Tema 5.- Inducción electromagnética

1. Una bobina circular de 10 cm de diámetro y 20 espiras muy juntas, gira con velocidad angular constante alrededor de uno de sus diámetros y se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme de 0.05 T perpendicular al eje de giro. Determinar la frecuencia angular a la que debe girar la bobina para que la f.e.m. máxima inducida en la misma sea de 0.25 Volts.

SOLUCIÓN:
Debido a que la bobina está girando, tenemos que el flujo del campo magnético a través de dicha bobina varía con el tiempo. Haciendo uso de la Ley de Faraday-Henry tenemos que se induce una f.e.m. a lo largo de la bobina.
Para resolver el problema seguimos los siguientes pasos:
1º) Expresión del flujo de campo magnético:
$$\Phi = \int_S B \cdot dS = N\,BS\cos(wt)$$
(N: número de espiras; B: campo aplicado; S: área de una espira; w: velocidad angular de giro)
2º) Aplicamos la ley de Faraday-Henry:
$$f.e.m. = -\frac{d\Phi}{dt} = N\,BS\,w\,\mathrm{sen}(wt)$$
3º) Igualamos la f.e.m. máxima obtenida al valor dado en el enunciado:
$$f.e.m._{MAX} = N\,BS\,w = 0.25\,Volts$$

Obtenemos que la velocidad angular debe ser: $w = \dfrac{0.25}{N\,BS}$

Sustituyendo valores numéricos: $w = 31.8\ rad/seg$

Y la frecuencia es: $f = \dfrac{w}{2\pi} = 5.06\ Hz$

[Solución: $f = 5.06\ Hz$]

2. Se desea construir un generador de corriente alterna utilizando como imán el campo magnético terrestre (B = 0.5 G) y una bobina de 1000 espiras. Calcular que área deberían tener las espiras para obtener una tensión eficaz de 220 V funcionando a 50 Hz.

SOLUCIÓN:
Supondremos que la espira es perpendicular al campo magnético. Así, el flujo del campo a través de la espira vendrá dado por:
$$\phi = NBS\cos(\varpi t)$$
siendo *N* el número de espiras, *B* el campo magnético, *S* la superficie de las espiras y ω su velocidad angular de rotación ($\omega = 2\pi\nu$ siendo ν la frecuencia de rotación).
Por la Ley de Faraday – Lenz , la fuerza electromotriz inducida será:
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = NBS\varpi\cos(\varpi t) = \varepsilon_0\cos(\varpi t)[V]$$

La tensión eficaz de salida será:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{NBS\varpi}{\sqrt{2}} = 220[V]$$

de donde despejamos: $S \approx 20\ \mathrm{m}^2$

[Solución: $S \approx 20\ \mathrm{m}^2$]

3. Con el objeto de detectar una onda electromagnética de 1 MHz construimos una antena dipolar magnética que consiste en una sola espira circular de 20 cm de radio. Supongamos que el campo magnético de la onda, en la posición de la espira, varía como $B = B_0$ sen(ωt) donde $B_0 = 10^{-6}$ T. Asumiremos que el campo es perpendicular a ésta y uniforme en toda su superficie. Calcular la tensión eficaz de salida que tendrá la antena.

SOLUCIÓN:

En la espira se inducirá una f.e.m. cuya magnitud vendrá dada por la Ley de Faraday:

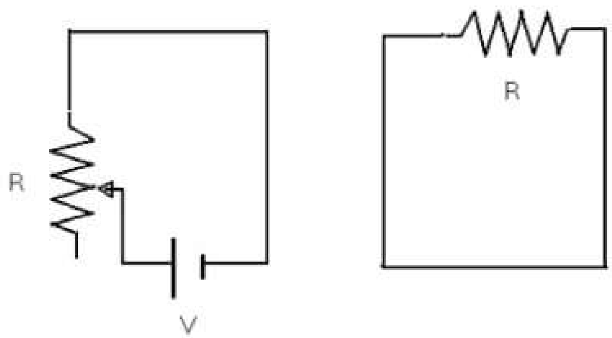
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int BdS\cos 0 = -\pi r^2\frac{dB}{dt} = -\pi r^2\frac{d(B_0\cdot \mathrm{sen}\, wt)}{dt} = -\pi r^2 B_0\omega\cos\omega t = -\varepsilon_0\cos\omega t$$

donde hemos tenido en cuenta que B es uniforme en toda la superficie de la espira. La tensión eficaz de salida será:

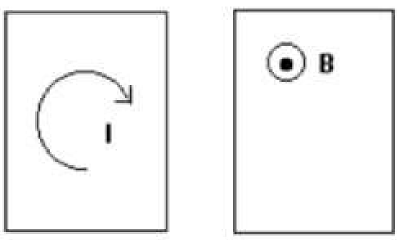
$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{\pi r^2 B_0\omega}{\sqrt{2}} = 0.56V$$

[Solución: $\varepsilon_{ef} = 0.56V$]

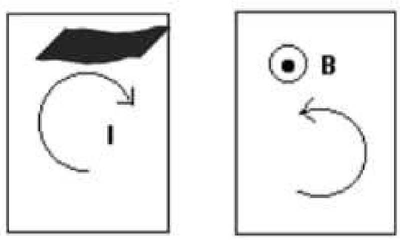
4. Dar, razonándolo detalladamente, el sentido de la corriente inducida en el circuito de la derecha cuando la resistencia del circuito de la izquierda se hace a) aumentar, b) disminuir.



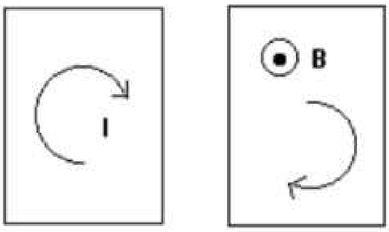
SOLUCIÓN:



el circuito de la izquierda actúa como una espira de corriente que genera un campo magnético dipolar. Estas líneas de campo magnético atraviesan la espira de la derecha en el sentido indicado en la figura.



a) Si la R aumenta, la I disminuye (ya que V permanece constante). . Entonces el campo magnético disminuye y también su flujo a través de la espira de la derecha. Por la Ley de Lenz, ésta responde tratando de aumentar el campo por lo que la corriente debe fluir en <u>sentido antihorario</u>.

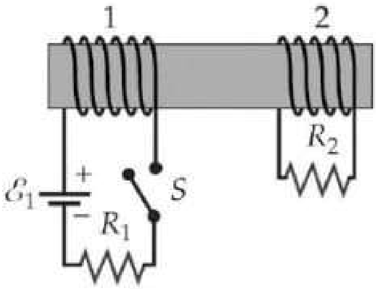


b) Si la R disminuye, la I aumenta y también su flujo. La espira de la derecha responderá produciendo una f.e.m que origine una corriente que se oponga a la variación del flujo. Como éste aumenta, la espira tenderá a disminuirlo. La corriente entonces girará en sentido horario.

[Solución: (a) antihorario; (b) horario]

5. Inicialmente el interruptor del circuito 1 se halla abierto tal como se ve en la figura. Indica el sentido de la corriente en la resistencia R_2 en cada una de las siguientes situaciones justificando la respuesta:

(a) inicialmente, tal como se ve en la figura.
(b) en el instante en que se cierra el interruptor.
(c) al cabo de varios minutos cuando la corriente en el circuito 1 se ha estabilizado.
(d) en el instante en que se vuelve a abrir el interruptor.



SOLUCIÓN:

Variaciones de corriente en el circuito 1 originan variaciones del flujo de campo magnético que atraviesa el circuito 2. Por la Ley de Faraday-Lenz, en el circuito 2 se generan corrientes inducidas que intentan oponerse a estas variaciones del flujo de campo magnético a través de su superficie.

a) No hay corriente en el circuito 2.
Justificación: No hay variaciones de flujo de campo magnético, ya que el campo magnético es cero (la corriente en el circuito 1 es cero).

b) La corriente en R_2 es hacia la derecha. $\longrightarrow$
Justificación: Se produce un aumento de flujo magnético hacia la derecha a través del circuito 2, por lo que la corriente inducida en el circuito 2 debe generar un flujo magnético hacia la izquierda (Ley de Lenz).

c) No hay corriente en el circuito 2.
Justificación: No hay variaciones de flujo magnético.

d) La corriente en R_2 es hacia la izquierda. $\longleftarrow$
Justificación: Se produce una disminución de flujo magnético hacia la derecha, por lo que la corriente inducida en el circuito 2 debe generar un flujo magnético hacia la derecha para evitar dicha disminución (Ley de Lenz).

[Solución: (a) 0; (b) $\rightarrow$; (c) 0; (d) $\leftarrow$]

6. Dos solenoides de 50 cm de longitud y 1000 espiras cada uno tienen radios de 1 y 2 cm respectivamente. Uno de ellos se introduce dentro del otro de manera que ambos tienen el mismo eje (configuración coaxial). Ambos transportan la misma corriente de 1 A pero en sentidos opuestos. Calcular: (a) La energía magnética que almacena este dispositivo. (b) Su autoinducción.

Nota: Suponer, para el cálculo, que los solenoides son suficientemente largos como para considerar un comportamiento ideal.

SOLUCIÓN:

a) El campo magnético en el interior de un solenoide viene dado por:

$$B = \mu_0 nI.$$

Puesto que ambos solenoides tienen el mismo número de espiras por unidad de longitud *n* y la misma corriente, ambos producen el mismo campo en su interior. El sentido de este campo es contrario en ambos debido al sentido opuesto de las corrientes. Por tanto el campo magnético será:

B=0 **r <a**

$B=\mu_0 nI$ a<r<b $\quad B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \dfrac{1000}{50 \cdot 10^{-2}} \cdot 1 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ T

$B \approx 0$ r>b (por solenoides muy largos)

La densidad de energía magnética será:

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 = 2{,}5 \ \ \text{J/m}^3$$

La energía almacenada se obtendrá integrando esta densidad a todo el volumen ocupado por el campo.
Tomando: $d\,Vol = 2\,\pi\, r\, l\, dr$

$$U_m = \int u_m dVol = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 l \int_a^b 2\pi\, r\, dr = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 l\pi\,(b^2 - a^2) = 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 1{,}2 \text{ mJ}$$

---

b) Como la energía magnética debe ser igual a ½ LI^2, podemos deducir el valor de la autoinducción como:

$$L = \frac{2U_m}{I^2} = \mu_0 n^2 l\pi\,(b^2 - a^2) = 2{,}4\ mH$$

[Solución: (a) $U_m = 1{,}2\ mJ$; (b) $L = 2.4\ mH$]

7. Tenemos un campo de 0.5 T en la dirección $-i$ (que entra en el papel) en todo el espacio. Disponemos de un circuito rectangular con el lado derecho móvil, tal y cómo indica la figura. Inicialmente tiene unas dimensiones de 15 cm de alto y 10 cm de ancho. ¿Qué corriente se induce si la posición del lado móvil varía de la forma: $y(t) = 10 + \text{sen}(t + \pi)$ (expresado en centímetros)?

Error: Reference source not found
10
SOLUCIÓN:

La ley de Lenz dice que la *f.e.m.* originada en el circuito vale: $\varepsilon = -\dfrac{d\phi_B}{dt}$, donde el flujo de campo magnético viene dado como, $\phi_B = \int B \cdot dS$. La superficie encerrada por el circuito varía con el tiempo de modo que:

$$\varepsilon = -\frac{d[B.S(t)]}{dt} = -B\frac{d[S(t)]}{dt} = -15 \cdot 10^{-4} B \cos(t + \pi) \quad \text{V}$$

X La corriente inducida vendrá dada por:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{-15 \cdot 10^{-4}\, B}{R} \cos(t + \pi) \quad \text{A}$$

Podemos ver que en el circuito se genera una *f.e.m.* y una corriente alterna de frecuencia angular w=1 rad/s.

[Solución: $I = -(B/R)\cdot 15\cdot 10^{-4}\cos(t+\pi)$ A]

8. Tenemos un solenoide de 10 cm de longitud, 1 cm de radio, 1000 espiras, por el que circula una intensidad de corriente de 100 mA. Calcular: a) El coeficiente de autoinducción del solenoide. b) La fuerza electromotriz inducida si en 10 milisegundos aumentas linealmente la intensidad hasta alcanzar 200 mA. c) La densidad volúmica de energía magnética y la energía total que almacena el solenoide en el momento inicial y en el momento final.

SOLUCIÓN

a) Sabes que el flujo es $\Phi = \int_S B\cdot dS$. Para el autoflujo tienes además que $\Phi = L\,I$.

Así, el coeficiente de autoinducción lo podemos hallar como: $L = \int_S B\cdot dS \Big/ I$

En el caso del solenoide el campo en su interior viene dado por: $B = \mu_0 \dfrac{N}{L} I$, con lo que,

$$L = \frac{\left(\mu_0 \frac{N}{l} I\right) N\,S}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

. Sustituyendo valores: $L = 3.95\ mH$

b) Aplicamos la ley de Faraday-Henry (en valor absoluto): $f.e.m. = \dfrac{d\Phi}{dt} = L\dfrac{dI}{dt}$

Sustituyendo valores, $f.e.m. = 3.95\cdot 10^{-3}\,\dfrac{0.1}{0.01} = 39.5\ mV$

c) La densidad volúmica y la energía total vienen dadas respectivamente por, $u_B = B^2 / (2\mu_0)$ y $U = (L\cdot I^2)/2$ (o también $U = u_B\,Volumen$, donde hacemos uso que la densidad volúmica es constante en todo el volumen del solenoide). Sustituyendo valores tenemos:

- inicialmente (I=100 mA): $B = 1.25\ mT$; $u_B = 0.63\ J/m^3$; $U_i = 20\ \mu J$
- finalmente (I=200 mA): $B = 2.51\ mT$; $u_B = 2.51\ J/m^3$; $U_f = 80\ \mu J$

[Solución: (a) $L = 3.95\ mH$; (b) $f.e.m. = 39.5\ mV$; (c) $U_i = 20\ \mu J$, $U_f = 80\ \mu J$]

9. En un circuito disponemos de una bobina de 200 espiras, una longitud de 10 cm y una sección de 20 cm^2, por la que circula una corriente $I = 2\,sen\left(\dfrac{\pi}{9}t\right)$A. Calcular a) la autoinducción de dicha bobina b) la *f.e.m.* inducida en el instante t=3 s.

SOLUCIÓN:

Sabemos que la *f.e.m.* inducida en una bobina depende de la velocidad con la que varía el flujo magnético a través de la superficie que definen las espiras de la bobina. Si la variación de flujo se debe únicamente al cambio de la corriente que circula por la bobina, entonces la *f.e.m.* inducida se puede expresar en función del coeficiente de autoinducción de la misma y de la velocidad con la que varía la corriente:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

El coeficiente de autoinducción lo obtenemos como: $L = \frac{\phi_B}{I}$

Siendo: $\phi_B = NBS = N\,\mu_0\,(N/l)I\,S = \mu_0\,\frac{N^2 IS}{l}$

De esta manera obtenemos los siguientes resultados:

$$L = \frac{\phi_B}{I} = \mu_0\,\frac{N^2 S}{l} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{200^2\cdot 20\cdot 10^{-4}}{0.1} = 1\,mH$$

$$\varepsilon(t) = -L\frac{dI}{dt} = -40\cos\left(\frac{\pi}{9}t\right)mV \qquad y \qquad \varepsilon(3) = -20\,mV$$

[Solución: (a) $L = 1\,mH$; (b) $f.e.m. = -20\,mV$]

10. Por un solenoide cilíndrico de 1 cm de radio y 20 cm de longitud, con núcleo de Fe dulce (permeabilidad magnética relativa μ_r = 5000) y 300 espiras circula una corriente de 2 A. Calcula: (a) El coeficiente de autoinducción *L*. (b) La energía almacenada en el solenoide [0.5 puntos]. (c) La *f.e.m.* media inducida en el solenoide si la corriente cambia de 2A a 1 A en 0.1 s. Dato: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,u\,S.I.$

SOLUCIÓN:

(a) El flujo del campo magnético a través de las *N* espiras del solenoide será $\phi = NBS = N(\mu_r\mu_0\frac{N}{l}I)(\pi r^2) = I\cdot 9\pi^2\times 10^{-2}$ Wb

El coeficiente de autoinducción es: $L = \frac{\phi}{I} = 9\pi^2\times 10^{-2} = 0.89\,H$

(b) La energía almacenada en el solenoide es: $U = \frac{1}{2}LI^2 = 1.78\,J$

(c) La *f.e.m.* media inducida será $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} = -0.89\,\frac{(1-2)A}{0.1s} = 8.9\,V$

donde se ha aproximado la derivada por un cociente de incrementos.

[Solución: (a) $L = 0.89\,H$; (b) $U = 1.78\,J$; (c) $f.e.m. = 8.9\,V$]

11 Una bobina formada por *250 espiras* de *15cm* de radio, gira en el campo magnético terrestre alrededor de su diámetro vertical, a razón de *85rad/s*. Si se induce una f.e.m. media de *40mV* en medio ciclo, calcular la componente horizontal del campo magnético terrestre en ese lugar.

SOLUCIÓN:

Para obtener la f.e.m inducida en la bobina utilizaremos la ley de Faraday. Previamente debemos determinar el flujo magnético que atraviesa las *N* espiras que constituyen la bobina. Si denominamos B_H a la componente horizontal del campo magnético terrestre, dicho flujo será:

$$\Phi = N\int_S B_H \cdot dS = N\, B_H S \cos(wt)$$, siendo S el área de cada espira.

Ahora: $\varepsilon(t) = -\dfrac{d\phi}{dt} = -\dfrac{d\,(NB_H\, S\cos wt)}{dt} = NB_H\, S\;\, w\, sen\, wt$

El valor medio de esta f.e.m. inducida, que denominaremos $\langle \varepsilon \rangle$, en medio ciclo es:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} \varepsilon(t)\, dt = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} NB_H S\;\, w\; sen\, wt\, dt = -\frac{2NB_H\, S}{T}\left[\cos wt\right]_0^{T/2} = \frac{4NB_H\, S}{T}$$

El área de cada espira es, $S = \pi R^2$, y el período es, $T = 2\pi/w$, luego: $\langle \varepsilon \rangle = 2\, NB_H\, R^2 w$

Y por tanto: $B_H = \dfrac{\langle \varepsilon \rangle}{2NR^2\, w} = 4.18 \cdot 10^{-5}\ T$

Por si no se ha explicado como calcular un valor medio de la función seno, se les puede dar como dato que el valor medio de la f.e.m. es el 63.7% de su amplitud.
Así:

$$B_H = \frac{\varepsilon_0}{N\, wS} = \frac{40 \cdot 10^{-3} / 0.637}{250 \cdot 85 \cdot \pi \cdot 0.15^2} = 4.18 \cdot 10^{-5}\ T$$

[Solución: $B_H = 4.18 \cdot 10^{-5}\ T$]