Opgave 1 b.

basis for V_1 kan være $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ $\dim V_1 = 4$

basis for V_2 kan være $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ $\dim V_2 = 4$

basis for V_3 kan være $\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$ $\dim V_3 = 8$

basis for V_4 kan være $(1, Z, Z^2, Z^3, \cdots)$ $\dim V_4 = \infty$

basis for V_5 kan være $(1, i)$ $\dim V_5 = 2$

Læg mærke til forskel mellem "Det reelle vektorrum" og "Det komplekse vektorrum".
Fra wiki:
> When the scalar field is the real numbers the vector space is called a real vector space.

Opgave 2.

a. Lad $a_0 + b_0 Z + c_0 Z^2 \in W$, $a_1 + b_1 Z + c_1 Z^2 \in W$, for $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{C}$

$$(a_0 + b_0 Z + c_0 Z^2) + c\,(a_1 + b_1 Z + c_1 Z^2)$$

$$= (a_0 + c a_1) + (b_0 + c b_1) Z + (c_0 + c c_1) Z^2 \in W \quad \checkmark$$

Det viser sig, at W er et underrum.

b. $(1, z, z^2)$ er en basis ~~betyder~~ $\Rightarrow (1, z, z^2)$ er lineært uafhængige

dvs. $c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot Z + c_2 \cdot Z^2 = 0 \Rightarrow c_0 = c_1 = c_2 = 0.$ $(*)$

① Vis $(1, 1+Z, 1+Z+Z^2)$ er lineært uafhængige. Vi håber på, når vi løser $d_0 \cdot 1 + d_1 \cdot (1+Z) + d_2 \cdot (1+Z+Z^2) = 0$, får vi kun løsning $d_0 = d_1 = d_2 = 0$.

$$\Updownarrow \quad (d_0 + d_1 + d_2) \cdot 1 + (d_1 + d_2) Z + d_2 Z^2 = 0$$

Ifølge $(*)$ får vi, $\begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = 0 \\ d_1 + d_2 = 0 \\ d_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d_0 = 0 \\ d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{cases}$

② W har dimension 3. ~~Basis~~ Set $(1, 1+z, 1+z+z^2)$ har 3 lineært uafhængige vectors, så ifølge sætningen 9.27 er det en basis.

c. $[2+5z+z^2]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad [5z+10z^2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

Da $2+5z+z^2 = -3 \cdot 1 + 4(1+z) + 1\cdot(1+z+z^2)$

så $[2+5z+z^2]_\gamma = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Da $[5z+10z^2]_\gamma = -5 \cdot 1 + -5(1+z) + 10(1+z+z^2)$

så $[5z+10z^2]_\gamma = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$

Opgave 3.

1. $(1+i) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1+i \end{bmatrix}$ så lin. af. ELLER $\rho\left(\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ i & -1+i \end{bmatrix}\right) < 2$

2. Hvis vi vælger basis $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

så de tre matrices kan skrives som $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs. $3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

lin. af.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ i & -1+i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ rangen = 2 lin. uaf.

4. vælg basis $(1, z, z^2, z^3)$ så tre polynomier har koordinater $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så $-1\cdot(1+2z+z^2)+2(2+7z+3z^2+z^3)$
$= 3+12z+5z^2+2z^3$

<u>lin. af.</u>

Opgave 5a.

3. $A=-A^T \iff A=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \; a,b,c \in \mathbb{R}$

$d\in\mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} 0 & a_0 & b_0 \\ -a_0 & 0 & c_0 \\ -b_0 & -c_0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_0+da_1 & b_0+db_1 \\ -a_0-da_1 & 0 & c_0+dc_1 \\ -b_0-db_1 & -c_0-dc_1 & 0 \end{bmatrix} \in W_3$

$\therefore$ W_3 er et underrum

Opgave 7.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \overset{=\tau_0}{x_3} & \overset{=\tau_1}{x_4} & \overset{=\tau_2}{x_5} & & \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Lad x_3, x_4, x_5 være frie variabler, da de ikke har pivots.

$x_3 = \tau_0 \quad x_4 = \tau_1 \quad x_5 = \tau_2$

so $\begin{cases} x_1 = 4\tau_0 - 3\tau_1 + 3\tau_2 \\ x_2 = -3\tau_0 + \tau_1 - 2\tau_2 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \tau_0 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 8a.

① $\text{span}(u_1, u_2) \subseteq \text{span}(v_1, v_2)$, dvs. for en vilkårlig vektor $w = c_1 u_1 + c_2 u_2$ ~~kan også~~ for visse $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ kan også skrives i udtryk $w = d_1 v_1 + d_2 v_2$ for visse $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & u_1 & u_2 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ - & 0 & - & - \\ - & 0 & - & - \\ - & 0 & - & - \\ - & 0 & - & - \end{bmatrix} \quad \text{dvs.} \begin{cases} u_1 = -\frac{2}{7} v_1 - \frac{5}{7} v_2 \\ u_2 = -\frac{3}{7} v_1 - \frac{4}{7} v_2 \end{cases}$$

for en vektor $w = c_1 u_1 + c_2 u_2$

$$= c_1\left(-\frac{2}{7} v_1 - \frac{5}{7} v_2\right) + c_2\left(-\frac{3}{7} v_1 - \frac{4}{7} v_2\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{7} c_1 - \frac{3}{7} c_2\right) v_1 + \left(-\frac{5}{7} c_1 - \frac{4}{7} c_2\right) v_2$$

② $\text{span}(v_1, v_2) \subseteq \text{span}(u_1, u_2)$. Metoden er det samme.

For en vektor $w = c_1 v_1 + c_2 v_2$

$$= c_1(4u_1 - 5u_2) + c_2(-3u_1 + 2u_2)$$

$$= (4c_1 - 3c_2) u_1 + (-5c_1 + 2c_2) u_2$$

Sum op vi får $\text{span}(u_1, u_2) = \text{span}(v_1, v_2)$

Opgave 9.

Vi vælger vilkårlige vektorer $u_1, u_2 \in W_1 \cap W_2$, og vi vil gerne vise $u_1 + c u_2 \in W_1 \cap W_2$, $\forall c \in \mathbb{F}$

① $u_1, u_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u_1, u_2 \in W_1$

Da W_1 er et underrum $u_1 + c u_2 \in W_1$, $\forall c \in \mathbb{F}$

② Lignende argumenter gælder at $u_1 + c u_2 \in W_2$, $\forall c \in \mathbb{F}$

Derfor $u_1 + c u_2 \in W_1 \cap W_2$

Lemma 9.33 siger $W_1 \cap W_2$ er et underrum af V.