① Найти ~~ч~~ частные производные первого и второго порядка. Убедиться в равенстве смешанных производных

$$U = x^3 + 3xy^2 + z^2 - 39x - 36y + 2z + 26$$

$U'_x = 3x + 3y^2 - 39$; $\quad U''_{xx} = 3$;

$U'_y = 6xy - 36$; $\quad U''_{yy} = 6x$

$U'_z = 2\cancel{y}z + 2$; $\quad U''_{zz} = 2$

$U''_{xy} = 6y$ остальные смешанные производные $= 0$

$U'_{yx} = 6y$

② $U = \dfrac{256}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + z^2$

$U'_x = -\dfrac{256}{x^2} + \dfrac{2x}{y}$; $\quad U''_{xx} = \dfrac{512}{x^3} + \dfrac{2}{y}$

$U'_y = -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y}{z}$; $\quad U''_{yy} = \dfrac{2x^2}{y^3} + \dfrac{2}{z}$

$U'_z = -\dfrac{y^2}{z^2} + 2z$; $\quad U''_{zz} = \dfrac{2y^2}{z^3} + 2$

$U''_{xy} = -\dfrac{2x}{y^2}$; $\quad U''_{yz} = -\dfrac{2y}{z^2}$

$U''_{yx} = -\dfrac{2x}{y^2}$ $\quad U''_{zy} = -\dfrac{2y}{z^2}$


ESPIRITU
DE CHILE
Gran Reserva
2015

③ Найти производную функции

$U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(-9, 8, -12)$

в точке $M(8, -12, 9)$

$U'_{\vec{c}} = (\vec{c_0} \cdot \operatorname{grad} U)$ ; $\operatorname{grad} U = (U'_x, U'_y, U'_z)$

$U'_x = 2x$ ; $U'_y = 2y$ ; $U'_z = 2z$ ; $\operatorname{grad} U = (2x, 2y, 2z)$

$|\vec{c}| = \sqrt{-9^2 + 8^2 - 12^2} = \sqrt{81 + 64 + 144} = 17$

$\vec{c_0} = \left(\frac{-9}{17}; \frac{8}{17}; \frac{12}{17}\right)$

$\operatorname{grad} U = (16, -24, 18)$

$U'_{\vec{c}} = \frac{-9}{17} \cdot 16 - \frac{8}{17} \cdot 24 + \frac{12}{17} \cdot 18 = -\frac{144}{17} - \frac{192}{17} + \frac{216}{17} = -\frac{120}{17}$

---

④ Найти производную функции $U = e^{x^2+y^2+z^2}$

по направлению вектора $\vec{c}(4, -13, -16)$ в точке $(-16, 4 -13)$

$U'_x = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x$ ; $U'_y = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2y$ ; $U'_z = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2z$

$\operatorname{grad} U = (-e^{441} \cdot 32, e^{441} \cdot 8, -e^{441} \cdot 26)$

$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 - 13^2 - 16^2} = 21$

$\vec{c_0} = \left(\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right)$

$U'_{\vec{c}} = e^{441}\left(-\frac{128}{21} - \frac{104}{21} + \frac{416}{21}\right) = e^{441} \cdot \frac{184}{21}$

⑥ Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$$

$u'_x = 2xy + 4x$

$u'_y = x^2 + y^2 + 6y$

$$\begin{cases} 2xy + 4x = 0; & 2xy = -4x;\ y = -2 \\ x^2 + y^2 + 6y = 0; & x^2 + 4 - 12 = 0 \\ & x = \pm\sqrt{8} \end{cases}$$

две точки $(\sqrt{8}, -2)$ $(-\sqrt{8}, -2)$

$u''_{xx} = 2y + 4,\quad u''_{yy} = 2y + 6,\quad u''_{xy} = 2x,\quad u''_{yx} = 2x$

$\Delta_1 = u''_{xx} = 0$ – матрица не работает

Полный дифференциал

точка $(\sqrt{8}, -2)$

$$du^2 = (2y+4)dx^2 + 4x\,dx\,dy + (2y+6)dy^2 =$$
$$= 4\sqrt{8}\,dx\,dy + 2dy^2 > 0 \text{ – точка минимума}$$

точка $(-\sqrt{8}, -2)$

$$du^2 = -4\sqrt{8}\,dx\,dy + 2dy^2 < 0 \text{ – точка максимума}$$