	Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ **Информатика и системы управления**

КАФЕДРА **Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии**

Лабораторная работа №5

Тема: Построение и программная реализация алгоритмов численного интегрирования.

Студент: **Ивахненко Д. А**

Группа: **ИУ7-46Б**

Оценка (баллы): ___________

Преподаватель: **Градов В.М.**

Москва

2021 г.

Цель работы

Получение навыков построения алгоритма вычисления двукратного интеграла с использованием квадратурных формул Гаусса и Симпсона.

Задание

Построить алгоритм и программу для вычисления двукратного интеграла при фиксированном значении параметра τ

$$\varepsilon(\tau) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} [1 - \exp(-\tau \frac{l}{R})] \cos\theta \ \sin\theta \ d\theta ,$$

где $$\frac{l}{R} = \frac{2\cos\theta}{1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi},$$

θ, φ - углы сферических координат.

Применить метод последовательного интегрирования. По одному направлению использовать формулу Гаусса, а по другому – формулу Симпсона.

Исходные данные

- количество узлов сетки N, M
- значение параметра τ
- методы для направлений при последовательном интегрировании.

Выходные данные

Значение интеграла при заданном параметре, график зависимости $\varepsilon(\tau)$ в диапазоне $\tau \in [0.05;\ 10]$.

Описание алгоритма

Имеем:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

Положим:

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k \qquad k = 0,1,2,\ldots,2n-1$$

Тогда получим следующую систему:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^2 = \frac{2}{3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{cases}$$

Система нелинейная, и ее решение найти довольно трудно. Для нахождения A_i и t_i можно воспользоваться полиномами Лежандра.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \ , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Узлами формулы Гаусса являются нули многочлена Лежандра, а A_i можно найти из вышеуказанной системы уравнений.

При вычислении интеграла на произвольном интервале $[a, b]$, для применения квадратурной формулы Гаусса необходимо выполнить преобразование переменной:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

Получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt \ ,$$

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \ ,$$

Где

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \ , \ i = 1,2,..,n;$$

здесь t_i - нули полинома Лежандра $P_n(t)$, т.е. $P_n(t_i) = 0$

Также существует квадратурная формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}) \ ,$$

Эти методы можно применять и для приближенной оценки двукратных интегралов. Рассмотрим интеграл по прямоугольной области:

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b F(x)\, dx \ ,$$

Где

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy\,.$$

По каждой координате введем сетку узлов. Каждый однократный интеграл вычисляют на данной сетке по квадратурным формулам:

$$I = \sum_i A_i F(x_i)\ , \quad \text{где} \quad F(x_i) = \sum_j \overline{A}_j f(x_i, y_j)\,.$$

Тогда

$$I = \sum_i \sum_j A_i \overline{A}_j f(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j g_{ij} f(x_i, y_j)\ .$$

Для разных направлений можно использовать квадратурные формулы разных порядков точности, в том числе и Гаусса.

Конечная формула:

$$I = \iint_G f(x, y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j)\ ,$$

где A_i, B_{ij} - известные постоянные.

Исходный код программы

main.py

```
from math import pi

from plot import plot
import solve


def main():
    all_n, all_m = [], []
    methods1, methods2 = [], []
    values = []

    go_on = 'y'
    while go_on == 'y':
        all_n.append(int(input("Введите N: ")))
        all_m.append(int(input("Введите M: ")))

        p = float(input("Введите параметр (тау): "))

        methods1.append(solve.Method(
            int(input('Выберите "внешний" метод интегрирования: (0 - Гаусс, 1 - Симпсон): '))))

        methods2.append(solve.Method(
            int(input('Выберите "внутренний" метод интегрирования: (0 - Гаусс, 1 - Симпсон): '))))

        lm = [[0, pi / 2], [0, pi / 2]]

        values.append(solve.Calculator(
            lm, [all_n[-1], all_m[-1]], [methods1[-1], methods2[-1]]))

        print(f'Результат (тау = {p:.2f}): {values[-1](p):.7f}')

        go_on = input("Продолжить работу? [y/n]: ")

    plot(values, all_n, all_m, methods1, methods2)
```

solve.py

```
from enum import Enum
from math import cos, sin, exp, pi
from scipy.special import roots_legendre
from typing import List, Callable


class Method(Enum):
    GAUSS = 0
    SIMPSON = 1

    def get_func(self) -> Callable:
        interp = {
            Method.GAUSS: Calculator.gauss,
            Method.SIMPSON: Calculator.simpson
        }
        return interp[self]

    def __str__(self) -> str:
        interp = {
            Method.GAUSS: 'Гаусс',
            Method.SIMPSON: 'Симпсон'
        }
        return interp[self]


class Calculator(object):
    def __init__(self, boundaries: List[List[float]], n: int, m: int, methods: List[Method]):
        self.boundaries = boundaries
        self.n = n
        self.m = m
        self.f1 = methods[0].get_func()
        self.f2 = methods[1].get_func()
```

```python
def __call__(self, p: float) -> float:
    f = Calculator.__integrated(p)

    def inner(x): return self.f2(
        lambda val1: f(x, val1),
        self.boundaries[1][0],
        self.boundaries[1][1],
        self.n[1])

    def integ(): return self.f1(
        inner,
        self.boundaries[0][0],
        self.boundaries[0][1],
        self.n[0])

    return integ()

@staticmethod
def __integrated(p: float) -> Callable[[float, float], float]:
    def t(x, y): return 2 * cos(x) / (1 - sin(x) ** 2 * cos(y) ** 2)
    return lambda x, y: 4 / pi * (1 - exp(-p * t(x, y))) * cos(x) * sin(x)

@staticmethod
def simpson(f: Callable[[float], float], a: float, b: float, n: int) -> float:
    if n < 3 or n % 2 == 0:
        raise Exception('Некорректное значение N')

    h = (b - a) / (n - 1.0)
    x = a
    res = 0.0

    for _ in range((n - 1) // 2):
        res += f(x) + 4 * f(x + h) + f(x + 2 * h)
        x += 2 * h

    return res * h / 3

@staticmethod
def gauss(f: Callable[[float], float], a: float, b: float, n: int) -> float:
    def p2v(p: float, c: float, d: float) -> float:
        return (d + c) / 2 + (d - c) * p / 2

    x, w = roots_legendre(n)
    return sum([(b - a) / 2 * w[i] * f(p2v(x[i], a, b)) for i in range(n)])
```

plot.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
import settings

def get_label(n, m, md1, md2) -> str:
    return f'N = {n}, M = {m}, Методы: {md1}-{md2}'


def plot(values, all_n, all_m, methods1, methods2):

    plt.clf()

    plt.xlabel("Tao")
    plt.ylabel("Eps(Tao)")
    plt.grid(which='minor', color='k', linestyle=':')
    plt.grid(which='major', color='k')

    for i in range(len(values)):
        x, y = [], []
        j = settings.TAU_START
        while j < settings.TAU_END:
            x.append(j)
            y.append(values[i](j))
            j += settings.TAU_STEP

        plt.plot(x, y, label=get_label(all_n[i], all_m[i], methods1[i],
methods2[i]))

    plt.legend()
    plt.savefig('points.png')
    plt.show()
```

Результаты

Алгоритм вычисления n корней полинома Лежандра n-ой степени

Все корни полинома лежат на отрезке $[-1, 1]$, однако, в силу симметричности интервалов $[-1, 0]$ и $[0, 1]$, достаточно рассмотреть лишь один из них.

Корни полинома вычисляем итеративно по методу Ньютона:

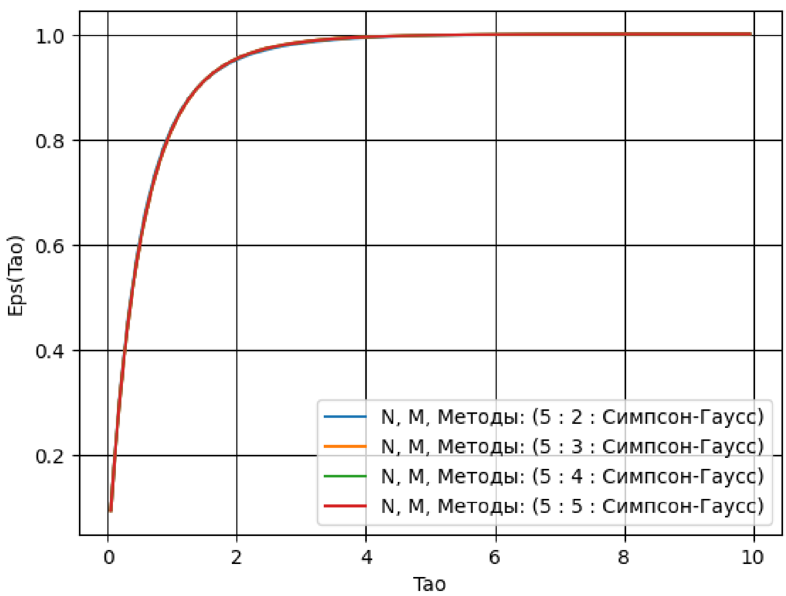
$$x_i^{(k+1)} = x_i^k - \frac{P_n(x_i)^k}{P_n'(x_i)^k}$$

Начальное приближение для i-го корня:

$$x_i^0 = \cos\left[\frac{\pi(4i-1)}{4n+2}\right]$$

Влияние количества выбираемых узлов сетки по каждому направлению на точность расчетов

При задании 5 узлов для метода Симпсона в качестве «внешнего» метода интегрирования, метод Гаусса даст один и тот же результат при различном кол-ве узлов. ($\tau = 1$)



При этом, если для метода Симпсона указать меньшее количество узлов, мы получим расхождение с физическим смыслом. ($\tau = 1$)

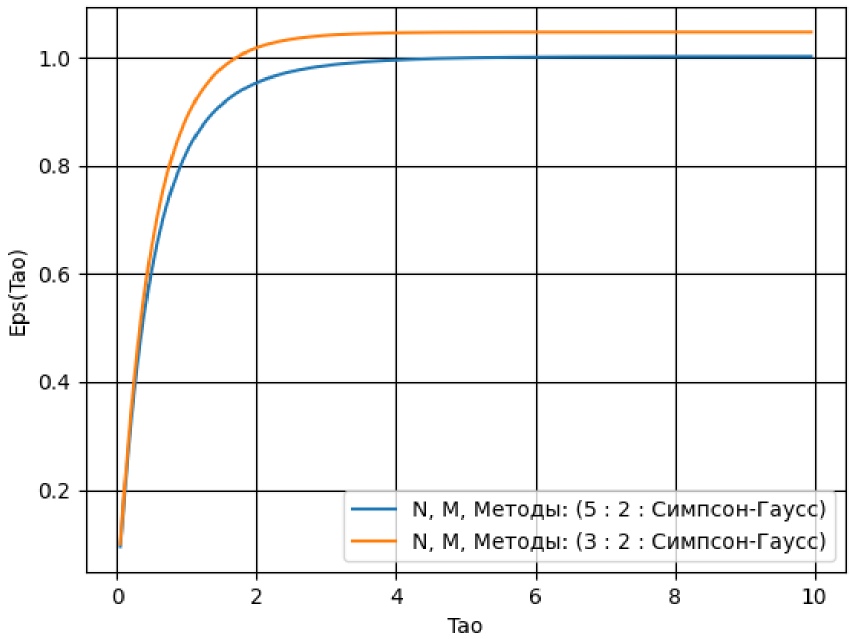
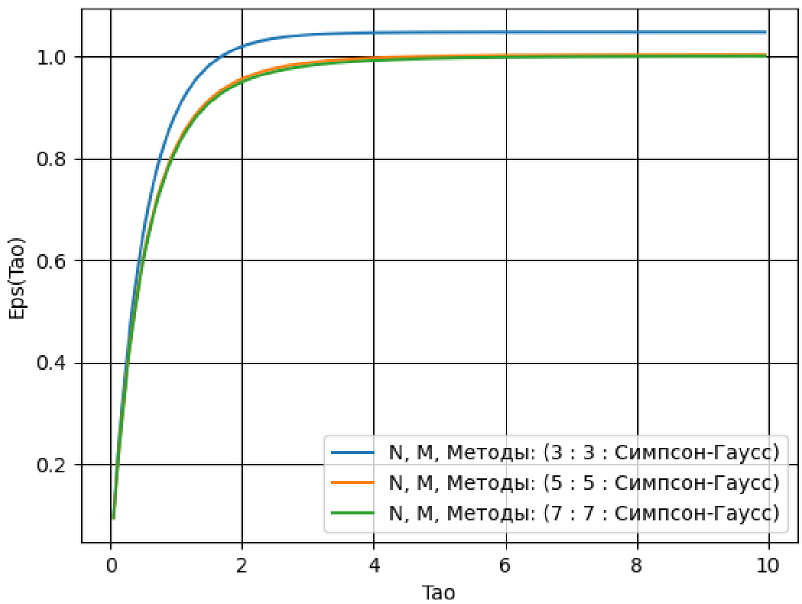


График зависимости $\varepsilon(\tau)$ ($\tau = 1$)



Ответы на контрольные вопросы

1. **В каких ситуациях теоретический порядок квадратурных формул численного интегрирования не достигается?**

В случае если подынтегральная функция не имеет соответствующих производных. Порядок точности равен номеру последней существующей производной.

2. **Построить формулу Гаусса численного интегрирования при одном узле.**

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 2\,, P_1(x) = x \rightarrow\ x = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} 2f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} * 0\right) = (b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

3. **Построить формулу Гаусса численного интегрирования при двух узлах.**

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \rightarrow x =\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}A_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_2 = 0 \end{cases} \rightarrow A_1 = A_2 = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(f)df = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} * \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} * \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

4. **Получить обобщенную кубатурную формулу, на основе метода трапеций, с тремя узлами на каждом направлении.**

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b F(x)dx = h_x\left(\frac{1}{2}F_0 + F_1 + \frac{1}{2}F_2\right) = h_x h_y \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}f(x_0,y_0) + f(x_0,y_1) + \frac{1}{2}f(x_0,y_2)\right] + \frac{1}{2}f(x_1,y_0) + f(x_1,y_1) + \frac{1}{2}f(x_1,y_2) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}f(x_2,y_0) + f(x_2,y_1) + \frac{1}{2}f(x_2,y_2)\right]\right)$$

$$h_x = \frac{b-a}{2}, h_y = \frac{d-c}{2}$$