Uge 10

Opgave 3:

$M(a + bZ + cZ^2 + dZ^3) = (a + b + 3c + d) + (3a - b + 2c + 4d)Z + (2a + 2b + 6c + 2d)Z^2$, hvor $a,$

a

Tag hver basisvektorer og finde deres image.

$$\begin{aligned} M(1) &= 1 + 3Z + 2Z^2 \\ M(Z) &= 1 - Z + 2Z^2 \\ M(Z^2) &= 3 + 2Z + 6Z^2 \\ M(Z^3) &= 1 + 4Z + 2Z^2 \end{aligned}$$

Find deres koordinater i basis $\gamma = (1, Z, Z^2)$.

$$[M(1)]_\beta = [1 + 3Z + 2Z^2]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[M(Z)]_\beta = [1 - Z + 2Z^2]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[M(Z^2)]_\beta = [3 + 2Z + 6Z^2]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$[M(Z^3)]_\beta) = [1 + 4Z + 2Z^2]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ifølge Lemma 10.31 skal man sætte disse koordinatvektorer sammen i denne rækkefølge som er angivet.

$${}_\gamma[M]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

b

I opgaven 2b fandt vi, at basis for ker $({}_\gamma[M]_\beta)$ er

$$\begin{bmatrix} -5/4 \\ -7/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og basis for image $({}_\gamma[M]_\beta)$ er

$$\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

Polynomierne $-5/4 - (7/4)Z + Z^2$ og $-5/4 + (1/4)Z + Z^3$ danner en basis for $\ker(M)$.
Polynomierne $1 + 3Z + 2Z^2$ og $1 - Z + 2Z^2$ danner en basis for $\text{image}(M)$.

c

$${}_{\gamma}[p_1(Z)]_{\beta} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$${}_{\gamma}[p_2(Z)]_{\beta} = \begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$$

Fra forrige opgave fik vi, at basis for image $({}_{\gamma}[M]_{\beta})$ er

$$\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

Så vi skal checke om linearkombination af vores basisvektorer kan give disse resultater eller ej.
Tag den første som eksempel,

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\3 & -1 & 2\\2 & 2 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Det viser sig, at tre vektorer er lineære uafhængige, hvilket betyder, at vektor $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ kan ikke beskrives ved hjælpe af basisvektor. Så ${}_{\gamma}[p_1(Z)]_{\beta}$ tilhører ikke image $({}_{\gamma}[M]_{\beta})$.
Det medfører også til, at $p_1(Z)$ ikke tilhører $\text{image}(M)$.
Samme metode kan anvendes på $p_2(Z)$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & -1 & 2\\2 & 2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$p_2(Z)$ tilhører $\text{image}(M)$.

Opgave 4

a

$$\begin{aligned} L(f+g) &= (f+g)' + (f+g)\\ &= f' + f + g + g'\\ &= L(f) + L(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(c \cdot f) &= (c \cdot f)' + c \cdot f \\ &= c \cdot f' + c \cdot f \\ &= c \cdot (f' + f) \\ &= cL(f) \end{aligned}$$

Linearitet holder.

b

Linearafbildning går fra β til β. Så vi skal tage hver basisvektor i β, afbilder den, dvs. finde $L(\beta_i)$, og derefter finde dens koordinatvektor i β.

$$[L(e^t)]_\beta = [2e^t]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[L(e^{-t})]_\beta = [0]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[L(\cos(t))]_\beta = [-\sin(t) + \cos(t)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[L(\sin(t))]_\beta = [\cos(t) + \sin(t)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sæt dem sammen i rækkefølge, vi får

$$_\beta[L]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c

Bemærk

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$e^t = \cosh(t) + \sinh(t)$$

$$e^{-t} = \cosh(t) - \sinh(t)$$

Basisskift går fra β til γ. Derfor vi skal tage alle basisvektor i β, og se hvordan dets koordinatvektor i β.

$$[\mathrm{id}_{V_1}(e^t)]_\gamma = [e^t]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{id}_{V_1}(e^{-t})]_\gamma = [e^{-t}]_\gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{id}_{V_1}(\cos(t))]_\gamma = [\cos(t)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{id}_{V_1}(\sin(t))]_\gamma = [\sin(t)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sæt dem sammen for at få svar.

$$_\gamma[\mathrm{id}_{V_1}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d

Samme tanker her...

$$[L(\sinh(t))]_\gamma = [\cosh(t) + \sinh(t)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[L(\cosh(t))]_\gamma = [\cosh(t) + \sinh(t)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[L(\sin(t))]_\gamma = [\cos(t) + \sin(t)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[L(\cos(t))]_\gamma = [-\sin(t) + \sin(t)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$_\gamma[L]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$