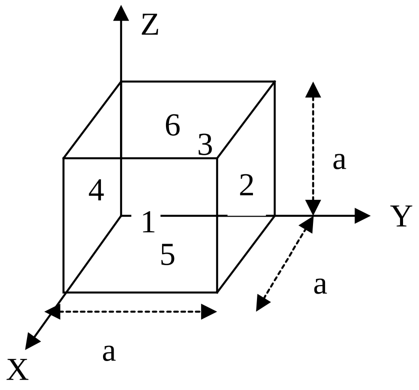
Tema 2. Distribuciones de carga. Capacidad y energía electrostática

PROBLEMA 1. Considera la superficie cúbica cerrada de lado *a* que muestra la figura (el número de cara se especifica en el centro de cada cara). En esta región existe un campo eléctrico uniforme de valor $\vec{E} = E_0\, \vec{i}$. Calcula el flujo del campo eléctrico a través de cada una de las caras del cubo y la carga total en su interior



RESOLUCIÓN

Para hallar el flujo del campo a través de una superficie *S* usamos la expresión:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}\ .$$

A través del producto escalar tenemos en cuenta la orientación relativa entre el campo $\vec{E}$ y el vector superficie $d\vec{S}$.

Dado que el campo eléctrico apunta a lo largo de la dirección *X*, $\vec{E} = E_0\, \vec{i}$, el flujo es nulo en todas las caras excepto en la cara 1 y la 3:

$$\boxed{\Phi_{Ecara2} = \Phi_{Ecara4} = \Phi_{Ecara5} = \Phi_{Ecara6} = 0}$$

Para la cara 1 y la cara 3, teniendo en cuenta las expresiones del campo eléctrico y de los vectores superficie respectivos tenemos:

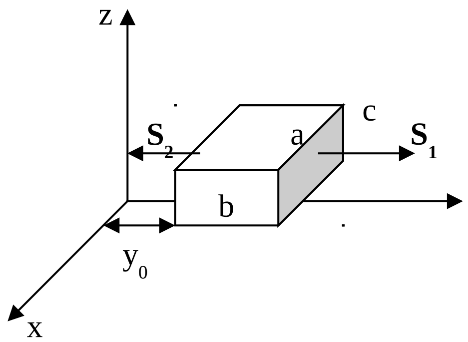
$$\boxed{\Phi_{Ecara1} = \left(E_0\, \vec{i}\right)\cdot\left(a^2\, \vec{i}\right) = E_0 a^2}\ ;\ \boxed{\Phi_{Ecara3} = \left(E_0\, \vec{i}\right)\cdot\left(-a^2\, \vec{i}\right) = -E_0 a^2}$$

Puesto que el flujo total a través del cubo es nulo $\Phi_T = \Phi_{Ecara1} + \Phi_{Ecara3} = 0$, utilizando la Ley Gauss $\Phi_T = q_e/\varepsilon_0$ sabemos que la carga total encerrada dentro del cubo también debe ser nula

---

PROBLEMA 2. El campo electrostático en que está sumergida la superficie de la figura viene dado en
el S.I. por: $\vec{E} = (4 + 3\cdot y^2)\cdot\vec{j}$. Determinar la carga neta encerrada en la superficie. Datos: a=0.5 m, b=0.4 m, c=0.3 m e y_0=0.2 m

RESOLUCIÓN



Sólo hay flujo a través de las superficies 1 y 2.
En el resto, los vectores **E** y **S** son perpendiculares.
Aplicando el Teorema de Gauss:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \bullet \vec{dS} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Por tanto:

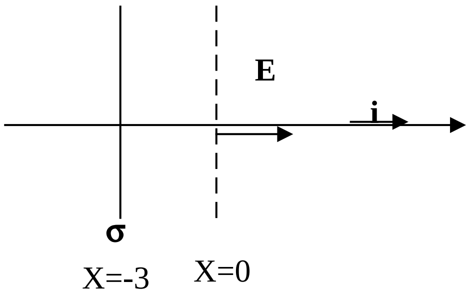
$$\phi_E = \phi_1 + \phi_2 = \left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{S_1}\right|\cdot\cos 0^\circ + \left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{S_2}\right|\cdot\cos 180^\circ = (4 + 3\cdot(y_0 + b)^2)\cdot(a\cdot c)\cdot 1 + (4 + 3\cdot {y_0}^2)\cdot(a\cdot c)\cdot(-1) =$$

$$= (4 + 3\cdot(0.2 + 0.4)^2)\cdot(0.5\cdot 0.3)\cdot 1 + (4 + 3\cdot(0.2)^2)\cdot(0.5\cdot 0.3)\cdot(-1) = 0.144 \quad N\cdot m^2/C$$

La carga neta encerrada es:

$$Q_{encerrada} = \phi_E\cdot\varepsilon_0 = \frac{0.144}{4\cdot\pi\cdot 9\cdot 10^9} = 1.27\cdot 10^{-12}\ C = 1.27\ pC$$

PROBLEMA 3. En una región del espacio se encuentra situado en la posición (-3,0,0) un plano indefinido con densidad de carga σ=3 C/m^2. a) Calcular la fuerza eléctrica a la que se encuentra sometida una partícula con carga q=1 nC que está situada en el punto (0,0,0) y b) Calcular la energía potencial que tiene dicha partícula, si el origen de potenciales V=0 se encuentra en el punto (1,0,0).
Dato: $\varepsilon_0 = 8.85\cdot10^{-12}$ C^2 /N m^2



RESOLUCIÓN:

a) El campo eléctrico en cualquier punto es:

$$\vec{E}(0) = \left|\frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0}\right|\cdot\vec{i} = \frac{3\cdot4\cdot\pi\cdot9\cdot10^9}{2}\vec{i} = 54\cdot\pi\cdot10^9\cdot\vec{i}\quad\left[\frac{N}{C}\right]$$

La fuerza a la que está sometida la partícula es:

$$\vec{F}_e = q\cdot\vec{E}(0) = 54\cdot\pi\cdot\vec{i}\qquad[N]$$

b) La energía potencial de la partícula será:

$$U = q\cdot V(0) = 10^{-9}\cdot54\cdot\pi\cdot10^9 = 54\cdot\pi\qquad[J]$$

donde el potencial en el punto (0) se calcula como:

$$V(0) - V(1) = -\int_1^0 \left|\vec{E}\right|\cdot dx = -E\Delta x = 54\cdot\pi\cdot10^9\quad(0-1) = 54\pi\cdot10^9[V]$$

siendo V(1) = 0 el origen de potenciales.

PROBLEMA 4. Una corteza esférica de radio 6cm posee una densidad superficial uniforme de carga σ=9nC/m^2. (a) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza? y (b) Determina el campo eléctrico en r_1=2cm y r_2=10cm

RESOLUCIÓN:

a) La carga total sobre la esfera se calcula como:

$$\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma\cdot S = \sigma\cdot4\cdot\Pi\cdot r^2 = 9\cdot10^{-9}\cdot4\cdot\Pi\cdot\left(6\cdot10^{-2}\right)^2 = 4.07\cdot10^{-10}\quad C$$

b) Para determinar el campo eléctrico a distintos valores de r, utilizamos la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}\bullet\vec{dS} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

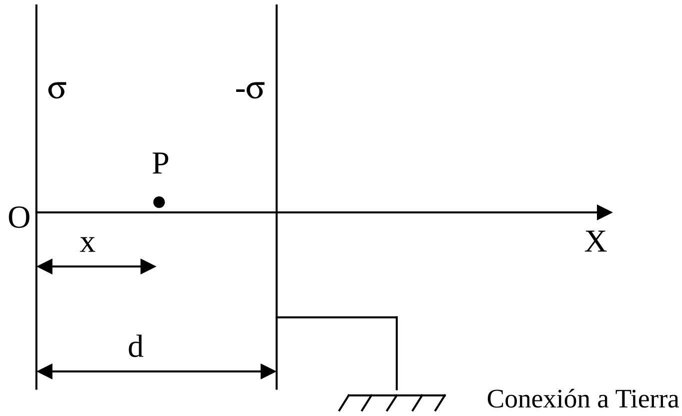
La carga encerrada en el primer caso (r_1=2cm) es 0 porque ésta se encuentra distribuida en la superficie de la corteza, luego: $E_i=0$.

En el segundo caso (r_2=10 cm), la carga será la total contenida en la corteza esférica. Desarrollando la expresión anterior, teniendo en cuenta que los vectores $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos, obtenemos:

$$E_e \cdot 4 \cdot \Pi \cdot r^2 = \frac{Q_{Total}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{r=10} = \frac{Q_{Total}}{4 \cdot \Pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{4071.5 \cdot 10^{-13}}{4 \cdot \Pi \cdot (0.1)^2 \cdot 8.84 \cdot 10^{-12}} = 366.5 \quad N/C$$

La dirección del campo es radial y sentido hacia fuera.

PROBLEMA 5. Las dos placas conductoras de la figura tienen densidades superficiales de carga iguales y opuestas $(\pm\sigma)$, siendo la separación entre ellas *d* mucho menor que sus dimensiones (por lo que podemos considerar las placas como infinitas). Calcular: a) El campo eléctrico en todo el espacio y b) el potencial en todos los puntos del espacio



RESOLUCIÓN:

a) El potencial creado por cada placa vale $\vec{E} = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\vec{u}$ donde el vector unitario ***u*** tomará las sentidos $+\,\boldsymbol{i}$ o $-\,\boldsymbol{i}$ teniendo en cuenta que las cargas positivas son fuentes del campo y las negativas sumideros del campo. Entonces es fácil ver que el campo valdrá:

$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}$ para $0 < x < d$ y será nulo fuera de las placas.

b) El potencial se obtiene ahora integrando el campo

$V = -\int E dx = -Ex + C_1$ ya que, según hemos visto en a), el campo es uniforme en todos los puntos y, por tanto, puede salir fuera de la integral. Además necesitamos calcular la constante de integración C_1. Así:

<u>$0 < x < d$</u> $$V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + C_1$$

Ahora bien, como $V_{(x=d)} = 0$, sustituyendo en la ecuación anterior es claro que $C_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$ por lo que la expresión para el potencial quedará:

$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d - x)$ y el potencial en el punto x=0 valdrá $V_{(x=0)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d = V_0$

<u>$x < 0$</u>

Aquí se tiene que $V = C_2$ ya que el campo es nulo. Como $V_{(x=0)} = V_0 \rightarrow C_2 = V_0$

<u>$x > 0$</u>

Aquí $V = C_3$ ya que el campo también es nulo. Como $V_{(x=d)} = 0 \rightarrow C_3 = 0$

PROBLEMA 6. Dos conductores esféricos descargados, separados por una distancia muy grande, se conectan mediante un hilo conductor de capacidad despreciable. Una carga total Q de 20 μC se coloca sobre esta combinación de esferas. Si los radios de las esferas son 4 cm y 6 cm, calcula: (a) El campo eléctrico en la superficie de cada esfera y (b) El potencial eléctrico a una distancia R/2 del centro de cada esfera

RESOLUCIÓN:

a) Como las dos esferas están conectadas por un conductor, el potencial es el mismo en ambas:

$$V_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r_1} = k \cdot \frac{Q_2}{r_2} = V_2 \qquad \Rightarrow \qquad Q_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot Q_2$$

De las condiciones del problema: $Q = Q_1 + Q_2$

Sustituyendo Q_1 en la expresión de Q:

$$Q = \frac{r_1}{r_2} \cdot Q_2 + Q_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right) \cdot Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{Q \cdot r_2}{r_1 + r_2} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{(4+6) \cdot 10^{-2}} = 12 \cdot 10^{-6} \quad C$$

Y Q_1 es: $Q_1 = Q - Q_2 = (20 - 12) \cdot 10^{-6} = 8 \cdot 10^{-6} \quad C$

La intensidad de campo eléctrico en la superficie de cada esfera es:

$$E_{r_1} = k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6}}{(4 \cdot 10^{-2})^2} = 4{,}5 \cdot 10^7 \quad \frac{N}{C}$$

$$E_{r_2} = k \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-6}}{(6 \cdot 10^{-2})^2} = 3 \cdot 10^7 \quad \frac{N}{C}$$

En ambos casos la dirección es radial y el sentido hacia fuera de la superficie porque la carga es positiva.

b) Al ser esferas conductoras la carga se distribuye en la superficie de las mismas. El potencial es constante en todo el volumen de la esfera (superficie equipotencial) e igual al que tiene en su superficie. Dado que los puntos donde pide calcular el potencial son puntos interiores en cada esfera, su potencial será:

$$V_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-2}} = 18 \cdot 10^5 \quad V \quad ; \quad V_2 = k \cdot \frac{Q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-2}} = 18 \cdot 10^5 \quad V$$

En este último apartado sólo es necesario calcular el valor de un potencial ya que el otro es igual.

PROBLEMA 7. Un plano indefinido posee una densidad superficial de carga σ = 8.85 pC y está situado en la posición x = 0. Paralelo a este plano se encuentra una capa metálica, descargada e indefinida, de espesor comprendido entre las posiciones x = 3m y x = 4m. Calcular: a) el campo eléctrico en todo el espacio, b) la *d.d.p.* entre las posiciones x = 3.5m y x = 4.5m y c) el potencial dentro de la capa metálica si el origen de potenciales se esta en x = 0

RESOLUCIÓN:

a) El módulo del campo eléctrico generado por el plano cargado indefinido es $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0{,}5$ V/m . Tomando en consideración la dirección y sentido del vector, tenemos:

x < 0 $E = 0{,}5(-i)$ V/m
0<x<3 $E = 0{,}5(+i)$ V/m
3<x<4 $E = 0$
x>4 $E = 0{,}5(+i)$ V/m

b) El cálculo de la diferencia de potencial entre las posiciones x=3.5m y x=4.5m debe dividirse en dos zonas puesto que el campo cambia de valor entre ambas posiciones. Así: $V_{4.5} - V_{3.5} = (V_{4.5} - V_4) + (V_4 - V_{3.5})$ donde

$$V_4 - V_{3.5} = -\int_{3.5}^{4} 0{,}5(+i)\cdot dx(+i) = -0{,}5(4-3.5) = -0{,}25 \text{ V}$$

$V_{4.5} - V_4 = 0$ V porque V es constante

c) La capa metálica es equipotencial. Bastará calcular el potencial en la superficie, es decir, en x = 3m.

$$V_3 - V_0 = V_3 - 0 = -\int_{0}^{3} 0{,}5(+i)\cdot dx(+i) = -0{,}5(3-0) = -1{,}5 \text{ V}$$

Toda la superficie y el interior de la capa metálica están a -1,5 V (es decir, 1,5 voltios por debajo del punto escogido como origen).

PROBLEMA 8. a) ¿Qué cantidad de carga será necesario añadir a una esfera conductora aislada de radio R_1 = 10 cm para que ésta alcance un potencial de 500 V?, b) Si la anterior carga es compartida con otra esfera conductora aislada e inicialmente descargada de radio R_2 = 5 cm de radio (ambas conectadas mediante un fino hilo conductor), ¿cuál será la carga y el potencial final en cada esfera conductora? y c) Una vez cargadas metemos la esfera más pequeña en el interior de la más grande, aisladas entre sí, constituyendo un sistema de dos superficies esféricas concéntricas. Calcular el potencial al que quedan las dos esferas.

RESOLUCIÓN:

a) Una esfera conductora es un volumen equipotencial. Considerando el origen de potenciales en el infinito, sabemos que el potencial creado por la esfera en puntos en el exterior ($r \geq R_1$) es,

$$V_{exterior} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\ .$$

Justo en su superficie y por tanto también en su interior (volumen equipotencial) el potencial es:

$$V_{esfera} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\ .$$

De aquí, despejamos la carga necesaria para alcanzar un potencial de 500 Voltios: $\boxed{Q = V_{esfera} 4\pi\varepsilon_0 R_1 = 5.6\cdot 10^{-9} \text{ C}}$

b) Si ahora conectamos la esfera 1 con otra esfera conductora que se halla descargada, habrá una transferencia de carga entre ellas hasta que queden al mismo potencial, es decir:

$$V_{esfera1} = V_{esfera1}\ ;\ \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\ .$$

El total de carga de las dos esferas es aportado por la esfera 1 (calculado en el apartado **a)**) ya que la esfera 2 se halla inicialmente descargada: $Q = Q_1 + Q_2$. Así, podemos escribir:

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q - Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\ .$$

De aquí despejamos la carga de la esfera 1:

$$\boxed{Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q = 3.7\cdot 10^{-9} \text{ C}}\ ,$$

y la carga en la esfera 2 : $\boxed{Q_2 = Q - Q_1 = 1.86\cdot 10^{-9} \text{ C}}$

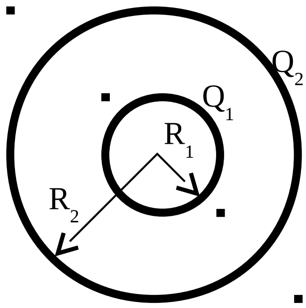
El potencial al que quedan las dos esferas es el mismo: $\boxed{V_{esfera1} = V_{esfera2} = 333\text{ V}}$

c) Al meter la esfera 2 (pequeña) en la 1 (grande) el potencial en cada esfera cambia. Para calcular el potencial en cada una de ellas hacemos uso del principio de superposición, y tenemos en cuenta que por ser conductores, el potencial en el interior de la esfera es igual al potencial en su superficie. De este modo:

$V_{esfera1} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$; y sustituyendo: $\boxed{V_{esfera1} = 500\text{ Voltios}}$

$V_{esfera2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$; y sustituyendo: $\boxed{V_{esfera2} = 666\text{ Voltios}}$

PROBLEMA 9. Tenemos dos superficies conductoras esféricas concéntricas, de espesor despreciable y radios R_1 = 10 cm y R_2 = 20 cm. La carga neta Q_2 sobre la superficie exterior es 10^{-10} C. La diferencia de potencial entre ambas superficies es V_1-V_2 = 10000 V. Determinar:
a) La carga Q_1 de la superficie interior
b) Si la superficie interna se conecta a tierra, ¿a qué potencial queda la superficie externa?



RESOLUCIÓN:

(a) Principio de superposición. Calculamos el potencial en cada una de las superficies como la suma de las contribuciones de cada superficie de modo independiente. Por tratarse de conductores en equilibrio electrostático están al mismo potencial en todo su volumen.

Potencial en superficie interior: $V_1 = K\frac{Q_1}{R_1} + K\frac{Q_2}{R_2}$

Potencial en superficie exterior: $V_2 = K\frac{Q_1}{R_2} + K\frac{Q_2}{R_2}$

Conocemos la diferencia de potencial, podemos despejar Q_1:

$$-10000 = V_2 - V_1 = KQ_1\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \Rightarrow Q_1 = 2{,}22\cdot 10^{-7}\,C$$

(b) Sabemos que la superficie interna queda al potencial tierra, $V'_1 = 0$, y que la carga de la superficie exterior se conserva: $Q'_2 = Q_2$. Por tanto:

$$0 = V_1 = K\frac{Q_1'}{R_1} + K\frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1'}{R_1} = \frac{-Q_2}{R_2} \Rightarrow Q_1' = \frac{-R_1}{R_2}Q_2 = -5\cdot 10^{-11}\,C$$

y podemos calcular el nuevo potencial en la superficie exterior:

$$V_2' = K\frac{Q_1'}{R_2} + K\frac{Q_2}{R_2} = \mathrm{K}\frac{Q_1' + Q_2}{R_2} = 2{,}25\,\mathrm{V}$$

PROBLEMA 10. Un condensador está formado por dos armaduras esféricas, concéntricas, de radios *a* = 10 mm y *b* = 12 mm. El espacio entre ellas está relleno con un dieléctrico plástico de permitividad relativa ε_r = 3.1. El condensador se carga con una carga Q = 10 pC, siendo la armadura exterior la que se conecta al borne negativo del generador. Calcular: a) la *ddp* entre ambas armaduras b) la capacidad del condensador y c) la energía potencial eléctrica almacenada en el dispositivo. Datos: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ S.I.$

RESOLUCIÓN:

a) El campo eléctrico en un dispositivo como el descrito se limita al espacio entre las armaduras. Aplicando la ley de Gauss, se obtiene que:

$$E_{r<a} = 0$$

$$E_{a<r<b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$$

$$E_{r>b} = 0$$

donde se ha supuesto, tal y como indica el enunciado, que la armadura exterior adquiere una carga –Q y la interior +Q. Así pues, la *ddp* entre ambas armaduras vendrá dada por:

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}_{a<r<b} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi 3.1\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0.48\ \mathrm{V}$$

b) La capacidad de este dispositivo se calculará como:

$$C = Q/V = 20.66\ \mathrm{pF}$$

c) La energía almacenada en el dispositivo se puede obtener usando la expresión:

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

donde, sustituyendo los valores obtenemos:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = 2.4\ pJ$$

PROBLEMA 11. Un condensador de capacidad C = 20 nF se conecta a una d.d.p. de 100 V. Una vez cargado y aislado se introduce entre sus armaduras un dieléctrico de permitividad relativa ε_r = 2. Calcula la diferencia de energía antes y después de introducir el dieléctrico.

RESOLUCIÓN:

a) La energía potencial almacenada inicialmente es: $U_0 = \frac{1}{2}CV^2 = 10^{-4}[J]$

Tras introducir el dieléctrico la energía será: $U = \frac{U_0}{\varepsilon_r} = \frac{10^{-4}}{2}[J]$

La variación de energía es, por tanto: $\Delta U = U - U_0 = -5\times 10^{-5}[J]$

PROBLEMA 12. Cargamos un condensador de 20 nF con una pila de 5 V. Una vez cargado lo aislamos. A continuación reducimos la distancia entre sus placas a la mitad e introducimos entre ellas un dieléctrico de ε_r=2. ¿Que energía hay almacenada en dicho condensador? Datos: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ S.I.$

RESOLUCIÓN:

La carga que adquiere el condensador a conectarlo a la pila es:
$Q = C_0 \cdot V = 100\ nC$

Si reducimos a la mitad la distancia entre placas la capacidad es:
$C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot s}{d/2} = 2\dfrac{\varepsilon_0 \cdot s}{d} = 2C_0$

Y al introducir el dieléctrico: $C_f = \varepsilon_r C_1 = \varepsilon_r 2C_0 = 4C_0 = 80\ nF$

Por lo tanto la energía almacenada en el condensador es:
$U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C_f} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(100x10^{-9})^2}{80x10^{-9}} = 62.5\ nJ$

PROBLEMA 13. En un condensador aislado de láminas plano-paralelas de área S = 1 m^2 y separación d = 3 cm se introduce una placa de dieléctrico de la misma área, espesor b = 1 cm y constante dieléctrica relativa ε_r = 2. La diferencia de potencial antes de introducir el dieléctrico entre las placas es V=100 V. Calcular: a) La carga libre depositada en las placas y b) La capacidad del condensador cuando se ha introducido el dieléctrico entre las placas. Datos: ε_0=1/4·π·9·10^9 (C^2/N·m^2)

RESOLUCIÓN:

a) La carga libre depositada en las placas es:

$$Q = C_0 \cdot V = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d} \cdot V = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0.03} \cdot 100 = 2.94 \cdot 10^{-8} \quad [C]$$

b) La capacidad del condensador después de introducir el dieléctrico es:

$$C_{dieléctrico} = \frac{Q}{V_{dieléctrico}}$$

$$V_{dieléctrico} = E_0 \cdot (d-b) + \frac{E_0}{\varepsilon_r} \cdot b = \frac{V}{d} \cdot (d-b) + \frac{V}{d \cdot \varepsilon_r} \cdot b = \frac{100}{0.03} \cdot 0.02 + \frac{100}{0.03 \cdot 2} \cdot 0.01 = 83.3 \quad [V]$$

$$C_{dieléctrico} = \frac{Q}{V_{dieléctrico}} = \frac{2.94 \cdot 10^{-8}}{83.3} = 3.5 \cdot 10^{-10} \quad [F]$$

Otra forma de calcularlo es considerar el condensador como dos condensadores en serie, uno con dieléctrico de permitividad ε y otro de permitividad ε_0

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{4.42 \cdot 10^{-10} \cdot 1.77 \cdot 10^{-9}}{4.42 \cdot 10^{-10} + 1.77 \cdot 10^{-9}} = 3.5 \cdot 10^{-10}\ [F]$$

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S_1}{d_1} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0.02} = 4.42 \cdot 10^{-10} \quad [F]$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S_2}{d_2} = \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0.01} = 1.77 \cdot 10^{-9}\ [F]$$

PROBLEMA 14. Un condensador de 0.1 µF de capacidad se conecta a una fuente de alimentación de 10000 V. Cuando el condensador está cargado se desconecta de la fuente y sus armaduras se unen en paralelo con las de otro condensador de capacidad de 0.3 µF, que inicialmente se encuentra descargado. Calcula: (a) La diferencia de potencial común entre las armaduras y (b) La carga y la energía almacenadas en cada condensador después de la unión

RESOLUCIÓN:

a) Inicialmente la carga de cada condensador se calcula como:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 10000 = 10^{-3}\ C \qquad y \qquad Q_2 = 0\ C$$

Los dos condensadores están conectados en paralelo, por lo que se pueden sustituir por un único condensador con capacidad:

$C_{eq} = C_1 + C_2 = 4 \cdot 10^{-6}\ F$, con carga total: $Q = Q_{1f} + Q_{2f} = Q_{1i} + Q_{2i} = 10^{-3}\ C$

La diferencia de potencial entre las placas del condensador equivalente es la misma que la que tiene cada uno de los dos condensadores acoplados:

$$V = V_{1f} = V_{2f} = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{10^{-3}}{0.4 \cdot 10^{-6}} = 2500\ V$$

b) La carga final almacenada en cada condensador después de la unión es:

$$Q_{1f} = C_1 \cdot V = 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 2500 = 25 \cdot 10^{-5}\ C$$

$$Q_{2f} = C_2 \cdot V = 0.3 \cdot 10^{-6} \cdot 2500 = 75 \cdot 10^{-5}\ C$$

Y la energía:

$$U_{1f} = \frac{1}{2} \cdot C_{1f} \cdot V_{1f}^{\ 2} = \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 2500^2 = 0{,}3125\ J$$

$$U_{2f} = \frac{1}{2} \cdot C_{2f} \cdot V_{2f}^{\ 2} = \frac{1}{2} \cdot 0.3 \cdot 10^{-6} \cdot 2500^2 = 0{,}9375\ J$$

PROBLEMA 15 Un sensor de presión está formado por un condensador de placas plano-paralelas, una de cuales es fija y la otra es móvil. Las placas del condensador se hallan conectadas a un generador de 5 V. Al producirse una presión sobre el sensor la distancia entre las dos placas varía y se genera una pequeña señal de corriente que sirve para saber la presión ejercida. Calcular: (a) Si la capacidad del condensador varía de 1 nF a 2 nF, ¿cuánto se han alejado o acercado las placas? (b) Si la variación de la capacidad se produce en un intervalo de tiempo de 1 ms, ¿qué intensidad de corriente promedio se genera en este circuito? (c) ¿Qué energía almacena el condensador en cada una de las dos situaciones?

RESOLUCIÓN:

a) La capacidad de un condensador de placas plano-paralelas viene por $C = \varepsilon \frac{S}{d}$. Si la capacidad se dobla, tenemos que **la distancia *d* entre placas se reduce a la mitad**.

b) Al variar la capacidad, se produce una variación de la carga en las placas (la d.d.p. se mantiene constante a 5 V), que viene dada por, $Q = CV$. Así tenemos,

$$\Delta Q = Q_{final} - Q_{inicial} = V(C_{final} - C_{inicial}) = 5(2 \cdot 10^{-9} - 1 \cdot 10^{-9}) = 5nC$$

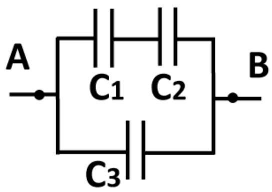
La corriente generada viene dada por,

$$\boxed{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{5{\cdot}10^{-9}}{1{\cdot}10^{-3}} = 5\mu A}$$

c) La energía viene dada por, $U = \frac{1}{2}CV^2$, con lo que:

$$\boxed{U_{inicial} = \frac{1}{2}1{\cdot}10^{-9}{\cdot}5^2 = 12.5nJ} \; ; \; \boxed{U_{final} = \frac{1}{2}2{\cdot}10^{-9}{\cdot}5^2 = 25nJ}$$

PROBLEMA 16. En el circuito de la figura entre A y B hay 100 V. Calcula: (a) La capacidad equivalente de la combinación de condensadores. (b) La energía almacenada en cada uno de ellos. Datos: C_1=10μF, C_2=5μF y C_3=4μF



RESOLUCIÓN:

a) Los condensadores de 10 μF y de 5 μF están conectados en serie. El equivalente de estos dos está conectado en paralelo con el de 4 μF:

SERIE: $$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10 \cdot 5 \cdot}{10 \cdot + 5 \cdot} = \frac{50}{15} \; \mu F$$

PARALELO: $$C_e = C_{12} + C_3 = \frac{50}{15} + 4 = \frac{110}{15} = \frac{22}{3} = 7.33 \quad \mu F$$

b) Como en todos los casos conocemos C, para calcular la energía utilizaremos las expresiones:

$$U = \frac{1}{2} C \cdot V^2 \quad \text{o bien:} \quad U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \quad \text{según nos convenga.}$$

La diferencia de potencial que existe entre los bornes del condensador de 4 μF es de 100 V, por tanto la energía almacenada es:

$$U_3 = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} 4 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ J} = 20 \text{ mJ}$$

Como los condensadores C_1 y C_2 están en serie, la carga que almacena el condensador equivalente es igual a la que almacenan cada uno de ellos individualmente y su valor es:

$$Q_1 = Q_2 = Q_{12} = C_{12} \cdot V = \frac{50}{15} \cdot 10^{-6} \cdot 100 = \frac{50}{15} \cdot 10^{-4} \quad C$$

Por lo tanto la energía que almacena cada uno de ellos es:

$$U_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left((50/15) \cdot 10^{-4}\right)^2}{10^{-5}} = 5{,}56 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 5{,}56 \text{ mJ}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left((50/15)\cdot 10^{-4}\right)^2}{5\cdot 10^{-6}} = 11{,}1\cdot 10^{-3}\ \mathrm{J} = 11{,}11\ \mathrm{mJ}$$