

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
Кафедра прикладной механики и управления
Лаборатория управления и навигации

Курсовая работа

**Алгоритмы векторной аэрогравиметрии при измерениях на
повторных галсах**

The algorithms of airborne vector gravimetry based on measurements at the repeated
lines.

Работу выполнил

студент 5 курса

Акимов Иван

Научный руководитель

Вязьмин В.С.

Москва, 2024

Содержание

1	Введение	2
1.1	Постановка задачи	2
1.2	Уклонение отвесной линии	2
1.3	Цель и план работы	3
2	Основные уравнения векторной аэрогравиметрии	4
2.1	Опорные уравнения	4
2.2	Модельные уравнения	4
2.3	Модели измерений гравиметра	4
2.4	Вывод уравнений ошибок БИНС	5
3	Задача оценивания уклонений отвесной линии и аномалии	6
3.1	Базисные сплайны на прямой	6
3.2	Модель УОЛ и аномалии	6
3.3	Модели инструментальных погрешностей гравиметра	7
3.4	Постановка задачи оценивания аномалии и УОЛ	7
3.4.1	Построение модели аномалии и УОЛ во времени	7
3.4.2	Построение модели аномалии и УОЛ в пространстве	9
4	Построение алгоритма оценивания аномалии и УОЛ	10
4.1	Дискретный фильтр Калмана	10
5	Анализ инструментальных ошибок гравиметра	11
5.1	Общая информация	11
5.2	Частотный анализ шумов акселерометров	11
5.3	Частотный анализ шумов ДУС	11
6	Имитация данных аэрогравиметра	11
6.1	Имитация данных ГНСС	12
6.2	Имитация данных БИНС	12
6.3	Имитация вектора силы тяжести	13
7	Результаты проверки алгоритмов на модельных данных	14
7.1	Временной подход	14
7.2	Пространственный подход	16
7.3	Сравнение подходов	19
7.3.1	Ошибки определения компонент УОЛ	19
7.3.2	Статистика	20
8	Выводы	21
9	Список литературы	22

1 Введение

1.1 Постановка задачи

Аэрогравиметрия – раздел геофизики, изучающий методы измерения гравитационной аномалии при помощи датчиков, установленных на борту летательного аппарата.

Основной прибор – аэрогравиметр. Он состоит из бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС), которая включает 3 акселерометра и 3 датчика угловой скорости, причем оси чувствительности откалиброванных акселерометров ортогональны и совпадают с осями ДУС, образуя приборный трехгранник. В центре приборного трёхгранника расположена чувствительная масса блока акселерометров (ЧМ). Вторая часть гравиметра – приемники глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС). В работе считается, что координаты ЧМ, вычисленные по измерениям ГНСС, абсолютно точны.

ГВо время полета аэрогравиметрической съемки летательный аппарат движется по галсам - прямолинейным участкам траектории. Галсы могут быть расположены параллельно друг другу, перпендикулярно, или наложены друг на друга (такие галсы называются повторные).

Традиционно в аэрогравиметрии определяется вертикальная компонента вектора силы тяжести (аномалия). Определение горизонтальных компонент потенциально возможно, однако инструментальные погрешности инерциальных датчиков БИНС гравиметра не отделимы от них без дополнительной информации о поле силы тяжести. В качестве таковой в курсовой работе взята зависимость компонент вектора силы тяжести от координаты вдоль галса. Вкупе с измерениями гравиметра вдоль нескольких повторных галсов предполагается, что данная априорная информация позволит повысить точность векторной аэрогравиметрии [1], [6].

1.2 Уклонение отвесной линии

Введем географическую систему координат Mx (направление осей: восток, север, зенит) с центром в точке M (ЧМ блока акселерометров). Вектор нормальной силы тяжести $\vec{g}_0 = (0, 0, -g_0)^T$, где g_0 вычисляется по формуле (1) или иной расчетной формуле.

Пусть $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$ – вектор фактической силы тяжести. Тогда вектор возмущения силы тяжести $\vec{\delta g} = \vec{g} - \vec{g}_0$

Уклонение отвесной линии (УОЛ) – угол между векторами фактической силы тяжести и нормальной. В силу малости этого угла, УОЛ принято считать:

$\xi = -\frac{g_1}{g_0}$ – восточная компонента УОЛ

$\eta = -\frac{g_2}{g_0}$ – северная компонента УОЛ

Строго говоря, в курсовой работе мы оперируем именно вектором возмущения силы тяжести $\vec{\delta g}$, однако, в силу интереса к УОЛ и элементарной связи, часто вместо « вектор возмущения силы тяжести » будем говорить «УОЛ».

Основная единица измерений аномалии – **миллигал**, который обозначается [мГал]. $1 \text{ мГал} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$.

Приведем формулу Гельмерта для расчета вертикальной компоненты вектора нормальной силы тяжести [6]:

$$g_0(\phi, h) = g_e \cdot (1 + \beta \sin^2 \phi - \beta_1 \sin^2(2\phi)) - \omega_0^2 h, \quad (1)$$

где: g_e – значение силы тяжести на экваторе,

ω_0^2 – квадрат частоты Шулера,

β_1, β – числовые коэффициенты.

1.3 Цель и план работы

Цель данной работы: повысить точность определения УОЛ, предполагая, что измерения аэрогравиметра ведутся на повторных галсах.

План работы:

- построение моделей инструментальных ошибок гравиметра;
- имитация данных гравиметра с использованием построенных моделей погрешностей;
- разработка алгоритмов оценивания УОЛ на основе интеграции БИНС-ГНСС и ряда гипотез. Предполагается, что:

1. Измерения происходят на серии повторных галсов: считаем, что летательный аппарат движется на одной и той же местности, либо галсы отстоят друг от друга незначительно (так что горизонтальный градиент УОЛ пренебрежимо мал.).

2. Каждая компонента УОЛ есть функция от параметра s : $\delta g = f(s)$, где:

s – расстояние вдоль галса в заданном направлении;

$f(s)$ одна и та же для всех галсов.

То есть δg зависит только от положения на галсе и не зависит от номера галса или времени;

- проверка алгоритма на имитационных данных.

2 Основные уравнения векторной аэрогравиметрии

2.1 Опорные уравнения

Выберем в качестве опорных осей географическую систему координат: восток, север, зенит. Будем считать, что координаты гравиметра определяются точно. Выпишем уравнения движения ЧМ гравиметра в географических осях (далее будем обозначать вектора без стрелки сверху):

$$\begin{cases} \dot{V}_x = (\hat{\Omega}_x + 2\hat{u}_x)V_x + g_0 + \delta g + L_{zx}^T f_z \\ \dot{L}_{zx} = \hat{\omega}_z L_{zx} - L_{zx} \hat{\omega}_x \end{cases} \quad (2)$$

где:

δg – вектор возмущения силы тяжести;

V_x – вектор относительной линейной скорости ЛА;

Ω_x – вектор относительной угловой скорости географического трёхгранника;

u_x – вектор абсолютной угловой скорости вращения Земли;

g_0 – вектор нормальной силы тяжести;

L_{zx} – матрица перехода от географического трёхгранника к приборному;

f_z – вектор удельной силы реакции, действующей на ЧМ, в проекции на приборные оси.

2.2 Модельные уравнения

Введем модельные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{V}'_x = (\hat{\Omega}_x + 2\hat{u}_x)V'_x + g_0 + L'^T_{zx} f'_z \\ \dot{L}'_{zx} = \hat{\omega}'_z L'_{zx} - L'_{zx} \hat{\omega}_x \end{cases} \quad (3)$$

V'_x, L'_{zx} – модельная скорость и ориентация модельного трёхгранника;

f'_z, ω'_z – измерения акселерометров и ДУС.

2.3 Модели измерений гравиметра

Введем модель измерений инерциальных датчиков и ГНСС:

$$\begin{cases} f'_z = f_z + \Delta f_z \\ \omega'_z = \omega_z - \nu_z \\ V^{gps}_x = V_x + e^s_v \end{cases} \quad (4)$$

где $\Delta f_z, \nu_z, e^s_v$ – инструментальные погрешности.

2.4 Вывод уравнений ошибок БИНС

Примем, что ошибка определения ориентации приборного трёхгранника относительно географического мала:

$$L'_{zx} = (I + \hat{\beta}_x)L_{zx}^T \quad (5)$$

где β_x – вектор малого поворота (также его называют «вектор кинематической ошибки»).

Введем вектор полной ошибки скорости:

$$\Delta V_x := V'_x - V_x \quad (6)$$

Вычтя из модельных уравнений (3) идеальные уравнения (2), а также используя предположение (5) получим уравнения ошибок БИНС [2]:

$$\begin{cases} \Delta \dot{V}_x = (\hat{\Omega}_x + 2\hat{u}_x)\Delta V_x - \delta g + \hat{\beta}_x^T L'_{zx} f'_z + L'_{zx} \Delta f_z \\ \dot{\beta}_x = \hat{\omega}_x \beta_x + L'_{zx} \nu_z \end{cases} \quad (7)$$

Разделим ошибки на динамические и кинематические : $\Delta V_x = \delta V_x + \hat{\beta}_x V'_x$

Тогда уравнения ошибок запишутся в виде [2]:

$$\begin{cases} \delta \dot{V}_x = (\hat{\Omega}_x + 2\hat{u}_x)\delta V_x - \delta g + \hat{g}_0 \beta_x + L'_{zx} \Delta f_z + \hat{V}'_x L'_{zx} \nu_z \\ \dot{\beta}_x = \hat{\omega}_x \beta_x + L'_{zx} \nu_z \end{cases} \quad (8)$$

Добавим к этой системе уравнениях корректирующих измерений ГНСС (разность модельной скорости и скорости из ГНСС):

$$\Delta V'_x := V'_x - V_x^{gps} = \Delta V_x - e_v^{gps} = \delta V_x + \hat{\beta}_x V'_x - e_v^s \quad (9)$$

Таким образом, получается система:

$$\begin{cases} \delta \dot{V}_x = (\hat{\Omega}_x + 2\hat{u}_x)\delta V_x - \delta g + \hat{g}_0 \beta_x + L'_{zx} \Delta f_z + \hat{V}'_x L'_{zx} \nu_z \\ \dot{\beta}_x = \hat{\omega}_x \beta_x + L'_{zx} \nu_z \\ \Delta V'_x := V'_x - V_x^{gps} = \Delta V_x - e_v^{gps} = \delta V_x + \hat{\beta}_x V'_x - e_v^s \end{cases} \quad (10)$$

Для замыкания данной системы требуется введение модели вектора возмущения силы тяжести, а также инструментальных погрешностей гравиметра.

3 Задача оценивания уклонений отвесной линии и аномалии

3.1 Базисные сплайны на прямой

В работе предполагается учесть координатную зависимость УОЛ и аномалии на повторных галсах. Воспользуемся В-сплайнами для построения априорной модели всех 3х компонент вектора возмущения силы тяжести.

Определение 1: пусть дано разбиение отрезка $T = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = b\}$. Кубическим сплайном называется кусочно-полиномиальная функция не выше 3й степени, где каждый полином задан на отрезке из данного разбиения, принадлежащая классу $C^2[a, b]$.

Определение 2: кубическим В-сплайном (с началом в узле ξ_i) называется функция $B_i^3(t) = B_i^0(t) * B_i^0(t) * B_i^0(t) * B_i^0(t)$

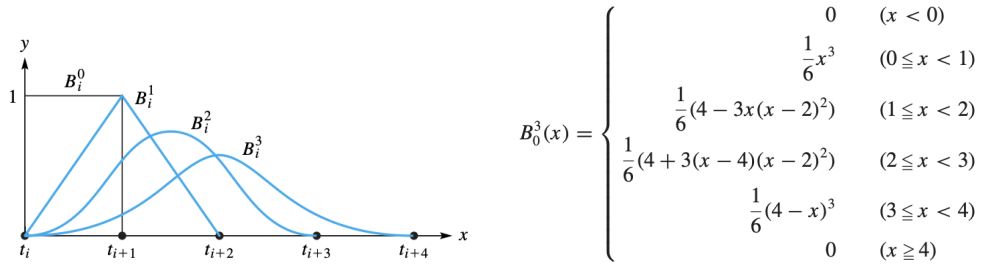
где $B_i^0(t)$ – характеристическая (индикаторная) функция отрезка $[\xi_i, \xi_{i+1}]$,

$x(t) * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(\tau - t)d\tau$ – интегральная свертка.

В-сплайны и сплайны связаны замечательными свойствами [7]:

1. Пусть $S_T[a, b]$ – пространство всех кубических сплайнов с разбиением Т. Тогда система $\{B_i\}_{i=1}^n$ образует базис пространства $S_T[a, b]$;
2. $B_i^3(t) = B_0^3(t - \xi_i)$;
3. $supp B_0^{(3)} = [\xi_0, \xi_4]$;
4. Если шаг между узлами постоянный, то В-сплайн зависит об безразмерного аргумента $\frac{t-\xi_i}{\Delta T}$, ΔT – шаг между узлами.

Таким образом, всякий кубический сплайн можно записать в виде $S(t) = \sum_{i=1}^n c_i B_0^3(\frac{t-\xi_i}{\Delta T})$.



3.2 Модель УОЛ и аномалии

Введем априорную модель УОЛ и аномалии. Будем считать, что аномалия и УОЛ зависят от параметра τ , который параметризует произвольный отрезок $\tau \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Кроме того, на отрезке $[a, b]$ введено равномерное разбиение из N узлов сплайнов, τ_k – узлы разбиения, $\Delta\tau$ – шаг между узлами. Тогда значение компоненты вектора возмущения силы тяжести в момент τ представимо в виде:

$$\delta g(\tau) = \sum_{k=1}^N c_k B_k(\tau), \quad B_k(\tau) = B_0^3(\frac{\tau - \tau_k}{\Delta\tau})$$

Запишем модели для всех трех компонент вектора возмущения силы тяжести:

$$\begin{cases} \delta g_1(\tau) = \sum_{k=0}^N B_k(\tau) c_k^1 = B_0(\tau) c_0^1 + B_1(\tau) c_1^1 + \dots + B_N(\tau) c_N^1 \\ \delta g_2(\tau) = \sum_{k=0}^N B_k(\tau) c_k^2 = B_0(\tau) c_0^2 + B_1(\tau) c_1^2 + \dots + B_N(\tau) c_N^2 \\ \delta g_3(\tau) = \sum_{k=0}^N B_k(\tau) c_k^3 = B_0(\tau) c_0^3 + B_1(\tau) c_1^3 + \dots + B_N(\tau) c_N^3 \end{cases} \quad (11)$$

где : $\delta g_1(\tau), \delta g_2(\tau)$ – УОЛ, $\delta g_3(\tau)$ – аномалия

Перепишем эти равенства в матрично-векторном виде. Сгруппируем сплайн-коэффициенты следующим образом: последовательно записываются коэффициенты по восточной, северной и вертикальной оси с одного узла, потом тройка со следующего узла и так далее.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \delta g_1(\tau) \\ \delta g_2(\tau) \\ \delta g_3(\tau) \end{pmatrix}}_{\delta g, (3 \times 1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} B_0(\tau) & 0 & 0 & B_1(\tau) & 0 & 0 & \dots & B_N(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & B_0(\tau) & 0 & 0 & B_1(\tau) & 0 & \dots & 0 & B_N(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & B_0(\tau) & 0 & 0 & B_1(\tau) & \dots & 0 & 0 & B_N(\tau) \end{pmatrix}}_{B(\tau), (3 \times 3N)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0^1 \\ c_0^2 \\ c_0^3 \\ c_1^1 \\ \vdots \\ c_N^3 \end{pmatrix}}_{c, (3N \times 1)}$$

3.3 Модели инструментальных погрешностей гравиметра

Введем модели инструментальных погрешностей акселерометров и гироскопов:

$$\begin{cases} \Delta f_z = \Delta f_z^0 + \Delta f_z^s, \\ \nu_z = \nu_z^0 + \nu_z^s, \end{cases} \quad (12)$$

где:

$\Delta f_z^s, \nu_z^s, e_v^s$ – векторные случайные процессы, предполагаемые белыми шумами с известными интенсивностями;

$\Delta f_z^0, \nu_z^0$ – постоянные смещения нулевых сигналов и дрейфы ДУС.

3.4 Постановка задачи оценивания аномалии и УОЛ

Пусть L – количество повторных галсов, N – количество узлов сплайнов на одном галсе, i, j – номера галсов. Галсы равной длины.

Рассмотрим произвольную компоненту вектора возмущения силы тяжести. Аппроксимируем её кубическими В-сплайнами двумя способами- вводя разбиение узлов во времени и в пространстве.

3.4.1 Построение модели аномалии и УОЛ во времени

Моделируем аномалию как сплайн функцию во времени.

Предположим, что географические координаты узлов на повторных галсах совпадают. Введем равномерное разбиение из N узлов сплайнов, t_k – узлы разбиения, Δt – шаг между узлами. Рассмотрим произвольную компоненту вектора возмущения силы тяжести:

$$\delta g(t) = \sum_{k=1}^N c_k B_k(t), \quad B_k(t) = B_0^3\left(\frac{t-t_k}{\Delta t}\right)$$

Введем вектор состояния: $x = (\delta V_x, \beta_x, \Delta f_z^0, \nu_z^0, c)^T \in \mathbb{R}^{12+3NL}$, где c – вектор сплайн коэффициентов для всех трех компонент вектора возмущения силы тяжести со всех галсов. Сплайн-коэффициенты предполагаются постоянными в течение полета.

Введем вектор измерений: $z = \Delta V'_x \in \mathbb{R}^3$.

В итоге получили замкнутую систему вида:

$$\begin{cases} \delta \dot{V}_x = (\hat{\Omega} + 2\hat{u}_E)\delta V_x - B(t)c + \hat{g}_0\beta_x + L'_{zx}(\Delta f_z^0 + \Delta f_z^s) + \hat{V}'_x L'_{zx}(\nu_z^0 + \nu_z^s) \\ \dot{\beta}_x = \hat{\omega}_x\beta_x + L'_{zx}(\nu_z^0 + \nu_z^s) \\ \Delta \dot{f}_z^0 = 0 \\ \dot{\nu}_z^0 = 0 \\ \dot{c} = 0 \\ \Delta V'_x = \delta V_x - \hat{V}'_x\beta_x - e_v^s \end{cases} \quad (13)$$

Поставим задачу оптимального стохастического оценивания вектора состояния x системы, получаемой из (13) переходом к дискретному времени. Требуется построить оценку \tilde{x} в каждый момент времени i по всем предыдущим измерениям – линейную, несмещенную, удовлетворяющую критерию оптимальности $D[\Delta x] \rightarrow \min$, где $\Delta x = x - \tilde{x}$

Вектор состояния оценивается при помощи фильтра Калмана.

Пусть $\tilde{x} = \tilde{x}_k$, где \tilde{x}_k – оценка, полученная в последний момент времени t_k .

Введем следующее представление для подвектора в \tilde{x} , состоящего из сплайн-коэффициентов: $\tilde{c} = ((c^I)^T, \dots, (c^L)^T)^T$, где c^I, c^{II}, \dots, c^L – оценки сплайн-коэффициентов вектора возмущения силы тяжести на I, II, ..., L галсах соответственно, то есть:

$$c^I = Proj_1 \cdot \tilde{x}$$

$$c^{II} = Proj_2 \cdot \tilde{x}$$

...

$$c^L = Proj_L \cdot \tilde{x}$$

Заметим, что на данном этапе гипотеза о повторяемости УОЛ и аномалии на галсах еще не была использована.

Введем $\delta c^I, \delta c^{II}, \dots, \delta c^L$ – ошибки оценки сплайн-коэффициентов на I, II, ..., L галсах.

С помощью взвешенного МНК, уточним оценки сплайн-коэффициентов УОЛ и аномалии, используя полученные оценки на галсах.

$$\begin{cases} c^I = c + \delta c^I \\ c^{II} = c + \delta c^{II} \\ \dots \\ c^L = c + \delta c^L \\ \sum_{i=1}^L \|\delta c^i\|_{(P_{\delta c}^i)^{-1}}^2 \rightarrow \min \end{cases} \quad (14)$$

где

$P_{\delta c}^i$, $i = 1 \dots L$ – матрицы ковариации ошибки оценки сплайн коэффициентов, соответствующие i -ому галсу.

3.4.2 Построение модели аномалии и УОЛ в пространстве

Моделируем УОЛ и аномалию как сплайн функцию, зависящую от координаты s вдоль галса. Введем равномерное разбиение из N узлов сплайнов, s_k – узлы разбиения, Δs – шаг между узлами. Рассмотрим произвольную компоненту вектора возмущения силы тяжести:

$$\delta g(s(t)) = \sum_{k=1}^N c_k B_k(s(t)) = B(s(t))c, \quad B_k(s(t)) = B_0\left(\frac{s(t)-s_k}{\Delta s}\right)$$

c – вектор сплайн-коэффициентов в параметризации вектора возмущений как функции от координаты.

Введем вектор состояния: $x = (\delta V_x, \beta_x, \Delta f_z^0, \nu_z^0, c)^T \in \mathbb{R}^{12+3N}$, где c – вектор сплайн коэффициентов всех трех компонент вектора возмущения силы тяжести на одном галсе.

Введем вектор измерений: $z = \Delta V'_x \in \mathbb{R}^3$.

В итоге получили замкнутую систему вида:

$$\begin{cases} \delta \dot{V}_x = (\hat{\Omega} + 2\hat{u}_E)\delta V_x - B(s(t))c + \hat{g}_0\beta_x + L'_{zx}(\Delta f_z^0 + \Delta f_z^s) + \hat{V}'_x L'_{zx}(\nu_z^0 + \nu_z^s) \\ \dot{\beta}_x = \hat{\omega}_x\beta_x + L'_{zx}(\nu_z^0 + \nu_z^s) \\ \Delta \dot{f}_z^0 = 0 \\ \dot{\nu}_z^0 = 0 \\ \dot{c} = 0 \\ \Delta V'_x = \delta V_x - \hat{V}'_x\beta_x - e_v^s \end{cases} \quad (15)$$

Поставим задачу оптимального стохастического оценивания для системы, получаемой из (15) переходом к дискретному времени. Требуется построить оценку \hat{x} в каждый момент времени i по всем предыдущим измерениям – линейную, несмещенную, удовлетворяющую критерию оптимальности $D[\Delta x] \rightarrow \min$, где $\Delta x = x - \tilde{x}$.

Вектор состояния оценивается при помощи фильтра Калмана.

Пусть $\tilde{x} = \tilde{x}_k$, где \tilde{x}_k – оценка, полученная в последний момент времени t_k .

В данном подходе гипотеза о повторяемости аномалии и УОЛ учитывается сразу в модели, то есть $B(s(t))$ – параметризация от координаты, а не времени.

4 Построение алгоритма оценивания аномалии и УОЛ

4.1 Дискретный фильтр Калмана

Имеем систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + J(t)q(t) \\ z(t) = H(t)x(t) + r(t) \end{cases} \quad (16)$$

$x = (\delta V_x, \beta_x, \Delta f_z^0, \nu_z^0, c)^T$ – вектор состояния системы;

$z = \Delta V'_x$ – доступное измерение системы.

Выпишем в явном виде составляющие данной системы:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \hat{\Omega}(t) + 2\hat{u}_E(t) & \hat{g}_0(t) & L'_{zx}(t) & \hat{V}'_x L'_{zx}(t) & -B(\tau) \\ 0 & \hat{\omega}_x(t) & 0 & L'_{zx}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$\tau \equiv t$ при временном подходе.

$\tau \equiv s(t)$ при пространственном подходе.

$$q = (\delta f_z^s, \nu_z^s)^T$$

$$E[q(t) \cdot q(\xi)^T] = Q(t) \cdot \delta(t - \xi)$$

$$H = (E, -\hat{V}'_x, 0, 0, 0)$$

$$r = -e_v^s$$

$$E[r(t) \cdot r(\xi)^T] = R(t) \cdot \delta(t - \xi)$$

Систему (16) с помощью метода Эйлера можно привести к дискретному виду:

$$\begin{cases} x_{j+1} = \Phi_j x_j + J_j q_j \\ z_j = H_j x_j + r_j \end{cases} \quad (18)$$

где:

$$\Phi_j = E + A(t_j)\Delta t,$$

$$J_j = J(t_j)$$

Далее оценим x при помощи фильтра Калмана (метод корня на основе QR-разложения) [3], [4], [5].

5 Анализ инструментальных ошибок гравиметра

5.1 Общая информация

Проведем анализ частотного состава случайных погрешностей инерциальных датчиков гравиметра iCORUS от 07.05.23, используя запись статического эксперимента.

Оценим спектральную плотность мощности погрешностей методом Уэлча.

Построим модели погрешностей близкие по частотному составу к реальным случайным погрешностям.

5.2 Частотный анализ шумов акселерометров

На данном графике представлена спектральная плотность реального ('true', синий график) и смоделированного ('model', красный) шумов акселерометров в логарифмическом масштабе. Модель - белый шум с интенсивностью $\sigma_f = 70$ мГал (на 400 Hz). Возмущения, на частотах, близких к частоте Найквиста, не стали имитировать, так как, скорее всего, они вызваны ошибками при внутренней обработке цифровых сигналов.

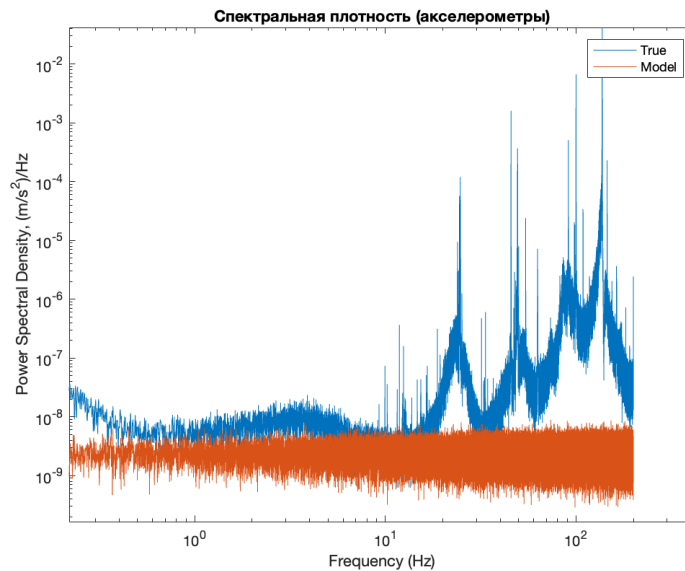


Рис. 1: Спектральная плотность АКС

5.3 Частотный анализ шумов ДУС

На данном графике представлена спектральная плотность реального ('true', синий график) и смоделированного ('model', красный) шумов датчиков угловой скорости в логарифмическом масштабе. Модель - первая разность белого шума с интенсивностью $\sigma_v = 7 \cdot 10^{-7}$ рад/с (на 400 Hz). Как видно, модель и реальные данные практически совпадают. Модель соответствует теории (в БИНС используется дифференцирующий лазерный ДУС).

6 Имитация данных аэрогравиметра

За основу измерений аэрогравиметра взяты данные, полученные при помощи компьютерного имитатора, разработанного Лабораторией управления и навигации. Исходными данными являются идеальные координаты и

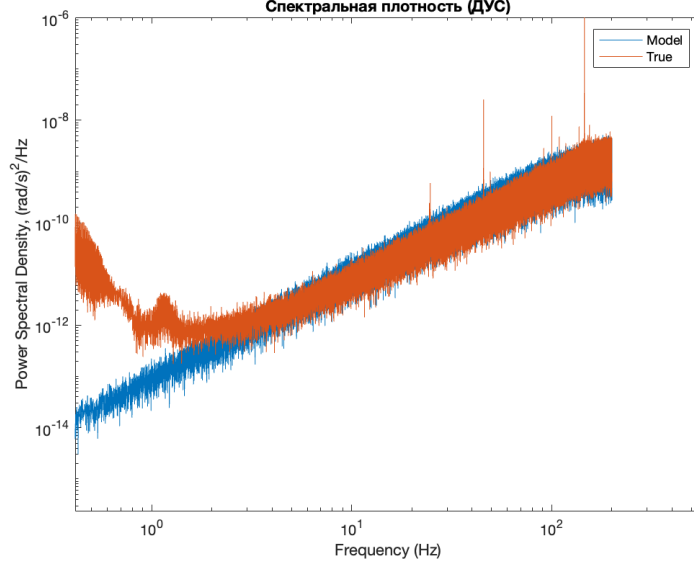


Рис. 2: Спектральная плотность ДУС

скорости, углы ориентации, показания идеальных акселерометров и ДУС. Далее, согласно изложенным выше моделям, производилось добавление инструментальных ошибок.

6.1 Имитация данных ГНСС

Данные ГНСС имитируются на частоте 10 Гц и включают:

координаты;

скорости: $V_x^{gps} = V_x + e_v^s$;

где e_v^s – центральная разность белого шума, СКО – $\sigma_r = 0.05$ м/с на 1 Гц

6.2 Имитация данных БИНС

Показания инерциальных датчиков имитируются на частоте 100 Гц.

Модель показаний акселерометров имеет вид: $f'_z = f_z + \Delta f_z^0 + \Delta f_z^s$

$$\Delta f_{z_1}^0 = 30 \text{ мГал} = 0,0003 \text{ м/с}^2;$$

$$\Delta f_{z_2}^0 = -40 \text{ мГал} = -0,0004 \text{ м/с}^2;$$

$$\Delta f_{z_3}^0 = 0 \text{ мГал} = 0 \text{ м/с}^2;$$

Δf_z^s – белый шум; $\sigma_f = 3$ мГал на 1 Гц.

Модель показаний ДУС имеет вид: $\omega'_z = \omega_z - \nu_z^0 - \nu_z^s$

$$\nu_{z_1}^0 = 0,003 \text{ гр/ч}$$

$$\nu_{z_2}^0 = -0,003 \text{ гр/ч}$$

$$\nu_{z_3}^0 = 0,001 \text{ гр/ч}$$

ν_z^s – первая разность белого шума; $\sigma_\nu = 0.03$ гр/ч на 1 Гц

6.3 Имитация вектора силы тяжести

Для имитации компонент вектора возмущения силы тяжести на повторных галсах использована модель XGM2019 в разложении до 2100 степени гармоник. Далее этот вектор перепроектировали на приборную систему координат. После этих преобразований, компоненты вектора возмущений силы тяжести были добавлены к показаниям акселерометров.

7 Результаты проверки алгоритмов на модельных данных

7.1 Временной подход

Полет состоял из двух галсов.

Оценки дрейфов ДУС (эталон: $\nu_{z_1}^0 = -3 \cdot 10^{-3}$ гр/час, $\nu_{z_2}^0 = -3 \cdot 10^{-3}$ гр/час, $\nu_{z_3}^0 = 1 \cdot 10^{-3}$ гр/час):

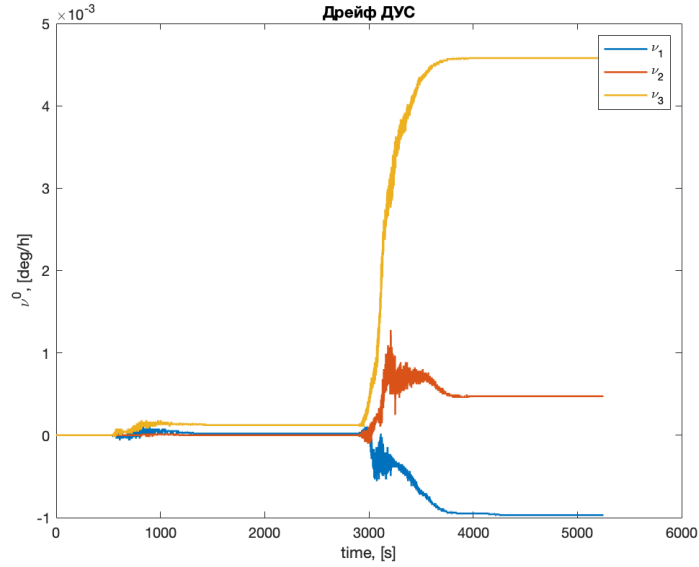


Рис. 3: Оценки дрейфов ДУС

Оценки смещения нулей акселерометров (эталон: $\Delta f_{z_1}^0 = 30$ мГал, $\Delta f_{z_2}^0 = -40$ мГал, $\Delta f_{z_3}^0 = 0$ мГал):

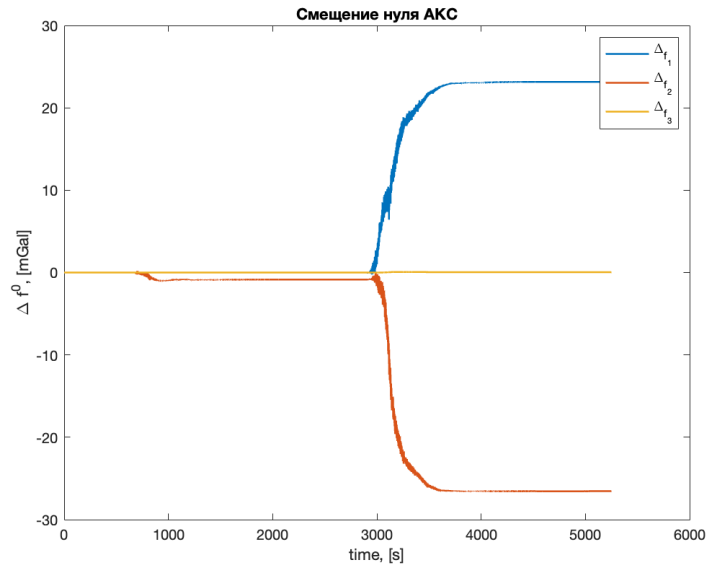


Рис. 4: Оценки смещений акс-ов

Можно заметить, что смещения нулей оценились фильтром не очень хорошо. Ошибки оценки достигают 10 мГал.

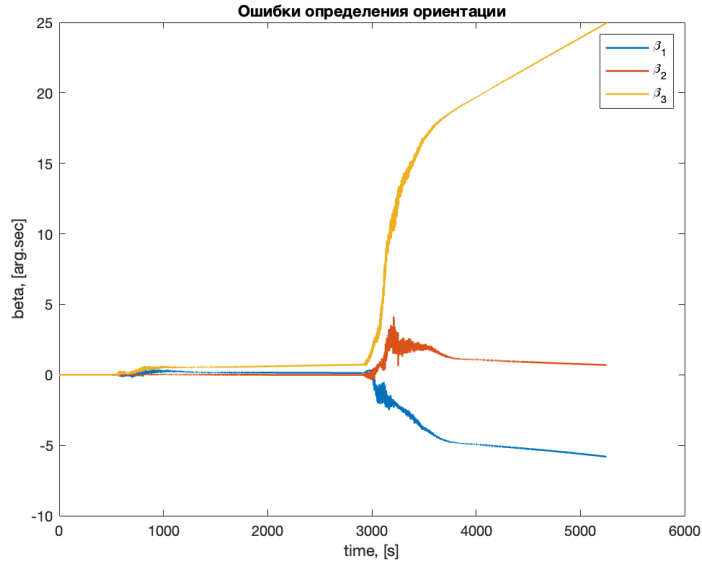


Рис. 5: Оценки угловых ошибок

Рассмотрим оценку β_x . Так как δg наблюдается в комбинации с β_x , то ошибка в её оценивании неизбежно приведет к ухудшению итоговой оценки УОЛ.

На первых двух графиках представлены истинная (симулированная) УОЛ и ее оценка, полученная с помощью работы алгоритма. На последнем графике представлена разность компонент истинной УОЛ и ее оценки, то есть ошибка определения. Как видно, данная ошибка достигает по модулю 20 мГал.

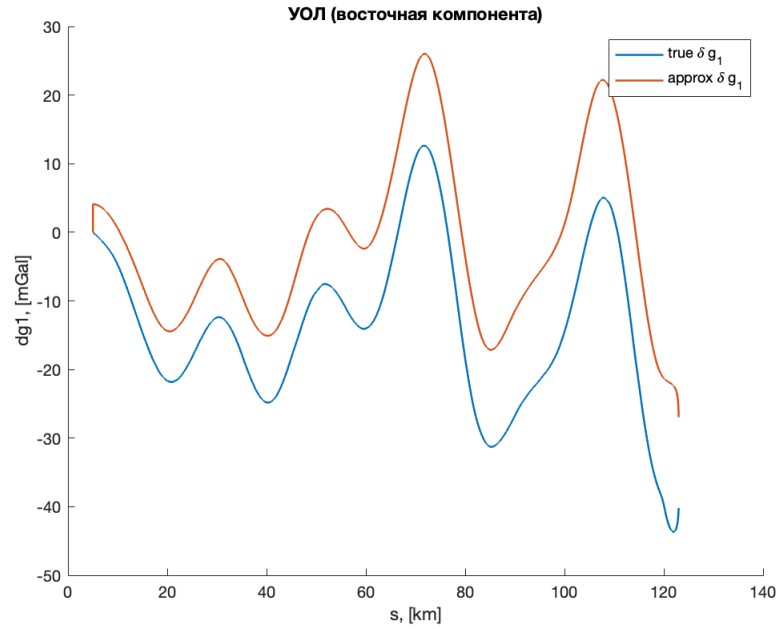


Рис. 6: Восточная компонента УОЛ

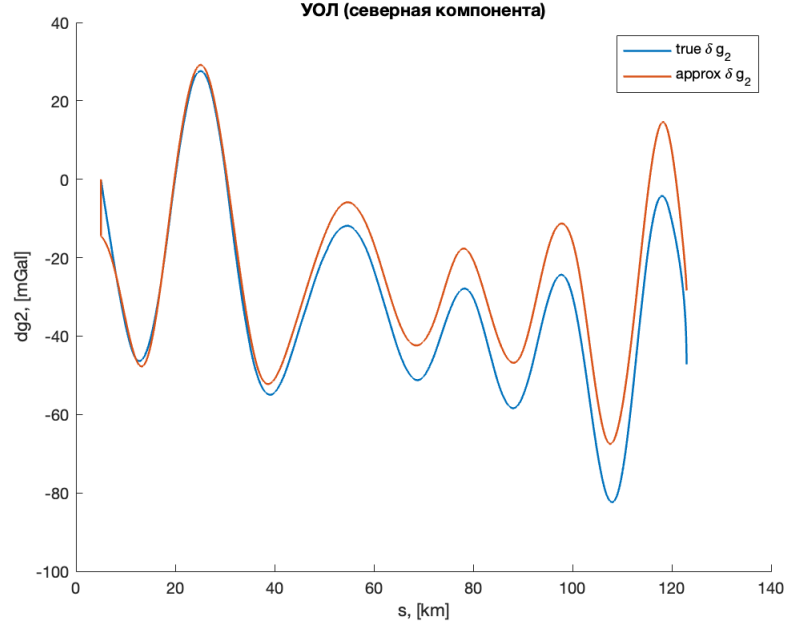


Рис. 7: Северная компонента УОЛ

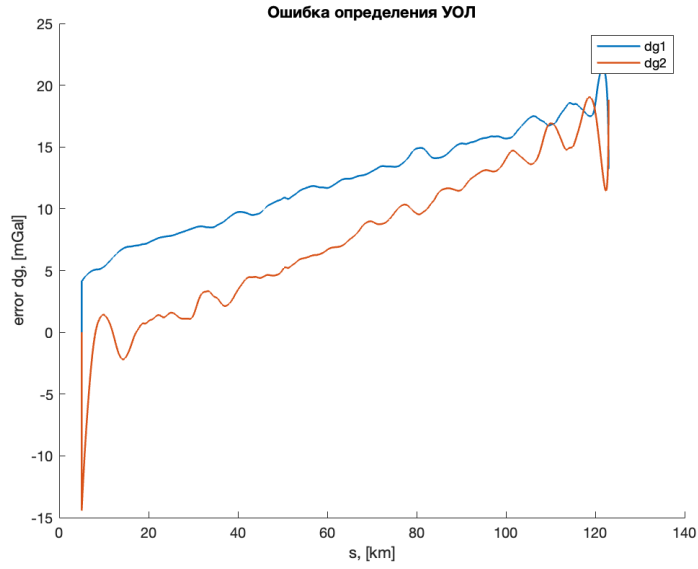


Рис. 8: Ошибки определения УОЛ

Обе компоненты УОЛ оценились не очень хорошо (влияние угловых ошибок β_x).

7.2 Пространственный подход

Были взяты те же самые данные, что для 1 алгоритма: двух галсовый симитированный полет.

Оценки дрейфов ДУС (эталон: $\nu_{z1}^0 = -3 \cdot 10^{-3}$ гр/час, $\nu_{z2}^0 = -3 \cdot 10^{-3}$ гр/час, $\nu_{z3}^0 = 1 \cdot 10^{-3}$ гр/час):

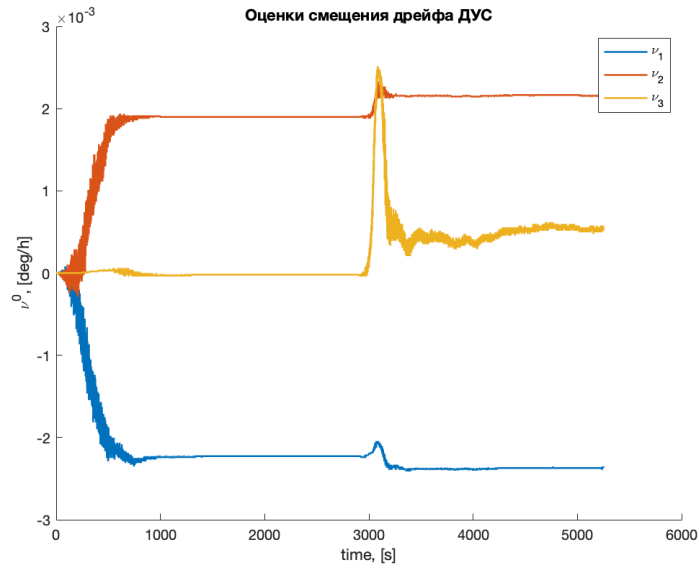


Рис. 9: Оценки дрейфов ДУС

Оценки смещения нулей акселерометров (эталон: $\Delta f_{z_1}^0 = 30$ мГал, $\Delta f_{z_2}^0 = -40$ мГал, $\Delta f_{z_3}^0 = 0$ мГал):

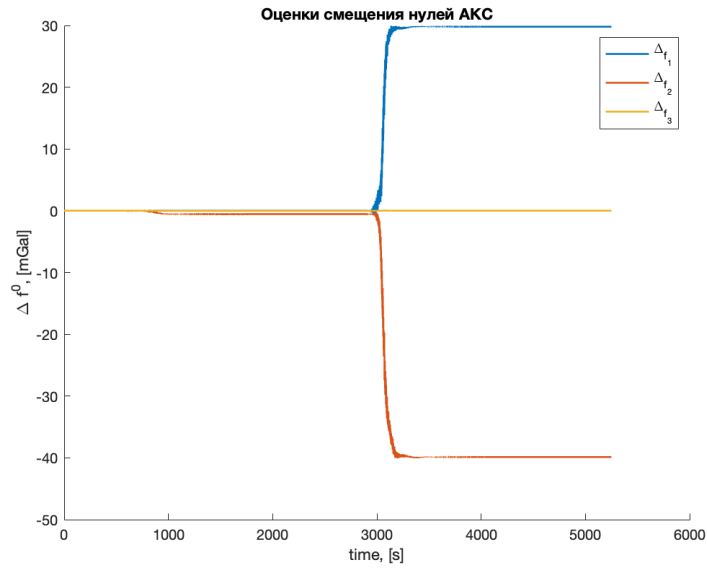


Рис. 10: Оценки смещений акс-ов

В данном алгоритме смещения нулей и дрейфов ДУС оценились фильтром гораздо лучше. Ошибки оценки менее 1 мГал.

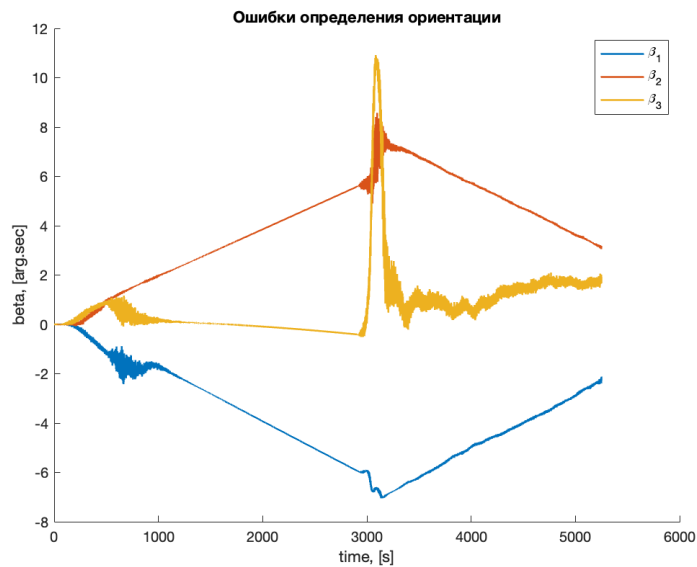


Рис. 11: Оценки угловых ошибок

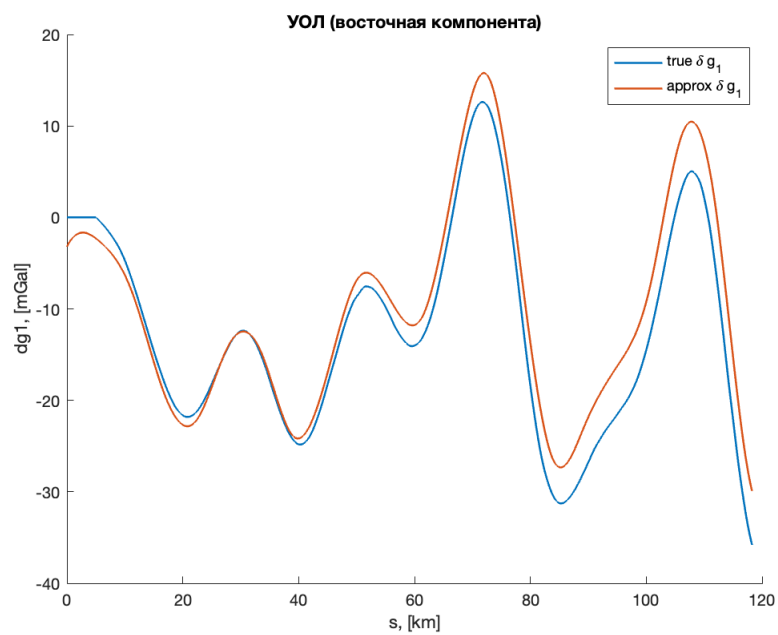


Рис. 12: Восточная компонента УОЛ

Ошибки оценки УОЛ получились не более 10 мГал. Таким образом, данный подход позволяет получить более точную оценку УОЛ.

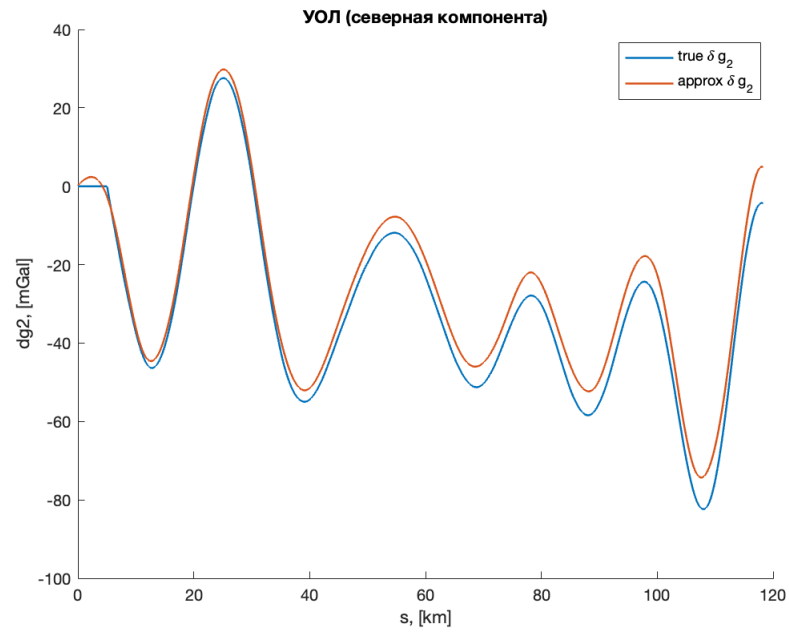


Рис. 13: Северная компонента УОЛ

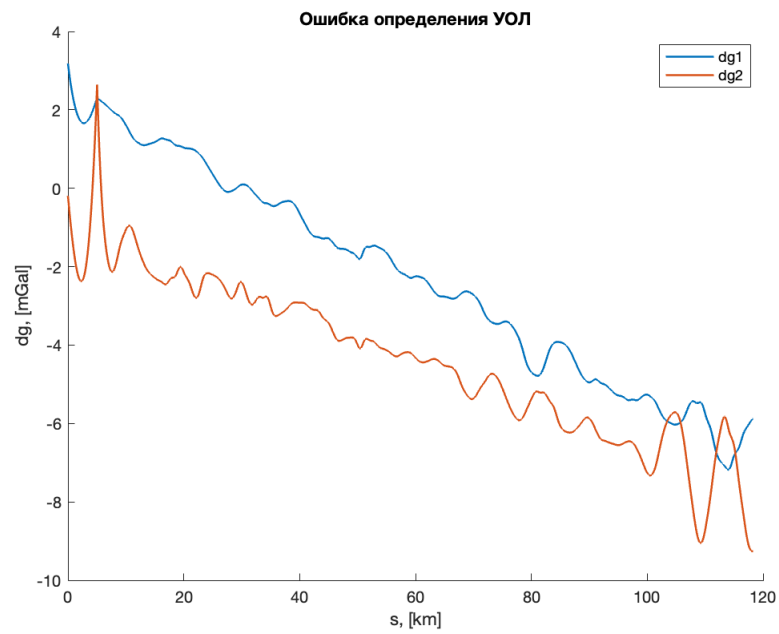


Рис. 14: Ошибки определения УОЛ

7.3 Сравнение подходов

7.3.1 Ошибки определения компонент УОЛ

Рассмотрим абсолютные значения ошибок определения УОЛ. Из графиков видно, что второй подход оценивает гораздо лучше.

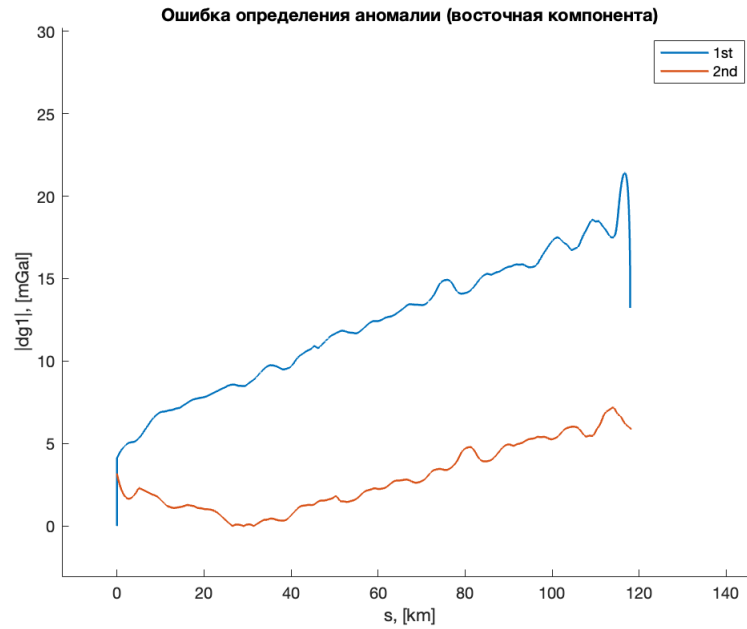


Рис. 15: Ошибки определения УОЛ (восточная компонента)

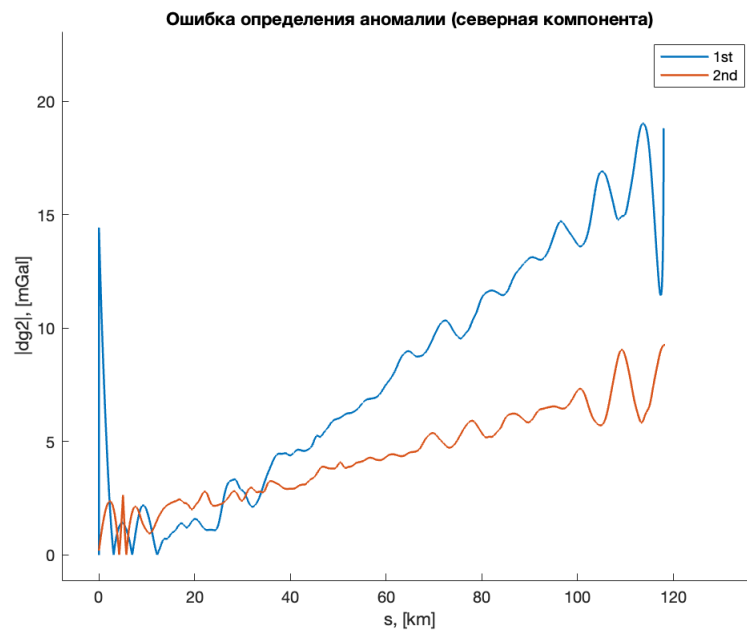


Рис. 16: Ошибки определения УОЛ (северная компонента)

7.3.2 Статистика

Рассмотрим таблицу. Из нее также видно, что оценка, получившаяся при втором подходе, значительно лучше оценки из первого подхода.

СКО ошибки оценки восточной компоненты УОЛ во втором подходе меньше в 1.25 раз, северной компоненты – 2.03 раза. Также ошибки оценки УОЛ во втором подходе гораздо меньше смещены от нуля.

ошибка определения УОЛ	временной подход	пространственный подход
dg1, среднее	12,29	-1,22
dg1, СКО	4,02	3,22
dg2, среднее	7,6	-3,56
dg2, СКО	5,85	2,88

8 Выводы

- Рассмотрена задача оценивания УОЛ с учетом измерений на повторных галсах;
- предложено и реализовано 2 подхода к оцениванию УОЛ, различающихся параметризациями УОЛ (во времени и в пространстве), а также способом учета априорной информации об УОЛ (оценка с помощью взвешенного МНК и непосредственно в ФК);
- проведен частотный анализ шумов инерциальных датчиков гравиметра iCORUS на основе которого построены модели инструментальных погрешностей датчиков БИНС, и симитированы данные бескарданного гравиметра на траектории типового полета;
- проведена проверка и анализ двух подходов на симитированных данных, пространственный подход показал лучшую точность оценки УОЛ.

9 Список литературы

1. Ю.В. Болотин, В.С. Вязьмин. «Математические методы авиационной гравиметрии», 2014.
2. Н.Б. Вавилова, А.А. Голован, Н.А. Парусников. «Математические основы инерциальных навигационных систем», издательство Московского Университета, 2020.
3. В.В. Александров, С.С. Лемак, Н.А. Парусников. «Лекции по механике управляемых систем», Макс Пресс, 2012.
4. А.И. Матасов «Основы теории фильтра Калмана», издательство Московского Университета, 2021.
5. Park P. G., Kailath T. New square-root algorithms for Kalman filtering //IEEE Transactions on Automatic Control. – 1995. – Т. 40. – №. 5. – С. 895-899.
6. В. Торге «Гравиметрия», Москва, издательство Мир, 1999.
7. Ward Cheney, David Kincaid, "Numerical Mathematics and Computing", 2008.