Universidad Abierta Interamericana

FACULTAD DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA

LIBRO PARA INGRESANTES

ASIGNATURA

MATEMÁTICA

AUTORES

Prof.: Lic. Daniel Veiga

Coord.: Dr. Marcelo De Vincenzi

Universidad Abierta Interamericana- Autorización Definitiva-Decreto del Poder Ejecutivo Nº Resolución 1082/05- Fecha 07/09/2005

Veiga, Daniel
Matemática: libro para ingresantes / Daniel Veiga ; Marcelo de Vincenzi. - 1a ed . - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Universidad Abierta Interamericana, 2019.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-4023-81-0

1. Matemática. 2. Educación Universitaria. I. Vincenzi, Marcelo de. II. Título.
CDD 510.711

Fecha de catalogación: 05/12/2019

INDICE

UNIDAD I: NÚMEROS

- Subclases dentro de los reales
    - Naturales
    - enteros
    - racionales
    - irracionales
- Operaciones en R
- Un comentario y varias aclaraciones
- Valor absoluto y signo
- Enteros
- Suma de enteros
- Producto de enteros
- El signo y la potencia
- División de enteros
- La potencia con el producto y la división

- **RACIONALES**
- Propiedad fundamental de las fracciones
- Producto de fracciones
- Suma de fracciones
- Resta de fracciones
- División de fracciones
- Más propiedades

- **RADICALES**
- La propiedad fundamental de las raíces
- Raíz de raíz
- Producto de radicales
- Cociente de raíces
- Suma y resta de radicales
- Raíces y expresiones fraccionarias
- Potencias de exponente fraccionario y negativo

NÚMEROS

Ya en la escuela primaria empezamos a conocer los números. Al terminar el colegio secundario nos hemos enfrentado a todas sus clases. Exceptuando los complejos (que la mayoría de los alumnos conoce en 4º año), todos los otros tipos de números se llaman "reales".
Por ejemplo, son números reales:

$$5;\ -3;\ \tfrac{1}{2};\ 1.25;\ \sqrt{5};\ 0.5555...\ ;\ \pi;\ \text{etc.}$$

Usaremos el símbolo R para representar el conjunto de todos los números reales.
Con ellos trabajaremos a lo largo de todo este material.

SUBCLASES DENTRO DE LOS REALES

Como es habitual distinguiremos varias subclases dentro de los reales: naturales, enteros, racionales...
Simplemente recordaremos ahora cuáles son y más adelante operaremos con ellos para manejar sus propiedades.

NATURALES

Son los números "para contar":

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... etc. etc.

El símbolo para el conjunto de todos los números naturales es una N mayúscula. Podemos poner entonces:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ...\}$$

Los puntos suspensivos indican que la lista continúa indefinidamente con números cada vez mayores.

ENTEROS

Si reunimos todos los números naturales más el cero y los opuestos de los naturales tenemos el conjunto de los números enteros. Recordemos que el opuesto de un número es el resultado de cambiarle el signo. Por ejemplo: el opuesto de "3" es "-3"; el opuesto de "-5" es "5" y el opuesto de "0" es "0".
El símbolo para este conjunto de todos los enteros es una Z.
Podemos escribir:

$$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2 ...\}$$

De esta forma se sobreentiende que los puntos suspensivos indican que la lista sigue indefinidamente en ambas direcciones.
Es evidente que todos los naturales son enteros. Por eso decimos que el conjunto de los números naturales está incluido dentro del conjunto de los números enteros. Esto lo simbolizamos así:

$$N \subset Z$$

El símbolo "$\subset$" se lee "está incluído en"

RACIONALES

Si formamos todas las fracciones posibles entre números enteros (por supuesto con divisor no nulo) ya tenemos los números racionales. El conjunto de todos los números racionales se simboliza con Q mayúscula.
Notemos que la palabra "racional" no quiere decir "sensato" o "razonable" o "lógico": simplemente se debe a que "razón" significa "cociente" o "fracción" en Matemáticas.
Conviene hacer aquí una aclaración: cuando consideramos los números 4/6 y 10/15, aunque parezca que se trata de racionales distintos eso no es cierto: basta "simplificarlos" (o sea dividir numerador y denominador por el mismo entero) para ver que se trata del mismo número escrito en dos formas distintas. En efecto:

$$\frac{4}{6} = \frac{4/2}{6/2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{10}{15} = \frac{10/5}{15/5} = \frac{2}{3}$$

Queda claro que ambas fracciones son iguales: representan el mismo número racional.
Cuando una fracción ya no se puede simplificar por ningún entero decimos que es una fracción "irreducible".
Tengamos también en cuenta que hay fracciones que tienen como numerador un múltiplo del denominador (por ej: 12/2). Evidentemente al simplificar nos queda un entero. De modo que los enteros también están entre los racionales. Podemos decir que "el conjunto de los enteros está incluido dentro del conjunto de los racionales". Y esto lo podemos simbolizar así:

$$Z \subset Q$$

Pregunta: ¿es racional el número 0.1?. Podemos ver que el 0.1 se puede escribir como una fracción. En efecto:

$$0.1 = 1/10$$

Por lo tanto el 0.1 es un racional.

Pregunta: ¿es racional el número 0.23?.
Vemos que también lo podemos escribir como un cociente de enteros:

$$0.23 = 23/100$$

Entonces el 0.23 también es racional.

Otra más: ¿y el 1.523?.
También lo es porque 1.523 = 1523/1000

La última: ¿cómo mostramos que 0.555...(periódico) es racional?. En primer año del secundario aprendimos a transformar en una fracción un decimal periódico como éste 0.5555... Lo hacemos así:

$$0.5555... = 5/9$$

Es decir, formamos una fracción que tiene como numerador el período y como denominador tantos "nueves" como cifras tiene el período (aquí el período es "5" y como ese período tiene una sola cifra sabemos que en el denominador va un solo "9").

También aprendimos a reescribir uno del tipo de $0,\overset{\frown}{23}$. En efecto:

$0,\overset{\frown}{23}$= 23/99 (de fácil verificación con su calculadora)

Los números como $0,\overset{\frown}{23}$ que se escriben con un cero seguido de un período que se repite indefinidamente se llaman “periódicos puros”. Si tienen al comienzo una parte no periódica, como en el caso de $0.6\overset{\frown}{24}$ se los llama “periódicos mixtos”.

También aprendimos en el secundario a reescribir estos últimos como cociente de enteros. Recordemos que un número como $0.6\overset{\frown}{24}$ (llamémoslo “z”) puede escribirse como fracción de enteros poniendo como numerador la resta de las cifras “624” menos las cifras no periódicas “6” (lo que daría 624-6 = 618) y como denominador un número formado por tantos “nueves” como cifras tiene la parte periódica y tantos “ceros” como cifras tiene la parte no periódica (aquí : 990 donde los dos “9” van por las cifras periódicas “2” y “4” y por otra parte el “0” que va por la cifra “6” no periódica). Vale decir que podríamos escribir el número “z” como la fracción 618/990 (Ud. puede verificarlo fácilmente con la calculadora)
Es decir que se aprende a reescribir como fracción de enteros a cualquier entero (por ej. –7 = -14/2), a cualquier número con desarrollo decimal finito (por ej. 1,3 = 13/10); y a cualquier periódico puro (por ej. $0,\overset{\frown}{7}$ = 7/9) o periódico mixto (por ej. $0,2\overset{\frown}{9}$ = 27/9).

Conocer esas conversiones nos permite aceptar que los racionales son los números reales que se escriben con desarrollo decimal finito o con desarrollo decimal infinito periódico. Vale decir que nos da la posibilidad de definir los racionales (Q) de dos maneras equivalentes:

Q : { <u>fracciones de enteros de divisor no nulo</u> ó bien
reales con desarrollo decimal <u>finito</u> o <u>infinito periódico</u>

Este conjunto Q formado por todos los racionales incluye evidentemente a todos los enteros; por eso Z está incluido en Q, lo que podemos simbolizar:

$$Z \subset Q$$

Si relacionamos también a los naturales podemos escribir:

$$N \subset Z \subset Q$$

Ahora bien: ¿cuáles son los reales que no están en Q?. Son los llamados...

IRRACIONALES

Son todos los reales con desarrollo decimal <u>infinito no periódico</u>. El primer irracional que conocimos en la primaria es π. Este número tiene como primeras cifras:

π = 3,141592... etc.

(es común usar valores “redondeados” como $\pi \cong 3,14$ ó $\pi \cong 3,1416$)

Los griegos se enfrentaron hace alrededor de 2000 años con otro irracional: $\sqrt{2}$ (cuyas primeras cifras son 1,4142... etc.).

Ejemplo: $\sqrt[3]{8}$ es el número 2; es racional.
En cambio $\sqrt{3}$ es irracional.

Los racionales y los irracionales son todos los reales que hay. Podemos continuar la “cadena” de conjuntos incluidos y escribir:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Pero es importante tener en claro que conocer los tipos de números reales que vamos a estudiar y saber que unas clases están incluidas en otras es apenas empezar a abrir “la puerta” del tema.
En realidad se conoce el tema cuando se saben manejar los números “en acción” y el campo de acción de los números son las...

OPERACIONES

Comencemos por las dos más sencillas: suma y producto.
Estas dos operaciones tienen la propiedad conmutativa: “el orden de los números no cambia el resultado”
Para el producto:

Cualesquiera sean los reales a, b, se cumple: a * b = b * a
(“el orden de los factores no altera el producto”)

Para la suma:

Cualesquiera sean los reales a, b vale: a + b = b + a
(“el orden de los sumandos no altera la suma”)

Ambas propiedades se podrían simbolizar así:

“se cumple”

$$\forall a; b \in R \; : \; a + b = b + a$$

$$\forall a; b \in R \; : \; a * b = b * a$$

“para todo”

“pertenecientes a”

El símbolo $\forall$ que significa “para todo” es como una “A” invertida (se dice que se lo eligió porque la A es la inicial de la palabra inglesa ALL que quiere decir “todos”)

También estas dos operaciones tienen la propiedad asociativa: “al aplicar la operación a tres números con un cierto orden, el resultado no depende de si empiezo operando con los dos primeros o con los dos últimos”.

Para la suma (en símbolos):

$$\forall a; b; c \in R \; vale \; (a + b) + c = a + (b + c)$$

Un ejemplo de esta propiedad sería:
Al efectuar la siguiente suma del modo indicado:

(2 + 3) + 7= 5 + 7 = 12 (inicio sumando los dos primeros números)

Tenemos el mismo resultado que al operar de este otro modo:

2 + (3 + 7) = 2 + 10 = 12 (inicio sumando los dos últimos)

Para el producto (en símbolos):

$$\forall a;b;c \in R \ vale \ (a*b)*c = a*(b*c)$$

Por ejemplo:

(3 * 2) * 5 = 6 * 5 = 30 (inicio multiplicando los dos primeros)

Vale lo mismo que:

3 * (2 * 5) = 3 * 10 = 30 (inicio multiplicando los dos últimos)

UN COMENTARIO Y VARIAS ACLARACIONES:

Leyendo algún libro o apunte es posible encontrar una pregunta del tipo:

¿en R es cierto que a + b = b + a?

Hay que aclarar que la pregunta no está del todo bien formulada. Evidentemente se está dando algo por sobreentendido. Y ese algo es:

Se pregunta si eso se cumple para todos los números reales. Sin embargo no se lo está diciendo explícitamente.

No conviene usar ese tipo de sobreentendidos. Es mejor hacer la pregunta del modo más claro posible para que no deje dudas.
Para poder ver cuál es el problema con esta forma de preguntar veamos este caso:

¿En R, es cierto que $\frac{a}{a} = 1$?

Usted, ¿qué contestaría? ¿contestó que sí, que "un número dividido por sí mismo da como resultado 1"?
En caso de que esa fuera su respuesta le sugerimos que tome la calculadora y halle el valor de $\frac{0}{0}$. Después nos comenta...

Lo qué sucedió es que la máquina dio un mensaje de error. La operación no es válida. ¡No vale ni 0 ni 1 ni ningún número!

Entonces la forma correcta de haber hecho la pregunta es:

"¿Es cierto que cualquier número real distinto de cero dividido por sí mismo da 1?"

O si se prefiere usar símbolos:

"¿Es cierto que: $\forall$ a $\in$ R, a $\neq$ 0 vale que: $\frac{a}{a} = 1$?"

Aquí sí la respuesta es afirmativa.

También hemos visto que casi la totalidad de los egresados del secundario suelen decir:
"todo número elevado a la cero da 1"
¿Será cierto?

Si usted cree que sí, le sugerimos que tome una calculadora científica
y halle el valor de 0^0 ("cero a la cero"). Después nos cuenta...

Aquí también la frase que repiten esos egresados tiene un error. Para no equivocarnos podemos decir:

“todo número real no nulo elevado a la cero da 1.”

o también

“todo real distinto de cero, elevado a la cero da 1”.

En símbolos:

$$\boxed{\forall a \in R; a \neq 0 \quad vale \quad a^0 = 1}$$

Hasta aquí nuestro comentario.

Habíamos visto dos propiedades de los reales. Veremos otras más.

VALOR ABSOLUTO Y SIGNO

El valor absoluto de un real x se simboliza: |x| y viene definido por la regla:

Si un real es positivo o cero: su valor absoluto es ese mismo número real.
Si un real es negativo: su valor absoluto es el opuesto de ese número real.

es decir:

Si $x \geq 0$ entonces $|x|=x$ (I)
Si $x < 0$ entonces $|x|=-x$ (II)

por ejemplo: el 7 es positivo, por lo tanto su valor absoluto es el mismo 7.

$$|7|=7$$

otro ejemplo: el –3 es negativo, por lo tanto su valor absoluto es su opuesto (el opuesto de –3 es 3)

$$|-3|=3$$

y finalmente el valor absoluto de cero es cero.

$$|0|=0$$

Tanto para negativos como para positivos el valor absoluto es positivo (Y para cero el valor absoluto es cero, que no es ni positivo ni negativo).
Algunos creen entonces que la expresión (II) (“si x < 0 entonces |x|=-x”) está mal escrita: no entienden qué hace ese signo menos ubicado delante de la x. Veámoslo:
Cuando x < 0 entonces "x" ya tiene un signo menos (puede ser por ejemplo x = - 3).
Quiere decir que ese otro signo menos que se ubica delante de la x (o sea delante del “-3”) hace que el resultado sea positivo.
Para verlo mejor podemos ponerlo así:

$|(-3)| = -(-3) = 3$ ¿se entiende la función de este signo “-”?

En cuanto al signo en los reales hay tres:

positivos → signo: +1
negativos → signo: -1
cero → signo: 0

Tener en cuenta que el signo de un real es un número real (puede ser el 1 ó el –1 ó el 0)

Por ejemplo:

signo de (8) = 1
signo de (-3) = -1
signo de (0) = 0

Es fácil ver ahora que cualquier real se puede escribir como producto de su valor absoluto por su signo.

Por ejemplo: 8 = |8|. Signo (8)

esto vale 8 esto vale 1
(y es cierto que 8 = 8 . 1)

-5 = |-5|. signo(-5)

esto es 5 esto es –1
(y es cierto que –5 = 5 . (-1))

EJERCICIO: escriba cada real indicado como producto de su signo por su valor absoluto.

N1) –3
N2) 9
N3) 0
N4) –10

(respuestas al final)

ENTEROS

Los conceptos de valor absoluto y signo que vimos para reales valen por supuesto también para enteros (que son un tipo particular de reales).
Estos dos conceptos de signo y valor absoluto nos permiten entender más fácilmente algunas propiedades de: producto, división, suma, resta y potencia de enteros.

SUMA DE ENTEROS

Si son de igual signo: conservo el signo y sumo los valores absolutos.
Si son de ≠ signo: queda el signo del "más grande" (el de mayor valor absoluto) y se restan los valores absolutos (el mayor menos el menor).

ejemplos:

(I) (7) + (5) = 12
(-7) + (-5) = -12

(II) (7) + (-5) = 2
(7) + (-9) = –2
(-7) + (5) = –2
quedó en cada caso el signo del "más grande".

PRODUCTO DE ENTEROS (POSITIVOS O NEGATIVOS)

Siempre se multiplican los valores absolutos:
si son de igual signo: resultado positivo.
si son de ≠ signo: resultado negativo.

Por supuesto si uno de los dos (o los dos) fuera cero, el producto sería cero.

ejemplo:
(I) (3) . (5) = 15
(-3) . (-5) = 15

(II) (3) . (-5) = -15
(-3) . (5) = -15

Para productos múltiples con factores positivos y negativos podemos encontrar una regla de los signos observando que los signos menos "se eliminan de a dos".

(-5). (-3) = +15

Por lo tanto si un producto con varios factores tiene una cantidad par de signos menos, el resultado es positivo. En cambio si hay una cantidad impar de signo menos el resultado es negativo.

ejemplo:

(-3). (-2). (+1). (-3). (+2). (-1) = +36 Hay cuatro signos "-". Por lo tanto el resultado es positivo.

ejemplo:
(-1). (+1). (-2). (-1). (+3). (-1). (-1) = -6 Hay cinco signos "-". Por lo tanto el resultado es negativo.

Éste queda solo y así produce el resultado negativo

EJERCICIOS: halle los resultados

N5) –3 + 8 =
N6) –3 . 7 =
N7) 2 . (-5) =
N8) (-3) . (-2) =
N9) –3 –2 =
N10) –5 + 3 – 2 =
N11) (-5) . (3). (-2) =
N12) (-1) . (-2) . (+3) . (-1) . (-2) =
N13) (-3) . (-2) + (7 – 1) =
N14) (-4) . (-5) – (-3 + 2) =

(respuestas al final)

EL SIGNO Y LA POTENCIA

Una potencia de enteros (positivos o negativos) con exponente natural es un producto repetido de un mismo factor.

Ejemplo: $a^5 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$

El signo del resultado se relaciona entonces con la regla de signos del producto múltiple.

Veamos:

uno $(-2)^5$ la base es negativa y el exponente impar. Hay una cantidad impar de factores negativos.
El resultado es negativo.
$(-2)^5 = -32$

dos $(-2)^4$ la base es negativa y el exponente es par. Hay entonces una cantidad par de factores negativos.
El resultado es positivo.

tres $(2)^5$

cuatro $(2)^4$

En los casos tres y cuatro la base es positiva por lo tanto el resultado solo puede ser positivo (varios signos "+" en el producto, sólo pueden dar otro signo "+").

Podemos agrupar estos casos en dos bloques:

exponente impar	conserva el signo de la base ejemplo: $(-2)^5 = -32$ base negativa, resultado negativo. $(2)^5 = +32$ base positiva, resultado positivo.
exponente par	siempre da positivo ejemplo: $(-2)^4 = +16$ $(2)^4 = +16$

EJERCICIOS: calcule los resultados

Este signo "menos" no está afectado por el cuadrado

N15) $(-3)^5 =$
N16) $(-3)^4 =$
N17) $(3)^4 =$
N18) $(-2)^4 - (-3)^2 =$ (atención: aquí el cuadrado sólo afecta al "-3" y no al "-" del centro).
N19) $(3)^5 - (-3)^4 =$
N20) $(-2)^4 . (-3)^2 - (4)^2 . (-3)^3 =$

(respuestas al final)

DIVISIÓN DE ENTEROS

Para la división de enteros positivos o negativos vale la misma regla de signos que para el producto:

igual signo $\rightarrow$ resultado positivo
distinto signo $\rightarrow$ resultado negativo

LA POTENCIA CON EL PRODUCTO Y LA DIVISIÓN

Consideremos la expresión $(a.\ b)^3$ con a, b enteros.

Otra vez definición de cubo

$(a\ .\ b)^3 = (a\ .\ b)\ (a.\ b)\ (a.\ b) = a\ .\ a\ .\ a\ .\ b\ .\ b\ .\ b = a^3\ .\ b^3$

por definición de cubo

puedo reordenar los factores

en síntesis $(a\ .\ b)^3 = a^3\ .\ b^3$ (o sea la potencia se distribuye respecto del producto)
Esto no vale sólo para el cubo, o la cuarta potencia o el cuadrado. Vale para cualquier exponente natural.
Es decir, para a, b enteros y n natural (cualesquiera sean ellos) vale:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Lo llamamos "propiedad distributiva de la potencia respecto del producto".

Por supuesto que también debemos recordar una fórmula análoga que vale para el cociente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{¡ojo!: aquí } b \neq 0$$

A esto lo llamamos la propiedad distributiva de la potencia respecto del cociente.

RACIONALES

Encaremos el repaso de este tema trabajando con la forma de fracciones de enteros con divisor no nulo.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES:

Para cualesquiera a, b, n enteros (b y n no nulos) vale:

$$\frac{a}{b} = \frac{a * n}{b * n}$$

Ésta es la propiedad que me "autoriza" a multiplicar numerador y denominador de una fracción por el mismo entero no nulo.

Ejemplo:

$$\frac{3}{5} = \frac{3*8}{5*8} = \frac{24}{40}$$

Esta cadena de igualdades puede ser comprobada usando la calculadora para hallar la primera división (3/5) y la última (24/40): dará el mismo resultado.
Leído de derecha a izquierda

(con lo que quedaría $\frac{a*n}{b*n} = \frac{a}{b}$)

es la propiedad que nos permite simplificar una fracción de enteros dividiendo numerador y divisor por el mismo entero no nulo.

Ejemplo:

$$\frac{20}{14} = \frac{20/2}{14/2} = \frac{10}{7}$$

esta última fracción se denomina <u>irreducible</u>: ya no se puede simplificar por ningún entero

EJERCICIOS: Simplificar hasta obtener fracciones irreducibles:

N21) $\frac{12}{27}$

N22) $-\frac{26}{40}$

N23) $\frac{30}{35}$

N24) $\frac{24}{32}$

N25) $\frac{9}{18}$

N26) $-\frac{20}{45}$

(Respuestas al final)

Repasemos lo referente a las operaciones con fracciones.

PRODUCTO DE FRACCIONES

Es la más sencilla: se multiplican ordenadamente numerador por numerador y denominador por denominador.

En símbolos:

para a, b, c, d enteros (b≠0 ; d≠0) vale:

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{7} * \frac{5}{8} = \frac{3*5}{7*8} = \frac{15}{56}$$

SUMA DE FRACCIONES

Si tienen igual denominador sencillamente se suman los numeradores y se conserva el denominador:

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$$

Si escribimos esta suma del siguiente modo:

2 quintos + 6 quintos = 8 quintos

vemos mejor lo razonable de la regla para sumar fracciones.

Para el caso de fracciones de distinto denominador conviene en primer lugar reexpresar las fracciones para que tengan igual denominador y luego aplicar la regla recién vista.
Consideremos:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$$

reexpresamos cada fracción así:

$$\frac{3}{5} = \frac{3*7}{5*7} = \frac{21}{35} \quad \text{Y} \quad \frac{2}{7} = \frac{2*5}{7*5} = \frac{10}{35}$$

llevando esto a la suma de fracciones:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3*7}{5*7} + \frac{2*5}{7*5} = \frac{21}{35} + \frac{10}{35}$$

Ya está expresado como suma de fracciones de igual denominador (este proceso se llama “reducir a común denominador”)

¿Qué falta hacer? Sumar simplemente los numeradores.

$$\frac{21}{35} + \frac{10}{35} = \frac{31}{35}$$

Esto que acabamos de hacer muestra el fundamento de lo que nos enseñó la maestra. ¿Recordamos cómo era? “saco denominador común”

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{}{35}$$

(en otras palabras encuentro un múltiplo de los denominadores. ¡¡No estamos sacando factor común: el factor común es un submúltiplo, en cambio el común denominador es un múltiplo!!)

en este ejemplo "divido 35 por 5. Esto da 7". Significa que al 5 debo multiplicarlo por 7 para obtener ese 35. Quiere decir que estoy averiguando "¿por qué número debo multiplicar al denominador 5 para obtener el común denominador 35?"
entonces..."como la respuesta es 7, multiplico este 7 por el 3":

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3*7+}{35}$$

Aquí estoy aplicando la "propiedad fundamental de las fracciones" (si multiplico abajo por 7, también multiplico arriba por 7).

Continúo... "divido el 35 por 7. Esto da 5". Estoy averiguando ¿por qué número debo multiplicar al denominador 7 para obtener el denominador común 35?" Como el resultado es 5, vuelvo a aplicar la "propiedad fundamental de las fracciones" y multiplico el numerador 2 por este 5.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3*7+2*5}{35}$$

Ahora solo falta "hacer unas cuentas"

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3*7+2*5}{35}=\frac{21+10}{35}=\frac{31}{35}$$

¡Y ya está!

Otro ejemplo:
Podríamos presentarlo así:

$$\frac{4}{9}+\frac{2}{5}=\frac{4*5}{9*5}+\frac{2*9}{5*9}=\frac{20}{45}+\frac{18}{45}=\frac{38}{45}$$

reexpreso

hago cuentas

sumo numeradores y conservo denominador

Otra forma de presentarlo sería:

$$\frac{4}{9}+\frac{2}{5}=\frac{4*5+2*9}{45}=\frac{20+18}{45}=\frac{38}{45}$$

RESTA DE FRACCIONES

Con la resta se procede de modo análogo. El único cambio consiste en que en lugar de haber un signo suma entre las dos fracciones hay un signo de resta. El siguiente ejemplo nos lo muestra:

$$\frac{3}{7}-\frac{5}{4}=\frac{3*4-7*5}{28}=\frac{12-35}{28}=\frac{-23}{28}$$

EJERCICIOS: Calcule las siguientes sumas:

N27) $\frac{3}{7}+\frac{1}{2}$

N28) $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$

N29) $\frac{3}{5}-\frac{2}{3}$

N30) $\frac{2}{7}-\frac{4}{9}$

N31) $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$

N32) $\frac{4}{3}-\frac{1}{7}+\frac{3}{2}$

(Respuestas al final)

DIVISIÓN DE FRACCIONES:

Al dividir dos enteros como 12 y 6 decimos que el resultado es 2 porque "2 multiplicado por 6 es 12".
Es decir:

$\frac{12}{6}=2$ pues 2 * 6 = 12

Esto rige para la división entre enteros.
Es análogo para la división entre fracciones:

Al dividir $\frac{3}{2}$ por $\frac{5}{7}$ el resultado es $\frac{21}{10}$ pues

$$\frac{21}{10}*\frac{5}{7}=\frac{21*5}{10*7}=\frac{105}{70}=\frac{3}{2}$$

Simplifico dividiendo por 35 numerador y denominador

Es decir:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}}=\frac{21}{10}$$

En general para enteros cualesquiera a, b, c, d (siendo b, c, d no nulos) vale:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$$

Para verificar esto debemos comprobar que $\frac{a}{b} * \frac{d}{c}$ ("el resultado") multiplicado por $\frac{c}{d}$ ("el divisor") da $\frac{a}{b}$ ("el dividendo")

Veámoslo:

$$\left(\frac{a}{b} * \frac{d}{c}\right) * \frac{c}{d} = \frac{a*d*c}{b*c*d} = \frac{a}{b}$$

¡Se cumple!

Concluimos entonces que dividir una fracción por otra equivale a multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda ("la segunda invertida")

Ejemplo:

En lugar de dividir por 7/4 multiplico por 4/7

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{5} * \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

Resolvamos un caso con operaciones combinadas:

Simplifico dividiendo por 21

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2*2+1*3}{6}}{\frac{3*3+5*1}{15}} = \frac{\frac{4+3}{6}}{\frac{9+5}{15}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{14}{15}} = \frac{7}{6} * \frac{15}{14} = \frac{7*15}{6*14} = \frac{105}{84} = \frac{5}{4}$$

Saco denominador común tanto en el numerador como en el denominador.

Ejercicios: Hallar los resultados de:

N33) $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)*\frac{2}{3}$

N34) $\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)*\frac{1}{4}$

N35) $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}}$

N36) $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}$

(Respuestas al final)

MÁS PROPIEDADES. TAMBIÉN SON VÁLIDAS LAS SIGUIENTES:

1) $a^m * a^n = a^{m+n}$

(“Para producto de potencias de igual base se suman los exponentes”)

Esta propiedad es fácilmente aceptable. Consideremos el producto X3 * X2

La potencia X3 significa “X * X * X” es decir tres veces el factor X. La potencia X2 significa “X * X” es decir dos veces el factor X.
Entonces es sencillo entender que X3 * X2 significa X*X*X*X*X y esto último se puede simbolizar: X5. La fórmula de más arriba no hace más que generalizar esto para cualesquiera exponentes naturales m y n.
Ahora preguntémonos: ¿por qué se aclara que son potencias de igual base?. Sencillamente porque si fueran de bases distintas no podrían unificarse en un único exponente sin más. Por ejemplo la expresión a3*b2 (que se traduce por: a*a*a*b*b) no se podría unificar en una sola potencia.

2) $\left(a^m\right)^n = a^{m*n}$

(“Para potencia de potencia se multiplican los exponentes”)

Analicemos un ejemplo de esta potencia de potencia:

$$\left(a^3\right)^2$$

conociendo el concepto de potencia está claro que aquí hay dos paréntesis multiplicando: $(a^3) * (a^3)$ pero cada paréntesis contiene 3 factores, es decir: (a*a*a)*(a*a*a). Por eso resulta evidente que en total hay 2 x 3 factores (es decir 6 factores), lo que se simboliza a^6.

$$\left(a^3\right)^2 = a^{3*2}$$

En general la potencia $\left(a^m\right)^n$ significa: **n** paréntesis de **m** factores cada uno, con lo cual se tiene **m*n** factores en total. Es decir:

$$\left(a^m\right)^n = a^{m*n}$$

3) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

(“Para cociente de potencias de igual base se restan los exponentes”)

Veamos un ejemplo: $\frac{a^5}{a^3}$

El numerador a5 está formado por 5 factores “a”. El denominador está formado por 3 factores “a”. Con ello:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a*a*a*a*a}{a*a*a}$$

al simplificar tres de los factores “de arriba” con tres de los factores “de abajo” sólo quedan <u>dos</u> factores “a” del numerador.

$$\frac{\cancel{a}*\cancel{a}*\cancel{a}*a*a}{\cancel{a}*\cancel{a}*\cancel{a}} = a^2$$

y este a^2 es a^{5-3}

Por eso la regla nos pide restar de los 5 de arriba los 3 de abajo como se indica:

$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3}$. Si bien hemos analizado un caso particular sabemos que la propiedad es válida <u>en general</u> para cualesquiera m y n naturales (¡¡ siempre que “a” no sea cero !!).

4) Por otro lado un número como 2^0 puede escribirse así 2^{3-3} (porque 0=3-3) y, a su vez, este 2^{3-3} puede escribirse $\frac{2^3}{2^3}$ (aplicando que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$) y como $\frac{2^3}{2^3}$ es <u>evidentemente</u> igual

para todo real “a” distinto de cero vale: $a^0=1$

a 1 nos queda claro (después de todo este trabajo) que $2^0=1$. Tener en cuenta que 0^0 no es un número. Escribimos entonces:

5) También vale (para todo real no nulo "a" y para todo natural "n") la siguiente propiedad.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Veamos esta propiedad "en acción" en un caso concreto:
El número 2^{-3} se puede escribir, por ejemplo, como 2^{0-3} (porque 0-3 = -3) y aplicando la propiedad

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ nos quedaría:

$$2^{-3} = 2^{0-3} = \frac{2^0}{2^3} = \frac{1}{2^3}$$

Con lo cual observamos que (como ejemplo particular de la propiedad general que estamos viendo) vale:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

Tengamos en cuenta que lo que acabamos de ver fue simplemente un ejemplo, <u>un caso particular</u> (no fue una demostración!!)

Resumamos las reglas vistas (para **m**, **n** naturales):

$$(a*b)^n = a^n * b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} (\forall b \neq 0)$$

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (\forall a \neq 0)$$

$$a^0 = 1 \quad (\forall a \neq \quad 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\forall a \neq 0)$$

Las aplicaremos en varios ejemplos:

el primero

Consideremos $\left[a^5 * (a^2)^3\right]^4$ y tratemos de reescribirlo como una potencia de "a" (vale decir: el símbolo "a" y un solo exponente)

$$\left[a^5 * (a^2)^3\right]^4 = \left(a^5 * a^6\right)^4 = (a^{11})^4 = a^{44}$$

$$(a^2)^3 = a^6 \qquad a^5 * a^6 = a^{11}$$

el segundo

$$\frac{\left(a^6\right)^3 * \left(a^4\right)^4}{\left(a^2\right)^3 * a} = \frac{a^{18} * a^{16}}{a^6 * a} = \frac{a^{34}}{a^7} = a^{27}$$

el tercero: en este ejemplo se debe primero separar las dos variables "x" e "y" y luego operar para conseguir un producto de una potencia de "x" por una potencia de "y".

$$(x^3y)^2 * (x^2y^4)^3 = (x^3)^2(y)^2 * (x^2)^3(y^4)^3 = x^6y^2x^6y^{12} =$$

$$x^{6+6}y^{2+12} = x^{12}y^{14}$$

Distribuyo potencias respecto del producto

el cuarto ejemplo:

$$\frac{\left[(x^3)^3y^2\right]^4(x^3y^4)^3}{(xy^2)^2(x^3y)^3} = \frac{(x^9y^2)^4(x^3y^4)^3}{(xy^2)^2(x^3y)^3} = \frac{(x^9)^4(y^2)^4(x^3)^3(y^4)^3}{x^2(y^2)^2(x^3)^3y^3} =$$

$$= \frac{x^{36}y^8x^9y^{12}}{x^2y^4x^9y^3} = \frac{x^{36+9}y^{8+12}}{x^{2+9}y^{4+3}} = \frac{x^{45}y^{20}}{x^{11}y^7} = x^{45-11}y^{20-7} = x^{34}y^{13}$$

Ejercicios: Escribir como potencias simples las expresiones:

N37) $$\left[(a^3)^3\left(a^2\right)^2\right]^5 (a^4(a^3)^3)^4 =$$

N38) $$\left[(a^4)^3\left(a^2\right)^2\right]^3 (a^5)^2 a^3 =$$

N39) $$\frac{\left[\left(a^3b\right)^2 b^3\right]^4 \left[\left(ab^2\right)^3 \left(ab\right)^2\right]^3}{\left[a^2\left(ba\right)^3\right]^3}$$

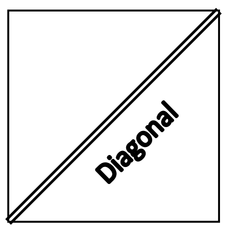
N40) $$\frac{\left[\left(x^3yz^2\right)^3\left(xy^2z^3\right)^4\right]^5}{\left((x^2)^2 y^3\right)^3}$$

N41) $$\frac{\left(x^3y^2\right)^3\left(x^4a^5\left(b^2\right)\right)^5 ab}{(y^4)^3}$$

(respuestas al final)

EL NACIMIENTO DE LOS IRRACIONALES

¿Cuánto ahorramos al caminar en diagonal?
Consideremos el siguiente problema:
En una manzana de la ciudad de La Plata (famosa por sus diagonales) estamos parados en una esquina y queremos ir a la esquina más lejana dentro de esa manzana. En el gráfico:
Estamos en A y queremos ir a B.



B

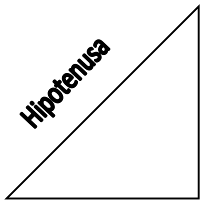
100 m.

A 100 m. C

Tenemos dos opciones:

a) Ir en diagonal desde A hacia B directamente.
b) Ir de A hacia C y finalmente de C hacia B.

La pregunta es: ¿Cuánto ahorramos al ir en diagonal?
En primer lugar, el trayecto ACB tiene una longitud de 100 m + 100 m = 200 m
El trayecto en diagonal se calcula así:
Consideremos uno de los dos triángulos en que la diagonal corta a la manzana.



100 m **Cateto**

100 m **Cateto**

Éste es un triángulo rectángulo. Para él vale el teorema de Pitágoras, que dice:
"En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".
Es decir:

$$\text{Hip}^2 = (100\ \text{m})^2 + (100\ \text{m})^2$$
$$\text{Hip}^2 = 10.000\ \text{m}^2 + 10.000\ \text{m}^2$$
$$\text{Hip}^2 = 20.000\ \text{m}^2$$

Para despejar el valor de la hipotenusa tomo raíz cuadrada en ambos miembros y obtengo:

$$\text{Hip} = \sqrt{20.000\,\text{m}^2}$$
$$\text{Hip} = \sqrt{20.000}\,.\,\text{m} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt{10.000}\,.\,\text{m} = \sqrt{2}.100.\,\text{m}$$

Pero $\sqrt{2} \cong 1,41$, con lo cual queda:

Hip $\cong$ 1,41 . 100 m = 141 m

Es fácil ahora calcular que la longitud del camino que ahorramos al ir en diagonal es aproximadamente de:

$$200\ \text{m} - 141\ \text{m} \cong 59\ \text{m}$$

Ahora bien, al calcular la longitud nos enfrentamos al número $\sqrt{2}$. Éste no es una raíz exacta.
Un irracional como $\sqrt{2}$ no puede ser escrito como cociente de dos enteros. Y es por eso que sorprendió a los pitagóricos, que sólo conocían los racionales (que se pueden escribir como cociente de enteros).
Ese fue el origen de los ***números irracionales***, con los cuales trabajaremos en esta unidad.

RADICALES

Recordemos algunas características de las potencias de exponente natural.
Para un exponente par el resultado es siempre positivo o cero. Por ejemplo:

(-3)2 = 9	(9 > 0)
(5)2 = 25	(25 > 0)
(0)2 = 0	(0 = 0)

El resultado de la potencia par es positivo para base distinta de cero y es cero para base cero.
Para un exponente impar el resultado tiene el mismo signo que la base:

(-3)3 = -27
$(2)^5 = 32$
$(0)^5 = 0$

Vamos a repasar ahora algunas propiedades de la radicación (que es una operación inversa de la potenciación: la logaritmación es otra)

Si pedimos que se complete el blanco en la expresión siguiente:

$$3^2 = \square$$

estamos pidiendo calcular una potencia: 3^2

En cambio si pedimos que se complete el blanco en:

$$\square^{3} = 8$$

lo que se pide es calcular la raíz cúbica de 8. Es decir, se pide efectuar una radicación. La forma habitual de indicar esa operación es:

$$\sqrt[3]{8}$$

El uso de este símbolo de radicación queda definido, para este caso particular, con la condición siguiente:

$$\sqrt[3]{8} = x \qquad \text{si y solo si} \qquad x^3 = 8$$

En este punto conviene notar que cuando el índice (la cantidad ubicada encima de la raíz) es impar la definición general puede darse sin problemas:

Para cualesquiera "n" (natural impar) y "a" y "b" reales, vale:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{si y sólo si} \qquad b^n = a$$

Por ejemplo:

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \text{pues } 2^5 = 32$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{pues } (-2)^3 = -8$$

$$\sqrt[3]{0} = 0 \quad \text{pues } (0)^3 = 0$$

Pero en el caso de exponente natural par se nos presenta un problema. En efecto:

$\sqrt[2]{9}$ tendría 2 soluciones distintas: el 3 y el –3. Esto es así porque:

$(3)^2 = 9$ y también $(-3)^2 = 9$.

El problema es que entonces el símbolo $\sqrt[2]{9}$ ya no representa un solo número sino dos números distintos.

No se podría poner 3 = $\sqrt{9}$ y –3 = $\sqrt{9}$ porque al aplicar carácter transitivo de la igualdad tendríamos que concluir que 3 = -3 (!!!).

Para evitar estos inconvenientes se adopta actualmente el siguiente criterio:

Se define como raíz par de cualquier real no negativo "a", al real no negativo "b" que cumple bn = a (donde "n" es el índice par de la raíz)

En símbolos:

$$\forall a \geq 0\,;\, \forall b \geq 0\,,\, \forall n \text{ natural par, definimos:}$$

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a$$

Entonces vale $\sqrt{9}$ = 3 (y ya no "-3")

Recordemos ahora algo de nomenclatura. En la expresión de la raíz distinguimos dos elementos: "índice" y "radicando". Los indicamos a continuación:

$$\sqrt[\text{índice}]{\text{radicando}}$$

Hace falta aclarar algo más en el tema de la radicación de reales.

¿Cuánto vale $\sqrt[2]{x^2}$?

Notemos que x^2 es no negativo y el índice es par. El resultado debe ser no negativo. Entonces la pregunta es ¿cuál es el número real no negativo que elevado al cuadrado da x^2?

Se hace más fácil pensarlo para un número en particular:

1) $\sqrt[2]{3^2} = 3$ pues $(3)^2 = 3^2$ y $3 > 0$

2) $\sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[2]{9} = 3$ (el real <u>no negativo</u> que elevado al cuadrado da $(-3)^2$ es 3. ¡Por supuesto que (–3) <u>parece</u> cumplir también lo pedido, <u>pero es negativo</u>!)

En el (2) vale $3^2 = 9$ (y 9 es el radicando, porque: $(-3)^2 = 9$).

En ambos casos el resultado de $\sqrt[2]{x^2}$ fue el valor absoluto de x: |x|. Ésta es la respuesta a la pregunta hecha más arriba: <u>el real no negativo que elevado al cuadrado da x^2 es |x|</u>.

Efectivamente vale:

$$\sqrt[2]{x^2} = |x|$$ para cualquier real x

En cambio para exponente e índice impar podríamos poner, por ejemplo:

$$\sqrt[3]{x^3} = x \qquad \sqrt[5]{x^5} = x$$

Por ejemplo $\sqrt[3]{(-2)^3}$ es la raíz cúbica de (-8) y por tanto es (-2).

Lo mismo para el caso de $\sqrt[3]{(2)^3}$: la raíz cúbica de (8) es (2). En estos dos casos todo ocurre como si la raíz impar y el índice impar (de igual valor ambos) simplemente se anularan. Tengamos en cuenta que con el índice y exponente par (de igual valor) no sucede así pues puede darse el caso de $\sqrt[2]{(-2)^2}$ que no nos da (-2) sino (2) (vale decir: <u>no podemos cancelar sin más el índice y el exponente si son pares</u>)

En lo que sigue trabajaremos con radicandos exclusivamente <u>no negativos</u>. De modo que los radicandos y los resultados de las raíces serán no negativos.

LA PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RAÍCES

Lo primero es repasar algo que luego nos será muy útil:

"Si multiplicamos el índice y el exponente por el mismo natural el resultado de la raíz no se altera".

En símbolos:

$$\forall a \geq 0; \forall n, m, k \in N \quad vale \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n*k]{a^{m*k}}$$

Ejemplos:

1) $$\sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5*2]{4^{3*2}} = \sqrt[10]{4^6}$$

2) $$\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[7*5]{a^{2*5}} = \sqrt[35]{a^{10}}$$

Supongamos que queremos comparar dos raíces como $\sqrt[3]{2^2}$ y $\sqrt[4]{2^3}$

Así como están no es fácil ver cuál es más grande (si hay alguna que lo sea). Para hacerlo podríamos expresar ambas raíces de modo que tengan igual índice.

<u>primero</u>) multiplico índice y exponente de $\sqrt[3]{2^2}$ por 4:

$$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3*4]{2^{2*4}} = \sqrt[12]{2^8}$$

<u>segundo</u>) multiplico índice y exponente de $\sqrt[4]{2^3}$ por 3:

$$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4*3]{2^{3*3}} = \sqrt[12]{2^9}$$

Ahora sabemos que:

$$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{2^8} \quad \text{y} \quad \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$$

Así expresadas son fáciles de comparar. Vemos que:

$$\sqrt[12]{2^9} > \sqrt[12]{2^8}$$

y por lo tanto:

$$\sqrt[4]{2^3} > \sqrt[3]{2^2}$$

Al proceso de reescribir $\sqrt[3]{2^2}$ y $\sqrt[4]{2^3}$ como raíces de igual índice se lo llama <u>**“reducción a común índice”**</u>.

Otro ejemplo:
Reducir a común índice los números:

$$A = \sqrt[3]{3^2} \quad \text{y} \quad B = \sqrt[5]{3^3}$$

$$A = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3*5]{3^{2*5}} = \sqrt[15]{3^{10}}$$

$$B = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5*3]{3^{3*3}} = \sqrt[15]{3^9}$$

si ahora quisiéramos compararlas sabríamos fácilmente que B < A porque:

$$\sqrt[15]{3^9} < \sqrt[15]{3^{10}}$$

Uno más:
Reducir a común índice los radicales siguientes y compararlos:

A= $\sqrt[5]{a^2b^3}$ y B= $\sqrt[7]{a^5b^2}$

Obviamente ya sabemos que el recurso es multiplicar por "7" índice y exponentes de A y multilplicar por "5" índice y exponentes de B.

$$\sqrt[5]{a^2b^3} = \sqrt[5*7]{\left(a^2b^3\right)^7} = \sqrt[5*7]{\left(a^2\right)^7\left(b^3\right)^7} = \sqrt[35]{a^{14}b^{21}} \text{ = A}$$

$$\sqrt[7]{a^5b^2} = \sqrt[7*5]{\left(a^5b^2\right)^5} = \sqrt[7*5]{\left(a^5\right)^5\left(b^2\right)^5} = \sqrt[35]{a^{25}b^{10}} \text{ = B}$$

Ahora bien en lugar de <u>multiplicar</u> por un natural el índice y el exponente de un radical podemos <u>en ciertos casos</u>, proceder a la inversa.
Es decir podemos <u>dividir</u> exponente e índice por el mismo natural.
Veamos:

$$\sqrt[10]{x^8} = \sqrt[10/2]{x^{8/2}} = \sqrt[5]{x^4}$$

Una vez expresado como $\sqrt[5]{x^4}$ ya no podemos continuar porque 5 y 4 no tienen divisores comunes. Así está expresado como radical irreducible.

Otro ejemplo:

Simplificar en lo posible la expresión del radical $\sqrt[8]{x^{12}}$

No es difícil encontrar un divisor común para 8 y 12. Por ejemplo el 2 lo es. Pero nos conviene elegir el 4 que también es divisor común pero es el mayor. (¿se acuerda de "máximo común divisor?)

Entonces:

$$\sqrt[8]{x^{12}} = \sqrt[8/4]{x^{12/4}} = \sqrt[2]{x^3}$$

Ejemplo:

Simplificar la expresión del radical $\sqrt[10]{a^6b^4}$

Aquí el divisor apropiado para el 10, el 6 y el 4 es el 2.

$$\sqrt[10]{a^6b^4} = \sqrt[10/2]{a^{6/2}b^{4/2}} = \sqrt[5]{a^3b^2}$$

RAÍZ DE RAÍZ

¿Cómo escribir más sencillamente el radical $\sqrt[5]{\sqrt[2]{3}}$?
La propiedad para raíz de raíz es:

$$\forall m, n \in N; \forall x \geq 0 \text{ vale: } \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m*n]{x}$$

Vale decir que en el caso de raíz de raíz simplemente podemos multiplicar los índices.

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[5*2]{3} = \sqrt[10]{3}$$

Ud. puede verificar esta igualdad usando la calculadora científica.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^2 y^3}} = \sqrt[4*3]{x^2 y^3} = \sqrt[12]{x^2 y^3}$$

Otro ejemplo:

$$\sqrt[6]{\sqrt[10]{x^4}} = \sqrt[6*10]{x^4} = \sqrt[60]{x^4}$$

y puedo seguir (recordando que el máximo común divisor de 60 y 4 es 4):

$$\sqrt[60]{x^4} = \sqrt[60/4]{x^{4/4}} = \sqrt[15]{x}$$

(seguimos trabajando con $x \geq 0$)

EJERCICIOS: Simplificar todo lo posible las siguientes expresiones:

N42) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^2 y^6}}$

N43) $\sqrt[7]{\sqrt[10]{x^{14}}}$

N44) $\sqrt[4]{\sqrt[2]{\sqrt[10]{x^{16}}}}$

N45) $\sqrt[5]{\sqrt[10]{\sqrt[6]{x^{15}}}}$

N46) $\sqrt[10]{\sqrt[14]{x^{35}}}$

(respuestas al final)

PRODUCTO DE RADICALES

Tenemos a disposición una propiedad de los radicales:

$$\sqrt[n]{a*b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} \qquad \forall n \in N; \forall a, b \geq 0$$

es la "propiedad distributiva de la radicación respecto del producto"

Comprobémosla en un caso particular

$$\sqrt[3]{(27)*(8)} = \sqrt[3]{27} * \sqrt[3]{8}$$

lo hacemos así: calculamos el valor de $\sqrt[3]{(27)*(8)}$ y además el de $(\sqrt[3]{27})*(\sqrt[3]{8})$. Debemos verificar que son iguales.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{(27)*(8)} = \sqrt[3]{216} = 6 \\ (\sqrt[3]{27})*(\sqrt[3]{8}) = 3*2 = 6 \end{array}\right\} \text{ ¡se verifica!}$$

Usando su calculadora científica intente comprobarlo en un par de otros casos. Por ejemplo:

en éste: $\sqrt[5]{(20)*(7)} = \sqrt[5]{20} * \sqrt[5]{7}$

y en éste : $\sqrt[3]{(9)*(8)} = \sqrt[3]{9} * \sqrt[3]{8}$

La propiedad distributiva que comentamos, leída "de derecha a izquierda" nos dice:

$$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a*b} \qquad \forall n \in N, \forall a; b \geq 0$$

es decir nos permite <u>unificar</u> los dos radicales. Pero ¡cuidado! , esta fórmula exige que los dos tengan igual índice.

Veamos un caso:

Aplicamos la propiedad

$$\sqrt[5]{a^2} * \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^2 * a} = \sqrt[5]{a^3}$$

aquí aplicamos: $a^2 * a = a^{2+1}$

Otro:

$a^2bab^3 = a^2abb^3 = a^3b^4$

$$\sqrt[7]{a^2b} * \sqrt[7]{ab^3} = \sqrt[7]{a^2b * ab^3} = \sqrt[7]{a^3b^4}$$

¿Cómo proceder cuando los dos radicales no tienen el mismo índice? Sencillamente expresándolos de modo que tengan igual índice (¡ahora usamos el proceso de reducción a común índice!):

Por ejemplo:

$$\sqrt[5]{3^2} * \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[5*4]{3^{2*4}} * \sqrt[4*5]{2^{3*5}} = \sqrt[20]{3^8} * \sqrt[20]{2^{15}} = \sqrt[20]{3^8 * 2^{15}}$$

Veamos otro ejemplo:

$$\sqrt[7]{a^3} * \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[7*3]{a^{3*3}} * \sqrt[3*7]{a^{2*7}} = \sqrt[21]{a^9} * \sqrt[21]{a^{14}} = \sqrt[21]{a^9 a^{14}} = \sqrt[21]{a^{23}}$$

Un caso con más letras:

$$\sqrt[6]{ab^2} * \sqrt[5]{a^4 b} = \sqrt[6*5]{a^5 (b^2)^5} * \sqrt[5*6]{a^{4*6} b^{1*6}} = \sqrt[30]{a^5 b^{10}} * \sqrt[30]{a^{24} b^6} =$$

$$= \sqrt[30]{a^5 b^{10} a^{24} b^6} = \sqrt[30]{a^5 a^{24} b^{10} b^6} = \sqrt[30]{a^{29} b^{16}}$$

aquí aplico la propiedad distributiva para "unificar"

COCIENTE DE RAÍCES

La radicación no sólo es distributiva respecto del producto. También lo es respecto de la división.
En efecto:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \forall n \in N, \forall a \geq 0, \forall b > 0$$

y, análogamente a la anterior propiedad ésta nueva, leída al revés:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

nos autoriza a "unificar" una división de dos radicales en uno solo (siempre que sean de igual índice):

Por ejemplo:

$$\frac{\sqrt[5]{30}}{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[5]{\frac{30}{6}} = \sqrt[5]{5}$$

Otro ejemplo:

$$\frac{\sqrt[7]{a^4 b^5}}{\sqrt[7]{a^2 b}} = \sqrt[7]{\frac{a^4 b^5}{a^2 b}} = \sqrt[7]{a^2 b^4}$$

Por supuesto que si los dos radicales no tienen igual índice "reducimos a común índice":

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[7]{a^2}} = \frac{\sqrt[5*7]{a^{3*7}}}{\sqrt[7*5]{a^{2*5}}} = \frac{\sqrt[35]{a^{21}}}{\sqrt[35]{a^{10}}} = \sqrt[35]{\frac{a^{21}}{a^{10}}} = \sqrt[35]{a^{11}}$$

Otro ejemplo más integrador:

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^5}}}{\sqrt[2]{\sqrt[5]{a^3}}} = \frac{\sqrt[4*3]{a^5}}{\sqrt[2*5]{a^3}} = \frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[10]{a^3}} = \frac{\sqrt[12*5]{a^{5*5}}}{\sqrt[10*6]{a^{3*6}}} = \frac{\sqrt[60]{a^{25}}}{\sqrt[60]{a^{18}}} = \sqrt[60]{\frac{a^{25}}{a^{18}}} = \sqrt[60]{a^7}$$

elijo multiplicar arriba por 5 y abajo por 6.

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Para sumar expresiones como la siguiente:

$$3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

simplemente sumamos los coeficientes: 3 + 7 = 10
y obtenemos un resultado que tiene la misma expresión radical de los dos sumandos:

$$3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

y no es raro que así sea: 3 veces una raíz más 7 veces esa raíz es igual a 10 veces esa misma raíz.

Pero la suma de radicales resulta tan sencilla siempre que los dos sumandos tengan la misma expresión radical. Hay casos en que encontramos dos términos que no se ven como iguales pero trabajando un poco se pueden expresar de modo que tengan el mismo radical.
Por ejemplo, si tenemos que sumar:

$$3\sqrt{20} + 7\sqrt{5}$$

podríamos en este caso poner $\sqrt{20}$ como $\sqrt{4 \cdot 5}$ y, aplicando la propiedad distributiva, quedaría:

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

es decir $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Entonces podríamos proceder así:

$$3\sqrt{20} + 7\sqrt{5} = 3 \cdot 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

y ahora sumar simplemente

$$6\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 13\sqrt{5}$$

Veamos otro:

Calcular $2\ \sqrt{125} - 3\ \sqrt{45}$

Aquí lo primero es tratar de reexpresar $\sqrt{125}$ y $\sqrt{45}$.

Empecemos con $\sqrt{125}$. Notemos que 125 = 25 . 5. Entonces se puede poner:

$$\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Distribuyo la raíz respecto del producto

Continuemos con $\sqrt{45}$. El 45 se puede escribir como 45 = 9 . 5 y entonces:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}$$

Con estas dos simplificaciones podemos resolver sencillamente el ejercicio planteado:

$$2\ \sqrt{125} - 3\ \sqrt{45} = 2 \cdot 5\ \sqrt{5} - 3 \cdot 3\ \sqrt{5} = 10\ \sqrt{5} - 9\ \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

Tengamos en cuenta que no siempre se puede operar como en los ejemplos anteriores.
Veamos qué sucede en un caso como el siguiente.

Calcular $3\ \sqrt{18} + 5\ \sqrt{20}$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\ \sqrt{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\ \sqrt{5} \qquad \text{(II)}$$

Aplicando (I) y (II) escribimos:

$$3\ \sqrt{18} + 5\ \sqrt{20} = 3 \cdot 3\ \sqrt{2} + 5 \cdot 2\ \sqrt{5} = 9\ \sqrt{2} + 10\ \sqrt{5}$$

y ya no podemos simplificar más esta expresión.

RAÍCES Y EXPONENTES FRACCIONARIOS

Al trabajar con enteros pudimos usar exponentes naturales.
Al trabajar con racionales pudimos usar exponentes enteros (que incluyen negativos).
Ahora que estamos trabajando con raíces trabajaremos con exponentes fraccionarios.

Recordemos una fórmula que vincula exponentes fraccionarios con raíces(siendo m,n naturales):

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Un caso particular sería:

$$\sqrt[3]{2^5} = 2^{5/3}$$

Usted puede verificar esta igualdad con la calculadora científica.

Tengamos en cuenta que no sólo se puede pasar de raíz a exponente fraccionario sino también a la inversa.

Por ejemplo:

$$4^{3/2} = \left(\sqrt[2]{4}\right)^3 = (2)^3 = 8$$

Para estos exponentes fraccionarios valen reglas análogas a las que regían el trabajo con los otros exponentes. Veamos algunos ejemplos:

$$a^{2/3} \cdot a^{1/2} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$$

$$\left(a^{3/5}\right)^{1/2} = a^{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a^{5/3}}{a^{2/7}} = a^{\frac{5}{3}-\frac{2}{7}}$$

(por supuesto que si "a" está en el divisor debe ser $a \neq 0$)
Desarrollemos el siguiente ejemplo: expresar las raíces usando exponentes fraccionarios, luego operar aplicando propiedades de la potencia y finalmente volver a expresar como radical.

Uno

$$\left(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[2]{a}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{2\cdot 2+1\cdot 3}{6}}\right)^2 =$$

$$\left(a^{\frac{4+3}{6}}\right)^2 = \left(a^{\frac{7}{6}}\right)^2 = a^{\frac{7}{6}\cdot 2} = a^{\frac{14}{6}} = a^{\frac{14/2}{6/2}} = a^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{a^7}$$

Dos

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \left(2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{12+5}{20}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$\left(2^{\frac{17}{20}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{17}{20}\cdot\frac{1}{3}} = 2^{\frac{17}{60}} = \sqrt[60]{2^{17}}$$

EJERCICIOS: Calcule el valor en cada caso expresando previamente como radical:

N47) $8^{\frac{1}{3}}$

N48) $4^{\frac{5}{2}}$

N49) $9^{\frac{3}{2}}$

Exprese usando exponente fraccionario, luego opere y al final vuelva a expresar como radical.

N50) $$\frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[11]{x}}$$

N51) $$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[2]{x}}$$

(Respuestas al final)

POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO Y NEGATIVO

En una expresión como ésta:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$$

la raíz está en el divisor. Podemos reexpresar la raíz como una potencia de exponente fraccionario:

$$\frac{1}{2^{3/5}}$$

y, a continuación, reexpresar la fracción usando exponente negativo:

$$2^{-\frac{3}{5}}$$

EJERCICIOS: exprese usando exponente fraccionario, luego opere aplicando las reglas de la potencia y finalmente vuelva a expresar como raíz.

N52) $\dfrac{\sqrt[8]{x^5}}{\sqrt[3]{x^7}} \cdot \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[5]{x^9}}$

N53) $\dfrac{\sqrt[3]{x^7}}{\sqrt[7]{x^{11}}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{x^8}}{\sqrt[4]{x^6}}$

N54) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^9}} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{1}{\sqrt[9]{x^{10}}}}$

N55) $\sqrt[7]{\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[9]{x^{10}}}}$

(respuestas al final)

UNIDAD II: POLINOMIOS

- **MONOMIOS**
- Grado de un monomio
- Valor numérico de un monomio
- Operaciones con monomios
- Producto
- División de monomios
- Monomios semejantes
- Suma de monomios
- Opuesto de un monomio
- Resta de monomios

- **POLINOMIOS**
- Grado de un polinomio
- Orden de un polinomio
- Operaciones entre polinomios
- Suma
- Opuesto de un Polinomio
- Resta de polinomios
- Producto de polinomios
- División de polinomios
- Completar un Polinomio
- Cuadrado de un binomio
- Cubo de un binomio
- Producto de binomio conjugados

- **FACTOREO**
- Primer caso de factoreo: “factor común”
- Segundo caso de factoreo: “descomposición en grupo”
- Tercer caso de factoreo: “trinomio cuadrado perfecto”
- Cuarto caso de factoreo: “cuatrinomio cubo perfecto”
- Quinto caso de factoreo: “diferencia de cuadrados

- **TEOREMA DEL RESTO**
- Sexto caso de factoreo

POLINOMIOS

Dedicaremos esta unidad a un trabajo integral con la operatoria de polinomios y factoreo. Comenzamos con la operatoria de monomios y luego pasamos a polinomios (en general con una indeterminada) para finalmente entrar al factoreo.

MONOMIOS

Es común encontrar en matemáticas expresiones que contienen números y letras. Esas letras se llaman <u>indeterminadas</u>. Si las indeterminadas están elevadas a un exponente *natural o cero* y están multiplicadas por números *reales* y no hay sumas ni restas decimos que esa expresión es un <u>monomio</u>.
Por ejemplo, son monomios:

$-0.5\ x^3y^4$ (dos indeterminadas);
$3\ x^5$ (una indeterminada);
$-7\ x^2z^9$ (dos indeterminadas).

En cambio no son monomios los siguientes:

$-2.3x^2 + 1.2\ x^3y^4$ (hay una suma) ;
$7.4\ x^5 – 5.1\ x^2$ (hay una resta) ;
$-1.2\ x^{1/2}$ (la x está elevada a exponente ni natural ni cero).

EJERCICIOS: Diga si son monomios las siguientes expresiones.

P1) $3.5\ x^5 – 7.2\ x^6$

P2) $–5.8\ x^6y^7$

P3) $9.x^{-2}$

P4) $5\ .\sqrt{x}$

P5) $\sqrt{5}\ .\ x^3$

(Respuestas al final).

PARTE NUMERICA Y PARTE LITERAL

Podemos distinguir dos partes en un monomio: la parte de los números (“parte numérica”) y la parte de las letras (“parte literal”).

Por ejemplo:
en el monomio $–2.3\ x^3y^4$ podemos distinguir dos partes. Una parte numérica: -2.3 y una parte literal: x^3y^4.
en el monomio $5.7\ x^8$ la parte numérica es: 5.7 y la parte literal es: x^8.

EJERCICIOS: indique las partes numérica y literal de los siguientes monomios.

P6) $2.3\ x^5\ y^4$.

P7) $-5.6^2\ x^3\ y^5$.

P8) $2\pi^3$.

P9) $-\pi\ x^4$.

P10) $½\ x^2\ x^3$.

(Respuestas al final).

GRADO DE UN MONOMIO.

El grado de un monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.

Por ejemplo:
el grado de $1.2x^4\ y^5$ es 9 (pues 4+5=9);
el grado de $-2.5\ x^6$ es 6;
el grado de 2.3 es 0 (cero) (cuando la indeterminada no aparece podemos considerar que está elevada al exponente cero).

<u>Importante</u>: el monomio 0 (cero) <u>no tiene grado</u>.

EJERCICIOS: indicar el grado de los siguientes monomios.

P11) $2.3\ x^5\ y^4$.

P12) $-5.6^2\ x^3\ y^5$.

P13) $2\pi^3$.

P14) $-\pi\ x^4$.

P15) $½\ x^2\ x^3$.

(Respuestas al final).

En adelante trabajaremos generalmente con monomios que tengan una sola indeterminada.
Comenzaremos por poner **<u>nombres</u>** simbólicos a los monomios. El nombre constará de una letra mayúscula seguida de la indeterminada entre paréntesis.
Por ejemplo: simbolizo el monomio $2x^3$ con el nombre P(x). Entonces puedo escribir: $P(x) = 2x^3$.
Para indicar que Q(x) es el nombre del monomio -5x escribo: $Q(x) = -5x$

VALOR NUMÉRICO DE UN MONOMIO.

Si reemplazo la indeterminada por un cierto número y efectúo los cálculos indicados, el resultado obtenido se llama el valor numérico del monomio para el valor dado de la indeterminada.
Por ejemplo, consideremos el monomio $P(x) = 4\ x^3$. Al reemplazar la indeterminada "x" por el número "2" obtenemos el número: $4.\ 2^3 = 4.\ 8 = 32$. Decimos entonces que el valor numérico de P(x) para x=2 es 32.
Además "el valor numérico de P(x) para x = 2" se simboliza reemplazando la "x" por el "2" en el nombre del monomio. En este caso el símbolo sería: P (2).
Quiere decir que para el monomio $P(x) = 4x^3$ podemos escribir que P (2) =32.
Otro ejemplo. Si consideramos el monomio $Q(x) = x^3$ entonces vemos fácilmente que el valor numérico de Q (x) para x = -1 es: $Q(-1) = (-1)^3 = -1$

EJERCICIOS: halle el valor numérico de cada monomio para el valor indicado de "x".

P16) $P(x) = -2x^4$ para x = 1 o sea halle P (1)

P17) $Q(x) = 3x^2$ para x = -1 o sea halle Q (-1)

P18) $R(x) = -x^3$ para x = -1 o sea halle R (-1)

P19) $S(x) = -4\ x^4$ para x = -2 o sea halle S (-2)

P20) T(x) = 2 para x = 3 o sea halle T (3) (¡pensarlo!)

(Respuestas al final).

OPERACIONES CON MONOMIOS

PRODUCTO DE MONOMIOS: para multiplicar dos monomios cualesquiera, se multiplican las partes numéricas (el resultado es la parte numérica del producto) y las partes literales (el resultado es la parte literal del producto).
Por ejemplo: tomemos los monomios $P(x) = -3x^2$ y $Q(x) = 5x^4$
Calculemos el producto de las partes numéricas:

$$(-3)\ .\ (5) = -\ 15.$$

Ésta es la parte numérica del resultado.
Ahora el producto de las partes literales:

$$(x^2)\ .\ (x^4) = x^6$$

Ésta es la parte literal del resultado.
Por lo tanto el producto P(x) . Q(x) vale:

$$P(x)\ .\ Q(x) = -15\ x^6.$$

Veamos un ejemplo en donde haya más de una indeterminada. Consideremos los monomios $P=-3x^4z^2$ y $Q=2x^5z^3$ (no pusimos las indeterminadas en el nombre para no complicar). Tendremos entonces:

$$P.Q=(-3x^4z^2).(\ 2x^5z^3)=(-3\ .\ 2\ ).(x^4\ .x^5).(z^2z^3) = -6x^9z^5.$$

Ejercicios: efectuar los productos de monomios indicados.

P21) $(-5x^3z^4)(2x^2y^5)$

P22) $(3x^2y^5)(-9x^3y^7)$

P23) $(-1.2x^4y^9)(-5x^3y^8)$

P24) $(1.1x^5)(-5x^4)$

P25) $(3x^4y^6)(4x^7y^9)$

(Respuestas al final).

DIVISION DE MONOMIOS

De manera similar a como se procede con el producto, efectuamos la división. Pero para que la división de un monomio P por un monomio Q dé otro monomio, debe cumplirse que el grado de P sea mayor o igual que el grado de Q.
Para obtener la parte numérica del resultado se divide la parte numérica de P por la parte numérica de Q. Para obtener la parte literal del resultado se divide la parte literal de P por la de Q.

Por ejemplo:
si se tienen dos monomios P(x) y Q(x) siendo $P(x) = 10x^5y^4$ y $Q(x) = -2\ x^4y^2$ el resultado de dividir P por Q es:

parte numérica: $(10)/(-2) = -5$
parte literal: $(x^5y^4)/(x^4y^2) = x^1y^2$

Este último resultado surge de aplicar la regla del cociente de potencias de igual base a cada una de las indeterminadas:

$$(x^5)/(x^4) = x^1 \qquad (y^4)/(y^2) = y^2 \qquad \therefore \quad \frac{P}{Q} = -5 \ x \ y^2$$

Veamos otro ejemplo. Consideremos los monomios $P= -10x^5y^7$ y $Q= 3x^3y^4$.
Aquí la parte numérica queda $(-10)/(3) = -10/3$ y la parte literal queda $(x^5y^7)/(x^3y^4)=x^2y^3$.
En síntesis la división de P por Q da: $P/Q= -(10/3)\ x^2y^3$

EJERCICIOS: efectúe las divisiones entre los monomios P y Q indicados en cada caso.

P26) $P=12x^5y^6$; $Q=-2x^3y^5$

P27) $P= -20x^8$; $Q= 4x^3$

P28) $P= -15x^{10}y^{12}$; $Q= -3x^3y^5$

P29) $P= 10x^4y^7$; $Q= -5x^4y$

P30) $P= -40x^3$; $Q= 10x^3$ (Respuestas al final).

Antes de considerar el tema de la suma y resta de monomios veamos algo acerca de...

MONOMIOS SEMEJANTES

Consideremos dos monomios. Se dice que son semejantes si tienen exactamente la misma parte literal.

Por ejemplo:
Son semejantes $P(x) = -0.5x^3$ y $Q(x) = 25\ x^3$ (aunque difieren en la parte numérica tienen la misma parte literal).
No son semejantes $R(x) = 9\ x^2$ y $S(x) = 9x^3$ (no importa que tengan la misma parte numérica: la parte literal es diferente).

Preguntamos: ¿son semejantes los monomios $P(x)=-5.1x^5$ y $Q(x)=2.3x^2x^3$?.
Respuesta: es evidente que el monomio Q(x) no está escrito del modo más económico: su parte literal, que aparece escrita como "x^2x^3" puede ponerse más sencillamente así: "x^5". Si lo escribimos así es más directo ver que los dos son semejantes. Ésa es la respuesta.
Ahora podemos pasar al tema...

SUMA DE MONOMIOS

Vamos a distinguir dos casos.
Uno es aquél en que los dos monomios son semejantes.
Para sumar dos monomios semejantes se suman las dos partes numéricas y se conserva la parte literal.
Es decir que la suma de dos monomios semejantes es un tercer monomio semejante a los otros dos. Pero cuya parte numérica es igual a la suma de las partes numéricas originales.

Por ejemplo:
Si tenemos los monomios $P(x) = 5x^3$ y $Q(x) = 7x^3$, entonces la suma de ambos, que se simboliza $P(x) + Q(x)$ vale:

$$P(x) + Q(x) = 12\ x^3.$$

Hay que notar que hemos formado un tercer monomio semejante a los dos monomios originales (la parte literal vale: X^3). Además hemos sumado las partes numéricas: 5 +7=12.

Otro ejemplo. Consideremos los monomios $P(x) = -3x^2$ y $Q(x) = 4x^2$. La suma de ambos vale:

$$P(x) + Q(x) = x^2.$$

En este caso los dos monomios semejantes tenían parte literal: x^2 y ésa misma es la parte literal del resultado. Para la parte numérica hemos sumado:

$$-3 + 4 = 1.$$

EJERCICIOS: obtenga la suma de los siguientes pares de monomios semejantes.

P31) $P=-7x^2$; $Q= 10x^2$

P32) $P= 5x^3$; $Q= x^3$

P33) $P= (1/2)x^6$; $Q= (1/3)x^6$

P34) $P= (2/3)x^4y^7$; $Q= (1/2)x^4y^7$

P35) $P= -5x^4$; $Q= 5x^4$

(Respuestas al final)

Veamos ahora el caso en que los dos monomios que se quiere sumar no son semejantes.
Consideremos el caso de los monomios $P=2x^5$ y $Q=3x^2$. Hay sólo una posibilidad para sumarlos. Y es formar un POLINOMIO con los dos monomios dados.

Veámoslo:

$$\begin{array}{r} 2x^5 \\ + \quad \\ 3x^2 \\ \hline 2x^5+3x^2 \end{array}$$

Nota: la suma de los dos monomios anteriores da como resultado un polinomio. Cuando un monomio forma parte de un polinomio decimos que es un término del polinomio. Por ejemplo, en la suma anterior diremos que el polinomio $2x^5+3x^2$ tiene dos términos: uno es el $2x^5$ y otro es el $3x^2$.

OPUESTO DE UN MONOMIO

El opuesto de un monomio P simplemente es otro monomio "casi igual" a P pero con la parte numérica cambiada de signo. El opuesto del monomio "P" se indica con " -P" .

Por ejemplo, si $P=-2x^5$ entonces el monomio opuesto de P es:

$$-P=2x^5$$

En el siguiente ejemplo: si $P(x)=2.3x^6$ entonces el opuesto de P(x) es el monomio $-P(x)=-2.3x^6$.
Una vez definido el monomio opuesto, pasemos a la resta de dos monomios.

RESTA DE MONOMIOS

El monomio P menos el monomio Q es la suma de P más el opuesto de Q. Vale decir: restar Q es como sumar-Q. Simbólicamente podemos decirlo así:

$$P-Q = P + (-Q).$$

Por ejemplo si $P=2x^3$ y $Q=4x^2$ entonces la resta P-Q se calcula así:

$$P-Q=P + (-Q)=(2x^3)+(-4x^2)= 2x^3-4x^2$$

Ejercicios: calcule en cada caso la resta P-Q.

P36) $P = -6x^3$; $Q = 4x^3$

P37) $P = 5x^2y$; $Q = -9x^2y$

P38) $P = -10x^3y^2$; $Q = 5x^2y^3$

P39) $P = -7$; $Q = -x$

P40) $P = -7/3\ x^3$; $Q = 5x^3$

(respuestas al final)

Entramos ahora en el tema propiamente dicho de esta unidad, que es...

POLINOMIOS

En primer lugar observemos que cuando en un polinomio se observan dos o más términos semejantes, se pueden reemplazar por su suma.
Por ejemplo, el polinomio $P=2x^3+3x^5+7x^5-8x^9$ tiene dos términos semejantes que son el $3x^5$ y el $7x^5$. La suma de estos dos términos (que son dos monomios) es simplemente $10x^5$. Entonces el polinomio P puede escribirse más económicamente así:

$$P= 2x^3+10x^5-8x^9$$

A este proceso de reemplazar dos o más términos semejantes por su suma se lo llama reducción de términos semejantes.
Veamos otro ejemplo. Consideremos el polinomio $Q=\underline{2x^2+3x^2}-\ 5x^4+\ 7x^4+\ 12x^7-10x^7$. Reduzcamos todos los términos semejantes.
En este caso tenemos las siguientes reducciones:

$2x^2+3x^2=5x^2$
$-5x^4+7x^4=2x^4$
$12x^7-10x^7=2x^7$.

Estas reducciones permiten escribir el polinomio Q de modo más económico así: $Q=5x^2+2x^4+2x^7$.

Ejercicios: reescriba los siguientes polinomios reduciendo los términos semejantes.

P41) $P(x)= 4x^3-7x^2+3x^3+9x^7-5x^2+6x^3+2x^7$

P42) $Q(x)= 5x^3+3x^4-8x^7+2x^7-5x^4+x^3$

P43) $R(x)= 2x^3-5x^2+3x^5-2x^3+5x^2-x^5$

P44) $S(x)= -x^5+2^5$

P45) $T(x)= 2+2^2 +x^2$

(respuestas al final)

GRADO DE UN POLINOMIO

El grado de un polinomio es el grado de su término de mayor grado (tener en cuenta que ese término no puede tener parte numérica cero). Si se trata del polinomio nulo (el que es igual a cero: $P(x) = 0$) decimos que no tiene grado.
Aclaremos con un ejemplo: si considero el polinomio $P(x)=5x^3-2x+3$ veo que tiene tres monomios. El término "5 x^3" tiene grado 3; el término "$-2x$" tiene grado 1 y el término "3" tiene grado 0. El mayor grado es 3. Éste es el grado del polinomio.
Otro ejemplo: el polinomio $P(x)=-2^3$ tiene grado 0 (cero) porque su único término no nulo es una constante (que tiene grado cero).
Otro ejemplo: el grado del polinomio $P(x)=4x^2+0x^5+4x$ no es 5 sino 2 (¡el término $0x^5$ tiene parte numérica cero!!. Releer un poco más arriba donde se da el concepto de grado).

EJERCICIOS: determine el grado de los siguientes polinomios.

P46) $P(x)= -7x^3-9x$

P47) $Q(x)= 3^4-5x$

P48) $R(x)= -9x^4-3x^5+0x^{10}$

P49) $S(x)= -2x^3-4x^2+7x+2x^3$

P50) $T(x)= x^3+x^4+2x^2$

(respuestas al final)

ORDEN DE UN POLINOMIO

Los términos de los polinomios pueden ordenarse de acuerdo a sus grados. Se pueden ordenar en orden decreciente de sus grados (es decir de mayor a menor grado) o en orden creciente de ellos (es decir de menor a mayor).
El modo decreciente es el más usado.
Ejemplo: dado el polinomio $P(x)=2x^2-3x^5+8x^4$ lo ordenamos en orden creciente si lo escribimos así: $P(x)=2x^2+8x^4-3x^5$ y lo ordenamos en orden decreciente si lo escribimos así: $P(x) = -3x^5+8x^4+2x^2$. Éste último es el más común.

EJERCICIOS: ordene los siguientes polinomios en orden decreciente.

P51) $P(x)= x^3-5x^4+3x$

P52) $Q(x)= -X^4+8X^7-2X^9$

P53) $R(x)= 7X^6+X^4-28$

P54) $S(x)= 2x^3$

P55) $T(x)= 2^4-x^3$

(respuestas al final)

OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

SUMA DE POLINOMIOS: para sumar dos polinomios P y Q podemos proceder así: formamos un nuevo polinomio con todos los términos de P y todos los términos de Q y luego reducimos los términos semejantes del resultado. Por ejemplo: para sumar $P=2x^3+3x^5$ con $Q=3x^2-7x^5$ formamos $P+Q= 2x^3+3x^5+3x^2-7x^5$ y reduciendo los términos semejantes obtenemos: $P+Q= -4x^5+2x^3+3x^2$ (hemos reducido los términos “$3x^5$” y “$-7x^5$” reemplazándolos por “$-4x^5$”).
Algunos prefieren escribir los dos polinomios uno encima de otro haciendo coincidir en columnas los términos de igual grado. Luego debajo de la raya horizontal escriben directamente el polinomio P+Q con los términos ya reducidos.

Veamos un ejemplo. Para sumar los polinomios P y Q de más arriba se puede escribir:

$P(x) = 3x^5 + 2x^3$
$Q(x)= -7x^5 + 3x^2$

$P(x)+Q(x) = -4x^5 + 2x^3+ 3x^2$

Veamos otro ejemplo. Sumemos los polinomios $P=2x^3-7x^5+4x$ y $Q=3x^4-7x+x^5-6$.
Escribo Q debajo de P (ordenados en forma decreciente).

$P=-7x^5 + 2x^3 + 4x$
$Q= x^5+3x^4 - 7x-6$

$P+Q=-6x^5+3x^4+2x^3-3x-6$

Ejercicios: encuentre la suma de los polinomios indicados en cada caso.

P56) $P=2x^3-5x^2+x^4$ y $Q=5x^3+x$

P57) $P=3x^2-x+2$ y $Q=2x^3+x-3$

P58) $P=5x^4-3x^2+5$ y $Q=-5x^4+3x^2-2$

P59) $P=2x^5-4x+6$ y $Q=-2x^5+4x-6$

P60) $P=-x^2+3x$ y $Q=-x^2+3$

(respuestas al final)

OPUESTO DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio P llamamos opuesto de P (y lo simbolizamos: -P), al polinomio que se obtiene cambiando los signos de cada término de P.

Por ejemplo:

Dado el polinomio $P(x)= -8x^3+7x-4$
el polinomio opuesto será:
$P(x)= 8x^3-7x+4$

Otro ejemplo:

¿Cuál será el opuesto del polinomio nulo ($P(x)=0$) ?
Evidentemente el polinomio opuesto será el mismo polinomio nulo $–P(x)=0$, porque al cambiar el signo al 0, obtengo –0 que vale lo mismo
(o sea: $-0=0$)

RESTA DE POLINOMIOS

Dados dos polinomios P y Q, la resta P-Q se calcula sumando a P el opuesto de Q.
Vale decir que P-Q es lo mismo que P+(-Q).

En símbolos ponemos:

P-Q= P+ (-Q)
(se ve fácilmente que esto es totalmente análogo a la resta de monomios).

Ejemplo:

Sean $P(x)= 8x^2-7x$ y $Q(x)= x^3 -3$. Entonces la resta P(x)-Q(x), viene dada por la suma de $P(x)= 8x^2-7x$ con $-Q(x)=-x^3+3$

$$\begin{array}{r} P(x)= 8x^2 - 7x \\ -Q(x)= -x^3 + 3 \\ \hline P(x) - Q(x)= -x^3+8x^2 - 7x +3 \end{array}$$

Ejercicios: Obtenga las restas P-Q en cada caso:

P61) $P= 5x^2-7x$; $Q(x)= x^3+7x$

P62) $P= x^3+x$; $Q(x)= x^3-x$

P63) $P= 7x-8$; $Q(x)= 7x+7$

P64) $P= 2x^2-3x+9x^3$; $Q(x)= x^4-7x+8$

P65) $P= 4x^5-7x$; $Q(x)= x^5-x^3-x$

(respuestas al final)

PRODUCTO DE POLINOMIOS

Para multiplicar dos polinomios P(x) y Q(x) se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y de la resta.
Esto significa que debemos multiplicar cada término de P por cada término de Q. Los resultados obtenidos son los términos de P*Q. Si es necesario, se hacen las reducciones de términos semejantes.

Ejemplo:

Sean $P(x)= 2x^2+3x$ y $Q(x)= 5x-2$, entonces el producto P(x)*Q(x) se calcula así:

$P(x)*Q(x)= (2x^2+3x)*(5x-2)=$
$= (2x^2)*(5x) + (2x^2)*(-2) + (3x)*(5x) + (3x)*(-2) =$
$= 10x^3-4x^2+15x^2-6x =$
$= 10x^3+11x^2-6x$

Veamos otro ejemplo:

Sean $P(x)= 2x^2-3x+1$ y $Q(x)= 4x-3$

Entonces el producto es:

$P(x)*Q(x)= (2x^2-3x+1)*(4x-3)=$
$= (2x^2)*(4x) + (2x^2)*(-3) + (-3x)*(4x) + (-3x)*(-3) + (1)*(4x) + (1)*(-3)=$

$= 8x^3 \underline{-6x^2-12x^2} + 9x+4x-3$
(Ahora reduzco términos semejantes)

$= 8x^3 \underline{-18x^2} + 13x-3$

EJERCICIOS: Calcular los siguientes productos P*Q:

P66) $P= 4x^3-5x$; $Q(x)= 2x+7x^4$

P67) $P= 6x-7x^2$; $Q(x)= 8x^3+5x$

P68) $P= x^2-7x+8$; $Q(x)= 4x^3+6x-2$

P69) $P= x^4-7x+8$; $Q(x)= 6x^2+5$

P70) $P= x^3-7x$; $Q(x)= 4-7x+8x^2$ (respuestas al final)

DIVISION DE POLINOMIOS

Comencemos por indicar algunos nombres.
Cuando se anota una división como es habitual en el colegio, ponemos:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

Los nombres correspondientes figuran en el esquema siguiente.

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \hline \text{Resto} & \text{Cociente} \end{array}$$

Deben verificarse dos condiciones:

A) El resto debe cumplir:
- O bien es el polinomio nulo.
- O bien tiene menor grado que el Divisor.

Es decir: $R(x)= 0$ ó grado (R) < grado (Q)

B) Cociente * Divisor + Resto = Dividendo

Es decir:	**C(x) * Q(x) + R(x)= P(x)**

Estas dos condiciones nos dan la "receta" para "verificar" si una división está bien hecha.

Verificación
- *por simple "inspección visual" compruebo la condición (a).
- *haciendo las operaciones correspondientes verifico la condición (b)

Conviene escribir el dividendo P(x) y el divisor Q(x) ordenados de modo decreciente.
Antes de ver un ejemplo de división de polinomios consideremos un ejemplo del colegio.
Supongamos tener que resolver la siguiente división entera (es decir una división en que "no sacamos decimales"):

$$\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Comenzamos encontrando la parte entera de la división de 13 por 2. Esa parte es 6, lo escribimos.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \cline{2-2} & 6 \end{array}$$

Es fácil ver que para llegar a 13 al 12 le falta un 1.
¿Cómo tener una rutina para sistematizar el cálculo de ese resto?: escribimos el resultado de "6 por 2" (que es 12) debajo del dividendo <u>y con signo cambiado</u> (que es una forma de hacer la resta).

$$\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \cline{2-2} -12 & 6 \end{array}$$

Sólo queda calcular la suma de (13) con (-12)

$$\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \cline{2-2} -12 & 6 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

ya hemos calculado:

$$\begin{cases} \text{el cociente: 6} \\ \text{el resto: 1} \end{cases}$$

Para dividir polinomios se procede igual.
Veamos un ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-10x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

El primer paso es dividir el 1er término del dividendo por el 1er. término del divisor:

(4x2) / (x)= 4x

Escribo “4x” como primer término del cociente:

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-10x+2 & x-1 \\ \hline & 4x \end{array}$$

Ahora multiplicamos “4x” por cada término del divisor y escribimos cada resultado debajo del correspondiente término semejante del dividendo.

(4x) * (x)= 4x2

(4x) * (-1)= -4x

ambos resultados irán ubicados (con signos cambiados) debajo de los términos semejantes del dividendo

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-10x+2 & x-1 \\ \hline \underline{-4x^2+4x} & 4x \end{array}$$

A continuación sumo los términos encolumnados y coloco los resultados debajo de la línea.

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-10x+2 & x-1 \\ \hline \underline{-4x^2+4x} & 4x \\ \quad -6X & \end{array}$$

Ahora “bajo el 2” escribiéndolo a la derecha del “-6x”

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-10x+2 & x-1 \\ \hline \underline{-4x^2+4x} & 4x \\ \quad -6X+2 & \end{array}$$

Nos aparece un “resto provisorio” que es el “-6x +2”
Repito ahora el procedimiento inicial, dividiendo el primer término del “resto provisorio” por el primer término del divisor y colocando este resultado en el cociente (a la derecha del “4x”).

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-10x+2 & x-1 \\ \hline \underline{-4x^2+4x} & 4x-6 \\ -\ 6x+2 & \end{array}$$

(hice (-6x)/(x)= -6)

y ahora multiplicamos el "-6" por cada término del divisor y ubicamos cada resultado debajo del término semejante en el "resto provisorio"

$$
\begin{array}{l|l}
4x^2-10x+2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^2+4x} & 4x-6 \\
-6x+2 & \\
\underline{\;\;6x-6} &
\end{array}
$$

hice $\begin{cases} (-6)*(x)= -6x & \text{(y al cambiar signo quedó: 6x)} \\ (-6)*(-1)= 6 & \text{(al cambiar signo quedó: -6)} \end{cases}$

sólo falta hacer la suma:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{4x^2}-10x+2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{\cancel{-4x^2}+4x} & 4x-6 \\
\cancel{-6x}+2 & \\
\underline{\;\;\cancel{6x}-6} & \\
\;\;\;\;-4 &
\end{array}
$$

Podemos verificar que el procedimiento fue correcto:

(1º) el grado del resto es
grado (resto)=0

el grado del divisor es
grado (divisor)=1

por lo tanto se cumple la condición: grado (resto) < grado (divisor)

(2º) Cociente * divisor + resto =
= (4x-6) * (x-1) + (-4)=
= (4x)*(x)+(4x)(-1)+(-6)*(x)+(-6)*(-1)+(-4)
= $4x^2$-10x+2

y esto es, justamente igual al dividendo.
Vale decir, comprobamos que también se cumple la otra condición:

Cociente * Divisor + Resto = Dividendo

En conclusión: la división está bien hecha.

Veamos otro ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 5x^2-9x\ \ +4 & x+3 \\ \hline \end{array}$$

el primer paso es hacer: $(5x^2)/(x)= 5x$

$$\begin{array}{l|l} 5x^2-9x\ \ +4 & x+3 \\ \cline{2-2} & 5x \end{array}$$

segundo paso:

$$\begin{array}{l|l} 5x^2-9x\ \ +4 & x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-5x^2-15x} & 5x \\ \quad -24x & \end{array}$$

hice: $\begin{cases} (5x)(x) = 5x^2 \ \text{(al cambiar signo: } -5x^2\text{)} \\ (5x)(3) = 15x \ \text{(al cambiar signo: } -15x\text{)} \end{cases}$

tercer paso: "bajo el 4"

$$\begin{array}{l|l} 5x^2-9x\ \ +4 & x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-5x^2-15x} & 5x \\ -24x +4 & \end{array}$$

ahora "reinicio" dividiendo :

$(-24x)/(x)= -24$

y ubico el resultado en el cociente para después multiplicar este nuevo término del cociente por cada término del divisor

$$\begin{array}{l|l} 5x^2-9x\ \ +4 & x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-5x^2-15x} & 5x -24 \\ -24x +4 & \end{array}$$

$(-24) . (x) = -24x$: cambio signo: $24x$

$(-24) . (3) = -72$: cambio signo: 72

ubico en una nueva línea bajo el "resto provisorio" y finalizo.

$$\begin{array}{l|l} 5x^2-9x\ \ +4 & x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-5x^2-15x} & 5x - 24 \\ -24x +4 & \\ \underline{24x + 72} & \\ \qquad 76 & \end{array}$$

$$\text{Obtuve} \begin{cases} \text{Cociente} = 5x - 24 \\ \text{Resto} = 76 \end{cases}$$

Veamos otro ejemplo donde se trabaja con partes numéricas fraccionarias.

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 \;-\; 9x \;\;+ 4 & 2x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^2 + (3/2)x} & (3/2)x - 15/4 \\ \quad -(15/2)x + 4 & \\ \quad \underline{+(15/2)x - 15/4} & \\ \qquad\qquad 1/4 & \end{array}$$

Obtuvimos Cociente = (3/2) x -15/4

Resto = 1/4

Veamos otro ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 4x^2 \;-\; x^4 \;\;+ 2 & x - 3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

En este caso conviene ordenar el dividendo (en orden decreciente) y además dejar una columna libre por cada término que esté "faltando".

$$\begin{array}{l|l} -x^4 \qquad 4x^2 \qquad + \;\; 2 & x - 3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Dejamos una columna libre para el término de grado 3 y otra para el término de grado 1.

$$\begin{array}{l|l} -x^4 \qquad 4x^2 \qquad + \;\; 2 & x - 3 \\ \cline{2-2} \underline{+x^4 - 3x^3} & -x^3 - 3x^2 - 5x - 15 \\ \quad -3x^3 + 4x^2 & \\ \quad \underline{+3x^3 - 9x^2} & \\ \qquad -5x^2 & \\ \qquad \underline{+5x^2 - 15x} & \\ \qquad\quad -15x \;\; + \;\; 2 & \\ \qquad\quad \underline{+15x \;\; - 45} & \\ \qquad\qquad\quad -43 & \end{array}$$

COMPLETAR UN POLINOMIO

Algunos prefieren “rellenar” los huecos que hemos dejado en la división anterior de este modo:

$$-x^4 \;+\; 0\,x^3 \;+\; 4x^2 \;+\; 0\,x \;+\; 2 \quad \underline{|\; x - 3}$$

agregando esto se “completa” el polinomio.

Usted puede elegir el camino que más le guste. Pero este agregado no parece muy necesario.

Seguimos con otro ejemplo:

$$2x^2 \;-\; 5x^4 \;+\; 4x \qquad \underline{|\; x^2 + 2 - 3x}$$

Empezamos por ordenar el dividendo y dejar los lugares en las columnas necesarias. También ordenamos el divisor.

$$\begin{array}{rrrrl}
-5x^4 & & +\;2x^2 & +\;4x & \quad \underline{|\; x^2 - 3x + 2} \\
\underline{+5x^4} & \underline{-\;15x^3} & \underline{+\;10x^2} & & \quad -5x^2 - 15x - 33 \\
 & -15x^3 & +\;12x^2 & +\;4x & \\
 & \underline{15x^3} & \underline{-\;45x^2} & \underline{+\;30x} & \\
 & & -\;33x^2 & +\;34x & \\
 & & \underline{+\;33x^2} & \underline{-\;99x} & \underline{+\;66} \\
 & & & -\;65x & +\;66
\end{array}$$

El cociente es: $-5x^2 - 15x - 33$

El resto es: $-65x + 66$

EJERCICIOS: Efectuar las divisiones entre P(x) y Q(x) obteniendo el cociente y el resto.

P71) $P(x) = 5x^2 - 8x + 4$; $Q(x) = x + 2$

P72) $P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 2x - 1$; $Q(x) = x - 3$

P73) $P(x) = 2x^3 - 7x + 1$; $Q(x) = 2x - 1$

P74) $P(x) = x^2 - x^3 + 2$; $Q(x) = x^2 - 3x + 1$

P75) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 8$; $Q(x) = x^2 + x - 3$

P76) $P(x) = x^3 - 7x + 2$; $Q(x) = 2x^2 - x + 1$

(Respuestas al final)

CUADRADO DE UN BINOMIO

Un binomio es un polinomio que tiene dos términos. Representemos un término con A y otro término con B. Podemos escribirlo así:

$$P = A + B$$

Si elevamos al cuadrado ese binomio nos queda:

$$P^2 = (A + B)^2$$

El cuadrado de la derecha puede escribirse simplemente así:

$$(A + B)^2 = (A + B)\ (A + B)$$

porque ése es justamente el significado del cuadrado: indica que la base está multiplicada por sí misma.

Ahora podemos aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

$$(A + B)\ (A + B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$

notemos que podemos escribir más sintéticamente la expresión de la derecha así:

$$\begin{cases} A \cdot A = A^2 \quad \text{(I)} \\ A \cdot B + B \cdot A = AB + AB = 2AB \quad \text{(II)} \\ B \cdot B = B^2 \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Nos queda entonces:

$$\begin{aligned} &(A + B)^2 = (A + B)\ (A + B) = \\ &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B = A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

Esta propiedad es la que llamamos la fórmula del Cuadrado del Binomio.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Apliquemos esta fórmula a algunos casos:

$$\begin{aligned} (2x - 5)^2 \quad &= (\ \ )^2 + 2\ (\ \ )\ [\ \ ] + [\ \ ]^2 \\ &= (2x)^2 + 2\ (2x)\ (-5) + (-5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2 \\ 2\ (2x)\ (-5) = 2 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot x = -20x \\ (-5)^2 = 25 \end{cases}$$

Queda entonces:

$$(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

Veamos otro:

$$\begin{aligned}(5x^3 - 4x)^2 &= (\ \ )^2 + 2\,(\ \ )\,[\ \ ] + [\ \ ]^2 \\ &= (5x^3)^2 + 2\,(5x^3)\,(-4x) + (-4x)^2\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(5x^3)^2 = 5^2 \,.\, (x^3)^2 = 25x^6 \\ 2\,(5x^3)\,(-4x) = 2 \,.\, 5 \,.\, (-4) \,.\, x^3 \,.\, x = -40x^4 \\ (-4x)^2 = (-4)^2 \,.\, x^2 = 16x^2\end{array}\right.$$

Reemplazando obtenemos:

$$(5x^3 - 4x)^2 = 25x^6 - 40x^4 + 16x^2$$

Un ejemplo más:

$$\begin{aligned}(-4x - 2x^4)^2 &= (-4x)^2 + 2\,(-4x)\,(-2x^4) + (-2x^4)^2 \\ &= 16x^2 + 16x^5 + 4x^8\end{aligned}$$

CUBO DE UN BINOMIO

¿Cómo obtener una fórmula para $(A + B)^3$?

Recordemos que "P^3" se puede escribir "$P^2.P$". Vale decir que podemos poner:

$$(A + B)^3 = \underline{(A + B)^2}\,(A + B).$$

Reemplazamos $(A + B)^2$ usando la fórmula del cuadrado de un binomio:

$$(A + B)^3 = \underline{(A^2 + 2AB + B^2)}(A + B)$$

y ahora aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (y resta)

$$(A^2 + 2AB + B^2)(A + B) = A^2 \,.\, A + A^2 \,.\, B + 2 \,.\, AB \,.\, A + 2 \,.\, AB \,.\, B + B^2 \,.\, A + B^2 \,.\, B$$

Aquí vale:

$$\begin{array}{l}A^2 \,.\, A = A^3 \\ 2 \,.\, AB \,.\, A = 2A^2B \\ 2 \,.\, AB \,.\, B = 2AB^2 \\ B^2 \,.\, B = B^3\end{array}$$

Por lo tanto:

$$(A + B)^3 = A^3 + \underline{A^2B + 2A^2B} + \underline{2AB^2 + AB^2} + B^3$$

Ahora reducimos términos semejantes:

$$\begin{array}{l}\underline{A^2B + 2A^2B} = 3A^2B \\ \underline{2AB^2 + AB^2} = 3AB^2\end{array}$$

y nos queda:

$$\boxed{(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.}$$

Ésta es la fórmula buscada: la del Cubo de un Binomio.

Apliquémosla en el siguiente caso:

$$(x - 2)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(-2) + 3(x)(-2)^2 + (-2)^3$$

Calculamos:

$$\left\{\begin{array}{l} (x)^3 = x^3 \\ 3(x)^2(-2) = -6x^2 \\ 3(x)(-2)^2 = 3 \,.\, x \,.\, 4 = 12X \\ (-2)^3 = -8. \end{array}\right.$$

Y así obtenemos:

$$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Otro caso:

$$(-3x - x^2)^3 = (-3x)^3 + 3(-3x)^2(- x^2) + 3(-3x)(- x^2)^2 + (- x^2)^3$$

En esta situación:

$$\left\{\begin{array}{l} (-3x)^3 = (-3)^3(x)^3 = -27x^3 \\ 3(-3x)^2(- x^2) = 3(-3)^2(x)^2(-x)^2 = 3 \,.\, 9 \,.\, (x)^2(-x)^2 = -27x^4 \\ 3(-3x)(- x^2)^2 = 3(-3)(x)(x)^4 = -9x^5 \\ (- x^2)^3 = -x^6 \end{array}\right.$$

En resumen nos queda:

$$(-3x - x^2)^3 = -27x^3 - 27x^4 - 9x^5 - x^6$$

EJERCICIOS: Calcule el cuadrado o el cubo del binomio según lo pedido:

P77) $(4 - 3x)^2$

P78) $(5x - 3x^3)^2$

P79) $(2 - 3x)^2$

P80) $(2x^2 - 7x^4)^2$

P81) $(x - 9)^2$

(Respuestas al final)

PRODUCTO DE BINOMIOS CONJUGADOS

Consideremos dos binomios que tienen una sola diferencia: el signo de uno de los términos. Por ejemplo:

$\underline{2x + 3}$ y $\underline{2x - 3}$

en un caso así se dice que son "binomios conjugados".

Podemos representarlos en general así:

$(A + B)$ y $(A - B)$

Cuando se multiplican binomios conjugados sucede que el resultado se simplifica notablemente por reducción de términos semejantes. Veámoslo:

$$\begin{aligned}(A + B)(A - B) &= A \,.\, A - A \,.\, B + B \,.\, A - B \,.\, B \\ &= A^2 - AB + AB - B^2\end{aligned}$$

Los términos semejantes –AB y AB son opuestos, su suma da cero. Con ello nos queda:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Ésta es la fórmula del <u>producto de binomios conjugados.</u>

Nota:
Conviene tener en cuenta que el segundo cuadrado no afecta al signo <u>menos</u>.

Ahí dice:

$$- B^2$$

El cuadrado afecta solamente a "B", y no a "-B".

Apliquemos esta fórmula en un caso. Por ejemplo multipliquemos:

$$(x + 4)(x - 4) = [\quad]^2 - [\quad]^2$$

Ahí va "x"

Ahí va "4"

entonces queda:

$$\begin{aligned}(x + 4)(x - 4) &= [x]^2 - [4]^2 \\ &= x^2 - 16\end{aligned}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{aligned}(2x^2 + x)(2x^2 - x) &= [2x^2]^2 - [x]^2 \\ &= 2^2\,(x^2)^2 - x^2 \\ &= 4x^4 - x^2\end{aligned}$$

EJERCICIOS: Resuelva las multiplicaciones siguientes aplicando el producto de binomios conjugados.

P82) $(2 - 7x)(2 + 7x) =$

P83) $(- 4x + x^3)(- 4x - x^3) =$

P84) $(5x^2 - 8x^4)(5x^2 + 8x^4) =$

P85) $(1 - x)(1 + x) =$

P86) $(2 - 9x^5)(2 + 9x^5) =$

(Respuestas al final)

FACTOREO

Consideremos el número 15. Podemos escribirlo como una suma: 15 = 11 + 4. También podemos escribirlo como un producto: 15 = 5 . 3

Algo análogo pasa con el siguiente binomio:

$P = 2x + x^2$
Así está escrito como una suma.

Pero también podemos escribirlo como un producto:

$P = x (2 + x)$

¿Será cierto que es el mismo polinomio expresado de otra forma?

Para averiguarlo escribamos:
$x (2 + x)$

y apliquemos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

$x (2 + x) = 2x + x^2$

Comprobamos que es cierto: el polinomio P puede escribirse de ambas formas.
Cuando está escrito como una suma:

$2x + x^2$

sus partes se llaman términos o sumandos.

Cuando está escrito como un producto:

$X (2 + x)$

Sus partes se llaman factores.

Por eso al partir de su expresión como suma y escribirlo como producto se dice que se lo ha factorizado (o "factoreado").

$2x + x^2 = x\,(2 + x)$ Sus elementos son factores

Lo hemos factorizado.

Se llama entonces factorizar una expresión (o "factorearla") a la operación de expresarla como producto.

Veamos un nuevo ejemplo:
Si partimos de:

$$P = x^3 + x^2 + x + 1$$

es posible escribirlo del modo siguiente.

$$P = (x^2 + 1)(x + 1)$$

Comprobémoslo:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1)(x + 1) &= x^2 \,.\, x + x^2 \,.\, 1 + 1 \,.\, x + 1 \,.\, 1\\ &= x^3 + x^2 + x + 1\end{aligned}$$

¡Se cumple!

Entonces decimos que se puede factorizar el polinomio:

$$P = x^3 + x^2 + x + 1$$

como se indica:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1)$$

Ahora bien: una cosa es conocer el concepto de qué es factorizar una expresión y otra (más difícil) saber cómo factorizar una expresión determinada.
Para simplificar e ir paso a paso se han agrupado algunas técnicas de factoreo bajo el nombre de "casos de factoreo".
Consideremos el primero que es el más sencillo.

PRIMER CASO DE FACTOREO: "FACTOR COMÚN"

Veamos la siguiente expresión:

$x\,(b + c + d)$

Si aplico la propiedad distributiva del producto respecto de la suma obtengo:

$x\,(b + c + d) = x \,.\, b + x \,.\, c + x \,.\, d$

Esta expresión leída de izquierda a derecha ejemplifica la propiedad distributiva mencionada.
Pero escrita de derecha a izquierda:

$x \,.\, b + x \,.\, c + x \,.\, d = x\,(b + c + d)$

ilustra el primer caso de factoreo (parto de una suma y la reexpreso como producto).

La receta para obtener la expresión factorizada es simple (en este caso):

Si observo un factor que aparece en cada término, ese factor puede ser el factor común buscado (tener en cuenta que la expresión "factor común" se refiere a que ese valor aparece en todos los términos (es "común" a todos los términos). En nuestro caso:

$$x \cdot b + x \cdot c + x \cdot d$$

la "x" aparece como factor en cada término:

La técnica sigue entonces: se escribe ese factor común seguido de un paréntesis:

$$x \cdot b + x \cdot c + x \cdot d = x (\qquad\qquad)$$

dentro del paréntesis escribir la expresión que se obtiene al dividir cada término por el factor común:

$$(x \cdot b) / (x) = b$$

$$(x \cdot c) / (x) = c$$

$$(x \cdot d) / (x) = d$$

en síntesis:

$$x \cdot b + x \cdot c + x \cdot d = x (b + c + d)$$

Es siempre fácil comprobar si hemos procedido bien. Aplico la propiedad distributiva al producto de la derecha y veo si el resultado coincide con la expresión original.

Otro ejemplo:

Factorear la siguiente expresión aplicando el primer caso:

$$ab^2 + mb$$

Vemos que el factor "b" aparece en los dos términos (es "común" a ambos términos). Ese será el factor que escribiré seguido de un paréntesis:

$$ab^2 + mb = b (\qquad\quad)$$

Ahora, ¿cómo obtengo los términos que irán dentro del paréntesis?.
Dividiendo cada término original por el factor común.

$$(ab^2) / (b) = ab$$

$$(mb) / (b) = m$$

entonces queda:

$$ab^2 + mb = b (ab + m)$$

(Nota: por supuesto cada término dentro del paréntesis debe ir con el signo correspondiente de suma o resta porque de lo contrario parecería un producto).

Queremos decir que si lo escribiéramos así:

$$b\ (ab\ \ m)$$

Indicaría que entre "ab" y "m" hay un producto (importante no descuidar esto).

Otro ejemplo:

Aplicar primer caso de factoreo a:

$$ab^2 + a^2b$$

En este caso encontramos que "a" es un factor común, que "b" es otro factor común y que "ab" es otro. Por supuesto que al elegir "ab" como factor común se factoriza la expresión más exhaustivamente.

Veamos las tres posibilidades:

Uno: elijo "a" como factor común.
Escribo entonces

$$ab^2 + a^2b = a\ (\qquad)$$

ahora divido cada término original por este factor común:

$$(ab^2) / (a) = b^2$$

$$(a^2b) / (a) = ab$$

Ponemos finalmente:

$$ab^2 + a^2b = a\ (b^2 + ab)$$

Dos: elijo "b" como factor común.
Escribo entonces

$$ab^2 + a^2b = b\ (\qquad).$$

Ahora divido cada término original por este factor común:

$$(ab^2\ ) / (b) = ab$$
$$(a^2b) / (b) = a^2$$

y concluyo escribiendo:

$$ab^2 + a^2b = b\ (ab + a^2)$$

Tres: elijo "ab" como factor común.
Escribo entonces

$$ab^2 + a^2b = ab\ (\qquad)$$

Ahora divido cada término original por este factor común:

$(ab^2) / (ab) = b$

$(a^2b) / (ab) = a$

Escribo finalmente:

$ab^2 + a^2b = ab\ (b + a)$

EJERCICIOS: Factorizar las siguientes expresiones aplicando el primer caso de factoreo:

P87) $2x^3 - 7x$

P88) $6x^5 - 9x$

P89) $ax^2 + ay$

P90) $x - x^3$

P91) $ax^3 - a^2x$ (respuestas al final)

SEGUNDO CASO DE FACTOREO: "DESCOMPOSICIÓN EN GRUPOS"

Consideremos la expresión:

$ax^2 + ay + x^3 + xy$

si agrupamos los dos primeros términos en un grupo y los dos últimos en otro tendríamos:

$\underline{ax^2 + ay} + \underline{x^3 + xy}$

en cada uno de estos grupos es fácil encontrar un factor común.
En efecto:

En $\underline{ax^2 + ay}$ se ve fácilmente que "a" es factor común y podemos reexpresar este primer grupo así:

$ax^2 + ay = a\ (x^2 + y)$

de igual modo vemos que el otro grupo tiene un factor común que es "x" y podemos factorizar este grupo así:

$x^3 + xy = x\ (x^2 + y)$

podemos ahora reemplazar cada grupo por su expresión factorizada

$ax^2 + ay + x^3 + xy = a\ (x^2 + y) + x\ (x^2 + y)$

Si observamos bien notaremos que la expresión así transformada tiene ahora dos términos:

$\underbrace{a\ (x^2 + y)}_{\text{uno}} + \underbrace{x\ (x^2 + y)}_{\text{otro}}$

Pero también vemos que en cada uno de estos dos términos está presente el factor "$(x^2 + y)$". Éste es entonces un factor común.

Puedo ahora aplicar el primer caso a esta suma:

$$a\,(x^2 + y) + x\,(x^2 + y) = (x^2 + y)\;(\qquad)$$

divido cada término por el factor común:

$$a\,(x^2 + y) / (x^2 + y) = a$$
$$x\,(x^2 + y) / (x^2 + y) = x$$

finalmente queda:

$$a\,(x^2 + y) + x\,(x^2 + y) = (x^2 + y)\,(a + x)$$

ya está factorizado el polinomio original. Se puede comprobar la corrección del procedimiento aplicando propiedad distributiva a la última expresión.

Otro ejemplo:

Factorizar el polinomio $x^3 + x^2 + x + 1$.
Comienzo por agrupar los dos primeros términos por un lado y los dos últimos por otro.

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \underline{x^3 + x^2} + \underline{x + 1} \qquad (I)$$

factorizo el primero:

$$x^3 + x^2 = x^2\,(x + 1)$$

reemplazo en (I) y obtengo

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \underline{x^2\,(x + 1)} + \underline{(x + 1)}$$

ahora en estos dos términos hay un factor (x+1).

Aplico el primer caso:

$$x^2\,(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(\qquad)$$

divido el primero $x^2\,(x + 1) : (x + 1) = x^2$

divido el segundo $(x + 1) : (x + 1) = 1$

completo entonces el paréntesis:

$$x^2\,(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$$

y ya está factorizado el polinomio original:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

EJERCITACIÓN: Factoree las siguientes expresiones aplicando el segundo caso de factoreo:

P92) $2a + 2b + ab + b^2$

P93) $x^2y + xy + ax + a$

P94) $2x^2 + 2x + a^2x + a^2$

P95) $x^2 – x + a^2x - a^2$

P96) $x^2 – x + ax - ax^2$

(Respuestas al final)

TERCER CASO DE FACTOREO: “TRINOMIO CUADRADO PERFECTO”

Hemos visto anteriormente la obtención de la fórmula del “cuadrado de un binomio”:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Esta misma fórmula, escrita “al revés”:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

representa el tercer caso de factoreo. Nos indica cómo reexpresar una como producto (recordamos que un cuadrado es solamente un producto con dos factores iguales).
De modo que si tenemos un trinomio (“tres términos”) y dos de esos términos se pueden expresar como cuadrados puede ser que este caso sea aplicable. ¿Qué es lo que faltaría para estar seguros?.
Faltaría que el otro término fuera el doble producto de las bases de los otros dos.

Veámoslo:
Considero el trinomio $x^2 + 6x + 4$.
Vemos que hay dos términos fácilmente expresables como cuadrados:

$X^2 = [x]^2$ acá la base sería “x”
$4 = [2]^2$ acá la base sería “2”

falta verificar que el otro término (el “6x”) se puede escribir como el doble producto de las dos bases
pero $2 . [x] . [2]$ es $4x$ y no $6x$.

¡En este caso no podemos aplicar el tercer caso ¡

Analicemos otro trinomio:

$$x^6 + 6x^3 + 9$$

Aquí vemos en seguida que “x^6” y “9” pueden reexpresarse como cuadrados:

$x^6 = [x^3]^2$ la base aquí es x^3
$9 = [3]^2$ la base aquí es 3

El otro término es $6x^3$, que es el doble producto de las dos bases. En efecto vale:

$$2 . [x^3] . [3] = 6x^3$$

Ahora sí puedo aplicar el tercer caso.
El trinomio es igual al cuadrado de las dos bases sumadas:

$$x^6 + 6x^3 + 9 = (\quad + \quad)^2$$

una base la otra base

es decir, nos queda:

$$x^6 + 6x^3 + 9 = (x^3 + 3)^2$$

y ya está factorizado el trinomio.
Ahora bien: ¿cómo procederíamos si el trinomio fuera: $x^6 - 6x^3 + 9$?
En este caso estaríamos tentados de reexpresar el primero y el tercer términos de igual modo que en el ejemplo anterior:

$$x^6 = [x^3]^2$$

$$9 = [3]^2$$

pero ahora, el doble producto de estas bases ya no es igual al término "$- 6x^3$".
¿Cómo sigo entonces?
Muy simplemente. Recordando que tanto $[3]^2$ como $[-3]^2$ valen 9. Me conviene entonces reexpresar el primero y el tercer términos así:

$$x^6 = [x^3]^2$$

$$9 = [-3]^2$$

de este modo puedo comprobar que el doble producto es ahora:

$$2 . [x^3] . [-3] = - 6x^3$$

como se necesitaba.

Entonces la factorización queda:

$$x^6 - 6x^3 + 9 = (x^3 + (-3))^2$$

la última expresión puede escribirse más sencillamente así:

$$(x^3 - 3)^2$$

EJERCICIOS: Factorizar los siguientes trinomios aplicando tercer caso de factoreo:

P97) $x^2 - 2x + 1$

P98) $x^4 + 2x^2y^3 + y6$

P99) $x^2 + x + 1/4$

P100) $8x + x^2 + 16$

P101) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
(respuestas al final)

CUARTO CASO DE FACTOREO: “CUATRINOMIO CUBO PERFECTO”

Si tomamos la fórmula del cubo de un binomio:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

y la escribimos “al revés” veremos “la fórmula” del cuarto caso

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Veamos un par de ejemplos. Quiero factorear el cuatrinomio:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Aquí el primero y el último términos son fácilmente reexpresables como cubos:

$x^3 = [x]^3$ la base aquí es x

$1 = [1]^3$ la base aquí es 1

Ahora pondríamos el triple producto del cuadrado de la primera base por la otra base:

$$3 \,.\, [x]^2 \,.\, [1] = 3x^2$$

que coincide con el segundo término de la expresión original.
Y ahora pondríamos el triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda:

$$3 \,.\, [x] \,.\, [1]^2 = 3x$$

que coincide efectivamente con el tercer término de la expresión original.
En síntesis, que el cuatrinomio

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

puede escribirse como:

$$[x]^3 + 3[x]^2[1] + 3[x][1]^2 + [1]^3$$

y por lo tanto se puede factorizar según la fórmula del cuarto caso quedando:

([ ] + ( ))3

aquí va la primera base “x” aquí va la segunda base “1”

nos queda, en definitiva:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

EJERCICIOS: Factorice las siguientes expresiones aplicando el cuarto caso de factoreo.

P102) $x^3 + 3x^2 +3x +1$

P103) $x^6 +6x^4 + 12 x^2 + 8$

(respuestas al final)

QUINTO CASO DE FACTOREO: "DIFERENCIA DE CUADRADOS"

Recordemos la fórmula del producto de binomios conjugados:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Se ve que la expresión de la izquierda es un producto. Por eso, si escribo la fórmula "al revés":

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

Se nota que esta fórmula indica como factorear una diferencia de dos cuadrados.
Entonces procedo así: escribo la resta como la resta de dos cuadrados; identifico cuáles son las bases de esos cuadrados y luego multiplico la suma y la resta de esas bases.

Ejemplo: Quiero factorizar la diferencia $x^6 - 16x^2$. Lo primero es reescribir cada expresión que está "a los costados" del signo menos como un cuadrado. Esto es:

$X^6 = [x^3]^2$ la base es x^3
$16x^2=[4x]^2$ la base es $4x$

Sólo falta multiplicar la suma de esas bases por la resta de ellas.

$$x^6 - 16x^2 = (x^3 + 4x)(x^3 - 4x)$$

ya está factorizado. (Puedo verificar aplicando la propiedad distributiva al producto de la derecha).

Otro ejemplo. Quiero factorizar la diferencia $4x^2 - 25x^6$. Para ello escribo:

$4x^2 = [2x]^2$ la base aquí es $2x$

$25x^6 =[5x^3]^2$ la base aquí es $5x^3$

Ahora multiplico la suma de estas bases por su resta

$$(2x + 5x^3) (2x - 5x^3)$$

y ya tengo factorizada la expresión original.

$$4x^2 - 25x^6 = (2x + 5x^3) (2x - 5x^3)$$

EJERCICIOS: Factorice las siguientes diferencias aplicando quinto caso.

P104) $4x^4 - 16x^2$

P105) $25x^2 - 0,36x^6$

P106) $9x^2y^4 - 0,01x^8$

P107) $m^2x^4z^6 - 0,25y^4$

P108) $x^2 - 1/4$

(respuestas al final)

Antes de pasar a trabajar con el sexto caso de factoreo deberemos ver el Teorema del Resto.

TEOREMA DEL RESTO

Cuando se tiene una división de polinomios con el divisor del tipo x + a ("a" es un número real cualquiera) se puede calcular el resto sin hacer la división.

Veamos la situación:

$$P(x) \quad \underline{|\; x + a}$$

La "receta"dice:

- Tome el número "a"
- Cambie el signo de "a"

En el dividendo (que es P(x)) reemplace la "x" por el valor de "-a" y haga las cuentas.
Entonces: El resultado es el resto de la división.

Veamos un ejemplo.
Consideremos la siguiente división:

$$2x^2 + 3x + 4 \quad \underline{|\; x + 1}$$

en este caso la "a" vale: a = 1. El valor opuesto de "a" es: -a=-1.
Llevo este valor "-1" a reemplazar la "x" del dividendo:

$$2(-1)^2 + 3(-1) + 4$$

hago las cuentas

$$2(-1)^2 + 3(-1) + 4 = 2 – 3 + 4 = 3$$

éste "3" es el resto ¡y eso es todo!).

Podríamos resumir lo recién hecho de este modo:
En la división:

$$2x^2 + 3x + 4 \quad \underline{|\; x + 1}$$

el resto vale:

$$\text{Resto} = 2(-1)^2 + 3(-1) + 4 = 3$$

Veamos otro ejemplo:
En la división:

$$5x^3 - 7x \quad \underline{|\; x - 2}$$

el resto vale:

$$\text{Resto} = 5(2)^3 - 7(2) = 40 – 14 = 26$$

Notemos de paso que este teorema nada dice sobre el cociente. Sólo informa sobre el resto. Por eso está bien llamado “teorema del resto”. Antes de seguir veamos qué es el ...

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Si un polinomio se simboliza con P(x), entonces el valor que se obtiene al reemplazar la “x” por cualquier número “b” se llama valor numérico del polinomio P(x) para x = b . ese valor numérico se simbolizará P(b).

¿Cómo se simbolizará el valor que se obtiene al reemplazar la “x” de P(x) por el valor “-a”?.
La respuesta es fácil: el valor numérico de P(x) para x = - a se simboliza P(-a).
Ya tenemos la forma de simbolizar en dos renglones el Teorema del Resto:

$$\left\{\begin{array}{l|l} P(x) & \quad x + a \\ \cline{2-2} \text{Resto} = P(-a) & \quad C(x) \end{array}\right.$$

La demostración de este teorema (que es muy sencilla pero que no nos interesa aquí) figura en cualquier libro respetable de matemáticas de tercer año del secundario.

Veamos otro ejemplo. Calculemos – sin hacer la división – el resto de:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - x - 1 & \quad x + 1 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

aquí a = 1 por lo tanto – a = -1.

El resto es entonces:

$$\text{Resto} = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 - 1 + 1 - 1 = -2$$

EJERCICIOS: Calcule – sin hacer la división – el resto de las siguientes divisiones:

P109) 3x3 - 4x2 + 5x - 1 | x + 2

P110) 2x2 - 5x + 3 | x - 1

P111) x3 - x2 – 1 | x + 3

P112) x4 - x3 – x | x + 1

P113) x3 – x | x – ½

(Respuestas al final)

SEXTO CASO DE FACTOREO:

Este caso nos enseña a factorizar ciertas sumas y restas de potencias pares o impares.
Aclaremos esto:

$x^4 - 2^4$: resta de potencias pares
$x^5 + 3^5$: suma de potencias impares
$x^5 - 2^5$: resta de potencias impares
$x^8 + 2^8$: suma de potencias pares

Se trata de factorizar estas expresiones “usando” la suma o la resta de las bases correspondientes. Por ejemplo, en la expresión $x^4 - 2^4$ (que es resta de potencias pares) las bases son: la “x” y el “2”. Se tratará de determinar si $x^4 - 2^4$ se puede factorizar usando la suma de las bases (x + 2) o la resta de esas bases (x – 2).
¿Cómo se pueden “usar” esas sumas o restas de bases para factorizar una suma o resta de esas potencias?
Para tener idea de esto, pensemos en el número 12. ¿Cómo puedo usar el “2” para factorizar el “12”?. Muy sencillamente:

Empiezo dividiendo el “12” por el “2”.

$$12 \;\underline{|\; 2 \quad}$$

Veo que es una división exacta (o sea el resto es cero). El cociente vale: 6.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$

Y expreso el dividendo (el “12”) como producto del divisor (el “2”) por el cociente (el “6”). Y es por eso que podemos poner: 12 = 2 . 6
ya está factorizado (no hay ningún resto que agregar porque la división es exacta).
Si se entiende lo que acabamos de decir, entonces será fácil entender cómo se procede en el sexto caso.

Tomemos la suma de potencias impares:

$$x^3 + 8$$

Notamos que en este caso podemos poner

$X^3 = [x]^3$ la base es “x”
$8 = [2]^3$ la base es “2”

Ahora nos preguntamos: ¿Será $X^3 + 8$ divisible por la suma de sus bases?. Es decir ¿será divisible por x + 2?.
Esta cuestión se resuelve fácilmente con el Teorema del Resto:

$$x^3 + 8 \;\underline{|\; x + 2 \quad}$$

$$\text{Resto} = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$$

En este caso sí $x^3 + 8$ es divisible por x + 2.
Entonces lo único que falta es dividir y reexpresar la resta de potencias como producto del cociente por el divisor.

Manos a la obra:

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad\quad + \; 8 & x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 - 2x^2} & x^2 - 2x + 4 \\ \quad -2x^2 & \\ \quad \underline{+2x^2 + 4x \quad} & \\ \qquad\quad 4x + 8 & \\ \qquad \underline{\;\; - 4x - 8} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, podemos poner que el dividendo (x^3+ 8) es igual al producto de divisor (x + 2) por el cociente (x^2 - 2x + 4). Es decir:

$$(x^3 + 8) = (x + 2)\ (x^2 - 2x + 4)$$

¡ y ya hemos factoreado la resta de potencias !.

Veamos otro ejemplo. Queremos factorizar $x^4 + 16$. Lo primero es escribirlo como suma de potencias.
El "16" puede ponerse como 2^4 y entonces $x^4 + 16$ puede ponerse como $x^4 + 2^4$. Las bases son "x" y "2". Intentaremos factorizar usando la suma de estas bases y – si no sirve – intentaremos usar la resta de las bases. Probemos con la suma de las bases (x + 2).

Calculo el resto de dividir:

$$x^4 + 16 \quad \underline{|\ x + 2\ }$$

Resto = $(-2)^4 + 16 = 16 + 16 = 32$

¡No da resto cero!

No sirve la suma de las bases.

Probamos con la resta:

$$x^4 + 16 \quad \underline{|\ x - 2\ }$$

Resto = $(2)^4 + 16 = 16 + 16 = 32$

¡No da resto cero!

No sirve la resta de las bases.

En consecuencia no podemos factorizar ni por la suma ni por la resta de las bases.

Analicemos este otro caso. Tratamos de factorizar $x^6 + 64$. Este caso parece que nos va a llevar al mismo "callejón sin salida" del caso anterior. En efecto:

$X^6 = [x]^6$ la base es "x"

$64 = [2]^6$ la base es "2"

Pruebo con la suma de las bases:

$$x^6 + 64 \quad \underline{|\ x + 2\ }$$

Resto = $(-2)^6 + 64 = 128$

¡No da resto cero!

Por lo tanto no puedo factorizar usando la suma de bases.

Pruebo con la resta:

$$x^6 + 64 \quad \underline{|\ x - 2\ }$$

Resto = $(2)^6 + 64 = 128$

¡Tampoco da resto cero! Por lo tanto no puedo factorizar usando la resta de bases!

Aparentemente no vamos a poder factorizar esta expresión. Pero ...

Pero $x^6 + 64$ no sólo puede escribirse como suma de potencias sextas: $x^6 + 2^6$. También puede escribirse como suma de cubos:

$x^6 = [x^2]^3$ la base es "x^2"

$64 = 2^6 = [2^2]^3$ la base es "$2^2 = 4$"

En efecto $x^6 + 64$ se puede escribir:

$$x^6 + 64 = [x^2]^3 + [4]^3$$

Trataremos de que la base sea más sencilla. Llamaremos "z" a la "x^2". Nos queda $x^6 + 64 = [x^2]^3 + [4]^3 = z^3 + 4^3$. Probemos con la suma de bases:

$$z^3 + 4^3 \quad \underline{|\ z + 4\ }$$

Resto = $(- 4)^3 + 4^3 = -64 + 64 = 0$

¡Se puede factorizar usando la suma de bases!

Hago entonces la división:

$$\begin{array}{rrr|l}
z^3 & & +64 & z+4 \\ \cline{4-4}
-z^3 - 4z^2 & & & z^2 - 4z + 16 \\ \cline{1-1}
-4z^2 & & & \\
+4z^2 + 16z & & & \\ \cline{1-2}
& 16z & +64 & \\
& -16z & -64 & \\ \cline{2-3}
& & 0 &
\end{array}$$

la división es exacta.

Entonces:
Dividendo = Divisor . Cociente

$$z^3 + 64 = (z + 4) . (z^2 - 4z + 16)$$

sólo tenemos que reemplazar la "z" por "x^2".

$$(x^2)^3 + 64 = (x^2 + 4) . ((x^2)^2 - 4x^2 + 16)$$

o sea:

$$x^6 + 64 = (x^2 + 4) . (x^4 - 4x^2 + 16)$$

¡y ya tenemos factorizada la expresión original!

EJERCICIOS:

P114) Preguntamos: ¿ Se anima a factorizar la expresión $x^{10} + 1$?.
Factorizar usando el sexto caso las siguientes expresiones:

P115) $x^3 - 27$

P116) $x^4 - 1$

P117) $x^5 - 1$

P118) $x^3 + b^3$ (donde "b" es una constante)

(Respuestas al final)

UNIDAD III: ECUACIONES

- Absurdos, Identidades y Ecuaciones
- Ecuaciones lineales
- Ecuaciones Equivalentes
- Operación principal
- Ecuaciones de 2do Grado
- Deducción de la Fórmula Resolvente
- Otra forma de encarar algunas ecuaciones
- “Coeficientes” y “Términos”

- **SÉPTIMO CASO DE FACTOREO**

ECUACIONES

Si consideramos la expresión 3 . 5 + 1 = 16 vemos que es una igualdad numérica.
¿Qué obtenemos si en lugar de uno de los números (por ejemplo el “5”) colocamos un símbolo (por ejemplo x)?

Queda 3 . x + 1 = 16.

Esto es una ecuación. Y en ella sucede que al reemplazar la “x” por ciertos valores se obtiene una igualdad numérica correcta. Ejemplo: al reemplazar la “x” por 5 se obtiene: 3 . 5 + 1 = 16 que es correcto

En cambio al reemplazar la “x” por 7 se obtiene: 3 . 7 + 1 = 16 ¡que es falso!

Cada número que produce una igualdad numérica correcta es una solución de la ecuación. Por ejemplo el “5” es solución de la ecuación “3 . x + 1 = 16”.

En este caso el “5” es la única solución de la ecuación “3 . x + 1 = 16”. Al conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación se lo llama CONJUNTO SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN y se lo simboliza con la letra “S” mayúscula.

De modo que la ecuación 3 . x + 1 = 16 tiene como conjunto solución:

$$S = \{5\}$$

Como S es un conjunto se escribe encerrando entre paréntesis sus elementos.

ABSURDOS, IDENTIDADES Y ECUACIONES

Hay otro tipo de expresiones parecidas a las ecuaciones, pero que no lo son. Por ejemplo consideremos la expresión:

$$x + 1 = x$$

¿Cuál será el número tal que sumándole “1” queda igual?.
No existe tal número. Esta expresión no tiene solución. Decimos que el conjunto solución es el conjunto vacío:

$$S = \emptyset.$$

Las expresiones con conjunto solución vacío son <u>ABSURDOS O CONTRADICCIONES</u>.
Hay un tercer tipo de estas expresiones. Son aquellas que se verifican con <u>cualquier número real</u>. Por ejemplo la expresión:

$$x + x = 2x$$

se cumple para cualquier valor de x real.

En este caso el conjunto solución es el conjunto de <u>todos</u> los números reales. Se indica simbólicamente así

$$S = R.$$

A estas expresiones se las llama <u>IDENTIDADES</u>.

Resumiendo lo dicho.

Si S = Ø se trata de una contradicción o absurdo.
Si S = R se trata de una identidad.
Si S tiene algunos reales pero no todos, se trata de una ecuación.

Analicemos las tres expresiones siguientes y determinemos si se trata de ecuaciones, absurdos o identidades:

$0 . x = 8$
$0 . x = 0$
$4 . x = 8$

Comencemos por "0 . x = 8". La pregunta es ¿cuáles son los reales qué multiplicados por cero dan por resultado 8?. Por ejemplo: ¿0 . 7 = 8? ¿0 . 9 = 8?. No, no parecen "funcionar".

Podemos seguir probando pero encontraremos que ningún real "anda bien". Aquí el conjunto solución es vacío:

$0 . x = 8$
S = Ø

Se trata de un absurdo o contradicción.

Pasemos ahora a "0 . x = 0". En este caso basta un ligero análisis para aceptar que <u>cualquier</u> número real verifica esta expresión. Por ejemplo:

$0 . 7 = 0$; $0 . 9 = 0$, etc., etc.

El conjunto solución, en este caso, es todo R:

$0 . x = 0$
S = R

Se trata de una identidad.
Nos queda el caso 4 . x = 8. Aquí la única solución es el "2". El conjunto solución es S = {2}. Ésta es entonces legítimamente una <u>ecuación</u> (hay reales que la verifican y hay reales que no la verifican).

Nos preguntamos ahora: ¿habrá ecuaciones que tengan un conjunto solución formado por varios números reales (y no por uno solo)?.

Consideremos la ecuación $x^2 = 9$. En este caso vemos que el "3" es solución (o sea "3 pertenece a S", lo que en símbolos se indica: $3 \in S$). En efecto $(3)^2 = 9$. Pero también vemos que "-3" es solución (o sea $-3 \in S$) porque $(-3)^2 = 9$. No hay otra solución a esta ecuación. El conjunto solución es entonces:

$x^2 = 9$
S = {3; -3}

Ahora pasemos a esta otra ecuación:

$x^3 = x$

En este caso podemos comprobar que $1 \in S$ (en efecto: $(1)^3 = 1$). También vale que $-1 \in S$ (porque: $(-1)^3 = -1$). Y también se cumple que $0 \in S$ (porque $(0)^3 = 0$).

Usted puede probar con cualquier otro real (que no sea ni el –1 ni el 1 ni el 0) y verá que no verifica esta ecuación.

Por lo tanto el conjunto solución es:

$x^3 = x$
S = {0; 1; -1}

Nota: cuando se estudian, en matemáticas, sistemas formados por más de una ecuación se puede encontrar otra forma de referirse a ecuaciones, absurdos e identidades. La expresión 0x=8 sería un sistema incompatible; la expresión 0x=0 sería un sistema compatible indeterminado y la expresión 8x=16 sería un sistema compatible determinado (fin nota).

ECUACIONES LINEALES

En estas ecuaciones el máximo exponente de la incógnita es el 1. Por ejemplo 7x + 8 = 0 es lineal pero $2x^2 – 8x + 3 = 0$ no es lineal, sino cuadrática, y la ecuación $2x^3 – 8x + 6 = 0$ es cúbica.
La forma general de una lineal sería: a x + b = 0 donde "a" y "b" son números reales
En este caso sabemos que "a" no puede ser cero porque entonces tendríamos una contradicción (S = $\varnothing$) o una identidad (S = R). Veamos esto en concreto:

Si a = 0 entonces hay dos variantes:
ó b = 0 ó $b \neq 0$

Si a = 0 y b = 0 entonces la ecuación queda 0x + 0 = 0 y, como ya vimos, se tiene S = R, es decir se trata de una identidad.

Si a = 0 y $b \neq 0$ (por ejemplo b = 7) entonces la ecuación queda 0x = -7 y como vimos antes S = $\varnothing$ (se trata de un Absurdo). Entonces para que se trate de una ecuación debe ser $a \neq 0$.
En ese caso es fácil ver que el conjunto solución es:

$$S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

En efecto, si reemplazo la x por –(b/a) queda:

$$\boxed{\cancel{a}\left(-\frac{b}{\cancel{a}}\right)+b=-b+b=0}$$

y se verifica la ecuación. Pero ningún otro número real la verifica.

Ahora bien: ¿Cómo disponer de una rutina para resolver estas ecuaciones?. Veamos:
Consideremos la ecuación

x + 8 = 9

Si "x + 8" es igual a "9" entonces sumando "-8" a ambos miembros se mantiene la igualdad:

x + 8 + (-8) = 9 + (-8)

En el miembro izquierdo tenemos la suma 8 + (-8) que sabemos vale cero. En el miembro izquierdo reemplazo entonces el "8 + (-8)" por "0" y queda:

x + 0 = 9 + (-8)

Ahora es muy fácil ver que “x + 0” vale lo mismo que “x” y podemos por lo tanto reemplazar “x + 0” por “x”:

x = 9 + (-8)

A este proceso se lo llama: “despejar la incógnita”. El fundamento del método es ir obteniendo nuevas ecuaciones que tengan el mismo conjunto solución que la original pero que sean “más fáciles de leer”. En el caso último, partimos de:

x + 8 = 9 (I)		
Luego	x + 8 + (-8) = 9 + (-8)	(II)
Luego	x + 0 = 9 + (-8)	(III)
Y finalmente	x = 9 + (-8)	(IV)

Cada una de estas ecuaciones tiene el mismo S. Cuando dos ecuaciones tienen igual conjunto solución se llaman <u>EQUIVALENTES</u>.

Podemos decir que este método consiste en <u>escribir una sucesión de ecuaciones equivalentes a la original tratando de que la última tenga la incógnita “despejada”</u> (es decir la incógnita sola en un miembro y en el otro miembro un número).

Lo más común es recordar la serie de pasos desde (I) hasta (IV) diciendo que <u>“el 8 que estaba sumando a la izquierda pasó restando a la derecha”</u>. Es así como acostumbramos a escribir directamente:

“Paso el 8 restando”

x + 8 = 9
x = 9 – 8

Esta manera de hablar es un poco extraña, pero es una manera rápida de referirse al proceso de los pasos (I) - (II) - (III) - (IV). Podemos pensarlo de este modo y obtener una solución correcta, siempre que trabajemos con cuidado.

Del mismo modo procedemos, cuando la incógnita está multiplicada por un número (distinto de cero). Veamos un ejemplo:

3x = 12 (I)

divido ambos miembros por 3 y obtengo:

$$\frac{3X}{3} = \frac{12}{3} \quad \text{(II)}$$

en el miembro izquierdo $\frac{3X}{3}$ vale “x” y por eso, al reemplazar, queda:

$$X = \frac{12}{3} \quad \text{(III)}$$

Igual que antes, tenemos una forma figurada de hablar para referirnos a este proceso de (I) hasta (III).

Partiendo de 3x = 12 es costumbre decir que “pasamos el 3 dividiendo al otro miembro” y así queda $X = \frac{12}{3}$.

Lo importante (sin que nos interese la forma en que lo decimos) es que la última ecuación sea equivalente a la original. En este caso la primera ecuación:

3x = 12
tiene S = {4}

y la última

$$X = \frac{12}{3}$$

también tiene S = {4}.

Eso es lo verdaderamente importante: que no cambie el conjunto solución.
Es decir que el proceso de despeje consiste en lo siguiente: ir escribiendo una "cadena" de ecuaciones que sean equivalentes a la original hasta llegar a la última que podríamos llamar "de lectura directa" (tiene la x igualada a un número).

Veamos un caso más completo:

2x + 7 = 11

en este caso no es suficiente con saber que "lo que está sumando pasa restando y lo que esta multiplicando pasa dividiendo". Porque aparece la posibilidad de "pasar el 2" y de "pasar el 7". ¿Cuál de los dos "paso" en primer lugar?

La respuesta es simple: en el miembro izquierdo: "2x + 7" hay dos operaciones: producto y suma. Paso en primer lugar el número que rompa la operación principal. La operación principal es aquélla que vincula a toda la expresión.

Veamos esto: en la expresión "2x+7" el producto vincula al "2" con la "x". Pero la suma vincula al "2x" con el "7". Esta suma es la operación principal. La expresión "2x + 7" es una suma. Por eso si la escribiéramos con paréntesis deberíamos ponerla así:

(2x) + 7

Para despejar la "x" debemos "desarmar" la expresión "2x + 7" comenzando por la operación principal. O sea que primero hay que "pasar el 7". Por eso procedemos como sigue:

2x + 7 = 11

operación principal

paso el 7 restando a la derecha

2x = 11 – 7

el producto es ahora la única operación con la x. No hay dudas: paso el 2 dividiendo a la derecha

$$X = \frac{11-7}{2}$$

sólo falta "hacer las cuentas"

$$X = \frac{11-7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

es decir x = 2. Entonces escribimos el conjunto solución así:

S = {2}

¿Cómo procederíamos si en lugar de la anterior tuviéramos que "despejar la x" en la siguiente ecuación?:

2 . (x + 7) = 11

Comparemos el despeje anterior con éste. Ahora la operación principal a la izquierda es el producto (porque el 2 está multiplicando a todo el "x + 7": eso es lo que indica el paréntesis).

Entonces paso el "2" dividiendo al otro término.

ésta es ahora la única operación con la

$$X + 7 = \frac{11}{2}$$

No hay dudas: paso el 7 restando

$$X = \frac{11}{2} - 7$$

Sólo queda "hacer cuentas"

$$X = \frac{11}{2} - 7 = \frac{11-14}{2} = \frac{-3}{2}$$

y expresar el conjunto solución

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

Trabajemos ahora otro ejemplo:

$$\frac{14-3X}{2} = 4$$

¿Cuál es ahora la operación principal a la izquierda?

Veamos:
El producto vincula al “3” con la “x”, la resta vincula al “14” con el “3x” pero solamente la división vincula al “14 – 3x” con el “2”. Esta división vincula a todo el miembro izquierdo y es entonces la operación principal. Por eso la vamos a “desarmar” en primer lugar:

paso el “2” multiplicando a derecha
14 – 3x = 4 . 2

hago cuentas a la derecha

14 – 3x = 8

ahora ésta es la operación principal

y por eso voy a pasar el 14 al otro miembro.

Pero ¡cuidado!:tengamos en cuenta que el 14 esta sumando (¡y no restando!), porque el signo menos “-” que vemos corresponde al “3x” (no olvidar que el signo de un número se escribe a la izquierda).

Una vez que pasé el 14 restando (y dejé el signo “-” con el 3x) lo que quedó es:

-3x = 8 – 14

vuelvo a hacer cuentas a derecha

-3x = -6

Ahora puedo elegir entre varios caminos:
uno puedo multiplicar ambos miembros por “-1” con lo cual queda

(-3x) . (-1) = (-6) . (-1)

y haciendo cuentas:

3x = 6
ahora sólo queda pasar el “3” dividiendo a la derecha:

$$X = \frac{6}{3} = 2$$

en síntesis nuestro conjunto solución es:

S = {2}

dos también puedo considerar que “–3x” es el producto de “-3” por la “x” con lo cual estaría “viendo” la ecuación de este modo:

(-3) . x = -6

ésta es la única operación. No hay dudas sobre el siguiente paso.

paso el “-3” dividiendo a la derecha:

$$X = \frac{-6}{-3}$$

y luego de “hacer cuentas”:

x = 2

con lo cual el conjunto solución queda:

S = {2}

Advertencia:
¡Cuidado!: paso dividiendo “todo el –3”. (¡¡ No hay que quitarle el signo “-” durante el pasaje ¡!).

Algunos alumnos con muy buena base matemática seguramente opinarán que esta advertencia y el desarrollo “pasito a pasito” de lo que venimos explicando son algo inútil. Es una opinión respetable. Pero la experiencia de muchísimos años nos ha mostrado que algunos alumnos cometen estos errores aún después de terminar la facultad. Por eso lo aclaramos con cuidado: no es una opinión, es experiencia.

Comentario: como docentes hemos comprobado algo curioso.
Es muy común el error de cambiar de signo a un negativo que se pasa dividiendo. Por ejemplo:

(-5) . x = 10 (I)

$$X = \frac{10}{5}$$ ¡ error ! : no se debió cambiar el signo al número “-5”.

Pero casi nadie se equivoca “al revés”, o sea casi nadie le cambia el signo a un positivo al pasarlo dividiendo. Por ejemplo:

partiendo de 5x = 10 (II)
casi nadie escribe

$$X = \frac{10}{-5}$$ (que está mal hecho !!)

La razón de esa diferencia de conducta nos resulta difícil de entender pero es un hecho que hemos comprobado muchas veces.
Ud. debe tratar de estar más alerta – si lo necesita – cuando enfrenta la situación (I).

EJERCICIOS:

“despejar la x” paso a paso escribiendo claramente el conjunto solución.

$$\frac{3X-9}{2}+8=10$$

$$\left(5+\frac{3-2X}{4}\right).3=6$$

$$\frac{(4-2X).3+16}{4}=10$$

$$[(2-5X).8-2].6=36$$

$$5.\left(1-\frac{2X-3}{4}\right)=10$$

(respuesta al final)

Veamos ahora ecuaciones lineales con varias “apariciones” de la incógnita.

Por ejemplo:

$$3(2+5x)+8(1+x)=2(5-x)-3(-2+3x)$$

Lo primero es aplicar la propiedad distributiva dentro de cada término. En cada uno tendríamos:

$$\begin{cases} 3(2+5x)=3\cdot 2+3\cdot 5x=6+15x \\ 8(1+x)=8\cdot 1+8\cdot x=8+8x \\ 2(5-x)=2\cdot 5-2\cdot x=10-2x \\ -3(-2+3x)=(-3)\cdot(-2)+(-3)\cdot 3x=6-9x \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación original obtenemos:

$$6+15x+8+8x=10-2x+6-9x$$

Reducimos términos semejantes en cada miembro.

$$\begin{cases} 6+8=14 \\ 15x+8x=23x \\ 10+6=16 \\ -2x-9x=-11x \end{cases}$$

Al llevar estas cuentas a la ecuación queda:

$$14+23x=16-11x$$

Pasamos a la izquierda los términos con "x" y a la derecha los términos sin "x":

$$23x+11x=16-14$$

Volvemos a reducir términos semejantes en cada miembro,

$$\begin{cases} 23x+11x=34x \\ 16-14=2 \end{cases}$$

y con esto tenemos:

$$34x=2.$$

Sólo falta "pasar el 34 dividiendo":

$$x=\frac{2}{34}$$

Operando (o sea simplificando la fracción) obtengo:

$$x=\frac{1}{17}$$

El conjunto solución queda:

$$S=\left\{\frac{1}{17}\right\}$$

EJERCICIOS:

Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

E6) $3(4x-8)=9(3-2x)$

E7) $5(2x+7)+4=6-3(2-4x)-8x$

E8) $(2+6x)(4+x)=(5+2x)(3+3x)$

E9) $2(3+x)+5=10(x+1)+1-8x$

E10) $3(4+x)+2x=5(2+x)+4$

(Repuestas al final)

ECUACIONES DE 2DO GRADO

Las siguientes son ejemplos de ecuaciones de segundo grado:

$$3x^2-8x=0\ ;\ 5x^2-9=0\ ;\ 2x^2-9x+4=0\ ;\ 4(x+1)^2=9(x+2)$$

Al enfrentarnos a una ecuación cuadrática, luego de haber distribuido todos los posibles productos (respecto de sumas y restas) y reducido los términos semejantes (si los hubiera) se puede escribir la ecuación cuadrática en forma polinómica, es decir:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (con\ a\neq 0)$$

Por supuesto que si fuera a = 0, entonces sería una falsa ecuación cuadrática (no sería de segundo grado).

En cualquier buen libro donde se trate este tema figura la deducción de la fórmula resolvente para esta ecuación (que algunos llaman Fórmula de BASKARA). Se trata de que la ecuación

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (con\ a\neq 0)$$

es equivalente a esta expresión:

(I)
$$\boxed{x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ó\ x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (a\neq 0)}$$

Es común escribir esta última expresión usando un abuso de notación así:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (a\neq 0)$$

Por cualquier duda que se tenga al ver la fórmula (II) con su extraño símbolo "$\pm$" debe entenderse simplemente que es una manera más rápida de escribir la fórmula irreprochable (I).

Veamos en primer lugar la deducción de la fórmula. Partimos de la forma polinómica de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad\qquad (con\ a \neq 0)$$

multiplicamos ambos miembros por "4a":

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = (4a) \cdot (0)$$

Haciendo cuentas en ambos miembros tenemos:

$$\begin{cases} (4a) \cdot (0) = 0 \\ 4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \end{cases}$$

Al reemplazar estos valores en la ecuación quedará:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Obsérvese que el primer término de la izquierda (que es "$4a^2x^2$") se puede escribir como un cuadrado, de este modo:

$$4a^2x^2 = (2ax)^2$$

El segundo término de la izquierda (es decir el "4abx") se puede expresar como un doble producto: el doble producto de (2ax) por (b). En efecto:

$$4abx = 2 \cdot (2ax) \cdot (b)$$

Con lo dicho ya podemos escribir nuestra ecuación de este modo:

$$(2ax)^2 + 2(2ax)(b) + 4ac = 0$$

Los dos primeros términos son "casi" un trinomio cuadrado perfecto. Pero solamente casi. En efecto: tiene el cuadrado de "2ax" y el doble producto de "2ax" por "b" , pero falta el cuadrado de "b" . Para conseguirlo sumamos b^2 en ambos miembros:

$$(2ax)^2 + 2(2ax)(b) + (b)^2 + 4ac = 0 + b^2$$

Y como a la derecha vale: $0 + b^2 = b^2$, la ecuación nos queda:

$$[2ax]^2 + 2[2ax](b) + (b)^2 + 4ac = b^2$$

Pero el miembro de la izquierda se puede reexpresar, aplicando el tercer caso de factoreo (“trinomio cuadrado perfecto”) a los tres primeros términos. En efecto recordemos que el esquema de ese caso es:

$$[\quad]^2 + 2[\quad](\quad) + (\quad)^2 = ([\quad] + (\quad))^2$$

en nuestro caso particular:

$$[2ax]^2 + 2[2ax](b) + (b)^2 = ([2ax] + (b))^2$$

Nuestra ecuación nos quedará entonces:

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$$

En este último paso, aunque no lo notemos, el avance ha sido enorme. En lugar de dos apariciones de la “x” como en $a\underline{x}^2 + b\underline{x} + c = 0$, ahora tenemos sólo una: $(2a\underline{x} + b)^2 + 4ac = 0$

Ya estamos en condiciones de despejar nuestra incógnita “x” (con los cuidados correspondientes).
Primero restamos “4ac” en ambos miembros (que es lo mismo que “pasar el <u>4ac</u> restando a la derecha”)

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Ahora debo “pasar” el cuadrado.

Para hacerlo con corrección pensemos que si nos enfrentáramos a algo así como
$x^2 = 9$ **: ¿cómo despejaría la “x” ?. Simplemente sabiendo que para que “x” al cuadrado sea 9, entonces “x” puede ser la raíz cuadrada de 9 o el opuesto de la raíz cuadrada de 9.**
En síntesis: La ecuación $x^2 = 9$ **sería equivalente a la expresión** $x = \pm\sqrt{9}$.
Por supuesto si tuviera que resolver: $x^2 = -9$ **pondría simplemente S = Ø**
porque entre los números reales no tendría ninguno que cumpliera la condición.

De esta misma manera continuamos con nuestra deducción de la fórmula resolvente de la ecuación de 2º grado. Si tengo:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \qquad (con\ a \neq 0)$$

puedo escribir la ecuación equivalente:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad (a \neq 0)$$

Notemos que ambas requieren que $b^2 - 4ac \geq 0$ para tener soluciones reales. Si no se cumple esta condición, entonces la última y la penúltima no se verificarán para ningún real.

Por supuesto que esta fórmula:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0)$$

tiene un abuso de notación. Es una forma "abreviada" de escribir la expresión siguiente (que es correcta):

$$2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac} \quad ó \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \left(a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0\right)$$

Ahora sólo falta terminar de despejar la "x" pasando la "b" restando a la derecha y luego el "2a" dividiendo a la derecha:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como a es distinto de cero puedo dividir en ambos miembros por "2a" sin problemas.

En síntesis, lo que hemos deducido es la siguiente equivalencia (que vale para $a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0$):

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2 + bx + c = 0 \\ \Updownarrow \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array}}$$

Es muy útil para el alumno tratar de reproducir esta deducción por su cuenta. Le servirá para mejorar su manejo algebraico (es una buena aplicación del tercer caso de factoreo y excelente ejercitación general).

EJERCICIO

E11) Reescriba la deducción de la fórmula resolvente. Hágalo paso a paso.

Pasemos ahora a aplicar la fórmula en algunos ejemplos.

Ejemplo uno

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

en esta ecuación a = 2; b = 3 y c = 1

$$\text{por lo tanto} \quad \begin{cases} -b = -3 \\ b^2 = 3^2 = 9 \\ 4 \,.\, a \,.\, c = 4 \,.\, 2 \,.\, 1 = 8 \\ 2 \,.\, a = 2 \,.\, 2 = 4 \end{cases}$$

con lo cual resulta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$x = \frac{-3+1}{4} \quad \vee \quad x = \frac{-3-1}{4}$$

$$x = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x = \frac{-1}{2} \quad \vee \quad x = -1$$

El conjunto solución queda, entonces:

S = { -1/2 ; -1 }

Ejemplo dos

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

aquí tenemos a = 3, b = -10 y c = 3

y por tanto, preparando los elementos para nuestra fórmula

$$\begin{cases} -b = -(-10) = 10 \\ b^2 = (-10)^2 = 100 \\ 4 \cdot a \cdot c = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 \\ 2 \cdot a = 2 \cdot 3 = 6 \end{cases}$$

y reemplazándolos en ella:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$x = \frac{10+8}{6} \quad \vee \quad x = \frac{10-8}{6}$$

$$x = \frac{18}{6} \quad \vee \quad x = \frac{2}{6}$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

el conjunto solución queda: S = { 3 ; 1/3 }.

En este ejemplo dos es importante cuidar el valor de "-b". Notemos que si "b" vale "–10" entonces su opuesto es -b = -(-10) = 10.

Ejemplo tres:

$$2x^2 + 5x = 0$$

En esta ecuación a = 2, b = 5 y c = 0

$$\text{por tanto} \quad \left\{ \begin{array}{l} -b = -5 \\ b^2 = 5^2 = 25 \\ c = 0 \\ 4 \,.\, a \,.\, c = 4 \,.\, 5 \,.\, 0 = 0 \\ 2 \,.\, a = 2 \,.\, 2 = 4 \end{array} \right.$$

y aplicando la fórmula tenemos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-0}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-5 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{-5+5}{4} \qquad \vee \qquad x = \frac{-5-5}{4}$$

$$x = \frac{0}{4} \qquad \vee \qquad x = \frac{-10}{4}$$

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x = \frac{-5}{2}$$

con lo que el conjunto solución queda:

S = { 0 ; -5/2 }.

EJERCICIOS:

Resolver las siguientes ecuaciones, indicando claramente conjunto solución.

E12) $5x^2 - 11x + 2 = 0$
E13) $x^2 - 9x + 8 = 0$
E14) $3x^2 - 8x - 3 = 0$
E15) $4x^2 + 5x = 0$ (aquí: c=0)
E16) $2 - 3x + 8x^2 = 0$ (ordene!!)
E17) $-7x + 8x^2 + 1 = 0$ (ordene!!)
E18) $2x^2 - 12 = 0$
E19 $3x^2 + 20 = 0$

(respuestas al final)

La última ecuación que trabajamos ($2x^2 + 5x = 0$) pudo haberse resuelto sin apelar a la fórmula de la ecuación de segundo grado. Se puede resolver usando la siguiente propiedad:

Cuando un producto de dos reales es cero, tenemos la seguridad de que alguno de los dos es cero (eventualmente ambos lo son). En símbolos lo escribiríamos así:

Para todos los reales a,b, vale:

$$a \cdot b = 0 \longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

aquí la doble flecha horizontal indica que la expresión de la izquierda es equivalente a la de la derecha (" $\longleftrightarrow$ " se lee "es equivalente a").

Por supuesto que la "$\vee$" que figura en esa equivalencia es la llamada "ó débil" que es la más usada en matemáticas. Cuando se escribe "p $\vee$ q" significa que "se cumple p ó se cumple q ó se cumplen ambas". Esta "$\vee$" en el lenguaje común se puede traducir por "y/o".

Apliquemos esta equivalencia en un ejemplo y veamos después cómo usarla en nuestra ecuación cuadrática.

$$(x+1)\cdot(x-8)=0$$

$$x+1=0 \vee x-8=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x=-1 \quad \vee \quad x=8$$

$$S=\{-1\,;8\}$$

Más arriba dijimos que podíamos – sin usar la fórmula – resolver la ecuación $2x^2 + 5x = 0$. Veamos cómo hacerlo.

El miembro izquierdo de la ecuación se puede reexpresar aplicando sencillamente el primer caso de factoreo. En efecto ambos términos tienen factor común "x".
Entonces en lugar de escribir:

$$2x^2 + 5x = 0$$

escribimos la expresión equivalente:

$$x \cdot (2x+5) = 0.$$

Ahora ya tenemos una ecuación que tiene un producto igualado a cero. Por eso podemos aplicar la equivalencia recién vista ($a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$). Lo hacemos:

$$x \cdot (2x + 5) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 0 \vee 2x + 5 = 0$$

y ahora ya es muy sencillo:

$x = 0$ v $2x + 5 = 0$

$x = 0$ v $x = -5/2$

con lo cual S = { 0 ; -5/2 }.

Veamos otro ejemplo:

$3x - x^2 = 0$

Como en el miembro izquierdo no hay término independiente, podemos aplicar el primer caso de factoreo:

$x (3 - x) = 0$

ahora aplicamos la equivalencia que estuvimos viendo:

$x = 0$ v $3 - x = 0$

$x = 0$ v $-x = -3$

$x = 0$ v $x = 3$

y ya tenemos el conjunto solución de la ecuación:

S = {0 ; 3}.

¿Y qué pasaría si tuviéramos una ecuación cúbica sin término independiente?. Para entenderlo pasemos al siguiente ejemplo:

$2x^3 - 11x^2 + 5x = 0$

No hemos estudiado una fórmula para resolver una ecuación cúbica <u>general</u>. Pero en este caso <u>especial</u> (en que el término independiente es cero) el miembro izquierdo se puede transformar en producto "sacando factor común "x":

$x (2x^2 – 11x + 5) = 0$

Aplicamos ahora la equivalencia vista y ponemos:

$$x (2x^2 - 11x + 5) = 0$$
$$\updownarrow$$
$$x=0 \quad \text{v} \quad 2x^2 - 11x + 5 = 0$$

En la ecuación de la izquierda (“x = 0”) nada queda por hacer. En la de la derecha simplemente aplicamos la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado:

Veamos otro ejemplo:

$(2x^3 + 7x^2)(4 - 5x) = 0$

Aplico en primer lugar la equivalencia ($a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$).

$2x^3 + 7x^2 = 0 \quad \vee \quad 4 - 5x = 0$

Pero en la ecuación de la izquierda puedo factorizar el polinomio cúbico sacando “x^2” como factor común:

$x^2(2x + 7) = 0 \quad \vee \quad 4 - 5x = 0$

Vuelvo a aplicar la equivalencia a la ecuación de la izquierda y obtengo:

$x^2 = 0 \quad \vee \quad 2x + 7 = 0 \quad \vee \quad 4 - 5x = 0$

Esto sigue de modo rutinario:

$x = 0 \quad \vee \quad 2x = -7 \quad \vee \quad -5x = -4$

$x = 0 \quad \vee \quad 2x = -7/2 \quad \vee \quad x = 4/5$

$S = \{0 ; -7/2 ; 4/5\}$

EJERCICIOS:

Resolver las siguientes ecuaciones indicando claramente su conjunto solución.

E20) $(2x + 8) * (3x - 9) = 0$
E21) $(4x – 5) * (2x + 7) * (1 – x) = 0$
E22) $3x^2 – 9x = 0$
E23) $6x^2 – 8x = 0$
E24) $(6x^2 – 7x + 1) * (2x^2 – 5x + 2) = 0$
E25) $(x^2 – x - 2) * (x^2 + x – 2) = 0$

(respuestas al final)

Una aclaración para evitar errores:
Es importante tener claro qué es “a”, qué es “b” y qué es “c” en la forma polinómica de la ecuación cuadrática.

Veamos. En la ecuación:

$2x + 7x^2 + 8 = 0$

sabemos que a = 7 porque “a” es el coeficiente cuadrático (es el número que está multiplicando a la “x^2”). Ni es el primer coeficiente que aparezca ni es todo el término cuadrático.

Para no confundir tengamos en claro que:

- Coeficiente cuadrático = a = 7
- Término cuadrático = $ax^2 = 7x^2$

También sabemos que b=2 porque "b" es el coeficiente lineal, es decir, el número que está multiplicando a la "x".
Aquí tengamos en claro que:

- Coeficiente lineal = b = 2
- Término lineal = bx = 2x

y finalmente el "c" es el término independiente.

- Término independiente = c = 8

¿Cuáles son los errores típicos en la resolución de la ecuación cuadrática?

Uno de ellos es olvidar que "-b" significa "el opuesto de b" (o si se prefiere: "b cambiado de signo") . Cuando resolvimos las primeras cuadráticas insistimos en evitar este error anotando con paciencia el valor de "b" primero y luego el de "-b".
Otro de los errores es confundir los valores de los coeficientes. Para evitar este error hemos aclarado la diferencia entre "coeficientes" y "términos" y hemos dado los nombres correctos a las partes del polinomio cuadrático.

Ejercitemos esta última advertencia:

Pedimos identificar los coeficientes "a", "b" y "c" en las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 + 3x = 0$$
$$1 - x^2 = 0$$

En la ecuación (I) tenemos:

$$x^2 + 3x = 0$$

El término cuadrático es x^2. ¿Cuál es el coeficiente cuadrático si no lo hemos escrito?. Evidentemente es el 1 (¡¡ no el 0 !!) porque la expresión "x^2" es idéntica a "$1x^2$" (pero no a " $0x^2$ ") . Tengamos en cuenta que si hubiéramos tenido un valor 0 (cero) para "a" , entonces la ecuación habría quedado simplemente "3x=0" sin molestarnos en escribir el término " $0x^2$ " y ya no seria una cuadrática.
Pasando a la "c" , vemos que ella sí vale cero porque la "c" es todo el término independiente y, si no figura escrita es porque todo el término (que es la "c"), vale cero.

De modo que la ecuación $x^2 + 3x = 0$ se podría escribir ("sin ahorrar tinta") así:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{1}x^2 + \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{3}x + \underset{\substack{\downarrow \\ c}}{0} = 0$$

¿Está claro?.

Veamos el otro ejemplo: la ecuación (II)

$$1 - x^2 = 0$$

En este caso el término que no está escrito es el lineal. Si "bx" no figura es porque vale "0x" y por lo tanto vale b = 0. Por supuesto el término independiente vale c = 1.
Con respecto al valor de "a" simplemente debemos notar que "$-x^2$" es lo mismo que "$-1x^2$" con lo cual estaremos de acuerdo en que "a = –1".
En resumen la ecuación:

$$1 - x^2 = 0$$

puede escribirse con mucha prolijidad así:

$$\underset{\underset{a}{\downarrow}}{-1}x^2 + \underset{\underset{b}{\downarrow}}{0}x + \underset{\underset{c}{\downarrow}}{1} = 0$$

Nos queda por ver cómo encarar una ecuación cuadrática cuando no viene presentada en la forma canónica:

Obviamente lo primero es tratar de llevarla a la forma polinómica usando toda la operatoria disponible.

Ejemplo 1:

$$\underline{(3x + 1)}^2 + 2x = \underline{(5x + 1)}^2 - 18$$

Desarrollamos el cuadrado de cada binomio

$$\underline{(3x)^2 + 2(3x)(1) + (1)^2} + 2x = \underline{(5x)^2 + 2(5x)(1) + (1)^2} - 18$$

$$\underline{9x^2 + 6x + 1} + 2x = \underline{25x^2 + 10x + 1} - 18$$

Reducimos términos semejantes en cada miembro:

$$9x^2 + 8x + 1 = 25x^2 + 10x - 17$$

"Pasamos" todos los términos al miembro izquierdo de la ecuación:

$$9x^2 + 8x + 1 - 25x^2 - 10x + 17 = 0$$

y reducimos términos semejantes:

$$-16x^2 - 2x + 18 = 0$$

Ya tenemos la ecuación en forma canónica. Sus coeficientes son:

$$a = -16 \quad ; \qquad b = -2 \quad ; \qquad c = 18$$

Los reemplazamos en la fórmula resolvente:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-16) \cdot 18}}{2(-16)} = \frac{2 \pm \sqrt{1156}}{-32} = \frac{2 \pm 34}{-32}$$
$$x = \frac{2+34}{-32} \quad \vee \quad x = \frac{2-34}{-32}$$
$$x = \frac{36}{-32} = \frac{-18}{16} \vee \quad x = \frac{-32}{-32} = 1$$

y ya tenemos el conjunto solución

S = {-18/16 ; 1}.

Ejemplo 2:

$\underline{(2x - 3)^2} + 4x = 4\ \underline{(x - 5)^2}$

Desarrollamos los cuadrados

$\underline{4x^2 - 12x + 9} + 4x = 4\ \underline{(x^2 - 10x + 25)}$

Aplicamos la distributiva en el miembro derecho

$4x^2 - 12x + 9 + 4x = 4x^2 - 40x + 100$

Reducimos términos semejantes en cada miembro:

$4x^2 – 8x + 9 = 4x^2 - 40x + 100$

"Pasamos" todos los términos al miembro izquierdo de la ecuación:

$\underline{4x^2} – 8x + 9 - \underline{4x^2} + 40x – 100 = 0$

Y vemos que <u>se anulan los términos cuadráticos:</u>

$32x – 91 = 0$

Es una ecuación lineal. Como en cada paso hemos ido obteniendo ecuaciones equivalentes a la original, quiere decir que la ecuación original también era lineal (sólo <u>aparentemente</u> era cuadrática). La resolución termina así:

$32x – 91 = 0$
$32x = 91$
$x = 91/32$

Y el conjunto solución de la ecuación original es:

S = {91/32}

Ejemplo 3:

$$\frac{1}{x} + x = 2$$

Dejamos a izquierda sólo el término "$\frac{1}{x}$". Queda entonces:

$$\frac{1}{x} = 2 - x$$

Pasamos multiplicando a derecha la "x" del denominador de la izquierda (<u>tengamos en cuenta que la nueva ecuación debe tener prohibido el valor x = 0 para ser equivalente a la ecuación anterior - que también tiene esa prohibición por hallarse la "x" en el divisor-</u>).

$1 = (2 - x)\, x \qquad (x \neq 0)$

Aplicamos distributiva en el miembro derecho:

$1 = 2x - x^2 \qquad (x \neq 0)$

Escribimos en forma canónica pasando todo a la izquierda:

$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (x \neq 0)$

Ahora ya es rutina:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Con estos valores calculamos:

$$\begin{cases} -b = 2 \\ b^2 = 4 \\ 4ac = 4 \\ 2a = 2 \end{cases}$$

que al ser llevados a la fórmula resolvente, nos dan:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x = 1$$

S = { 1 }

EJERCICIOS:

Resolver indicando claramente el conjunto solución.

E26) $3x^3 + 10x^2 + 3x = 0$
E27) $2x^4 + 7x^3 + 3x^2 = 0$ (piense !!)
E28) $6x^3 + 7x^2 + x = 0$
E29) $2(x + 1) + 3(x + 3) = 5(x + 2)^2$
E30) $3(x + 5)^2 = 5(x – 1)^2$

(respuestas al final)

Luego de haber visto el tema de ecuaciones de segundo grado, estamos en condiciones de trabajar con el...

SÉPTIMO CASO DE FACTOREO

Este caso también es conocido como “factoreo del trinomio cuadrático”. Veamos de qué se trata.
Consideremos el trinomio cuadrático siguiente: $2x^2 – 7x + 3$ Si hallamos sus raíces (o sea si resolvemos la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$) encontramos que son:

$x_1 = 3$ y $x_2 = ½$

Entonces el séptimo caso de factoreo (que estamos presentando) nos dice que el trinomio $2x^2 – 7x + 3$ se puede reescribir –factorizándolo- de esta forma:

$$2x^2 – 7x + 3 = 2(x – 3)(x – ½)$$

Lo primero es verificar que esto es correcto. Para hacerlo aplicaremos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma o resta. Hagámoslo:

$$2(x – 3)(x – ½) = (2x – 6)(x – ½) =$$
$$= (2x)(x) + (2x)(-½) + (-6)(x) + (-6)(-½) =$$
$$= 2x^2 – x – 6x + 3 = 2x^2 – 7x + 3$$

Vale decir que:

$$2(x – 3)(x – ½) = 2x^2 – 7x + 3$$

o sea: se cumple lo que queríamos verificar.

No sólo para este caso particular es posible esta factorización.
En general si el trinomio $ax^2 + bx + c$ tiene las raíces reales “x_1” y “x_2” (o sea si x_1 y x_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$) entonces se puede poner:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Veamos otro ejemplo:

el trinomio $x^2 + 3x – 4$ tiene las dos raíces siguientes:

$x_1 = 1$ y $x_2 = – 4$

(es decir al resolver la ecuación $x^2 + 3x – 4 = 0$ se hallan esas dos soluciones: S = {1; -4}).

Entonces, usando la fórmula para factorizar el trinomio y teniendo en cuenta que en el trinomio "$x^2 + 3x - 4$" vale a=1, podemos escribir:

$x^2 + 3x - 4 = 1\ (x - 1)\ (x - (-4))$
y , si lo preferimos,
$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)\ (x + 4)$

para verificar la factorización sencillamente aplicamos distributiva a la derecha:

$(x - 1)\ (x + 4) = x*x + x*4 + (-1)*x + (-1)*4 =$
$=x^2 + 4x - x - 4 = x^2 + 3x - 4$

con lo que verificamos que la factorización es correcta.

Ahora bien ¿cómo hacemos para factorizar un trinomio como $3x^2 - 11x - 4$ <u>si no conocemos sus raíces</u>?
La respuesta es sencilla: planteamos y resolvemos la ecuación $3x^2 - 11x - 4 = 0$. Con eso hallamos las dos raíces "x_1" y "x_2" (siempre que existan) y luego aplicamos la fórmula de factorización.
Comencemos por plantear la ecuación: $3x^2 - 11x - 4 = 0$

en este caso $\begin{cases} a = 3 \\ b = -11 \\ c = -4 \end{cases}$

a partir de obtenemos:

$-b = 11$
$b^2 = (-11)^2 = 121$
$4ac = 4*3 * (-4) = -48$
$2a = 2*3 = 6$

y la ecuación tiene las soluciones:

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121-(-48)}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{121+48}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{11 \pm 13}{6}$$

$$x = \frac{11+13}{6} = \frac{24}{6} = 4 \qquad ó \qquad x = \frac{11-13}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Entonces tenemos las raíces:

$$x_1 = 4 \qquad ó \qquad x_2 = -\frac{1}{3}$$

Aplicamos ahora la fórmula

$ax^2 + bx + c = a\ (x - x_1)\ (x - x_2)$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

3 -11 -4 3 4 -1/3

$3x^2 - 11x - 4 = 3\ (x - 4)\ (x - (-1/3))$

Y ya hemos factorizado el trinomio, que podemos escribir más económicamente:

$3x^2 - 11x – 4 = 3 (x – 4) (x + 1/3)$

Veamos otro ejemplo:

Se desea factorizar el siguiente trinomio cuadrático:

$5x^2 + x – 1$

También en este caso tenemos que hallar primero las raíces para luego aplicar la fórmula.

Resolvemos la ecuación:

$5x^2 + x – 1 = 0$

donde a = 5, b = 1, c = -1 con lo cual:

$-b = -1$; $b^2 = (1)^2 = 1$; $4ac = 4*5*(-1) = -20$; $2a = 2*5 = 10$

entonces, la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-(-20)}}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10}$$

las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{10} \qquad y \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{10}$$

Al aplicar la fórmula tenemos:

$$5x^2 + x – 1 = 5 \left(x - \frac{-1+\sqrt{21}}{10}\right) \left(x - \frac{-1-\sqrt{21}}{10}\right)$$

que podría, trabajando un poco con los signos, escribirse así:

$$5x^2 + x – 1 = 5 \left(x + \frac{1-\sqrt{21}}{10}\right) \left(x + \frac{1+\sqrt{21}}{10}\right)$$

Por supuesto que verificar esto sería bastante más laborioso que lo fue en los casos anteriores.

EJERCICIOS:

Factorizar los trinomios

E31) $5x^2+9x-2$
E32) x^2-x-2
E33) $-x^2-2x-1$
E34) $3x^2+10x+3$
E35) x^2+x-3

(respuestas al final)

RESPUESTAS A TODOS LOS EJERCICIOS PLANTEADOS

RESPUESTAS A NÚMEROS

N1) -3 = (-1) * (3)

N2) 9 = (1) * (9)

N3) 0 = (0) * (0)

N4) -10 = (-1) * (10)

N5) -3 + 8 = 5

N6) -3 * 7 = -21

N7) 2 * (-5) = -10

N8) (-3) * (-2) = 6

N9) -3 –2 = -5

N10) -4

N11) 30

N12) 12

N13) 12

N14) 21

N15) -243

N16) 81

N17) 81

N18) 7

N19) 162

N20) -288

N21) $\frac{4}{9}$

N22) $-\frac{13}{20}$

N23) $\frac{6}{7}$

N24) $\frac{3}{4}$

N25) $\frac{1}{2}$

N26) $-\frac{4}{9}$

N27) $\frac{13}{14}$

N28) $\frac{13}{20}$

N29) $-\frac{1}{15}$

N30) $-\frac{10}{63}$

N31) $\frac{13}{20}$

N32) $\frac{113}{42}$

N33) $\frac{17}{15}$

N34) $\frac{5}{24}$

N35) $\frac{14}{45}$

N36) 6

N37) a^{117}

N38) a^{61}

N39) $a^{24}b^{35}$

N40) $x^{53}y^{46}z^{90}$

N41) $x^{29}a^{26}b^{11}y^{-6}$

N42) $\sqrt[10]{xy^3}$

N43) $\sqrt[10]{x^2}$

N44) $\sqrt[5]{x}$

N45) $\sqrt[20]{x}$

N46) $\sqrt[28]{x^7}$ ó $\sqrt[4]{x}$

N47) 2

N48) 32

N49) 27

N50) $x^{\frac{233}{220}}$

N51) $\sqrt[120]{x^{23}}$

N52) $\dfrac{1}{\sqrt[840]{x^{2467}}}$

N53) $\sqrt[210]{x^{181}}$

N54) $\dfrac{1}{\sqrt[36]{x^{65}}}$

N55) $\dfrac{1}{\sqrt[315]{x^{41}}}$

RESPUESTAS A POLINOMIOS

P1) no es

P2) sí es

P3) no es (exponente negativo en la indeterminada)

P4) no es

P5) sí es (la raíz afecta al 5 y no a la indeterminada)

P6) num= 2.3 lit= x^5y^4

P7) num= -5.6^2 lit= x^3y^5

P8) num= 2□^{3} lit= x^0

P9) num= -□ lit= x^4

P10) num= ½ lit= x^5

P11) grado = 9

P12) grado = 8

P13) grado = 0

P14) grado = 4

P15) grado = 5

P16) $P(1) = -2\ (1)^4 = -2$

P17) $Q(-1) = 3\ (-1)^2 = 3$

P18) $R(-1) = -\ (-1)^{\ 3} = -(-1) = 1$

P19) $S(-2) = -4\ (-2)^4 = -4\ (16) = -64$

P20) $T(3) = 2$ (no hay nada que reemplazar !!)

P21) $P*Q = -10\ x^5\ y^5\ z^4$

P22) $P*Q = -27\ x^5\ y^{12}$

P23) $P*Q = 6\ x^7\ y^{17}$

P24) P*Q = -5.5 x9

P25) $P*Q = 12\ x^{11}y^{15}$

P26) $P/Q = -6\ x^2y^1$

P27) P/Q = $-5\ x^5$

P28) P/Q = $5\ x^7\ y^7$

P29) P/Q = $-2\ y^6$

P30) P/Q = -4 (ó si lo prefiere: $-4x^0$)

P31) P+Q = $3x^2$

P32) P+Q = $6x^3$

P33) P+Q = $5/6\ x^6$

P34) P+Q = $(7/6)\ x^4\ y^7$

P35) P+Q = 0

P36) P– Q = $-\ 10\ x^3$

P37) P– Q = $14\ x^2\ y$

P38) P– Q = $-\ 10x^3\ y^2 - 5\ x^2\ y^3$

P39) P– Q = $-7 + x$

P40) P– Q = $-\ (22/3)\ x^3$

P41) $P(x) = 11\ x^7 + 13\ x^3 - 12x^2$

P42) $Q(x) = -\ 6\ x^7 - 2\ x^4 + 6\ x^3$

P43) $R(x) = 2\ x^5$

P44) $S(x) = -\ x^5 + 32$

P45) $T(x) = 6 + x^2$

P46) grado(P) = 3

P47) grado(P) = 1

P48) grado(P) = 5

P49) grado(P) = 2

P50) grado(P) = 4

P51) $P = -\ 5\ x^4 + x^3 + 3x$

P52) $P = -2x^9 + 8x^7 - x^4$

P53) $P = 7x^6 + x^4 - 28$

P54) $P = 2x^3$

P55) $P = -x^3 + 2^4$

P56) $P + Q = x^4 + 7x^3 - 5x^2 + x$

P57) $P + Q = 2x^3 + 3x^2 - 1$

P58) $P + Q = 3$

P59) $P + Q = 0$

P60) $P + Q = -2x^2 + 3x + 3$

P61) $P - Q = -x^3 + 5x^2 - 14x$

P62) $P - Q = 2x$

P63) $P - Q = -15$

P64) $P - Q = -x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

P65) $P - Q = 3x^5 + x^3 - 6x$

P66) $P*Q = -10x^2 + 8x^4 - 35x^5 + 28x^7$

P67) $P*Q = 30x^2 - 35x^3 + 48x^4 - 56x^5$

P68) $P*Q = -16 + 62x - 44x^2 + 38x^3 - 28x^4 + 4x^5$

P69) $P*Q = 40 - 35x + 48x^2 - 42x^3 + 5x^4 + 6x^6$

P70) $P*Q = -28x + 49x^2 - 52x^3 - 7x^4 + 8x^5$

P71) Coc= $5x - 18$ Resto= 40

P72) Coc= $6x^2 + 14x + 44$ Resto= 131

P73) Coc= $x^2 + ½x - 13/4$ Resto= $-9/4$

P74) Coc= $-x - 2$ Resto= $-5x + 4$

P75) Coc= $x^2 - 4x + 9$ Resto= $-21x + 19$

P76) Coc= $½x + ¼$ Resto= $-(29/4)x + (7/4)$

P77) $16 - 24x + 9x^2$

P78) $25x^2 - 30x^4 + 9x^6$

P79) $4 - 12x + 9x^2$

P80) $4x^4 - 28x^6 + 49x^8$

P81) $x^2 - 18x + 81$

P82) $4 - 49x^2$

P83) $16x^2 - x^6$

P84) $25x^4 - 64x^8$

P85) $1 - x^2$

P86) $4 - 81x^{10}$

P87) $x(2x^2 - 7)$

P88) $x(6x^4 - 9)$

P89) $a(x^2 + y)$

P90) $x(1 - x^2)$

P91) $ax(x^2 - a)$

P92) $(2 + b)(a + b)$

P93) $(xy + a)(x + 1)$

P94) $(2x + a^2)(x + 1)$

P95) $(x + a^2)(x - 1)$

P96) $(x - ax)(x - 1)$

P97) $(x - 1)^2$

P98) $(x^2 + y^3)^2$

P99) $(x + ½)^2$

P100) $(x + 4)^2$

P101) $(x - ½)^2$

P102) $(x + 1)^3$

P103) $(x^2 + 2)^3$

P104) $(2x^2 - 4x)(2x^2 + 4x)$

P105) $(5x - 0.6x^3)(5x + 0.6x^3)$

P106) $(3xy^2 - 0.1x^4)(3xy^2 + 0.1x^4)$

P107) $(mx^2z^3 - 0.5y^2)(mx^2z^3 + 0.5y^2)$

P108) $(x - ½)(x + ½)$

P109) Resto = – 51

P110) Resto = 0

P111) Resto = – 37

P112) Resto = 3

P113) Resto = – 0.375

P114) $(x^2+1).(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

P115) $(x-3)(x^2+3x+9)$

P116) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

P117) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

P118) $(x+b)(x^2-xb+b^2)$

RESPUESTAS A ECUACIONES

E1) $x = \frac{13}{3}$

E2) $x = \frac{15}{2}$

E3) $x = -2$

E4) $x = \frac{1}{5}$

E5) $x = -\frac{1}{2}$

E6) $x = \frac{17}{10}$

E7) $x = -\frac{13}{2}$

E8) $x = \frac{7}{5}$

E9) $S = \mathrm{R}$

E10) $S = \varnothing$

E11) ¡Hágalo! ¡Le conviene!

E12) $\{ 2 ; \frac{1}{5} \}$

E13) { 1 ; 8 }

E14) $\{ 3 ; -\frac{1}{3} \}$

E15) $\{ 0 ; -\frac{5}{4} \}$

E16) $S = \varnothing$

E17) $\{ \frac{7+\sqrt{17}}{16} ; \frac{7-\sqrt{17}}{16} \}$

E18) $\{ +\sqrt{6} ; -\sqrt{6} \}$

E18) $S = \varnothing$

E20) { -4 ; 3 }

E21) $\{ \frac{5}{4} ; -\frac{7}{2} ; \quad 1 \}$

E22) { 0 ; 3 }

E23) $\{ 0 ; \frac{4}{3} \}$

E24) $\{ 2 ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{2} ; 1 \}$

E25) { -1 ; 1 ; -2 ; 2 }

E26) $\{ -3 ; -\frac{1}{3} ; 0 \}$

E27) $\{ 0 ; -3 ; -\frac{1}{2} \}$

E28) $\{ -\frac{1}{6} ; -1 ; 0 \}$

E29) $\{ \frac{-15+3\sqrt{5}}{10} ; \frac{-15-3\sqrt{5}}{10} \}$

E30) $\{ \frac{20+2\sqrt{135}}{2} ; \frac{20-2\sqrt{135}}{2} \}$

E31) $5 (x + 2) (x - \frac{1}{5})$

E32) $(x + 1) (x – 2)$

E33) $(x + 1)^2$

E34) $3 (x + 3) (x + \frac{1}{3})$

E35) $\left(x - \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right) \left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$