Opgave 6:

a. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

b. nej. $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$ er altid løsning til homogent linear system

c. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Løsning kan være, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ...

Opgave 7:

Den reducerede trappeform er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad + x_4 = 0 \\ x_2 \quad + 5x_4 = 1 \\ x_3 - 9x_4 = 1 \end{cases}$$

Lad x_4 være fri variable, betegnes som t.

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{x_4 = t} \\ x_1 = -x_4 = -t \\ x_2 = 1 - 5x_4 = 1 - 5t \\ x_3 = 1 + 9x_4 = 1 + 9t \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a. når $t = 0$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$

Opgave 8.

a. $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\underline{\underline{B}}$ er på reduerede trappe form.

$\underline{\underline{B}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\underline{\underline{B}}^{(1)}$ er ikke på reducerede trappeform.

$\underline{\underline{B}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\underline{\underline{B}}^{(3)}$ er på reduerede trappe form.

b.

$$\underline{\underline{B}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & * \\ & 1 & & & * \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & * \\ \hline & & 0 & & \\ & & 0 & & \end{array}\right] \Big\} \text{ null rækker}$$

All fire krav bliver opfyldt i Definition 6.19 for matrix $\underline{\underline{B}}^{(n+1)}$, hvis $\underline{\underline{B}}$ allerede er på reducerede trappeform.

Opgave 9.

a. Hvis $\rho(\underline{\underline{A}}) = 4$, tyder det på, der er 4 pivots. I 4x4 matrix,

Lidt Selvsigende

den eneste reducerede trappeform med 4 pivots er: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hvis $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, så ifølge definition 6.22, $\rho(\underline{\underline{A}}) = 4$.

b.

$$[\underline{\underline{A}} | \underline{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ x_3 = b_3 \\ x_4 = b_4 \end{cases}$$

Løsningen er $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$. Den har netop en løsning.