4. Dijkstra's Shortest-Path Algorithm.

- Let’s consider a weighted graph such that $w_{ij} \geq 0$.
- Dijkstra's algorithm proceeds by finding the weight of a shortest path from vertex 1 to a first vertex, the weight of a shortest path from 1 to a second vertex, and so on, until the weight of a shortest path from 1 to n is found.
- The algorithm relies on a series of iterations.
- A **distinguished** set of vertices **P** is constructed by adding one vertex at each iteration.
- A labeling procedure is carried out at each iteration: P is the set of vertices with **fixed label** (label won’t change in next iterations) and T is the set of vertices with **variable label** (the label may change in next iterations).
- In this labeling procedure, a vertex w is labeled with the weight of a shortest path from 1 to w that contains only vertices already in the distinguished set.
- The vertex added to the distinguished set is one with a minimal label among those vertices not already in the set.

4. Dijkstra's Shortest-Path Algorithm.

DIJKSTRA'S ALGORITMH

Step 1. Initialization:

$$P = \{1\} \quad T = \{2, 3, \ldots, n\}$$
$$u_1 = 0$$
$$u_j = w_{1j} \quad j \in \Gamma(1)$$
$$u_j = \infty \quad j \notin \Gamma(1)$$

Step 2. Choose the vertex to add to the distinguished set

Determine $k \in T$ / $u_k = \min_{j \in T} \{u_j\}$
Set $T := T \sim \{k\}$ and $P := P \cup \{k\}$

If $T = \varnothing$, STOP; u_j is the weight of the shortest path from 1 to j, j=2,…,n.

Paso 3. Update:

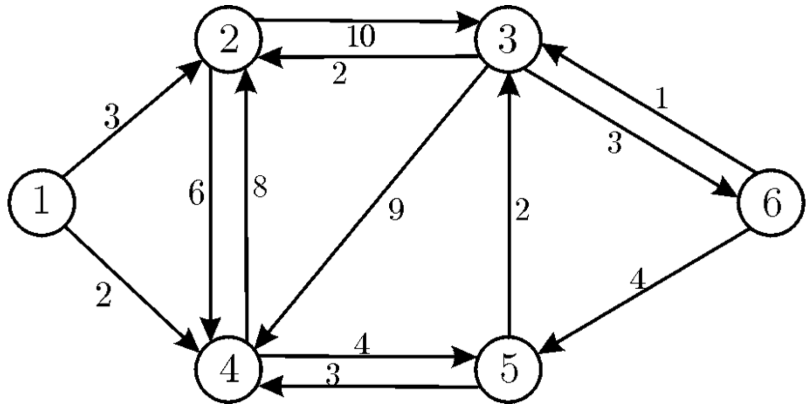
$$\forall j \in \Gamma(k) \cap T, \quad u_j := \min\{u_j, u_k + w_{kj}\}$$

GOTO Step 2

4. Dijkstra's Shortest-Path Algorithm.

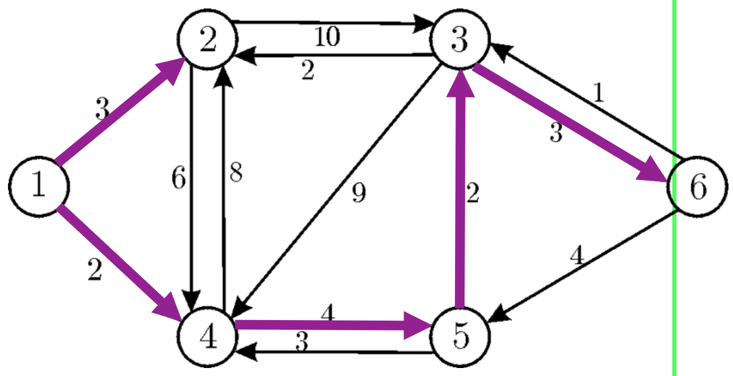
EXAMPLE:

Apply Dijkstra's algorithm to the weighted graph G = (V, E) shown in next figure in order to find the shortest path from vertex 1 to each of the other vertices in G.



4. Dijkstra's Shortest-Path Algorithm.

EXAMPLE:



Initialization
Iteration 1

$T = \{2,3,4,5,6\}$
$P = \{1\}$,
$u_1 = 0$
$u_2 = w_{12} = 3$
$u_3 = \infty$
$\boxed{u_4 = w_{14} = 2}$
$u_5 = \infty$
$u_6 = \infty$

Iteration 2

$T = \{2,3,5,6\}$
$P = \{1,4\}$, $\Gamma(4) \cap T = \{2,5\}$
$\boxed{u_2 = \min\{\underline{u_2}, u_4 + w_{42}\} = \min\{3, 2+8\} = 3}$
$u_3 = \infty$
$u_5 = \min\{u_5, \underline{u_4 + w_{45}}\} = \min\{\infty, 2+4\} = 6$
$u_6 = \infty$

Iteration 3

$T = \{3,5,6\}$
$P = \{1,4,2\}$, $\Gamma(2) \cap T = \{3\}$
$u_3 = \min\{u_3, \underline{u_2 + w_{23}}\} = \min\{\infty, 3+10\} = 13$
$\boxed{u_5 = 6}$
$u_6 = \infty$

Iteration 4

$T = \{3,6\}$
$P = \{1,4,2,5\}$, $\Gamma(5) \cap T = \{3\}$
$\boxed{u_3 = \min\{u_3, \underline{u_5 + w_{53}}\} = \min\{13, 6+2\} = 8}$
$u_6 = \infty$

Iteration 5

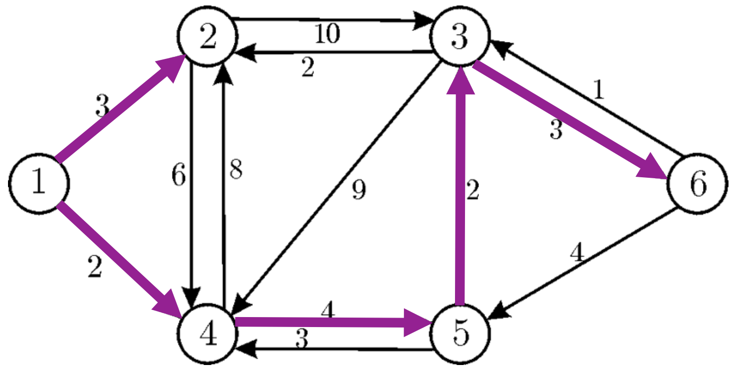
$T = \{6\}$
$P = \{1,4,2,5,3\}$, $\Gamma(3) \cap T = \{6\}$
$\boxed{u_6 = \min\{u_6, \underline{u_3 + w_{36}}\} = \min\{\infty, 8+3\} = 11}$

Iteration 6

$T = \emptyset$
$P = \{1,4,2,5,3,6\}$, STOP

4. Dijkstra's Shortest-Path Algorithm.

EXAMPLE:



	Path	Weight
From 1 to 2	1 2	$u_2 = 3$
From 1 to 3	1 4 5 3	$u_3 = 8$
From 1 to 4	1 4	$u_4 = 2$
From 1 to 5	1 4 5	$u_5 = 6$
From 1 to 6	1 4 5 3 6	$u_6 = 11$

5. Floyd–Warshall's Method.

Let $\mathbf{u_{ij}}$ denote the weight of the shortest path from **i** to **j**.
We will use the unknowns:

$\mathbf{u_{ij}}^{(\mathbf{m})}$: weight of the shortest path from vertex **i** to **j**, not containing vertices **m**, **m** + 1, ..., **n** (except the endpoints **i** and **j**).
These unknowns can be calculated recursively using the equations:

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i, j \\
u_{ij}^{(m+1)} &= \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i, j, \\
& m = 1, 2, \ldots n
\end{aligned}
$$

It can be proved that $\mathbf{u_{ij}} = \mathbf{u_{ij}}^{(\mathbf{n}+1)}$, that is, we obtain the weight of the shortest path among every pair of vertices

5. Floyd–Warshall's Method.

$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i, j$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \underset{m=1,2,\ldots n}{\min} \left\{ u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)} \right\} \quad \forall i, j,$$

To update the element $\mathbf{u}^{(m+1)}_{ij}$ (row **i** and column **j**) at iteration **m**+1, we must compute:

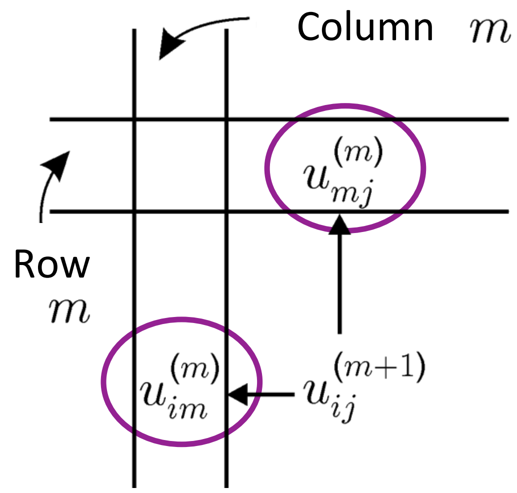
The minimum between:

–the same element of the previous iteration **m** and

– the sum of two elements:

● element in the same row **i** and column **m** (the iteration number),

● element in the same column **j** and row **m** (the iteration number).



5. Floyd–Warshall's Method.

EXAMPLE:

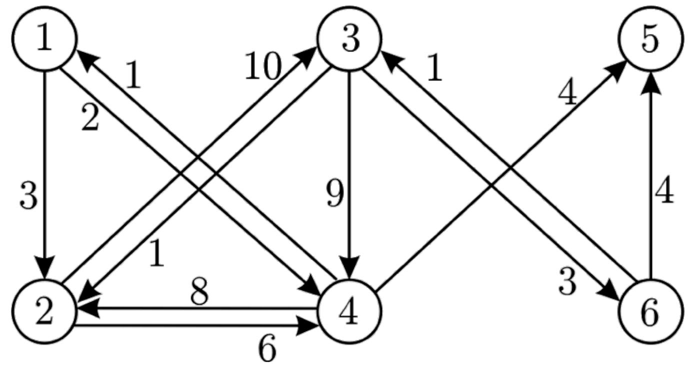
$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i, j$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i, j,$$

$$m = 1, 2, \ldots n$$

W=

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	8	∞	∞	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞



(m=2)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	[4]	∞	[3]	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

(m=3)

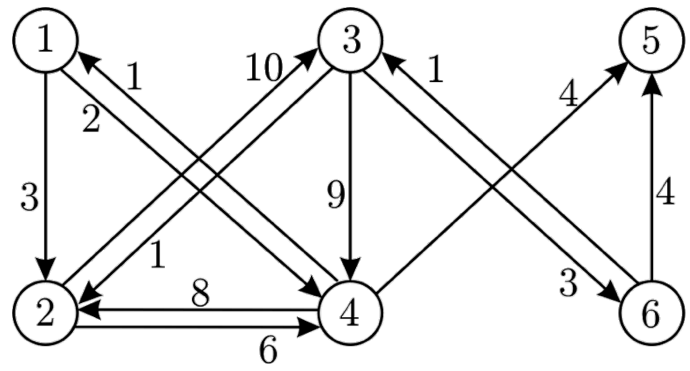
	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

5. Floyd-Warshall's Method.

EXAMPLE:

$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i,j$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i,j, \quad m = 1,2,\dots n$$



(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

(m=4)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	13	2	∞	[16]
2	∞	[11]	10	6	∞	[13]
3	∞	1	11	7	∞	3
4	1	4	14	3	4	[17]
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	[2]	1	[8]	4	[4]

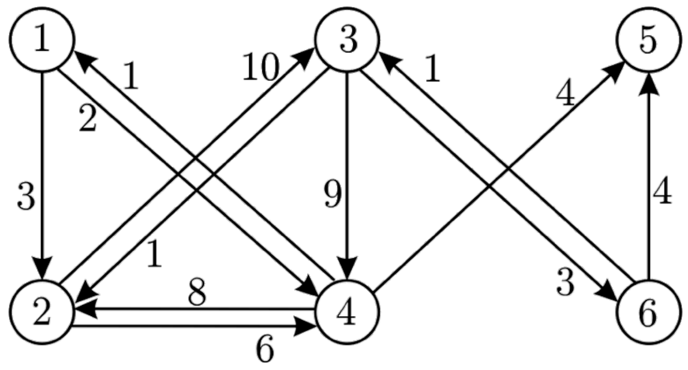
(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

5. Floyd–Warshall's Method.

EXAMPLE:

$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i,j$$
$$u_{ij}^{(m+1)} = \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i,j,$$
$$m = 1, 2, \ldots n$$



(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

(m=6)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

(m=7)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

5. Floyd–Warshall’s Method.

In order to build the shortest paths, the following matrices are constructed:

$$\Theta^{(m)} = [\theta_{ij}^{(m)}]$$

Where $\theta_{ij}^{(m)}$ represents the preceding vertex to **j** in the shortest path from vertex **i** to **j** at iteration **m**.

Initially $\theta_{ij}^{(1)} = i$ if $u_{ij}^{(1)} < +\infty$ and:

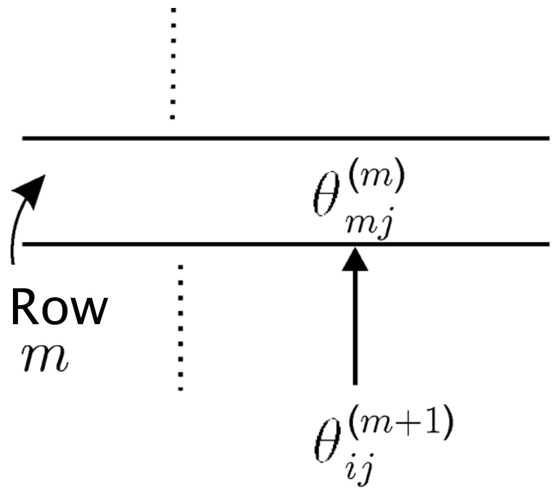
$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{if } u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} \\ \theta_{mj}^{(m)} & \text{if } u_{ij}^{(m+1)} < u_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

5. Floyd-Warshall's Method.

$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} \\ \theta_{mj}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} < u_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

If the element $\mathbf{u}_{ij}^{(m+1)}$ doesn't change at iteration **m**+1, then the corresponding element θ_{ij}^{m+1} of the matrix $\Theta^{(m+1)}$ doesn't change.

If the element $\mathbf{u}_{ij}^{(m+1)}$ changes at iteration **m**+1, then the corresponding θ_{ij}^{m+1} element of the matrix $\Theta^{(m+1)}$ is substituted by the element occupying the same column and row **m**.



5. Floyd-Warshall's Method.

EXAMPLE:

(m=1)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	8	∞	∞	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	4			4	
5						
6			6		6	

(m=2)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	[4]	∞	[3]	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	[1]		[1]	4	
5						
6			6		6	

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1	[2]	1		
2			2	2		
3		3	[2]	[2]		3
4	4	1	[2]	1	4	
5						
6			6		6	

5. Floyd-Warshall's Method.

EXAMPLE:

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1	[2]	1		
2			2	2		
3		3	[2]	[2]		3
4	4	1	[2]	1	4	
5						
6			6		6	

(m=4)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	13	2	∞	[16]
2	∞	[11]	10	6	∞	[13]
3	∞	1	11	7	∞	3
4	1	4	14	3	4	[17]
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	[2]	1	[8]	4	[4]

	1	2	3	4	5	6
1		1	2	1		[3]
2		[3]	2	2		[3]
3		3	2	2		3
4	4	1	2	1	4	[3]
5						
6		[3]	6	[2]	6	[3]

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	[4]	1	2	1	[4]	3
2	[4]	[1]	2	2	[4]	3
3	[4]	3	2	2	[4]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	[4]	3	6	2	6	3

5. Floyd–Warshall's Method.

EXAMPLE:

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	[4]	1	2	1	[4]	3
2	[4]	[1]	2	2	[4]	3
3	[4]	3	2	2	[4]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	[4]	3	6	2	6	3

(m=6)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	2	2	4	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

(m=7)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	[6]	2	[6]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

5. Floyd–Warshall's Method.

EXAMPLE:

(m=7)

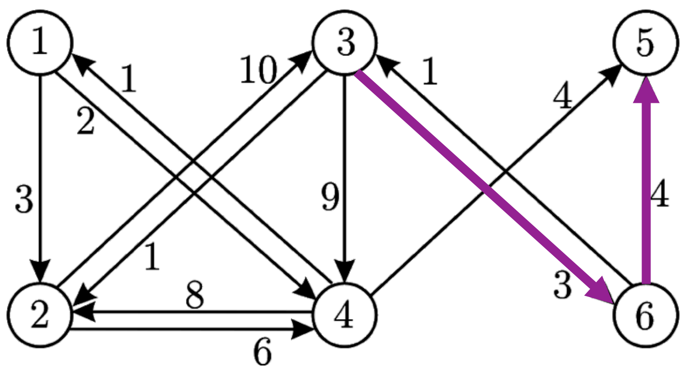
	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	[6]	2	6]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

BUILDING THE PATHS:

Shortest path from 3 to 5:

1. Weight: $u_{35}^{(7)} = 7$
2. Path:
   - Preceding vertex to 5: $\theta_{35}^{(7)} = 6$
   - Preceding vertex to 6: $\theta_{36}^{(7)} = 3$



5. Floyd–Warshall's Method.

EXAMPLE: Let's consider a graph with V={A,B,C,D,E,F} and weighting matrix:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 2 & \infty & 5 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 2 & 6 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 1 & \infty & 7 & \infty & \infty & 4 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

If we want to calculate the shortest path from A to E and its weight, with the restriction of **not containing the vertices C and F as internal**.

We reorder the vertices of the graph placing the non internal vertices at the end.

5. Floyd–Warshall's Method.

EXAMPLE: Shortest path from A to E and its weight, with the restriction of **not containing the vertices C and F as internal**.

Possible reorderings:

- A, B, D, E, C, F : Stop at iteration 5.
- B, D, A, E, C, F : Stop at iteration 3.

$\Omega =$

	A	B	C	D	E	F
A	∞	2	∞	5	8	∞
B	∞	∞	1	2	6	∞
C	1	∞	∞	3	∞	∞
D	∞	∞	∞	∞	3	∞
E	1	∞	7	∞	∞	4
F	3	∞	∞	∞	∞	∞

Permute rows

	A	B	C	D	E	F
B	∞	∞	1	2	6	∞
D	∞	∞	∞	∞	3	∞
A	∞	2	∞	5	8	∞
E	1	∞	7	∞	∞	4
C	1	∞	∞	3	∞	∞
F	3	∞	∞	∞	∞	∞

Permute columns

	B	D	A	E	C	F
B	∞	2	∞	6	1	∞
D	∞	∞	∞	3	∞	∞
A	2	5	∞	8	∞	∞
E	∞	∞	1	∞	7	4
C	∞	3	1	∞	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	∞	∞

5. Floyd–Warshall’s Method.

EXAMPLE: With the reordered matrix we apply Floyd–Warshall’s method.

$$\Omega^{(1)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\ \hline
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\
A & 2 & 5 & \infty & 8 & \infty & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline\hline
\end{array}, \quad \Theta^{(1)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & & B & & B & B & \\ \hline
D & & & & D & & \\
A & A & A & & A & & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & & & \\
F & & & F & & & \\ \hline\hline
\end{array}$$

$$\Omega^{(2)} \equiv \begin{array}{c||c|c|cccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\ \hline
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \hline
A & 2 & [4] & \infty & 8 & [3] & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline\hline
\end{array}, \quad \Theta^{(2)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & & B & & B & B & \\ \hline
D & & & & D & & \\ \hline
A & A & [B] & & A & [B] & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & & & \\
F & & & F & & & \\ \hline\hline
\end{array}$$

5. Floyd–Warshall’s Method.

EXAMPLE: With the reordered matrix we apply Floyd–Warshall’s method.

$\Omega^{(2)} \equiv$

	B	D	A	E	C	F
B	∞	2	∞	6	1	∞
D	∞	∞	∞	3	∞	∞
A	2	[4]	∞	8	[3]	∞
E	∞	∞	1	∞	7	4
C	∞	3	1	∞	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	∞	∞

, $\Theta^{(2)} \equiv$

	B	D	A	E	C	F
B		B		B	B	
D				D		
A	A	[B]		A	[B]	
E			E		E	E
C		C	C			
F			F			

$\Omega^{(3)} \equiv$

	B	D	A	E	C	F
B	∞	2	∞	[5]	1	∞
D	∞	∞	∞	3	∞	∞
A	2	4	∞	[7]	3	∞
E	∞	∞	1	∞	7	4
C	∞	3	1	[6]	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	∞	∞

, $\Theta^{(3)} \equiv$

	B	D	A	E	C	F
B		B		[D]	B	
D				D		
A	A	B		[D]	B	
E			E		E	E
C		C	C	[D]		
F			F			

5. Floyd-Warshall's Method.

EXAMPLE: With the reordered matrix we apply Floyd-Warshall's method.

$$\Omega^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline
B & \infty & 2 & \infty & [5] & 1 & \infty \\
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\
A & 2 & 4 & \infty & [7] & 3 & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & [6] & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline
\end{array}, \quad
\Theta^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline
B & & B & & [D] & B & \\
D & & & & D & & \\
A & A & B & & [D] & B & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & [D] & & \\
F & & & F & & & \\ \hline
\end{array}$$

BUILDING THE PATHS:

Shortest path from A to E and its weight, with the restriction of **not containing the vertices C and F as internal**:

1. Weight: $u_{AE}^{(3)} = 7$
2. Path:
   - Preceding vertex to E: $\theta_{AE}^{(3)} = D$
   - Preceding vertex to D: $\theta_{AD}^{(3)} = B$
   - Preceding vertex to B: $\theta_{AB}^{(3)} = A$

$$\left.\begin{array}{l} \theta_{AE}^{(3)} = D \\ \theta_{AD}^{(3)} = B \\ \theta_{AB}^{(3)} = A \end{array}\right\} \quad \textit{\textbf{A, B, D, E}}$$