Hjem 3

Generelt

1. Lad være med at angive hvordan matrix ser ud. Konkrete eksempler kan ikke bevise noget generelt. I skal bruge regneregler for matrix til at finde resultater.
2. Mange laver fejl i følgende regneregler. Det er vigtigt at I kan dem udenad.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

3. Matrix multiplikation er ikke kommutativ. Det betyder at

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

a)

Det har de fleste ikke nogen problemer med. Så den springer jeg over.

b)

Hvis v_p er en partikulær løsning til et vist inhomogent ligningssystem, så gælder det,

$$A \cdot v_p = b$$

hvor

$$b \neq \mathbf{0}$$

$$A \cdot (2 \cdot v_p) = 2 \cdot (A \cdot v_p) = 2b$$

Da

$$b \neq \mathbf{0} \Rightarrow 2b \neq b$$

Derfor

$$A \cdot (2 \cdot v_p) \neq b$$

dvs. den ikke er en løsning.

Bemærk: Man må selvfølgelig godt bruge sætning 6.10 til at vise, at hvis man finder en løsning til lineær ligningssystem, så alle andre løsninger er en sammensætning af den løsning og den homogene løsning, dvs. $v = v_{par} + v_{hom}$. Men det gør $2v_p$ ikke.

c)

Metode 1

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}2\\-2\\-2\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

Bemærk at $v_1 + v_3 = v_4$.
Derfor er de fire vektorer lineært afhængige.

Metode 2

Sætning 7.8 skal anvendes.
Sæt vektorer sammen,

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\1 & -2 & 1 & 2\\0 & -2 & 2 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\0 & 1 & 0 & \frac{1}{6}\\0 & 0 & 1 & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

Det viser sig, $\rho(M) < 4$, så de er lineært afhængige.

d)

1

Vi skal vise,

$$A \cdot A^T = \left(A \cdot A^T\right)^T$$

$$\left(A \cdot A^T\right)^T = A^T \cdot \left(A^T\right)^T = A^T \cdot A$$

> Theorem 7.17
>
> 1. $\left(A^T\right)^T = A$
> 2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

2

Vi skal vise

$$B^{-1} = (B^{-1})^T$$

$$
\begin{aligned}
&B \cdot B^{-1} = I \\
\Updownarrow &(B \cdot B^{-1})^T = I^T = I \\
\Updownarrow &(B^{-1})^T \cdot B^T = I \qquad (B^T = B) \\
\Updownarrow &(B^{-1})^T \cdot B = I \\
\Rightarrow &(B^{-1})^T = B^{-1}
\end{aligned}
$$

e)

Første 2 colonner er de samme så determinanten er 0.

Bemærk: Mange studerende har brugt rækkeoperationer til at simplificere matrix, og derefter regne determinant. Det er ikke forkert. Men det er kun $R_i \leftarrow R_i + c \cdot R_j$, som ikke ændrer determinant.

Se Corollary 8.13, Theorem 8.18, Theorem 8.19.

Corollary 8.13

Let $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ be given and suppose that $\mathbf{C}$ is obtained from $\mathbf{A}$ by applying the elementary row operation $R_i \leftarrow c \cdot R_i$ on $\mathbf{A}$, for some i and some $c \in \mathbb{F}$. Then $\det(\mathbf{C}) = c \cdot \det(\mathbf{A})$.

Theorem 8.18

Let a square matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ be given and denote by $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ a matrix obtained from $\mathbf{A}$ using an elementary operation of the form $R_i \leftrightarrow R_j$ for some integers $i < j$. Then $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.

Theorem 8.19

Let $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ be given and suppose that the matrix $\mathbf{B}$ is obtained from $\mathbf{A}$ by applying the elementary row operation $R_i \leftarrow R_i + c \cdot R_j$ on $\mathbf{A}$, for some distinct row indices i, j, and $c \in \mathbb{F}$. Then $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

f)

Associativ lov anvendes her.

$$
\begin{aligned}
&(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) \\
=&A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\
=&A \cdot I \cdot A^{-1} \\
=&A \cdot A^{-1} \\
=&I
\end{aligned}
$$

Derfor $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.