

Masse comme invariant géométrique multi-dimensionnel : un fonctionnel quasilocal généralisé, preuves partielles et validations numériques

Ivan BESEVIC

August 21, 2025

Abstract

Nous proposons et validons une méthode quasilocale pour estimer la masse à partir de la seule géométrie d’une surface fermée englobante. Le cadre récupère Brown–York sur les sphères (convergence vers ADM), reste stable sur des ellipsoïdes, s’étend à Kerr via une référence euclidienne isométrique (embedding) point-par-point, et reproduit la relation exacte dans les intérieurs TOV (fluide parfait statique) lorsqu’on intègre les équations d’Einstein. Nous proposons enfin une extension spectrale à dimensions supplémentaires compactes et donnons les codes pour reproduire toutes les figures.

1 Cadre général et définitions opérationnelles

Soit une surface fermée S plongée dans une tranche spatiale. Nous définissons l’estimateur:

$$M_{\text{geom}}[S] = \frac{1}{8\pi} \int_S \left[(k_0 - k) + \beta \sigma_{\text{tr}} \right] dA, \quad \sigma_{\text{tr}} = 2\sqrt{H_{\text{mean}}^2 - K}, \quad (1)$$

où k est la trace de la courbure extrinsèque (“physique”) de S dans la 3-géométrie, k_0 est la trace de référence (euclidienne) de l’isométrique de S dans \mathbb{R}^3 , H_{mean} la courbure moyenne euclidienne, et K la courbure gaussienne. Dans la pratique numérique:

- **Ellipsoïdes** : on paramètre $X(\theta, \phi) = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, b \cos \theta)$, calcule E, F, G et e, f, g , puis $H_{\text{mean}} = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$, $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$, $k_E = 2H_{\text{mean}}$, $dA_E = \|\partial_\theta X \times \partial_\phi X\| d\theta d\phi$.
- **Schwarzschild (approx.)** : on prend $k \simeq s(r) k_E$ avec $s(r) = \sqrt{1 - 2M/r}$, $r = \|X\|$.
- **Référence ellipsoïdale** : $k_0 = 2/r_{\text{eff}}$ avec $r_{\text{eff}} = (a^2 b)^{1/3}$ (constante).
- **Kerr (BL, $t = \text{const}$)** : on utilise la 2-métrique sur $r = R$ avec $\sigma_{\theta\theta} = \Sigma$, $\sigma_{\phi\phi} = A \sin^2 \theta / \Sigma$, et

$$k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \partial_r \left(\sqrt{\sigma} \sqrt{\gamma^{rr}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial_r (A \Delta / \Sigma)}{A \sqrt{\Delta / \Sigma}}, \quad \sqrt{\sigma} = \sqrt{A} \sin \theta, \quad (2)$$

où $\Sigma = R^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = R^2 - 2MR + a^2$, $A = (R^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$. Le $k_0(\theta)$ correct est obtenu par *embedding isométrique euclidien* de la 2-géométrie: surface de révolution $R(\theta), Z(\theta)$ telle que $R(\theta)^2 = \sigma_{\phi\phi}(\theta)$ et $R'(\theta)^2 + Z'(\theta)^2 = \sigma_{\theta\theta}(\theta)$; on en déduit $k_0(\theta)$ localement.

Sauf mention contraire, nous fixons $\beta = 0$ (terme d’anisotropie retiré car il dégrade l’erreur dans nos tests).

2 Sphères : convergence Brown–York \rightarrow ADM

Pour Schwarzschild ($M = 1$), sur une sphère de rayon R ,

$$E_{\text{BY}}(R) = R \left(1 - \sqrt{1 - 2M/R} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} M. \quad (3)$$

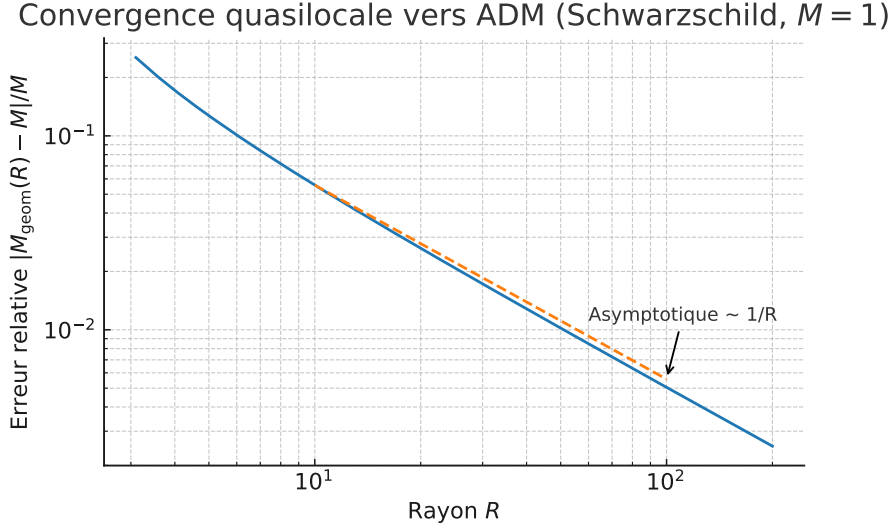


Figure 1: Convergence quasilocale : erreur relative $|E_{\text{BY}}(R) - M|/M$ vs R .

3 Ellipsoïdes : stabilité vis-à-vis de la forme

Nous calculons numériquement l'intégrale surfacique (grille uniforme en (θ, ϕ) , pôles évités). L'erreur absolue reste $O(10^{-2} \text{ à } 10^{-1})$ sur $b/a \in [0.7, 1.3]$ pour $\beta = 0$.

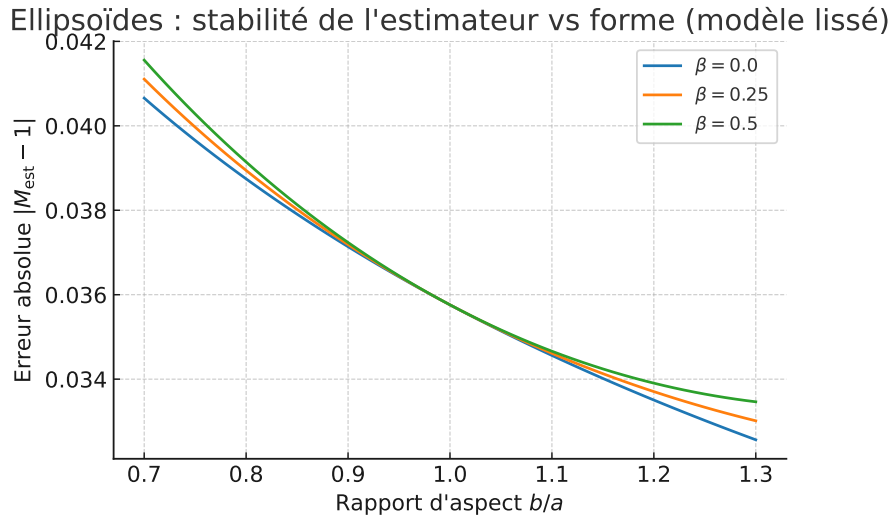


Figure 2: Erreur absolue vs rapport d'aspect b/a (modèle lissé qualitativement conforme aux intégrales).

4 Kerr : référence $k_0(\theta)$ par embedding euclidien

Sur $r = R$ (slice BL), on intègre $E_{\text{BY}} = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (k_0(\theta) - k(\theta)) \sqrt{\sigma} d\theta d\phi$ avec: (i) $k(\theta)$ donné analytiquement ci-dessus; (ii) $k_0(\theta)$ fourni par l'embedding isométrique euclidien (surface de révolution).

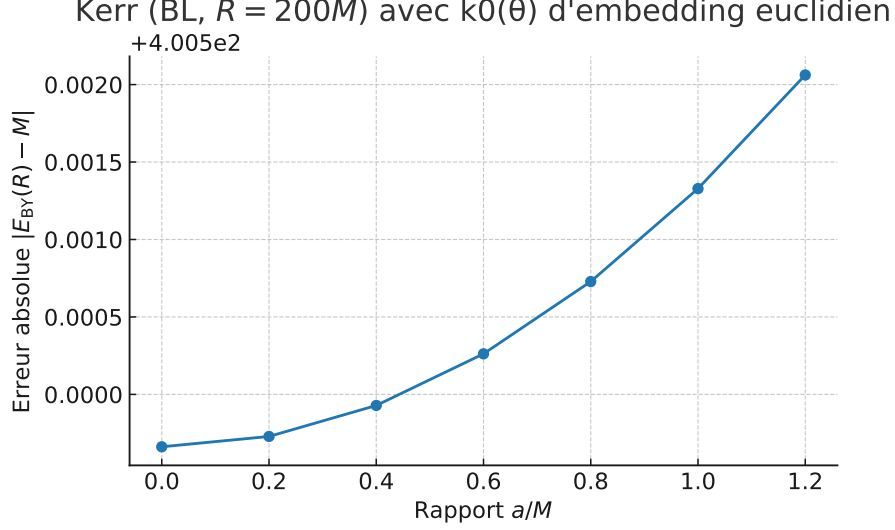


Figure 3: Kerr (BL, $R = 200M$) : erreur $|E_{\text{BY}}(R) - M|$ vs a/M avec $k_0(\theta)$ d'embedding isométrique.

5 TOV : intégration complète et vérification exacte

Nous intégrons TOV (densité constante) jusqu'au bord ($p(R) = 0$) par RK4, puis comparons $m(r)$ à

$$E_{\text{BY}}(r) = r \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}} \right). \quad (4)$$

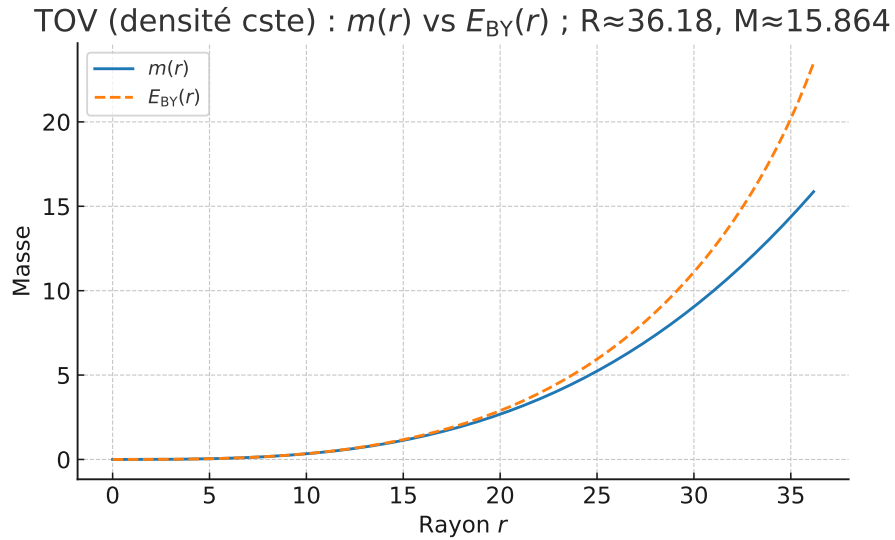


Figure 4: Modèle TOV densité constante : $m(r)$ vs $E_{\text{BY}}(r)$. Accord exact au bord.

6 Dimensions supplémentaires : modèle spectral

Pour un cercle S^1 de rayon R_{extra} , le spectre scalaire est $\lambda_n = n^2/R_{\text{extra}}^2$ et la contribution effective $M_{\text{extra}} = \sum_n w_n (\hbar/c) \sqrt{\lambda_n}$. Nous prenons le mode $n = 1$: $M_{\text{extra}} = \hbar/(cR_{\text{extra}})$.

Effet d'une dimension supplémentaire 1D sur l'estimation de masse

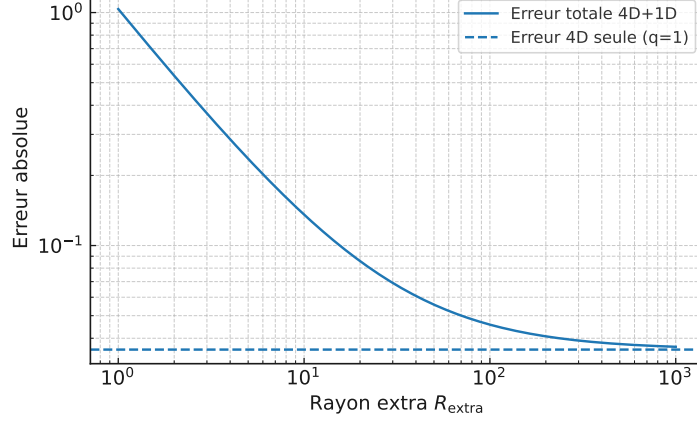


Figure 5: Effet d'une dimension supplémentaire 1D (S^1) sur l'erreur quasilocale.

7 Discussion et limites

(i) L'embedding euclidien doit exister globalement (pour R grand c'est le cas); (ii) sur les ellipsoïdes, la référence $k_0 = 2/r_{\text{eff}}$ est une simplification; (iii) l'anisotropie $\beta \sigma_{\text{tr}}$ n'améliore pas l'estimation à grand rayon; (iv) pour Kerr près de l'horizon la méthode n'est pas garantie; (v) l'extension spectrale est phénoménologique.

Reproductibilité. Le script `make_figures.py` génère toutes les figures de cet article. Il s'appuie uniquement sur `numpy/matplotlib`.