Opgave 3.

a.

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Lav Totalmatrix:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Man kan også sige: ① Der er ingen frie variabler (3 pivots og 3 variabler)

eller ② rang af totalmatrix = 3, svarer til 3 variabler.

eller Theorem 7.8

Så den eneste løsning er $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

b.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&a\\1&1&0&b\\0&1&1&c\\0&0&1&d\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b-a\\0&0&1&c-(b-a)\\0&0&0&d-(c-(b-a))\end{bmatrix}$$

vektors er lineær uafhængige hvis $d-c+b-a \neq 0$

For eksampel: $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

c. $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}$ er lineær uafhængige $\Rightarrow$ c kan ikke skrives som en linearkombination af $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

Contraposition: c kan skrives som en linearkombination af $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \Rightarrow \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}$ er lineær afhængige.

$$\boxed{\begin{matrix}p \Rightarrow q\\ \Updownarrow\\ \neg q \Rightarrow \neg p\end{matrix}}$$

$\underline{c} = c_1\underline{u} + c_2\underline{v} + c_3\underline{w}$ for visse $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$\Updownarrow$$

$\underline{c} - c_1\underline{u} - c_2\underline{v} - c_3\underline{w} = \underline{0}$

koefficient foran $\underline{c}$ er 1, som ikke er 0.

$$\Downarrow$$

Den opfylder ikke lineær uafhængighed.

Opgave 9:

basistilfælde: $n=2$

$$\det(A_2) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}\right) = -a_2 - a_1 = (-1)^{2-1} \cdot (a_1 + a_2) \checkmark$$

induktionstrin:

Antag for $n \geq 3$, $\det(A_{n-1}) = (-1)^{n-2} \cdot (a_1 + \cdots + a_{n-1})$

Vi skal vise $\det(A_n) = (-1)^{n-1} \cdot (a_1 + \cdots + a_n)$

Brug den sidste rekke til at bestemme determinant

$$\begin{aligned}
\det(A_n) &= (-1)^{n-1+n} \cdot 1 \cdot \det(A_{n-1}) + (-1)^{n+n} \cdot a_n \cdot (-1)^{n-1} \\
&= -\det(A_{n-1}) + (-1)^{n-1} \cdot a_n \\
&= -(-1)^{n-2} \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + (-1)^{n-1} \cdot a_n \leftarrow \text{brug antagelse} \\
&= (-1)^{n-1} \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + (-1)^{n-1} \cdot a_n \\
&= (-1)^{n-1} \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)
\end{aligned}$$

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 & a_1 \\ 1 & -1 & & & a_2 \\ & 1 & \ddots & & a_3 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -1 & a_{n-2} \\ & & & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad A_n = \begin{bmatrix} -1 & & & & 0 & a_1 \\ 1 & -1 & & & & a_2 \\ & 1 & \ddots & & & a_3 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & -1 & a_{n-1} \\ & & & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix}$$