

① Найти частные производные первого и второго порядка. Убедиться в равенстве смешанных производных

$$U = x^3 + 3xy^2 + z^2 - 39x - 36y + 2z + 26$$

$$U'_x = 3x^2 + 3y^2 - 39; \quad U''_{xx} = 6x$$

$$U'_y = 6xy - 36; \quad U''_{yy} = 6x$$

$$U'_z = 2z + 2; \quad U''_{zz} = 2$$

$$U''_{xy} = 6y \quad \text{остальные смешанные производные} = 0$$

$$U''_{yx} = 6y$$

②  $U = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$

$$U'_x = -\frac{256}{x^2} + \frac{2x}{y}; \quad U''_{xx} = \frac{512}{x^3} + \frac{2}{y}$$

$$U'_y = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{2y}{z}; \quad U''_{yy} = \frac{2x^2}{y^3} + \frac{2}{z}$$

$$U'_z = -\frac{y^2}{z^2} + 2z; \quad U''_{zz} = \frac{2y^2}{z^3} + 2$$

$$U''_{xy} = -\frac{2x}{y^2}; \quad U''_{yz} = -\frac{2y}{z^2}$$

$$U''_{yx} = -\frac{2x}{y^2}; \quad U''_{zy} = -\frac{2y}{z^2}$$





ESPIRITU  
DE CHILE

*Gran Reserva*

SAUVIGNON 2015 BLANC

③ Найти производную функции

$U = x^2 + y^2 + z^2$  по направлению вектора  $\vec{C}(-9, 8, -12)$  в точке  $M(8, -12, 9)$

$$U'_{\vec{C}} = (\vec{C}_0 \cdot \text{grad} U) ; \text{grad} U = (U'_x, U'_y, U'_z)$$

$$U'_x = 2x ; U'_y = 2y ; U'_z = 2z ; \text{grad} U = (2x, 2y, 2z)$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{-9^2 + 8^2 - 12^2} = \sqrt{81 + 64 + 144} = 17$$

$$\vec{C}_0 = \left( \frac{-9}{17}, \frac{8}{17}, \frac{-12}{17} \right)$$

$$\text{grad} U = (16, -24, 18)$$

$$U'_{\vec{C}} = \frac{-9}{17} \cdot 16 - \frac{8}{17} \cdot 24 + \frac{-12}{17} \cdot 18 = -\frac{144}{17} - \frac{192}{17} - \frac{216}{17} = -\frac{552}{17}$$

④ Найти производную функции  $U = e^{x^2+y^2+z^2}$

по направлению вектора  $\vec{C}(4, -13, -16)$  в точке  $M(-16, 4, -13)$

$$U'_x = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x ; U'_y = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2y ; U'_z = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2z$$

$$\text{grad} U = (-e^{441} \cdot 32, e^{441} \cdot 8, -e^{441} \cdot 26)$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{4^2 - 13^2 - 16^2} = 21$$

$$\vec{C}_0 = \left( \frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21} \right)$$

$$U'_{\vec{C}} = e^{441} \left( -\frac{128}{21} + \frac{104}{21} - \frac{416}{21} \right) = e^{441} \cdot \frac{-440}{21}$$







6) Исследовать на экстремум функцию

$$U = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$$

$$\begin{aligned} U'_x &= 2xy + 4x & \begin{cases} 2xy + 4x = 0; & 2xy = -4x; y = -2 \\ U'_y = x^2 + y^2 + 6y & \begin{cases} x^2 + y^2 + 6y = 0; & x^2 + 4 - 12 = 0 \\ & x = \pm\sqrt{8} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

две точки  $(\sqrt{8}, -2)$   $(-\sqrt{8}, -2)$

$$U''_{xx} = 2y + 4, \quad U''_{yy} = 2y + 6, \quad U''_{xy} = 2x, \quad U''_{yx} = 2x$$

$$\Delta_1 = U''_{xx} = 0 \quad - \text{направление не работает}$$

Полная дифференциал  
точка  $(\sqrt{8}, -2)$

$$\begin{aligned} dU^2 &= (2y+4)dx^2 + 4xdxdy + (2y+6)dy^2 = \\ &= 4\sqrt{8}dxdy + 2dy^2 > 0 \quad - \text{точка минимума} \end{aligned}$$

точка  $(-\sqrt{8}, -2)$

$$dU^2 = -4\sqrt{8}dxdy + 2dy^2 < 0 \quad - \text{точка максимума}$$

