Uge 4

Opgave 2.a

Et kort bevis for *Lemma 3.26*.

$$e^z = w$$

Omskriv w til polær form ($p \in \mathbb{Z}$),

$$\begin{aligned} &\Updownarrow e^z = |w| e^{i \cdot (\arg(w) + 2p\pi)} \\ &\Updownarrow e^z = e^{\ln|w|} e^{i \cdot (\arg(w) + 2p\pi)} \\ &\Updownarrow e^z = e^{\ln|w| + i \cdot (\arg(w) + 2p\pi)} \end{aligned}$$

Derved kan vi se fra eksponenterne, at

$$z = \ln|w| + i \cdot (\arg(w) + 2p\pi),\ p \in \mathbb{Z}$$

Opgave 2.b

Svaret er

$$\{i2p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\right) \mid p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Opgave 2.c

Hvis

$$z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$$

så

$$e^z = e^a \cdot (cos(b) + i \cdot sin(b))$$

Derfor $e^z = 0$ hvis og kun hvis $e^a = 0$ eller $cos(b) + isin(b) = 0$ (ifølge nulreglen)
I udsagnslogik kan den godt skrives som,

$$e^z = 0 \leftrightarrow e^a = 0\ \vee\ cos(b) + i \cdot sin(b) = 0$$

- $\forall a \in \mathbb{R}\ e^a > 0$ ("$\forall$" betyder "for alle").
- Udtrykket $cos(b) + i \cdot sin(b)$ kan hellere ikke være 0, da der findes ikke $b \in \mathbb{R}$ som opfylder

$$cos(b) = 0\ \wedge\ sin(b) = 0$$

Derfor kan e^z aldrig være nul. $\square$

Opgave 5.a

Theorem 4.6 siger,
Rødderne til polynomiet

$$p(z) = az^2 + bz + c,\ a \neq 0$$

er

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

I opgaven har vi

$$\begin{aligned} z^2 &= -r \\ \Updownarrow\ z^2 + r &= 0 \\ \Updownarrow\ 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z + r &= 0 \end{aligned}$$

Derfor,

$$a = 1,\ b = 0,\ c = r$$

Insæt disse værdier i $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, får vi nemlig,

$$\begin{aligned} &\frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot r}}{2 \cdot 1} \\ &= \pm \frac{\sqrt{-4r}}{2} \\ &= \pm \frac{2i\sqrt{r}}{2} \\ &= \pm\, i\sqrt{r} \end{aligned}$$

Opgave 5.b

$$z = \sqrt[n]{|w|} e^{i\left(\frac{arg(w)}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)},\ p \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Da $n = 2,\ |w| = r,\ \arg(w) = \pi.$

$$z = \sqrt{r} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)},\ p \in \{0, \ldots, n-1\}$$

På den komplekse talplan kan vi se, at

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)} = \pm i,\ p \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Derfor

$$z = \pm\sqrt{r} \cdot i$$

Opgave 6.b

Lemma 4.12:

$$p(\lambda) = 0 \rightarrow p(\overline{\lambda}) = 0$$

dvs. for polynomiet **med reelle koefficienter**, hvis vi finder λ som er rod til $p(\lambda)$, så den komplekst konjugerede er også rod.
Den anden rod i opgaven er $1 - 2i$

Opgave 7.a

Et kort bevis for *Theorem 4.13*.

$$z^n = w$$

Omskriv w til polær form ($p \in \mathbb{Z}$),

$$\begin{aligned} &\Updownarrow z^n = |w|e^{i \cdot (\arg(w) + 2p\pi)} \\ &\Updownarrow z = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\frac{arg(w)}{n} + p\frac{2\pi}{n})} \end{aligned}$$

Opgave 8.a

$$-1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} &(-1 + \sqrt{3}i)^{10} \\ =&(-1 + \sqrt{3}i)^9 \cdot (-1 + \sqrt{3}i) \\ =&\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^9 \cdot (-1 + \sqrt{3}i) \\ =&2 \cdot (-1 + \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

Opgave 9.a

$$z = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = 1$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{a}{c},\ \mathrm{Im}(z) = \frac{b}{c}$$

$$a > b,\ c > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Så

$$\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)$$

Opgave 9.b

Nogenlunde det samme som Opgave 9.a, bare kør bevis "baglens".

Opgave 9.c

$$z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

Betragt

$$z^2 = \frac{7}{25} + \frac{24}{25}i$$

Vi har $|z^2| = 1$, men vi er ikke sikker, at $\frac{7}{25} > \frac{24}{25}$.
Derfor konstruere vi

$$i\overline{z^2} = \frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$$

$i\overline{z^2}$ opfylder kravene (længden er 1, og den reelle del er større end den imaginære del), så jævnfør Opgave 9.b kan vi finde $(7, 24, 25)$ som Pythagoræiske tripler.

Note

Meningen er at transformere z til andre komplekse tal, men samtidigt skal den nye komplekse tal opfylde to betingelser, nemlig længden skal være 1, og den reelle del skal være større end den imaginære del.