TEMA 1: REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

- 1. Sistemas de numeración y cambio de base
- 2. Aritmética binaria
- 3. Sistemas de codificación y representación numéricos
- 4. Representación de los números enteros
- 5. Representación de los números reales

TEMA 1: REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Bibliografía:

- ☐ P. M. Anasagasti. <u>Fundamentos de los Computadores</u>.
 - o Cap. 2 Representación de la Información.
- R. J. Tocci. <u>Sistemas Digitales: Principios y Aplicaciones</u>.
 - o Cap. 2: Sistemas Numéricos y Códigos.
- ☐ T.L.Floyd. <u>Fundamentos de Sistemas Digitales</u>.
 - o Cap. 2: Sistemas de Numeración, Operaciones y Códigos.
- C.Blanco. <u>Fundamentos de Electrónica Digital</u>.
 - Cap. 1: Sistemas y Códigos Numéricos.
- J.Mª Angulo y J. García. <u>Sistemas Digitales y Tecnología de</u> <u>Computadores</u>.
 - o Cap. 2: Sistemas de Numeración y Códigos.
- W. Stallings. Organización y Arquitectura de Computadores.
 - o Cap. 9: Aritmética del Computador. Representación en Coma Flotante.

1. Sistemas de Numeración y Cambio de Base

1. Sistemas de Numeración y Cambio de Base

Un sistema de numeración en *base* **b** utiliza para representar los números un alfabeto compuesto por **b** símbolos, dígitos o cifras.

Ejemplos:

 $\mathbf{b} = \mathbf{10} \ (decimal) \ \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

 $\mathbf{b} = \mathbf{8} (octal) \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

 $\mathbf{b} = \mathbf{16} \ (hexadecimal) \ \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$

 $b = 2 (binario) \{0,1\}$

El número se expresa mediante una secuencia de cifras:

$$N \equiv ... n_4 n_3 n_2 n_1 n_0 n_{-1} n_{-2} n_{-3} ...$$

El valor de cada cifra depende de la cifra en si y de la posición que ocupa en la secuencia. Todo número **N** sometido a un sistema *posicional* se puede descomponer como un polinomio de potencias de la base:

$$\mathbf{N} \equiv \dots + \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{b}^3 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{b}^2 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{b}^1 + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{b}^0 + \mathbf{n}_{-1} \cdot \mathbf{b}^{-1} \dots$$

1. Sistemas de Numeración y Cambio de Base

Es decir,
$$\mathbf{N} = \sum_{i} n_i b^i$$

Ejemplos:

$$3278,52_{10} = 3 \cdot 10^{3} + 2 \cdot 10^{2} + 7 \cdot 10^{1} + 8 \cdot 10^{0} + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

$$175,372_{8} = 1 \cdot 8^{2} + 7 \cdot 8^{1} + 5 \cdot 8^{0} + 3 \cdot 8^{-1} + 7 \cdot 8^{-2} + 2 \cdot 8^{-3} = 125,48828125_{10}$$

Conversión decimal - base b

Para obtener la representación de un número decimal entero N en una base b (con b<10) bastará con que dividamos sucesivamente N entre b. Agrupando los restos junto con el último cociente en orden inverso al obtenido, obtendremos el número buscado.

	<u>Cociente</u>	<u>Resto</u>	1. Sistemas de Numeración y Cambio de Base
363:2	181	1	
181:2	90	1	
90:2	45	0	
45:2	22	1	$363_{10} = 10110111_2$
22:2	11	0	
11:2	5	1	
5:2	2	1	
2:2	1	0	

Para obtener la representación de la parte fraccionaria bastará con que multipliquemos sucesivamente *N* por *b*. Agrupando las partes enteras en el mismo orden de su obtención obtendremos la representación buscada.

¿Cómo actuaríamos si tenemos que convertir un numero a una base mayor de 10?

1. Sistemas de Numeración y Cambio de Base

Denominamos <u>Rango de Representación</u> al conjunto de valores representable en una determinada base. Con n cifras en la base b podemos formar b^n combinaciones distintas. [0..bⁿ-1].

El **sistema binario** es un sistema posicional. Utiliza únicamente dos símbolos: el "0" y el "1", a los que denominamos bits.

Binario	Decimal	
000	0	
0 0 1	1	
010	2	
0 1 1	3	
100	4	
101	5	
110	6	
111	7	

=
$$(1 \cdot 2^5) + (1 \cdot 2^4) + (1 \cdot 2^2) = 2^5 + 2^4 + 2^2 = 32 + 16 + 4 = 52_{10}$$

= $2^{-1} + 2^{-3} = (1/2) + (1/8) = 0.625_{10}$
= $2^4 + 2^2 + 2^{-3} = 16 + 4 + (1/8) = 20.125_{10}$

2. Aritmética Binaria

Las operaciones básicas que podemos realizar son las mismas que en cualquier otra base: suma, resta, multiplicación y división.

Suma binaria

$$\begin{array}{r} 1110101 \\ + 1110110 \\ \hline 11101011 \end{array}$$

$$+\frac{10110110}{100110111}$$

$$\frac{101010001}{101010001}$$

$$+\frac{101101101}{010100011}\\ \hline 1000010000$$

Multiplicación binaria:

$$0 \times 0 = 0$$

 $1 \times 0 = 0$
 $0 \times 1 = 0$
 $1 \times 1 = 1$

Resta binaria:

$$-\frac{10110110}{01111010}\\ \hline 00111100$$

$$-\frac{1011011000}{0101110011}$$

$$\frac{0101100101}{0101100101}$$

División binaria:

$$0 \div 0 = \text{Operación no definida}$$

 $0 \div 1 = 0$
 $1 \div 0 = \text{Operación no definida}$
 $1 \div 1 = 1$

Ejemplos:

P1-1:08:29

3. Sistemas de Codificación y Representación Numérica

Sistema Octal:

Puesto que necesitamos 8 símbolos diferentes se utilizan del 0 al 7. Su utilidad radica en la fácil conversión a sistema binario y viceversa.

Conversión decimal a octal.

	Cociente	Resto
2014 : 8 =	251	6
251 : 8 =	31	3
31 : 8 =	3	7
	2014 ₁₀ = 37	′36 ₈

La correspondencia con el sistema binario es inmediata. Puesto que $8 = 2^3$, una cifra en octal corresponde a 3 binarias:

Sistema Hexadecimal:

Como ahora vamos a necesitar 16 símbolos diferentes utilizaremos los números del 0 al 9 junto con las 6 primeras letras, es decir de la 'A' a la 'F'.

Conversión decimal a hexadecimal.

	Cociente	Resto
4373 : 16 =	273	5
273 : 16 =	17	1
17 : 16 =	1	1
	4373 ₁₀ = 111	5 ₁₆

La correspondencia con el sistema binario es inmediata. Puesto que $16 = 2^4$, una cifra en hexadecimal corresponde a 4 binarias:

$$1001011101111.1011101 = 0010010111011111.10111010 = 25DF.BA_{16}$$

$$2 \quad 5 \quad D \quad F \quad B \quad A$$

$$592.D8_{16} = 10110010010.11011_{2}$$

Hexadecimal	Decimal	Binario
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
В	11	1011
С	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111



Código Gray:

Es un código no ponderado, continuo (los números decimales consecutivos se codifican con combinaciones adyacentes, es decir que solo difieren en un bit) y cíclico (la última combinación es adyacente a la primera). También se denomina reflejado debido a la forma de obtenerse.

3 bits	4 bits	Decimal
000	$0\ 0\ 0\ 0$	0
001	$0\ 0\ 0\ 1$	1
0 1 1	$0\ 0\ 1\ 1$	2
010	$0\ 0\ 1\ 0$	3
110	0110	4
111	0111	5
101	$0\ 1\ 0\ 1$	6
100	$0\ 1\ 0\ 0$	7
	1100	8
	1101	9
	1111	10
	1110	11
	1010	12
	1011	13
	1001	14
	1000	15
	$ \begin{array}{c} 0 0 0 \\ 0 0 1 \\ 0 1 1 \\ 0 1 0 \\ 1 1 0 \\ 1 1 1 \\ 1 0 1 \end{array} $	$egin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

Códigos BCD:

Los códigos BCD (*Binary-Coded Decimal*) codifican en binario de forma individual cada uno de los dígitos que componen un número decimal. Cada dígito decimal queda codificado con 4 binarios. El más utilizado es el BCD natural:

Decimal	BCD Natural
0	0 0 0 0
1	$0\ 0\ 0\ 1$
2	0 0 1 0
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0 1 1 1
8	1000
9	1001

Código BCD:

Las cadenas de 4 bits que no están incluidas en la columna se denominan cadenas vacías. No pertenecen a ese código y carecen de sentido Los pesos del BCD natural coinciden con el binario natural: 8 4 2 1

Ejemplo:

 $98325_{10} = 1001\ 1000\ 0011\ 0010\ 0101_{BCD\ Natural}$

4. Números enteros

Para poder expresar números positivos y negativos, se hace necesaria la representación del signo. Existen diferentes métodos de representación de los números con signo.

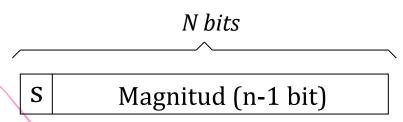
Signo y Magnitud

El signo se representa en el bit más a la izquierda del dato. [Bit (n-1)], según el criterio:

0: Número Positivo

1: Número Negativo

En el resto de los bits se representa el valor del número en binario natural. [Bits (n-2)..0]



Signo y Magnitud

Ejemplos:

$$01101_2 = +13_{10}$$

 $11101_2 = -13_{10}$

Rango de Representación:

$$-(2^{n-1}-1) \le x \le (2^{n-1}-1)$$

Existe duplicidad en la representación del cero.

Valor de un número cualquiera

si
$$x_{n-1} = 0$$
, $x = \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$
si $x_{n-1} = 1$, $x = -\sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$
 $\begin{cases} x = (1 - 2 \cdot x_{n-1}) \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i \end{cases}$

Complemento Restringido a la Base (a la base menos 1)

La representación de un número negativo (-A) la obtenemos a partir de la expresión:

$$-A \rightarrow B^n - 1 - A$$

donde B es la base en que estamos trabajando y n el número de dígitos de que disponemos

Ejemplos:

Base 10 (Complemento a 9)

n=2
$$-26_{10} \rightarrow 10^2 - 1 - 26 = 73$$
 ($-26_{10} = 73_{C9}$)
n=3 $-26_{10} \rightarrow 10^3 - 1 - 26 = 973$ ($-26_{10} = 973_{C9}$)
n=4 $-1384_{10} \rightarrow 10^4 - 1 - 1384 = 8615$ ($-1384_{10} = 8615_{C9}$)

Si particularizamos para la **Base 2**, hablaremos del **Complemento a 1**. La representación de los números negativos la obtendremos a partir de la expresión:

$$(-A)_{C1} \rightarrow 2^n - 1 - A$$

Ejemplo:

Representemos con 6 bits (N = 6) el número -18₁₀.

$$-18 \rightarrow 2^{6} - 1 - 18 = 64 - 1 - 18 = 45$$

 $-18_{10} = 101101_{C1}$

Como características citaremos:

- Los valores positivos tienen la misma representación que en SM.
- Los números positivos empiezan por cero
- Los números negativos empiezan por uno
- Presenta doble representación del 0.
- •El complemento se hace y se deshace de la misma forma
- •El Rango de Representación es: [-2ⁿ⁻¹ + 1, 2ⁿ⁻¹ 1]

Ejemplo: ¿Qué número representa 101101_{C1}?

Empieza por 1 → Se trata de un número negativo:

$$-X_{10} = 101001_{C1} \rightarrow +X_{10} = 010110_{C1}$$

 $+X_{10} = +22_{10} \rightarrow 101001_{C1} = -22_{10}$

Complemento a 1: Sumas y Restas. Ejemplos.

Realicemos la operación: $1000111_2 - 10010_2$

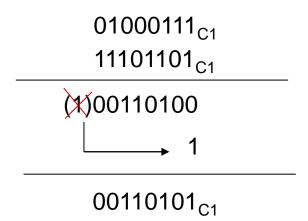
Si resta<mark>m</mark>os en binario natural:

En Complemento a 1 (n=8) haremos:

$$(+1000111) + (-10010)$$

$$+1000111 = 01000111_{C1}$$

$$-10010 = 11101101_{C1}$$



$$(110010_2) - (1011101_2)$$

$$+ 110010_2 = 00110010_{C1}$$

$$-1011100_2 = 10100011_{C1}$$

$$-110010_2 = 11001101_{C1}$$

$$-1011101_2 = 10100010_{C1}$$

Overflow

23

Complemento a la Base

La representación de un número negativo (-A) la obtenemos a partir de la expresión:

$$-A \rightarrow B^n - A$$

donde B es la base en que estamos trabajando y n el número de dígitos de que disponemos

Ejemplos:

Base 10 (Complemento a 10)

n=3
$$-63_{10} \rightarrow 10^3 - 63 = 937$$
 ($-26_{10} = 937_{C10}$)
n=3 $-16_{10} \rightarrow 10^3 - 16 = 984$ ($-16_{10} = 984_{C10}$)
n=4 $-16_{10} \rightarrow 10^4 - 16 = 9984$ ($-16_{10} = 9984_{C10}$)
n=4 $-1384_{10} \rightarrow 10^4 - 1384 = 8615$ ($-1384_{10} = 8615_{C10}$)

Si particularizamos para la **Base 2**, hablaremos del **Complemento a 2.** La representación de los números negativos la obtendremos a partir de la expresión:

$$(-A)_{C2} \rightarrow 2^n - A$$

Ejemplo:

Representemos con 6 bits (N = 6) el número -21_{10} .

$$-21 \rightarrow 2^{6} - 21 = 64 - 21 = 43$$

 $-21_{10} = 101011_{C2}$

Como características citaremos:

- Los valores positivos tienen la misma representación que en SM y en C1.
- Todos los números positivos empiezan por cero
- •Los números negativos empiezan por uno
- •Tiene una representación única del 0.
- •El complemento a 2 se hace y se deshace de la misma forma
- •El Rango de Representación es: [-2ⁿ⁻¹, 2ⁿ⁻¹ 1]

25

Para obtener la representación de un número negativo en Complemento a 2 se intercambian ceros por unos y unos por ceros a la representación del número positivo y sumaremos 1.

Ejemplo: Representación del -21₁₀ con 6 bits.

$$21_{10} = 10101_2 \rightarrow +21 = 010101_{C2}$$

 $-21_{10} \rightarrow 101010 + 1 = 101011_{C2}$

Sumas y Restas en Complemento a 2. Ejemplo.

$$(1011101_2) - (110010_2)$$

$$+1011101_2 = 01011101_{C2}$$

- $110010_2 = 11001110_{C2}$

El acarreo final **NO** forma parte del resultado

Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

Representación sesgada

La representación se obtiene sumando un sesgo o cantidad al valor del número. El sesgo suele ser: 2^{n-1} , en cuyo caso el rango de representación será $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$.

$$n = 8 \implies Sesgo = 2^{8-1} = 128_{10} = 1000\ 0000_2$$

$$11010_2 = 10011010_S$$

 $-11010_2 = 01100110_S$
 $0_2 = 10000000_S$

$$n = 4 \implies Sesgo = 2^{4-1} = 8_{10} = 1000_2$$

$$1_2 = 1001_S$$

 $-1_2 = 0111_S$

Representación en coma fija

El formato de coma fija reserva una cantidad de bits para la representación de la parte entera y otra para la parte fraccionaria. El número de bits de cada una de las partes es siempre el mismo independientemente del valor que se desee representar.

Ejemplo:

Disponemos de un formato en coma fija compuesto por 5 bits para la parte entera y 3 para la parte fraccionaria.

$$11,25 = 01011.010$$

 $16,5 = 10000.100$
 $0,125 = 00000.001$

También se suele incluir un bit para el signo.

Rango de Representación.

Si para la representación de x disponemos de 1 bit de signo, n bits para la parte entera y p para la parte fraccionaria, su rango será:

$$-[(2^{n}-2^{-p}), 2^{-p}] \le x \ge [2^{-p}, (2^{n}-2^{-p})]$$

5. Números reales

Representación en coma flotante.

El formato de coma flotante utiliza el siguiente formato para representar cualquier número:

$$N = \pm M \cdot B^{E}$$

Donde:

 $N \equiv Valor numérico$

 $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}$ antisa

 $\mathbf{B} \equiv \text{Base}$

 $\mathbf{E} \equiv \text{Exponente}$

Ejemplo:

$$1.234535 \cdot 10^3 = 1234.535 \cdot 10^0 = 0.1234535 \cdot 10^4 = 123453.5 \cdot 10^{-2} = 0.0001234535 \cdot 10^7$$

Estándar IEEE754

$$N = (-1)^s M \cdot 2^E$$

Representación S E M

$$N = nS + nE + nM$$

Siendo nS la cantidad de bits para el signo, nE la cantidad de bits para el exponente y nM la cantidad de bits para la mantisa.

Estándar IEEE754 (simple precisión)

Consta de 32 bits, distribuidos de la siguiente forma:

<u>Campo de signo</u>: 1 bit

<u>Campo del exponente</u>: 8 bits con representación sesgada, siendo el sesgo:

$$S = 2^{nE-1}-1$$

Ejemplos:

Puesto que tenemos

$$nE = 8 \Rightarrow S = 2^{nE-1}-1 = 127 = 0111 11111$$

(E)	E+S	(e)
0	127+0=127	0111 1111
+2	127+2=129	1000 0001
+127	127+127=254	1111 1110
-1	127-1=126	0111 1110
-126	127-126=1	0000 0001

<u>Campo de mantisa</u>: 23 bits, con formato normalizado: $1 \le M < 2$ La mantisa siempre tendrá la forma M = [1.m] donde m es el valor que se almacena en el formato.

Ejemplos de normalización:

$$N1 = 1001.1100110 \cdot 2^{-5} = 1.0011100110 \cdot 2^{-2}$$

 $N2 = 0.000001101101 \cdot 2^{34} = 1.101101 \cdot 2^{28}$

Ejercicio:

Supongamos un formato de las mismas características que el IEEE754, pero dotado solo de 16 bits, de los cuales 1 es para el signo y 8 para el exponente. Identifiquemos el número:

$$s = 1 \Rightarrow N < 0$$
 $e = 0011 1110 \Rightarrow E = -65$ $m = 001 1101 \Rightarrow M = 1.00111101_2 = -1.2265625_{10}$ $N = -1.2265625 \cdot 2^{-65} = -3,32440346980633 \cdot 10^{-20}$

<u>Situaciones especiales:</u>

Si el en el campo del exponente encontramos e = 0, la mantisa está **desnormalizada.** El sesgo pasa a ser $2^{\text{ne-1}}$ -2. Y el exponente del número será:

$$E = e - S = -2^{ne-1} + 2$$

• Si (e = 0)
$$\wedge$$
 (m = 0) \Rightarrow N = 0

• Si (e = 11...1)
$$\wedge$$
 (m = 0) \Rightarrow N = ∞

• Si (e = 11...1)
$$\land$$
 (m \neq 0) \Rightarrow N = NaN

Redondeo:

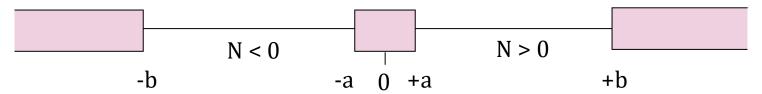
El redondeo de un número lo podemos realizar por exceso, por defecto, al más cercano o al par. El formato IEEE754 emplea el redondeo al par.

Ejemplos:

Resultado	Acción	Mantisa
1.01101 10	Sumar 1	1.01110
1.01100 10	Truncar	1.01100
1.01100 11	Sumar 1	1.01101
1.01100 01	Truncar	1.01100
1.01100 00	Truncar	1.01100

33

Rango de Representación:



Números Normalizados:

$$\left|b\right| = M_{max} \, 2^{E\,max} \, \begin{cases} M_{max} = 2 - 2^{-nm} \\ E_{max} = 2^{ne-1} - 1 \end{cases} \qquad \left|a\right| = M_{min} \, 2^{E\,min} \, \begin{cases} M_{min} = 1 \\ E_{min} = -(2^{ne-1} - 2) \end{cases}$$

Números Desnormalizados:

$$|a'| = M'_{min} 2^{E'min} \begin{cases} M'_{min} = 2^{-nm} \\ E'_{min} = -(2^{ne-1} - 2) \end{cases}$$

Si particularizamos para el caso de simple precisión:

Números Normalizados:

$$\begin{split} M_{max} &= 1.1111 \cdots 11 = 1 + (1 - 2^{-23}) = 2 - 2^{-23} \\ E_{max} &= 111111110 = 254 - 127 = 127 \end{split} \right\} \mid b \mid = M_{max} \cdot 2^{E \, max} = (2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127} = 2^{128} - 2^{-104} \\ M_{min} &= 1.0000 \cdots 00 = 1 \\ E_{min} &= 000000001 = 1 - 127 = 126 \end{split} \mid a \mid = M_{min} \cdot 2^{E \, min} = 1 \cdot 2^{-126} \end{split}$$

Números Desnormalizados:

$$\left. \begin{array}{l} M'_{min} = 0.0000 \cdots 01 = 2^{-23} \\ E'_{min} = 00000000 = -126 \end{array} \right\} \mid a' \mid = M'_{min} \cdot 2^{E'min} = 2^{-23} \cdot 2^{-126} = 2^{-149} \label{eq:min_min}$$



Y para doble precisión (52 bits para la mantisa y 11 para el exponente):

Números Normalizados:

$$\begin{split} M_{max} &= 1.1111 \cdots 11 = 1 + (1 - 2^{-52}) = 2 - 2^{-52} \\ E_{max} &= 11111110 = 2046 - 1023 = 1023 \end{split} \right\} \mid b \mid = M_{max} \cdot 2^{Emax} = (2 - 2^{-52}) \cdot 2^{1023} = 2^{1024} - 2^{-971} \\ M_{min} &= 1.0000 \cdots 00 = 1 \\ E_{min} &= 00000001 = 1 - 1023 = 1022 \end{aligned} \mid a \mid = M_{min} \cdot 2^{Emin} = 1 \cdot 2^{-1022} \end{split}$$

Números Desnormalizados:

$$\left. \begin{array}{l} M'_{min} = 0.0000 \cdots 01 = 2^{-52} \\ E'_{min} = 00000000 = -1022 \end{array} \right\} \mid a' \mid = M'_{min} \cdot 2^{E'min} = 2^{-52} \cdot 2^{-1022} = 2^{-1074} \label{eq:min_min}$$



- Valores límite
 - Si $|N| > |b| \Rightarrow$ desbordamiento a infinito OVERFLOW
 - Si $|N| < |a'| \Rightarrow$ desbordamiento a cero UNDERFLOW
- Consideraciones sobre la aritmética digital:
 - Casi siempre hay redondeo/truncamiento
 - Números excesivamente pequeños
 - Números excesivamente grandes
 - No siempre se cumple, en la práctica, la propiedad asociativa: $(a \cdot b) \cdot c \neq a \cdot (b \cdot c)$

Ejemplo en computador con precisión 10⁻¹⁰:

¡desbordamiento a 0!

