Tema 1. Efectos eléctricos de cargas puntuales

PROBLEMA 1. Sabiendo que en las proximidades de la corteza terrestre hay un campo eléctrico uniforme de 100 V/m, dirigido hacia la Tierra, calcula la carga que debe tener un cabello de 2.10^{-3} g de masa para que quede suspendido en el aire. Nota: tomar g=10 m/s^2

RESOLUCIÓN:

Para que el cabello flote la fuerza eléctrica que aparece sobre él debe compensar su peso.

$F_G + F_E = 0$, siendo: $F_G = mg\,(-j)$ y $F_E = q \cdot E\,(-j)$

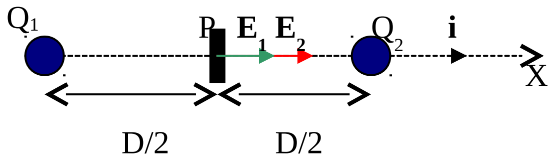
Por tanto: $mg + qE = 0 \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{mg}{E} = -\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{100} = -0{,}2\ \mu C$

PROBLEMA 2. Dos cargas fijas Q_1=3μC y Q_2=-5μC se encuentran alineadas y separadas por una distancia D=20 cm. Calcular: a) El campo eléctrico en el punto medio de la línea recta que une ambas cargas b) ¿Cuál es la energía potencial que tendrá una carga Q_3=20 nC situada en ese punto?

Datos: k=9·10^9 N·m^2/C^2

RESOLUCIÓN:

a)



El campo eléctrico en el punto P es la suma de los campos eléctricos creados por las cargas Q_1 y Q_2 en dicho punto:

$$\overrightarrow{E_P} = \overrightarrow{E_{P1}} + \overrightarrow{E_{P2}} = k \cdot \left(\frac{Q_1}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} \right) \cdot \vec{i} + k \cdot \left(\frac{Q_2}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} \right) \cdot \vec{i} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10^9}{0.20^2} \cdot \left(3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}\right) \cdot \vec{i} = 7.2 \cdot 10^6 \cdot \vec{i} \quad \left[\frac{N}{C}\right]$$

b) El potencial en el punto P es la suma de los potenciales creados en ese punto por Q_1 y Q_2:

$$V_P = V_{P1} + V_{P2} = k \cdot \left(\frac{Q_1}{\left(\frac{D}{2}\right)} \right) + k \cdot \left(\frac{Q_2}{\left(\frac{D}{2}\right)} \right) = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9}{0.20} \cdot \left(3 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-6}\right) = -1.8 \cdot 10^5 \quad [V]$$

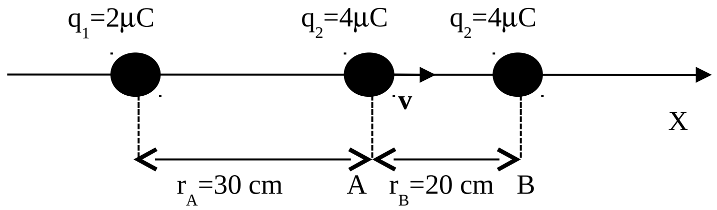
La energía potencial de Q_3 es:

$$U = Q_3 \cdot V_P = 20 \cdot 10^{-9} \cdot (-1.8 \cdot 10^5) = -3.6 \cdot 10^{-3} \quad [J]$$

PROBLEMA 3. Dos partículas de cargas q_1=2μC y q_2=4μC se encuentran fijas en el vacío y están separadas una distancia de 30 cm. Si soltamos q_2, determinar su energía cinética cuando partiendo del reposo se haya desplazado 20 cm.

Datos: k=9·10^9 N·m^2/C^2

RESOLUCIÓN:



Aplicando el principio de conservación de la energía:

$$\Delta E_c = -\Delta U \Rightarrow E_{C_B} - E_{C_A} = U_A - U_B \quad ; \quad v_A = 0 \Rightarrow E_{C_A} = 0$$

$$E_{C_B} = q_2 \cdot (V_A - V_B) = q_2 \cdot k \cdot q_1 \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{(r_A + r_B)} \right)$$

Sustituyendo datos:

$$E_{C_B} = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^{9} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{30 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{(30 \cdot 10^{-2} + 20 \cdot 10^{-2})} \right) = 96\ mJ$$

PROBLEMA 4. Un campo eléctrico viene determinado por la expresión $E = 2 \cdot x^3\ i$ kN/C. Determina la diferencia de potencial entre los puntos de coordenadas (1,1,1) m y (2,1,3) m

RESOLUCIÓN:

Para resolver esta cuestión utilizamos la relación que existe entre el potencial y el campo eléctrico:

$$dV = -E \cdot dr = -E\, i \cdot (dx\, i + dy\, j + dz\, k) = -E \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_{x=1}^{x=2} dV = -\int_{x=1}^{x=2} E \cdot dx \quad \Rightarrow \quad V(2) - V(1) = -\int_{x=1}^{x=2} 2 \cdot x^3 \cdot dx = -\left.\frac{2 \cdot x^4}{4}\right|_{x=1}^{x=2} = -\frac{1}{2}\left[2^4 - 1^4\right] = -\frac{15}{2} V$$

Lógicamente el potencial es mayor en el punto de coordenadas (1,1,1), ya que el sentido del campo es el positivo del eje X.

PROBLEMA 5. El potencial electrostático en cierta región del espacio está dado por $V = 2x^2 - y^2 + z^2$, donde x, y, z se expresan en metros y V en voltios. Determinar: (a) El vector campo eléctrico en el punto (1,2,3), (b) El trabajo que realizaría el campo sobre una carga puntual $q = 2\ \mu C$ que se desplazase desde el punto (1,2,3) hasta el (3,3,3)

RESOLUCIÓN

a) El campo eléctrico viene dado por el gradiente del potencial cambiado de signo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(x, y, z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

de donde obtenemos las componentes X, Y, Z del campo eléctrico:

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x}; E_y = \frac{\partial V}{\partial y}; E_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

De este modo, el campo eléctrico para cualquier punto del espacio es:

$$E = -4xi + 2yj - 2zk \quad N/C\ .$$

Concretamente, en el punto (1,2,3):

$$\boxed{E(1,2,3) = -4i + 4j - 6k \quad \mathrm{N/C}}$$

b) El trabajo que hay que realiza el campo (conservativo) entre dos puntos es igual a la diferencia de energía de potencial entre dichos puntos cambiada de signo:

$$W_E = -\left(U_{final} - U_{inicial}\right) = -(qV_{final} - qV_{inicial})$$

Vemos por tanto, que lo único que necesitamos es la diferencia de potencial entre ambos puntos:

$$V_{final} - V_{inicial} = V(3,3,3) - V(1,2,3) = 18 - 7 = 11 \text{ Volts}$$

Y el trabajo resultante es: $\boxed{W_E = -2 \cdot 10^{-6} \cdot 11 = -22 \ \mu\text{J}}$

PROBLEMA 6 . El haz de electrones en el interior del tubo de rayos catódicos (tubo de imagen) de un televisor es acelerado por una diferencia de potencial de 10000 V. ¿Con qué velocidad impacta cada electrón sobre la pantalla del televisor? ¿Qué energía transportan? Dato: masa del electrón= $9.1 \cdot 10^{-31}$ kg.

RESOLUCIÓN

Toda la diferencia de potencial se convierte en energía cinética de los electrones, por lo que por conservación de la energía tenemos: $\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$. De aquí podemos despejar la velocidad de los electrones: $v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2x1.6x10^{-19}x10000}{9.1x10^{-31}}}$. El valor que obtenemos es: $\boxed{v \cong 6x10^7 \ m/s}$ (velocidad muy elevada, ya que representa un 20% de la velocidad de propagación de la luz, $c=3x10^8$m/s)

La energía que transportan los electrones es energía cinética que podemos calcular como: $\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V = 1.6x10^{-15} \ J}$

PROBLEMA 7 Disponemos de dos esferas de 10 mg de masa y 5 mm de radio, cargadas ambas con 1 nC. Una de ellas está fija mientras que la otra se lanza hacia la primera, desde una distancia muy lejana, con una velocidad de 1 m/s. ¿Chocarán las esferas? ¿Por qué? Si no chocan determina la distancia entre los centros de las esferas cuando la segunda se detiene. Dato: K_e=9.10^9 S.I. Nota: considerar despreciable el efecto gravitatorio.

RESOLUCIÓN:

Como nos encontramos en un sistema conservativo (la energía total se conserva), si no hay choque antes, en el instante en el que la segunda esfera se detiene su energía potencial eléctrica será igual a su energía cinética inicial. Ya que su energía potencial inicial es nula (por estar las esferas muy alejadas entre sí) y su energía cinética final es cero (por v = 0). En consecuencia:

$$\frac{1}{2}mv^2 = K_e\frac{q^2}{d} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}10^{-5} \cdot 1 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-18}}{d} \qquad \Rightarrow \qquad d = 1.8 \cdot 10^{-3} m$$

Dado que la distancia entre los centros de las esferas cuando están en contacto es $2r$ = 0,01 m y d es menor que esta distancia, las dos esferas chocarán antes de detenerse la segunda.

PROBLEMA 8. En una cierta región del espacio un campo eléctrico vale $E = 100 \ j$ V/m. Una partícula de carga 2 μC se mueve dentro del campo desde el punto de coordenadas (1 , 4) m hasta el punto (3 , 2) m. Calcula: (a) La diferencia de potencial entre ambos puntos. (b) El cambio en la energía potencial de la partícula.

SOLUCIÓN:

a) La diferencia de potencial es: $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$

El campo eléctrico sólo tiene componente en el eje Y; y el vector desplazamiento en el plano XY:

$$E_r = E_y \cdot j \quad \text{y} \quad dr = dx \cdot i + dy \cdot j$$

Por tanto:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \left(E_y \cdot \vec{j}\right) \cdot \left(dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}\right) = -\int_a^b E_y \cdot dy = E_y \cdot [y]_b^a = 100 \cdot [y]_2^4 = 200 \quad V$$

b) El cambio en la energía potencial es:

$$\Delta U = U_f - U_i = q \cdot \Delta V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 4 \cdot 10^{-4} \quad J$$

PROBLEMA 9. En el interior de un conductor existe un potencial de la forma *V(x,y,z) = 0.05x + 2y + 2* [V]. ¿En qué dirección se moverán los electrones?
SOLUCIÓN:

Los electrones son cargas negativas y por tanto se moverán espontáneamente hacia potenciales crecientes en dirección contraria al campo eléctrico. Para obtener el campo eléctrico hacemos uso de la ecuación

$$\vec{E} = -gradV = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = -0.05\vec{i} - 2\vec{j}\,.$$

Por tanto, el campo es uniforme, contenido en el plano XY y tiene componentes (-0.05, -2, 0) N/C. Entonces los electrones tenderán a moverse en la dirección y sentido dados por el vector (0.05, 2, 0) m.