Задача о подвижном точечном тепловом источнике

$q = \Delta Q / \Delta t$ - мощность теплового точечного источника [Вт],

k - коэффициент теплопроводности [Вт/м/К], c - коэффициент теплоемкости [Дж/кг/К], ρ - плотность [кг/м^3].

Введем дополнительный параметр $a = k/(\rho c)$ [м^2/с].

В подвижной системе координат, связанной с источником, движущимся со скоростью v стационарное (установившееся) поле температур определяется формулой:

$$T(R,x) = \frac{q}{2\pi kR}\exp\left(-\frac{v}{2a}x - \frac{v}{2a}R\right)$$

В этом компактном решении имеется особенность в точке $R = 0$.

Чтобы определить поле температур в окрестности этой особой точки используем решение задачи о стационарном подвижном нормально-круговом тепловом источнике.

Задача о подвижном нормально-круговом тепловом источнике

Мощность теплового потока в нормально-круговом источнике с гауссовским распределением равна:

$$q = \int_0^\infty q_2(r) r dr\ , \quad q_2(r) = q_0 \exp(-r^2 / r_0^2)\ , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

где r_0 - эффективный радиус нормально-кругового источника.

Вычисление интеграла дает: $q = q_0 \cdot \pi r_0^2$.

При фиксированном q и $r_0 \to 0$ имеем предельный переход к точечному тепловому источнику. Введем параметр характерного времени процесс t_0: $t_0 = r_0^2 / (4a)$, $r_0^2 = 4at_0$.

В подвижной системе координат, связанной с точкой О, центра нормально-кругового источника, движущегося со скоростью v, стационарное (установившееся) поле температур определяется формулой:

$$T(R,x) = \frac{2q}{\rho c (4\pi a)^{3/2}}\exp\left(-\frac{v}{2a}x\right)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{4a\tau} - \frac{r^2}{4a(t_0+\tau)} - \frac{v^2}{4a}(t_0+\tau)\right)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}(t_0+\tau)}$$

Построим приближенное решение для нормально-кругового источника различными способами и сравним с решением для точечного источника, чтобы определить расстояние, с которого эти решения мало отличаются друг от друга.

Параметры для титанового сплава

k =28 Вт/м/К, c =760 Дж/кг/К, ρ =4400 кг/м^3

Тогда $a = k/(\rho c)$ =8.4x10^{-6} м^2/с.

Скорость подвижного лазерного луча в диапазоне 0.5 м/с < v < 1.5 м/с.

Выберем значения v = 0.5 м/с, 1 м/с, 1.5 м/с.

Радиус источника r_0 =40 мкм.

Параметр характерного времени $t_0 = r_0^2/(4a)$.

Параметр безразмерной скорости $V = \dfrac{v^2 t_0^2}{r_0^2}$.

Параметры безразмерных координат $Z = \dfrac{z^2}{r_0^2}$, $H = \dfrac{r^2}{r_0^2}$.

Мощность источника q =100 Вт.

Размерные координаты $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Итоговые формулы вычисления теплового поля нормально-кругового источника

Способ 1 (Выделение особенности в 0 и разложение в ряд Тейлора)

$$T(R,x) = \frac{2q}{\rho c(4\pi a)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v}{2a}x\right) \frac{2}{\sqrt{t_0}} I$$

$$I = e^Z \left[\exp\left(-\frac{1}{3}Z - H - V\right) I_1 + e^{-H} \exp\left(-Z + H - \frac{1}{3}V\right) I_2 \right]$$

$$I_1 = Q_0 + \left(-\frac{1}{15}Z + H - V\right) Q_1 + \left(\left(-\frac{1}{15}Z + H - V\right)^2 / 2 - \frac{2}{189}Z - \frac{1}{3}H - \frac{2}{3}V\right) Q_2 + \ldots$$

$$I_2 = \bar{Q}_0 + \left(-Z - H - \frac{1}{15}V\right) \bar{Q}_1 + \left(\left(-Z - H - \frac{1}{15}V\right)^2 / 2 - \frac{2}{3}Z + \frac{1}{3}H - \frac{2}{189}V\right) \bar{Q}_2 + \ldots$$

$$Q_0 = \frac{\pi}{4} \exp\left(-\frac{16Z}{\pi^2}\right) - \sqrt{\pi Z} \times erfc\left(\frac{4\sqrt{Z}}{\pi}\right), \qquad Q_1 = \frac{\pi^3}{192} \exp\left(-\frac{16Z}{\pi^2}\right) - \frac{2}{3} Z Q_0,$$

$$Q_2 = \frac{\pi^5}{5120} \exp\left(-\frac{16Z}{\pi^2}\right) - \frac{2}{5} Z Q_1$$

$$\bar{Q}_0 = \frac{\pi}{4} \exp\left(-\frac{16V}{\pi^2}\right) - \sqrt{\pi V} \times erfc\left(\frac{4\sqrt{V}}{\pi}\right), \qquad \bar{Q}_1 = \frac{\pi^3}{192} \exp\left(-\frac{16V}{\pi^2}\right) - \frac{2}{3} V \bar{Q}_0$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{\pi^5}{5120} \exp\left(-\frac{16V}{\pi^2}\right) - \frac{2}{5} V \bar{Q}_1$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{(x+\sqrt{x^2+2})} < erfc(x) \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{(x+\sqrt{x^2+4/\pi})}$$

или

$$erf(x) \approx \sqrt{1-\exp\left(-x^2\frac{4/\pi+ax^2}{1+ax^2}\right)},\ a=\frac{8}{3\pi}\frac{(\pi-3)}{(4-\pi)},\ erfc(x)=1-erf(x)$$

Способ 2. Грубое вычисление поля температур

$$I=e^{Z}\left[I_1+e^{-H}I_2\right],$$

$$I_1=\frac{\pi}{12}\left(\varphi_{12}+\varphi_6+\frac{1}{2}\varphi_4\right),\qquad I_2=\frac{\pi}{12}\left(\bar{\varphi}_{12}+\bar{\varphi}_6+\frac{1}{2}\bar{\varphi}_4\right)$$

$$\varphi_{12}=\varphi(Z,H,V,\pi/12)=\exp\left(-4(2+\sqrt{3})Z-\frac{(2+\sqrt{3})}{4}H-\frac{4}{(2+\sqrt{3})}V\right),$$

$$\bar{\varphi}_{12}=\exp\left(-\frac{4}{(2+\sqrt{3})}Z+\frac{(2+\sqrt{3})}{4}H-4(2+\sqrt{3})V\right)$$

$$\varphi_6=\varphi(Z,H,V,\pi/6)=\exp\left(-4Z-\frac{3}{4}H-\frac{4}{3}V\right),$$

$$\bar{\varphi}_6=\exp\left(-\frac{4}{3}Z+\frac{3}{4}H-4V\right)$$

$$\varphi_4=\varphi(Z,H,V,\pi/4)=\exp\left(-2Z-\frac{1}{2}H-2V\right),$$

$$\bar{\varphi}_4=\exp\left(-2Z+\frac{1}{2}H-2V\right)$$

Способ 3. Метод коллокаций для вычисления подынтегральной функции

$$I=e^{Z}\left[I_1+e^{-H}I_2\right]$$

$$I_1=\frac{\pi}{12}\left(\frac{27}{140}\varphi_{12}+\frac{216}{140}\varphi_6+\frac{41}{140}\varphi_4\right),\qquad I_2=\frac{\pi}{12}\left(\frac{27}{140}\bar{\varphi}_{12}+\frac{216}{140}\bar{\varphi}_6+\frac{41}{140}\bar{\varphi}_4\right)$$

Способ 4. Вычисление интеграла поля температур методом трапеций с подробным разбиением

$$I=e^{Z}\left[I_1+e^{-H}I_2\right],\quad I_1=\int_0^{\pi/4}\varphi(Z,H,V,\lambda)d\lambda,\quad I_2=\int_0^{\pi/4}\bar{\varphi}(Z,H,V,\lambda)d\lambda$$

$$\varphi(Z,H,V,\lambda)=\exp\left(-Z\frac{1}{\sin^2\lambda}-H\cos^2\lambda-V\frac{1}{\cos^2\lambda}\right),\quad \bar{\varphi}(Z,H,V,\lambda)=\exp\left(-Z\frac{1}{\cos^2\lambda}+H\cos^2\lambda-V\frac{1}{\sin^2\lambda}\right)$$

Строим поля температур при z/r_0 =0,1,2…,10 x/r_0 =0,1,2…,10 y/r_0 =0,1,2…,10

Сравниваем с полем температур для точечного источника, за исключением точки R=0

$$T(R,x) = \frac{q}{2\pi kR}\exp\left(-\frac{v}{2a}x - \frac{v}{2a}R\right)$$