qk[\mu] := \frac{g k \rho \left(d - \alpha \sin \left[\frac{g 1M}{2 \sqrt{\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho} \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-\sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right] - \alpha(u - \phi) \right) \sqrt{1 - \sin^2 \left[\frac{g 1M}{2 \sqrt{\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho} \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-\sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right]^2}}}{K} \\
 & \frac{k \rho \left(1 - \frac{\rho}{\alpha} \right) \left(d - \alpha \sin \left[\frac{g 1M}{2 \sqrt{\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho} \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-\sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right] - \alpha(u - \phi) \right) \sqrt{1 - \sin^2 \left[\frac{g 1M}{2 \sqrt{\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho} \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-\sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right]^2}}}{K} \\
 & \left(\frac{2 \alpha \rho \sin(\phi) + \mu(-q\rho - 2dgk\alpha\rho - 2dk(\alpha-\rho)\rho) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}{d} \sin \left[\frac{g 1M}{2 \sqrt{\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho} \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-\sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\sin \left[\frac{g 1M}{2 \sqrt{\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho} \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-\sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right] - \mu \sqrt{1 - \sin^2 \left[\frac{g 1M}{2 \sqrt{\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho} \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-\sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right]^2}}{d} \right. \\
 & \left. - \mu(g 1M \alpha + (1 + g n) \alpha \phi \rho - 2dgk\alpha\rho\phi\rho - 2dk(\alpha-\rho)\rho\phi\rho) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2} + \sin(\phi) \left(g 1M \alpha + 2 \left(\alpha + k \alpha \rho \phi \left((\alpha + g n \alpha - \rho) \sin(\phi) + \mu \rho \sqrt{1 - \sin(\phi)^2} \right) \right) \right) \right) \\
 & \left(\frac{\sin \left[\frac{g 1M}{2 \left(\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho \right) \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-4 \sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right] - \mu \sin \left[\frac{g 1M}{2 \left(\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho \right) \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-4 \sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right]}{\sin \left[\frac{g 1M}{2 \left(\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho \right) \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-4 \sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right] - \mu \sqrt{1 - \sin^2 \left[\frac{g 1M}{2 \left(\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho \right) \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-4 \sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right]^2}} \right)^2 \\
 & \left(\frac{\sin \left[\frac{g 1M}{2 \left(\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho \right) \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-4 \sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right] - \mu \sqrt{1 - \sin^2 \left[\frac{g 1M}{2 \left(\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho \right) \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-4 \sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right]^2}}{\sin \left[\frac{g 1M}{2 \left(\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho \right) \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-4 \sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right] - \mu \sqrt{1 - \sin^2 \left[\frac{g 1M}{2 \left(\frac{dk(\alpha + g n + \rho)}{4} + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho \right) \sin(\phi) + \frac{d \sin(\phi)}{-4 \sin(\phi) \cos(\phi) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2}}} \right]^2}} \right)^2 \Bigg) / \left(2 \alpha \left(\frac{\sin(\phi)}{\alpha + g n} (d(k + k \rho + (-1 + g n) \alpha + \rho)) + k \alpha (\alpha + g n \alpha - \rho) \rho \sin(\phi) - k \mu (\alpha + g n \alpha - \rho) \rho (-d + \alpha \sin(\phi)) \sqrt{1 - \sin(\phi)^2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Пунктир vs μ

Меняем поверхность – наждачную бумагу



Автоколебания в меле

Acoustics of friction^{a)}

Adnan Akay

Mechanical Engineering Department, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania 15213

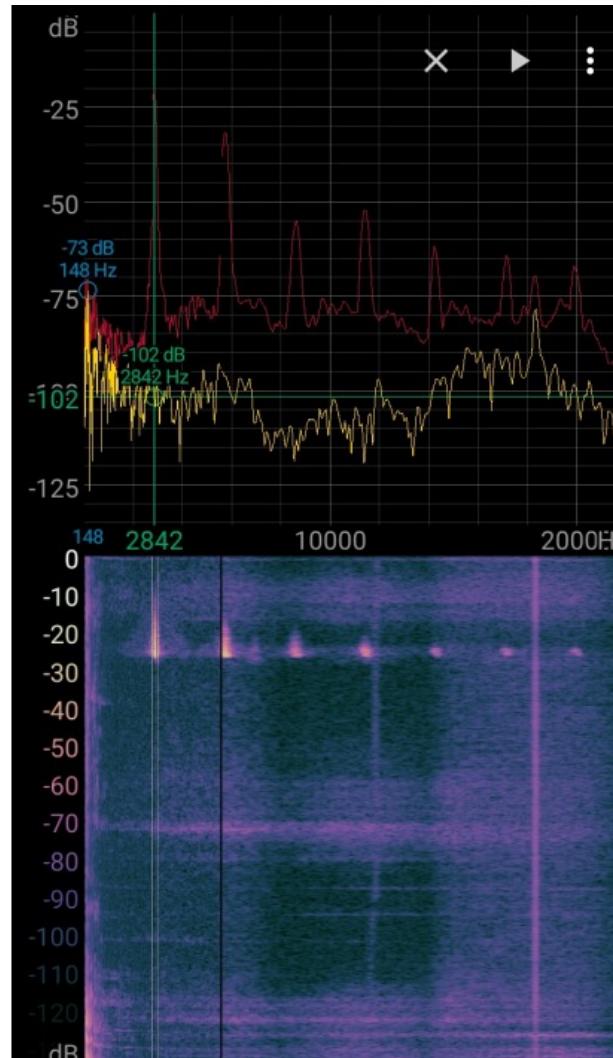
(Received 20 July 2001; revised 7 January 2002; accepted 10 January 2002)

Изучение скрипящего мела

Демин Александр, группа Б02-920

МФТИ, 2019

Эти две статьи говорят о том,
что явление громкого скрипа
от мела – процесс
автоколебаний



5. Поиск предсказательного параметра

Автоколебания в меле

Существует 2 характерных вида движения мела

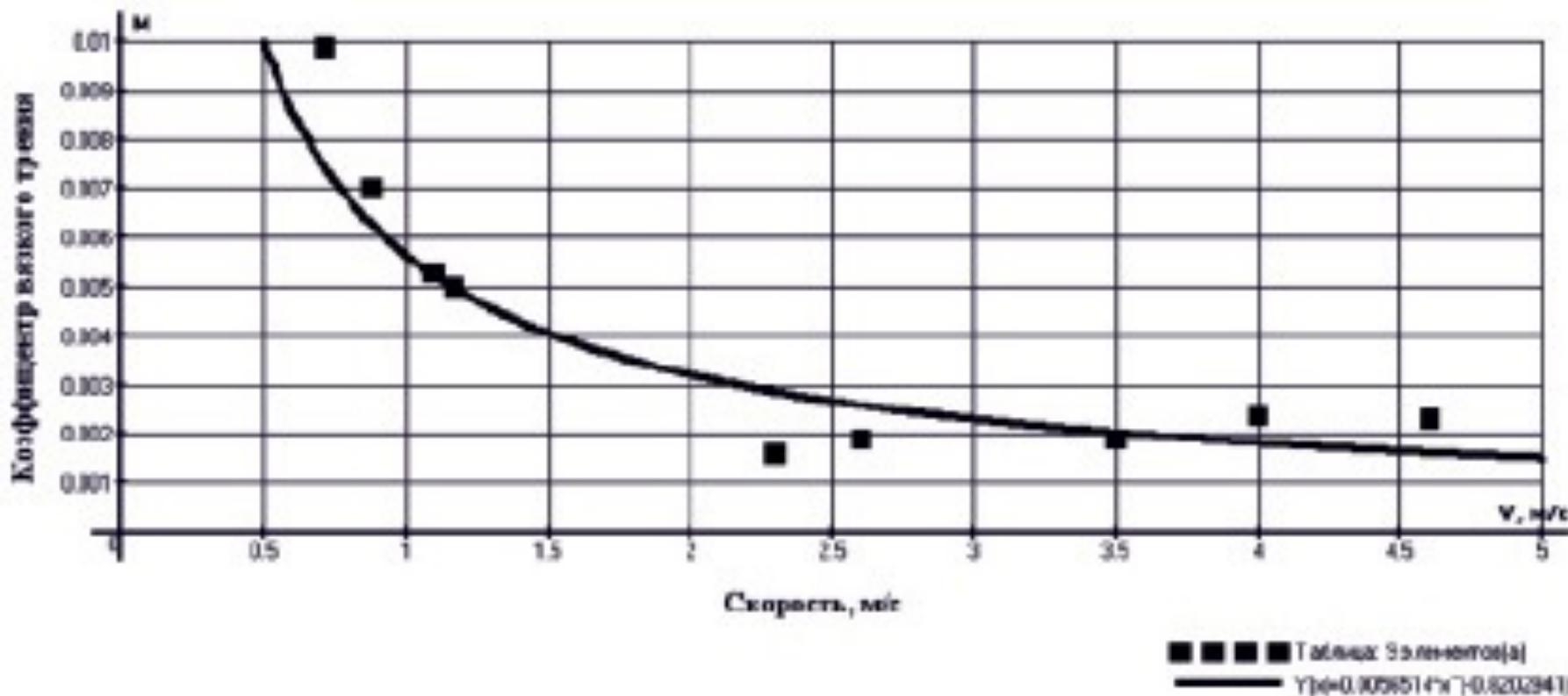
не слышен звук, явно выражен подскок



слышен звук, постоянное касание

Автоколебания в меле

Теоретически, скорее всего, получим автоколебания, если учтем эту зависимость



Зависимость снимать достаточно сложно

5. Поиск предсказательного параметра

Идея расчета

Дифференциальное уравнение для залипания –
координата нижней точки неизменна



Считаем залипание пока момент силы упругости **не превысит критический**, определяемый прикладываемой силой **для максимального трения покоя**



Дальше решаем систему дифференциальных уравнений **для движения со скольжением**



Фиксируем момент прыжка, решаем **уравнения полета**



Фиксируем момент удара (полностью не упругий), обновляем начальные параметры, решаем снова

5. Поиск предсказательного параметра