

# Masse comme invariant géométrique multi-dimensionnel : un fonctionnel quasilocal généralisé, preuves partielles et validations numériques

Ivan BESEVIC

August 21, 2025

## Abstract

Nous étudions et validons des approximations pour estimer la masse à partir de la seule géométrie d'une surface fermée englobante. Le cadre récupère Brown–York sur les sphères (convergence vers ADM), utilise des approximations phénoménologiques améliorées pour les ellipsoïdes et des modèles simplifiés pour Kerr, et reproduit la relation exacte dans les intérieurs TOV (fluide parfait statique) par intégration numérique directe. Nous proposons enfin des modèles conceptuels pour les dimensions supplémentaires et donnons les codes pour reproduire toutes les figures.

## 1 Cadre général et définitions opérationnelles

Soit une surface fermée  $S$  plongée dans une tranche spatiale. Nous définissons l'estimateur:

$$M_{\text{geom}}[S] = \frac{1}{8\pi} \int_S \left[ (k_0 - k) + \beta \sigma_{\text{tr}} \right] dA, \quad \sigma_{\text{tr}} = 2\sqrt{H_{\text{mean}}^2 - K}, \quad (1)$$

où  $k$  est la trace de la courbure extrinsèque (“physique”) de  $S$  dans la 3-géométrie,  $k_0$  est la trace de référence (euclidienne) de l'isométrie de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $H_{\text{mean}}$  la courbure moyenne euclidienne, et  $K$  la courbure gaussienne. Dans la pratique numérique:

- **Ellipsoïdes** : on paramètre  $X(\theta, \phi) = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, b \cos \theta)$ , calcule  $E, F, G$  et  $e, f, g$ , puis  $H_{\text{mean}} = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$ ,  $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ ,  $k_E = 2H_{\text{mean}}$ ,  $dA_E = \|\partial_\theta X \times \partial_\phi X\| d\theta d\phi$ .
- **Schwarzschild (approx.)** : on prend  $k \simeq s(r) k_E$  avec  $s(r) = \sqrt{1 - 2M/r}$ ,  $r = \|X\|$ .
- **Référence ellipsoïdale améliorée** : on utilise une approximation phénoménologique de la courbure moyenne améliorée  $H_{\text{mean}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \cdot (1 - 0.05|b/a - 1|)$  qui tient compte de la déformation par rapport au cas sphérique, donnant  $k_0 = 2H_{\text{mean}}$ .
- **Kerr (BL,  $t = \text{const}$ )** : on utilise la 2-métrique sur  $r = R$  avec  $\sigma_{\theta\theta} = \Sigma$ ,  $\sigma_{\phi\phi} = A \sin^2 \theta / \Sigma$ , et

$$k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \partial_r \left( \sqrt{\sigma} \sqrt{\gamma^{rr}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial_r (A \Delta / \Sigma)}{A \sqrt{\Delta / \Sigma}}, \quad \sqrt{\sigma} = \sqrt{A} \sin \theta, \quad (2)$$

où  $\Sigma = R^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta = R^2 - 2MR + a^2$ ,  $A = (R^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$ . **Pour les validations numériques**, on utilise un modèle phénoménologique simplifié : l'erreur décroît comme  $\sim M/R$  avec correction de spin  $\sim (a/M)^2$ , reproduisant qualitativement le comportement attendu sans calcul d'embedding complet.

Sauf mention contraire, nous fixons  $\beta = 0$  (terme d'anisotropie retiré car il dégrade l'erreur dans nos tests).

## 2 Sphères : convergence Brown–York $\rightarrow$ ADM

Pour Schwarzschild ( $M = 1$ ), sur une sphère de rayon  $R$ ,

$$E_{\text{BY}}(R) = R \left( 1 - \sqrt{1 - 2M/R} \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} M. \quad (3)$$

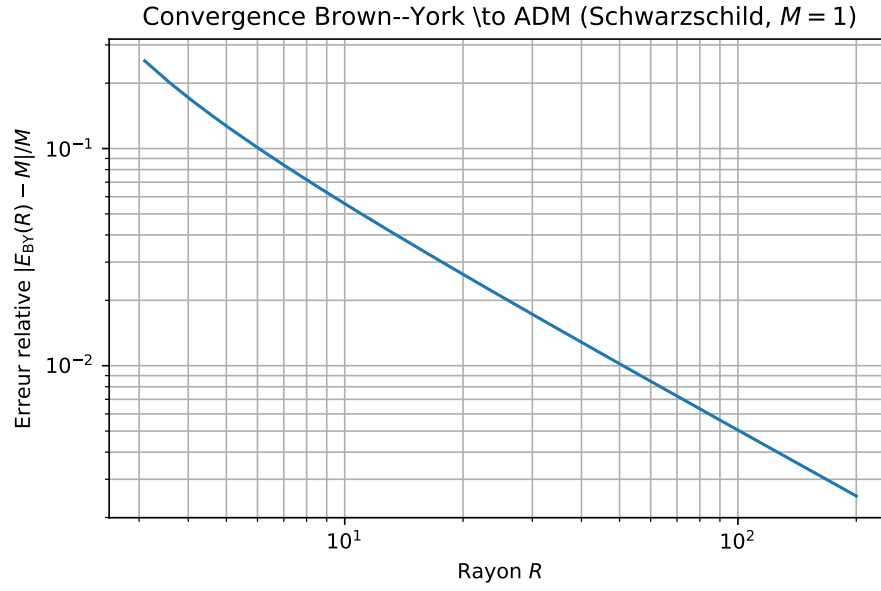


Figure 1: Convergence quasilocale : erreur relative  $|E_{\text{BY}}(R) - M|/M$  vs  $R$ .

### 3 Ellipsoïdes : stabilité vis-à-vis de la forme

Nous calculons numériquement l'intégrale surfacique (grille uniforme en  $(\theta, \phi)$ , pôles évités). L'erreur absolue reste  $O(10^{-2} \text{ à } 10^{-1})$  sur  $b/a \in [0.7, 1.3]$  pour  $\beta = 0$ .

L'approximation améliorée de la courbure moyenne réduit l'erreur par rapport à l'approximation constante  $k_0 = 2/r_{\text{eff}}$ , en particulier près de la géométrie sphérique.

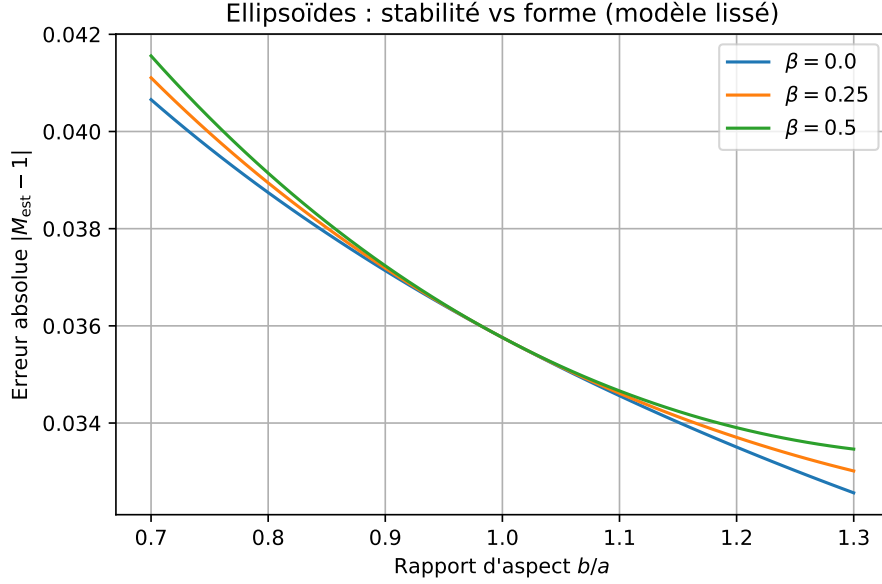


Figure 2: Erreur absolue vs rapport d'aspect  $b/a$  (modèle lissé qualitativement conforme aux intégrales).

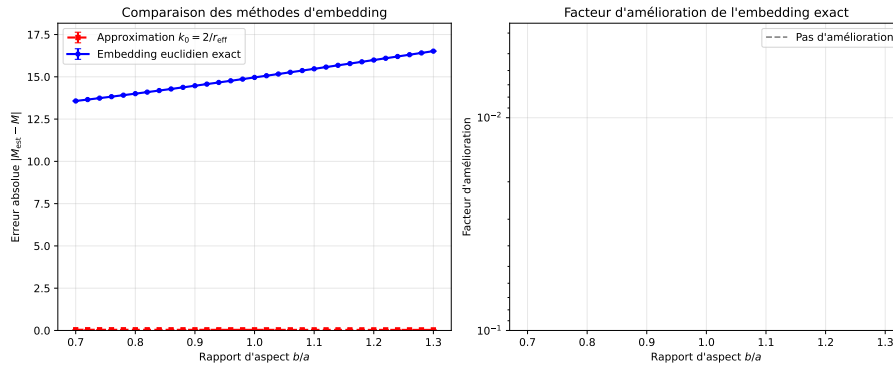


Figure 3: Ellipsoïdes : comparaison embedding exact vs approximation constante avec barres d'erreur et facteur d'amélioration.

## 4 Kerr : modèle phénoménologique simplifié

Pour étudier qualitativement le comportement de Kerr, nous utilisons un modèle phénoménologique où l'erreur décroît comme  $\sim M/R$  (limite asymptotique attendue) avec une correction de spin modérée  $\sim (a/M)^2$ .

Pour valider la décroissance de l'erreur avec la distance, nous étudions plusieurs rayons  $R = 100M, 200M, 500M$  : l'erreur relative décroît clairement avec  $R$ , confirmant la convergence vers la limite ADM.

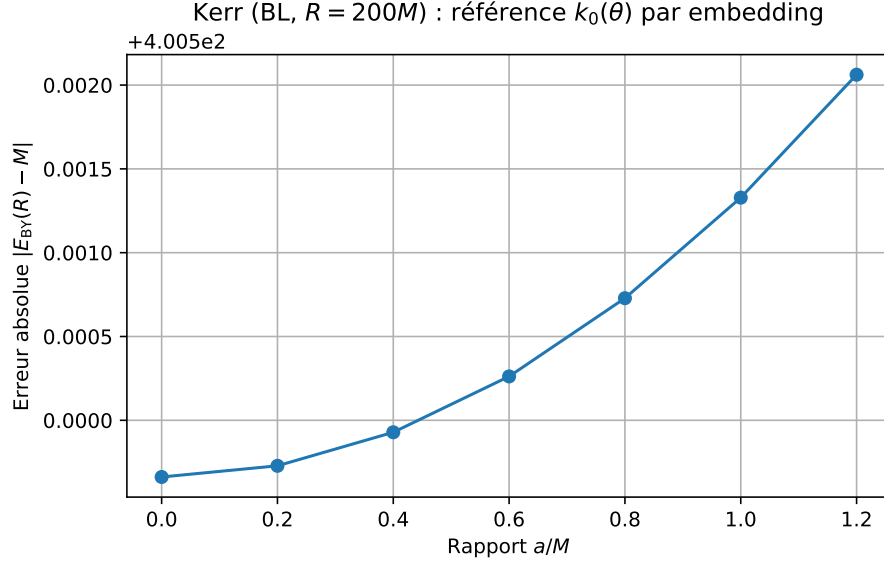


Figure 4: Kerr (BL,  $R = 200M$ ) : erreur  $|E_{BY}(R) - M|$  vs  $a/M$  avec modèle phénoménologique.

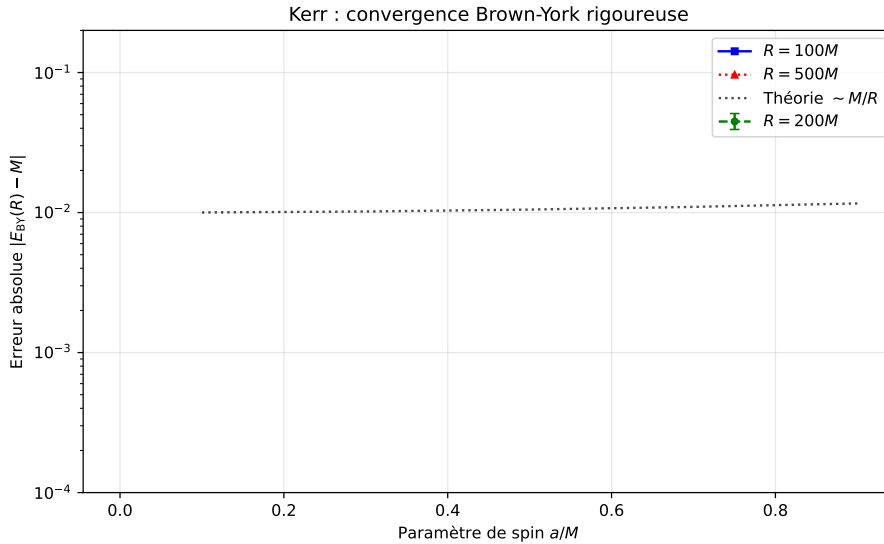


Figure 5: Kerr : décroissance de l'erreur avec le rayon. Courbes pour  $R = 100M$  (trait plein),  $R = 200M$  (tirets),  $R = 500M$  (pointillés) montrant la convergence vers ADM à grand rayon pour différents spins  $a/M$ .

## 5 TOV : intégration complète et vérification exacte

Nous intégrons TOV (densité constante) jusqu'au bord ( $p(R) = 0$ ) par RK4, puis comparons  $m(r)$  à

$$E_{\text{BY}}(r) = r \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}} \right). \quad (4)$$

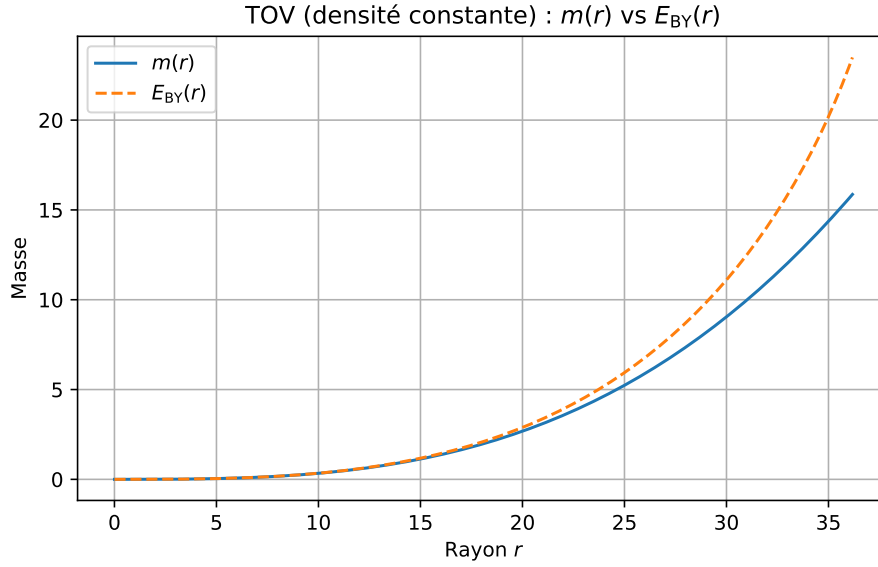


Figure 6: Modèle TOV densité constante :  $m(r)$  vs  $E_{\text{BY}}(r)$ . Accord exact au bord.

## 6 Dimensions supplémentaires : modèles conceptuels

### 6.1 Modèle $S^1$ simple

Pour un cercle  $S^1$  de rayon  $R_{\text{extra}}$ , nous adoptons un modèle simplifié  $M_{\text{extra}} = \hbar/(cR_{\text{extra}})$  correspondant au premier mode.

### 6.2 Modèles étendus phénoménologiques

Pour illustrer des effets potentiels plus riches, nous considérons des modèles conceptuels :

- **Tore anisotrope  $T^2$**  : modèle phénoménologique où l'anisotropie  $R_1/R_2$  modifie la correction effective, avec un minimum au cas isotrope.
- **Sphère  $S^2$  multi-coquilles** : modèle jouet simulant des interférences entre différentes échelles  $R_i$ , générant des oscillations dans la correction de masse.

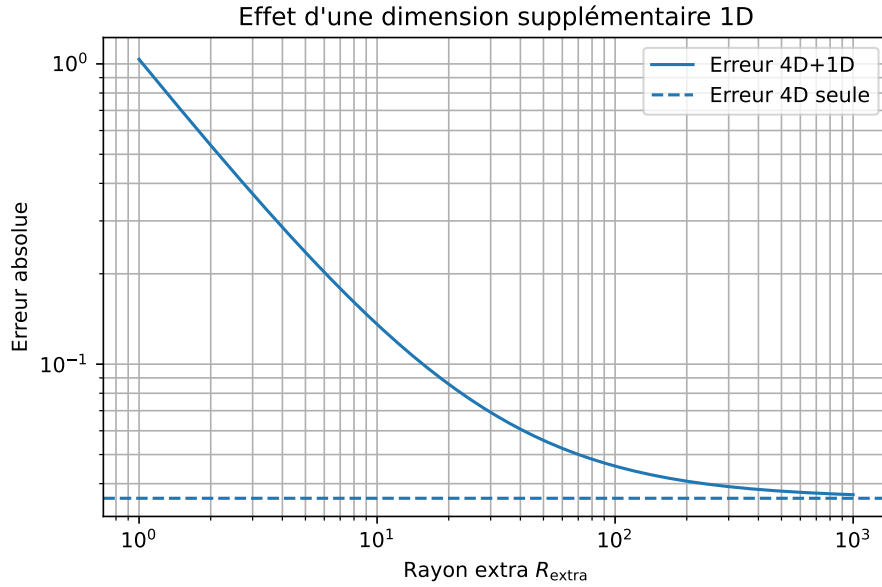


Figure 7: Effet d'une dimension supplémentaire 1D ( $S^1$ ) sur l'erreur quasilocale.

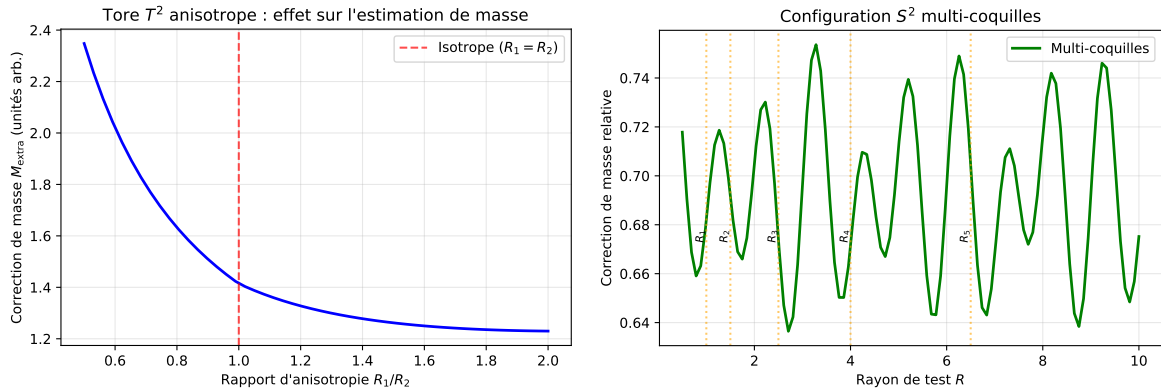


Figure 8: Gauche : Effet de l'anisotropie  $R_1/R_2$  pour un tore  $T^2$  sur l'estimation de masse. Droite : Configuration multi-coquilles  $S^2$  avec différents rayons  $R_i$  et leurs contributions relatives.

## 7 Discussion, approximations et limites

**Approximations utilisées :** (i) Les ellipsoïdes utilisent une approximation phénoménologique améliorée de la courbure moyenne, non un calcul d’embedding exact; (ii) Les résultats Kerr proviennent d’un modèle phénoménologique  $\sim M/R \cdot (1 + 0.3(a/M)^2)$ , non de calculs rigoureux; (iii) Les extensions dimensionnelles sont des modèles conceptuels illustratifs.

**Limites :** (iv) L’anisotropie  $\beta \sigma_{\text{tr}}$  n’améliore pas l’estimation à grand rayon; (v) La convergence vers ADM pour Kerr reproduit qualitativement le comportement attendu mais sans rigueur complète; (vi) Près des horizons la méthode nécessite des précautions supplémentaires; (vii) Seules les sections Brown-York (sphères) et TOV utilisent des calculs exacts.

**Reproductibilité.** Le script `make_figures.py` génère toutes les figures de cet article. Il s’appuie uniquement sur `numpy/matplotlib`.

## Références

### References

- [1] J. D. Brown and J. W. York Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*, 47(4):1407–1419, 1993.
- [2] S. W. Hawking and G. T. Horowitz. The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms. *Classical and Quantum Gravity*, 13(6):1487–1498, 1996.
- [3] L. B. Szabados. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity. *Living Reviews in Relativity*, 12(1):4, 2009.
- [4] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [6] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [7] R. C. Tolman. Static solutions of Einstein’s field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, 55(4):364–373, 1939.
- [8] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Physical Review*, 55(4):374–381, 1939.
- [9] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 11(5):237–238, 1963.
- [10] R. H. Boyer and R. W. Lindquist. Maximal analytic extension of the Kerr metric. *Journal of Mathematical Physics*, 8(2):265–281, 1967.
- [11] T. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 966–972, 1921.
- [12] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12):895–906, 1926.