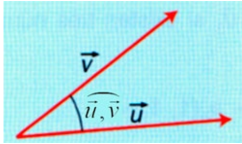
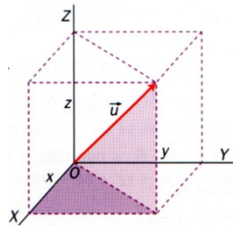
- **Producto escalar de dos vectores**



$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\cdot\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$$

- **Módulo de un vector**



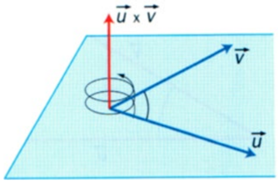
$$\|\vec{u}\|=\left\|\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\right\|=+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

- **Ángulo que forman dos vectores**

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

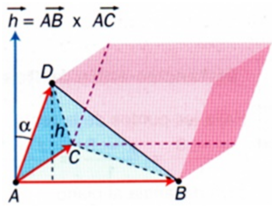
- **Producto vectorial de dos vectores**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$



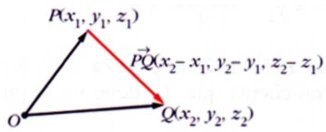
$\vec{u}\times\vec{v}$ es un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ y $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ coincide con el área del paralelogramo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

- **Producto mixto de tres vectores**
(suponemos que conocemos las coordenadas de cada vector respecto de la base canónica)

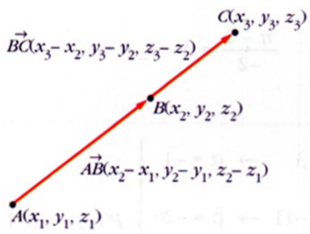


$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$ y su valor absoluto coincide con el volumen del paralelepípedo que determinan y, por tanto, el volumen del tetraedro que determinan es $\frac{1}{6}\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|$

- **Vector que une dos puntos**

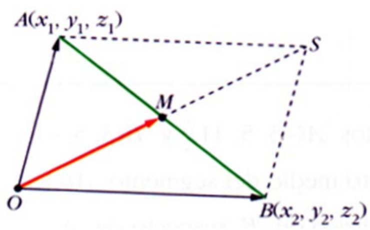


$$\left.\begin{array}{l}P(x_1,y_1,z_1)\\Q(x_2,y_2,z_2)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right)$$

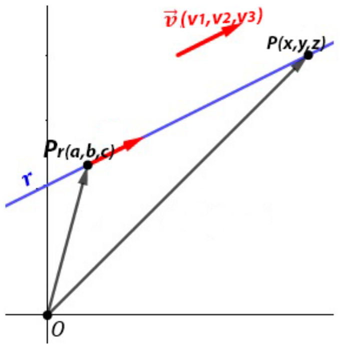


- **Tres puntos A, B y C están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales**

- **Punto medio del segmento $\overline{PQ}$** que une los puntos $P(x_1,y_1,z_1)$ **y** $Q(x_2,y_2,z_2)$ **es** $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$



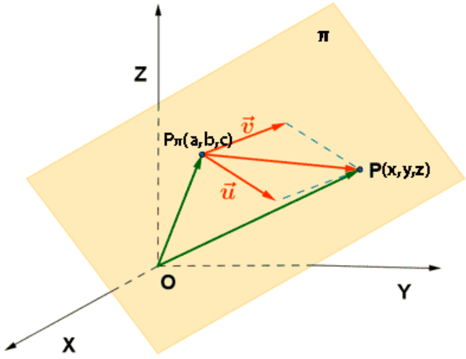
- **Ecuaciones de la recta**



$$\left.\begin{array}{l} P_r(a,b,c) \\ v_r(v_1,v_2,v_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \ \mathbf{r:}\ \left.\begin{array}{l} x = a+\lambda v_1 \\ y = b+\lambda v_2 \\ z = c+\lambda v_3 \end{array}\right\} \ \mathbf{o}$$

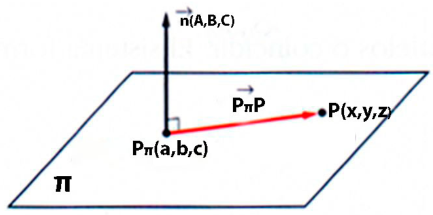
$$\mathbf{r:}\ \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3} \ \mathbf{o\ r:}\ \left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$$

- **Ecuaciones del plano (2 formas)**



$$\textbf{(1ª forma)}\ \left.\begin{array}{l} P_\pi(a,b,c) \\ u_\pi(u_1,u_2,u_3) \\ v_\pi(v_1,v_2,v_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \ \pi:\ \left.\begin{array}{l} x = a+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y = b+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z = c+\lambda u_3+\mu v_3 \end{array}\right\} \ \mathbf{o}$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \ \mathbf{o}\ \ \pi:\ Ax+By+Cz+D=0$$

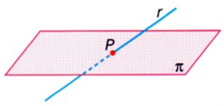


$$\textbf{(2ª forma)}\ \left.\begin{array}{l} P_\pi(a,b,c) \\ n_\pi(A,B,C) \end{array}\right\} \Rightarrow \ \pi:\ Ax+By+Cz+D=0$$

hallando D de $P_\pi \in \pi$

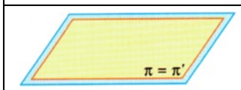
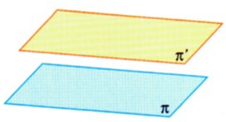
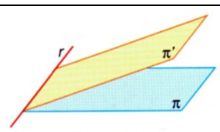
POSICIONES RELATIVAS

- **Posiciones relativas de recta y plano** (conviene tener la recta en paramétricas y el plano en implícita):

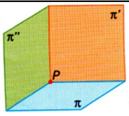
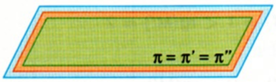
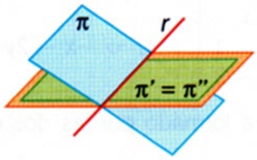
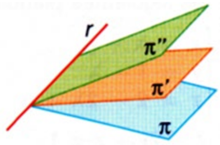
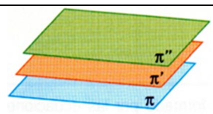
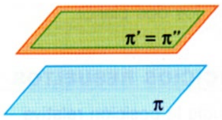
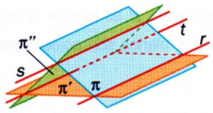
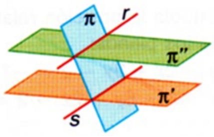
$\left.\begin{array}{l} r \\ \pi \end{array}\right\}$ S. C. determinado	$\left.\begin{array}{l} r \\ \pi \end{array}\right\}$ S. C. Indeterminado	$\left.\begin{array}{l} r \\ \pi \end{array}\right\}$ S. Incompatible
 Recta que corta al plano en el punto P	 Recta contenida en el plano	 Recta paralela al plano

- **Posiciones relativas de dos planos:**

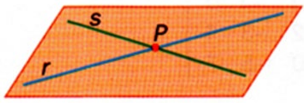
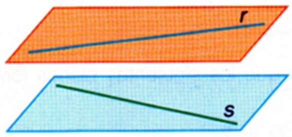
$$\left.\begin{array}{l} \pi:\ Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi':\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$$

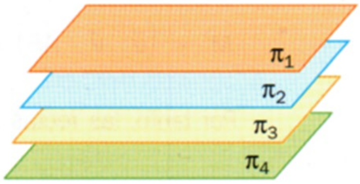
$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$	Cualquier otra situación
 Planos coincidentes	 Planos paralelos	 Planos secantes

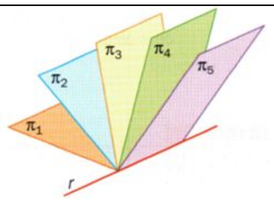
- **Posiciones relativas de tres planos:** Discutimos el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

S.C.D.	**S.C.I. con 2 grados de libertad**	**S.C.I. con 1 grado de libertad**	**S. Incompatible**
 Se cortan solo en un punto P	 Tres planos coincidentes	 Dos planos coincidentes y otro los corta en una recta r  Tres planos que se cortan en la recta r	 Tres planos paralelos  Dos planos paralelos y otro paralelo a ellos  Planos que se cortan dos a dos en rectas paralelas  Dos planos paralelos y otro los corta

- **Posiciones relativas de dos rectas *r* y *s***

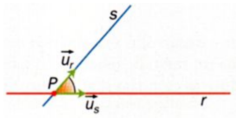
$\overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{v_s}$ y también $\overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{v_s} \parallel \overrightarrow{P_rP_s}$ o bien $P_r \in s$	$\overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{v_s}$ pero $\overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{v_s} \nparallel \overrightarrow{P_rP_s}$ o bien $P_r \notin s$	$\overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{v_s}$ $\overrightarrow{P_rP_s}$ $C.L.\ de\ \overrightarrow{v_r}\ y\ \overrightarrow{v_s}$, es decir, $\det\left(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right) = 0$	$\overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{v_s}$ $\overrightarrow{P_rP_s}$ $no\ C.L.\ de\ \overrightarrow{v_r}\ y\ \overrightarrow{v_s}$ es decir, $\det\left(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right) \neq 0$
 Rectas coincidentes	 Rectas paralelas	 Se cortan en un único punto	 Se cruzan y no paralelas

Haz de planos paralelos	
	**Ecuaciones implícitas** $Ax+By+Cz+D=0$ Donde A,B,C son fijas y D cambia

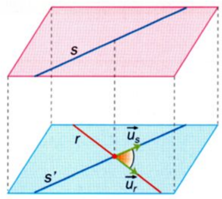
Haz de planos que contienen la recta *r*: $\left.\begin{matrix} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{matrix}\right\}$	
	**Ecuaciones implícitas** $Ax+By+Cz+D+t(A'x+B'y+C'z+D')=0$ siendo $t\in\mathbb{R}$. Hay que añadir al haz el plano $A'x+B'y+C'z+D'=0$

ÁNGULOS Y DISTANCIAS

- **Ángulo de dos rectas r y s:** $\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\dfrac{\left|\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s\right|}{\left\|\vec{u}_r\right\|\cdot\left\|\vec{u}_s\right\|}$

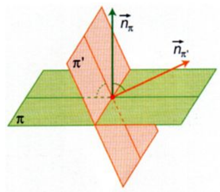


Ángulo de rectas secantes

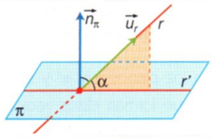


Ángulo de rectas cruzadas

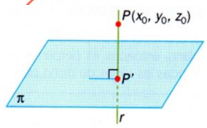
- **Ángulo entre dos planos** π **y** π'**:** $\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=\dfrac{\left|\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_{\pi'}\right|}{\left\|\vec{n}_\pi\right\|\cdot\left\|\vec{n}_{\pi'}\right\|}$



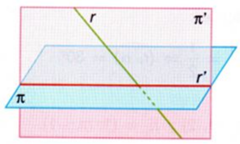
- **Ángulo entre una recta r y un plano** π**:** $sen\left(\widehat{r,\pi}\right)=\dfrac{\left|\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\pi\right|}{\left\|\vec{v}_r\right\|\cdot\left\|\vec{n}_\pi\right\|}$



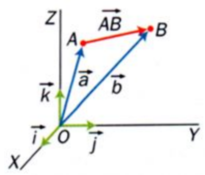
- **Def: La proyección ortogonal de un punto *P* sobre un plano** π es un *P'* que se obtiene como intersección de la recta *r,* perpendicular a π que pasa por *P,* con el plano π.



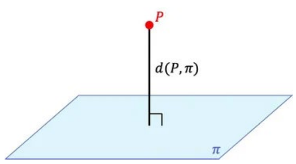
- **Def: La proyección ortogonal de una recta *r* sobre un plano** π es la recta *r'* que se obtiene como intersección del plano π', perpendicular a π que pasa por *r,* con el plano π**.**



- **Distancia entre dos puntos:**
$$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

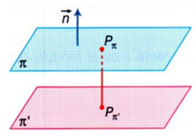


- **Distancia de un punto a un plano:**
$$\left.\begin{matrix} P(a,b,c) \\ \pi: Ax+By+Cz+D=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow d(P,\pi)=\frac{\left|Aa+Bb+Cc+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



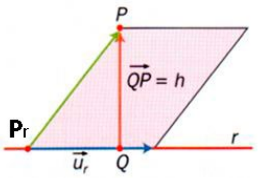
- **Distancia entre planos paralelos:**

$$\left.\begin{array}{l}\pi: Ax+By+Cz+D=0\\ \pi': Ax+By+Cz+D'=0\end{array}\right\} \Rightarrow d(\pi,\pi')=\frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



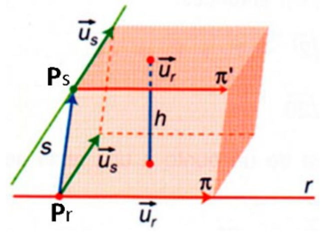
- **Distancia de punto a recta o entre rectas paralelas:**

$$d(P,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{PP_r}\times\overrightarrow{u_r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|}=\frac{\text{Área Paralegrogamo}}{\text{Base Paralelogramo}}$$



- **Distancia entre rectas que se cruzan (no paralelas):**

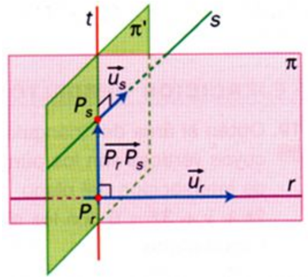
$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}\right\|}=\frac{\text{Volumen Paralelepípedo}}{\text{Área Paralelogramo Base}}$$



- **Recta *t* perpendicular común a dos rectas r y s que se cruzan:**

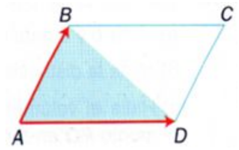
1ª forma: $t:\left.\begin{array}{l}\pi:\left(P_r,\vec{u}_r,\vec{u}_r\times\vec{u}_s\right)\\ \pi':\left(P_s,\vec{u}_r,\vec{u}_r\times\vec{u}_s\right)\end{array}\right\}$

2ª forma: Hallando los puntos P_r y P_s que están más cerca tomando un punto genérico de cada recta y obligando que $\overrightarrow{P_rP_s}\perp\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{P_rP_s}\perp\vec{u}_s$



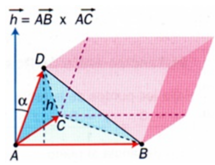
- **Área del paralelogramo de vértices A, B, C y D:** $\text{Área}=\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|$

- **Área del triángulo de vértices A, B y D:** $\text{Área}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|$

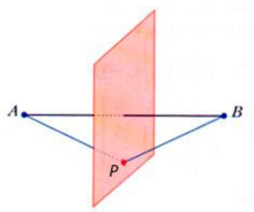


- **Volumen de un paralelepípedo de vértices A, B, C y D** $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$

- **Volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D:** $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$



- **Plano mediador de un segmento $\overline{AB}$** está formado por los puntos P que cumplen $d(A,P)=d(B,P)$



- **Planos bisectores de un ángulo** diedro son los dos planos perpendiculares formado por los puntos que equidistan de los dos planos π y π'