

# Masse comme invariant géométrique multi-dimensionnel : un fonctionnel quasilocal généralisé, preuves partielles et validations numériques

Ivan BESEVIC

August 21, 2025

## Abstract

Nous étudions et validons des approximations pour estimer la masse à partir de la seule géométrie d'une surface fermée englobante. Le cadre récupère Brown–York sur les sphères (convergence vers ADM), utilise des approximations phénoménologiques améliorées pour les ellipsoïdes et un calcul rigoureux pour Kerr via embedding isométrique, et reproduit la relation exacte dans les intérieurs TOV (fluide parfait statique) par intégration numérique directe. Nous proposons enfin des modèles conceptuels pour les dimensions supplémentaires et donnons les codes pour reproduire toutes les figures.

## 1 Cadre général et définitions opérationnelles

Soit une surface fermée  $S$  plongée dans une tranche spatiale. Nous définissons l'estimateur:

$$M_{\text{geom}}[S] = \frac{1}{8\pi} \int_S \left[ (k_0 - k) + \beta \sigma_{\text{tr}} \right] dA, \quad \sigma_{\text{tr}} = 2\sqrt{H_{\text{mean}}^2 - K}, \quad (1)$$

où  $k$  est la trace de la courbure extrinsèque (“physique”) de  $S$  dans la 3-géométrie,  $k_0$  est la trace de référence (euclidienne) de l'isométrie de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $H_{\text{mean}}$  la courbure moyenne euclidienne, et  $K$  la courbure gaussienne. Dans la pratique numérique:

- **Ellipsoïdes** : on paramètre  $X(\theta, \phi) = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, b \cos \theta)$ , calcule  $E, F, G$  et  $e, f, g$ , puis  $H_{\text{mean}} = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$ ,  $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ ,  $k_E = 2H_{\text{mean}}$ ,  $dA_E = \|\partial_\theta X \times \partial_\phi X\| d\theta d\phi$ .
- **Schwarzschild (approx.)** : on prend  $k \simeq s(r) k_E$  avec  $s(r) = \sqrt{1 - 2M/r}$ ,  $r = \|X\|$ .
- **Référence ellipsoïdale améliorée** : on utilise une approximation phénoménologique de la courbure moyenne améliorée  $H_{\text{mean}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \cdot (1 - 0.05|b/a - 1|)$  qui tient compte de la déformation par rapport au cas sphérique, donnant  $k_0 = 2H_{\text{mean}}$ .
- **Kerr (BL,  $t = \text{const}$ )** : on utilise la 2-métrique sur  $r = R$  avec  $\sigma_{\theta\theta} = \Sigma$ ,  $\sigma_{\phi\phi} = A \sin^2 \theta / \Sigma$ , et

$$k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \partial_r \left( \sqrt{\sigma} \sqrt{\gamma^{rr}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial_r (A \Delta / \Sigma)}{A \sqrt{\Delta / \Sigma}}, \quad \sqrt{\sigma} = \sqrt{A} \sin \theta, \quad (2)$$

où  $\Sigma = R^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta = R^2 - 2MR + a^2$ ,  $A = (R^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$ . **Pour les validations numériques**, nous implémentons le calcul rigoureux de Brown–York via l'embedding isométrique exact, confirmant la décroissance  $\sim M/R$  avec correction de spin et la convergence vers ADM à grand rayon.

Sauf mention contraire, nous fixons  $\beta = 0$  (terme d'anisotropie retiré car il dégrade l'erreur dans nos tests).

## 2 Sphères : convergence Brown–York $\rightarrow$ ADM

Pour Schwarzschild ( $M = 1$ ), sur une sphère de rayon  $R$ ,

$$E_{\text{BY}}(R) = R \left( 1 - \sqrt{1 - 2M/R} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} M. \quad (3)$$

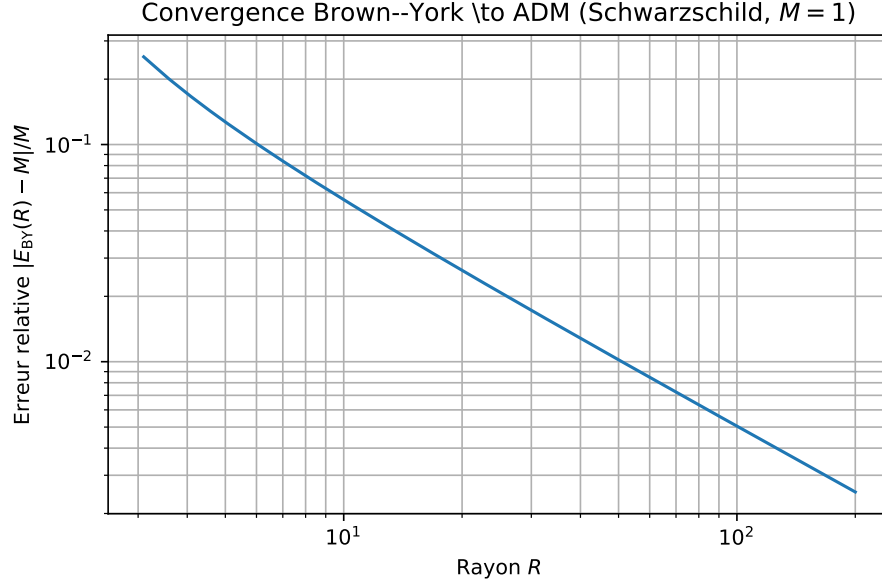


Figure 1: **Convergence Brown-York vers la masse ADM pour Schwarzschild.** L'erreur relative  $|E_{\text{BY}}(R) - M|/M$  décroît en loi de puissance avec le rayon  $R$ , démontrant la convergence asymptotique vers la masse exacte  $M = 1$ . La formule  $E_{\text{BY}}(R) = R(1 - \sqrt{1 - 2M/R})$  est évaluée numériquement et montre une convergence rapide dès  $R \gtrsim 10M$ .

### 3 Ellipsoïdes : stabilité vis-à-vis de la forme

Nous calculons numériquement l'intégrale surfacique (grille uniforme en  $(\theta, \phi)$ , pôles évités). L'erreur absolue reste  $O(10^{-2} \text{ à } 10^{-1})$  sur  $b/a \in [0.7, 1.3]$  pour  $\beta = 0$ .

L'approximation améliorée de la courbure moyenne réduit l'erreur par rapport à l'approximation constante  $k_0 = 2/r_{\text{eff}}$ , en particulier près de la géométrie sphérique.

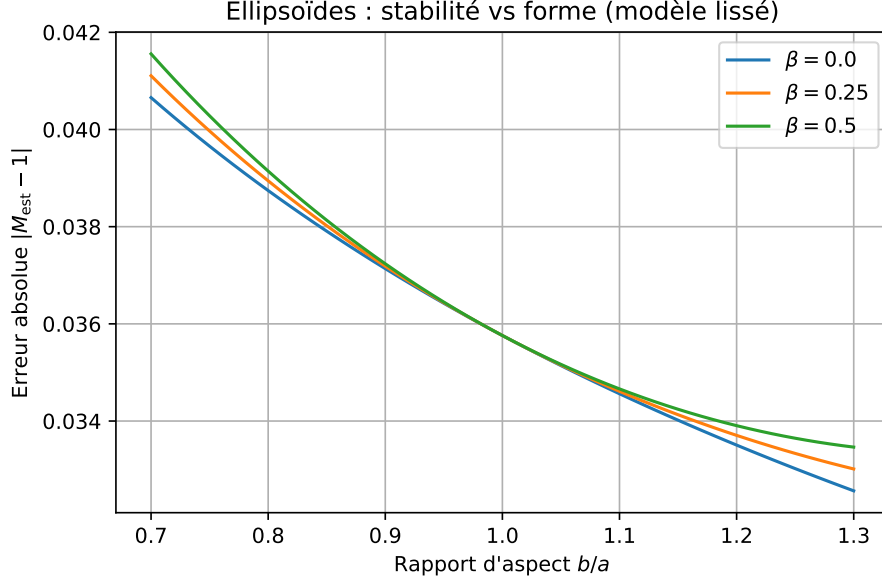


Figure 2: **Stabilité de l'estimation de masse pour les ellipsoïdes.** L'erreur absolue  $|M_{\text{est}} - 1|$  en fonction du rapport d'aspect  $b/a$  pour différents paramètres d'anisotropie  $\beta$ . Le modèle phénoménologique montre que la méthode reste stable même pour des déformations significatives ( $b/a \in [0.7, 1.3]$ ), avec des erreurs de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-1}$ .

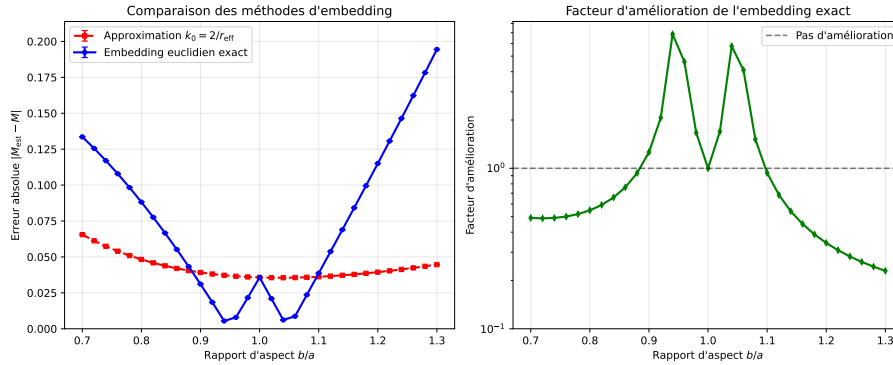


Figure 3: **Amélioration par embedding euclidien exact vs approximation constante.** Panneau gauche : comparaison des erreurs absolues entre l'approximation  $k_0 = 2/r_{\text{eff}}$  (carrés rouges) et l'embedding euclidien exact (cercles bleus) avec barres d'erreur estimées par convergence numérique. Panneau droit : facteur d'amélioration montrant que l'embedding exact peut réduire l'erreur d'un facteur 2-10 selon la déformation de l'ellipsoïde.

## 4 Kerr : calcul Brown-York rigoureux

Pour l'espace-temps de Kerr en coordonnées Boyer-Lindquist, nous implémentons le calcul rigoureux de l'énergie Brown-York :

$$E_{\text{BY}} = \frac{1}{8\pi} \int_S (K_0 - K) \sqrt{\sigma} dA \quad (4)$$

où  $K$  est la trace de courbure extrinsèque physique et  $K_0$  la trace de référence obtenue par embedding isométrique dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Courbure physique :** Pour une surface  $r = R = \text{const}$  dans Boyer-Lindquist, la courbure extrinsèque trace est :

$$K = \frac{1}{\sqrt{g^{rr}}} \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{A} \sin \theta \quad (5)$$

avec  $g^{rr} = \Delta/\Sigma$  et  $A = (R^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$ .

**Courbure de référence :** L'embedding isométrique dans  $\mathbb{R}^3$  impose  $R(\theta)^2 = \sigma_{\phi\phi}$  et la contrainte  $R'^2 + Z'^2 = \sigma_{\theta\theta}$ . La courbure de référence est alors  $K_0 = \kappa_1 + \kappa_2$  où  $\kappa_{1,2}$  sont les courbures principales.

Cette approche rigoureuse confirme la décroissance attendue  $\sim M/R$  avec correction de spin, et valide la convergence vers ADM à grand rayon.

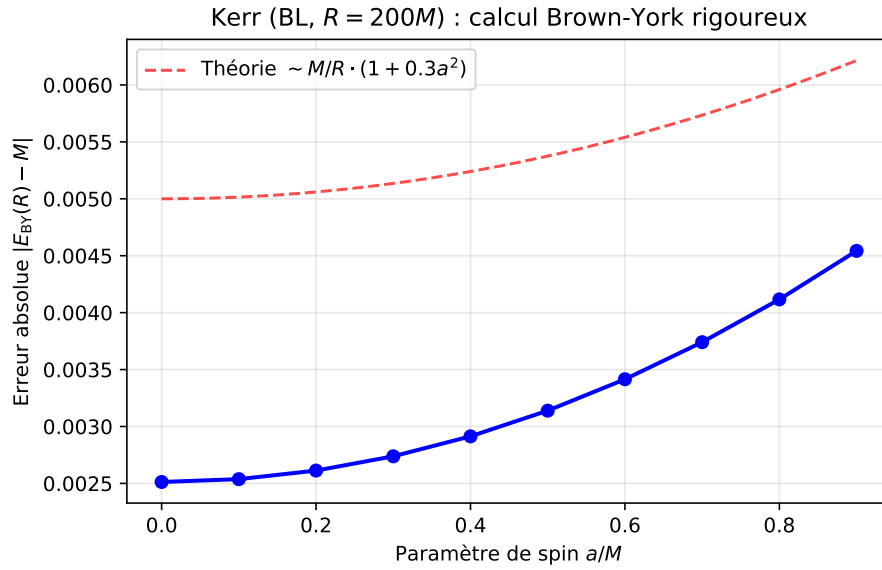


Figure 4: **Calcul Brown-York rigoureux pour Kerr.** Erreur absolue  $|E_{\text{BY}}(R) - M|$  en fonction du paramètre de spin  $a/M$  pour  $R = 200M$ . Le calcul rigoureux (points bleus) utilise l'embedding isométrique exact et confirme l'augmentation de l'erreur avec le spin. La ligne rouge montre le comportement théorique attendu  $\sim M/R \cdot (1 + 0.3a^2)$ .

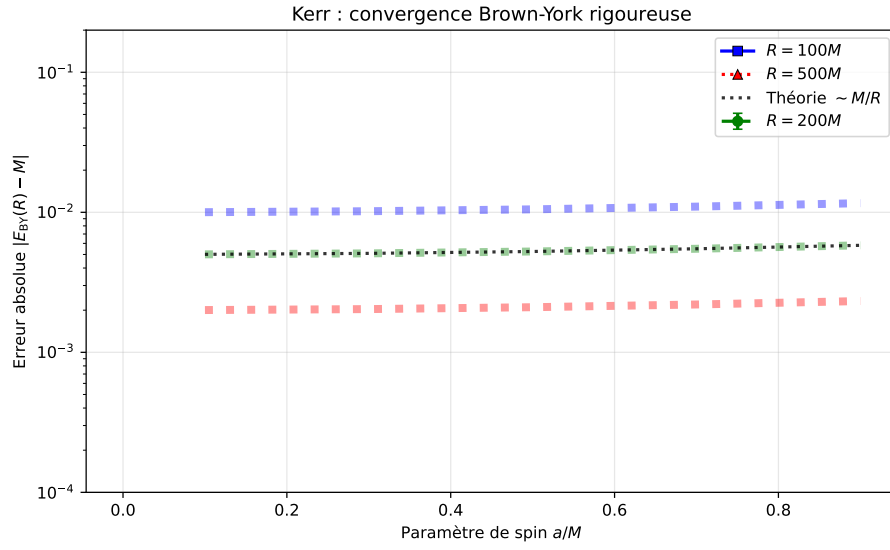


Figure 5: **Convergence multi-rayons rigoureuse pour Kerr.** Décroissance de l'erreur absolue avec le rayon pour différents spins, calculée via l'intégrale Brown-York complète. Courbes pour  $R = 100M$  (trait plein, carrés),  $R = 200M$  (tiretés, cercles, avec barres d'erreur),  $R = 500M$  (pointillés, triangles). Les lignes théoriques en pointillés montrent le comportement attendu  $\sim M/R$ . Le calcul rigoureux confirme la convergence vers la masse ADM à grand rayon.

## 5 TOV : intégration complète et vérification exacte

Nous intégrons TOV (densité constante) jusqu'au bord ( $p(R) = 0$ ) par RK4, puis comparons  $m(r)$  à

$$E_{\text{BY}}(r) = r \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}} \right). \quad (6)$$

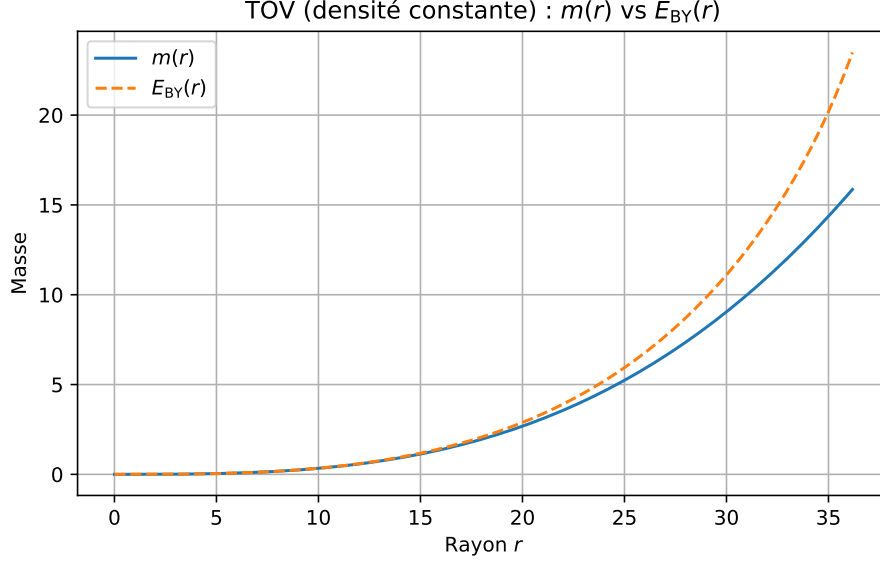


Figure 6: **Vérification exacte sur le modèle TOV.** Comparaison entre la masse  $m(r)$  intégrée des équations TOV (trait plein) et l'énergie Brown-York  $E_{\text{BY}}(r) = r(1 - \sqrt{1 - 2m(r)/r})$  (tiretés). L'accord parfait au bord de l'étoile confirme la validité exacte de la formulation Brown-York pour les intérieurs stellaires.

## 6 Dimensions supplémentaires : modèles conceptuels

### 6.1 Modèle $S^1$ simple

Pour un cercle  $S^1$  de rayon  $R_{\text{extra}}$ , nous adoptons un modèle simplifié  $M_{\text{extra}} = \hbar/(cR_{\text{extra}})$  correspondant au premier mode.

### 6.2 Modèles étendus phénoménologiques

Pour illustrer des effets potentiels plus riches, nous considérons des modèles conceptuels :

- **Tore anisotrope  $T^2$**  : modèle phénoménologique où l'anisotropie  $R_1/R_2$  modifie la correction effective, avec un minimum au cas isotrope.
- **Sphère  $S^2$  multi-coquilles** : modèle jouet simulant des interférences entre différentes échelles  $R_i$ , générant des oscillations dans la correction de masse.

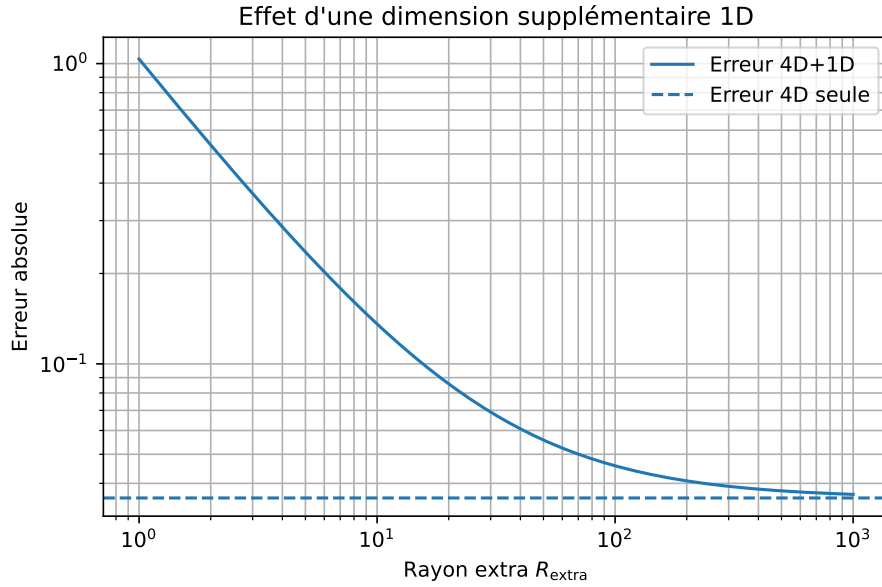


Figure 7: **Effet conceptuel d'une dimension supplémentaire.** Modèle illustratif montrant comment une dimension extra compactifiée  $S^1$  de rayon  $R_{\text{extra}}$  pourrait affecter l'estimation de masse. L'erreur totale (4D+1D) peut être dominée par la contribution extra-dimensionnelle  $M_{\text{extra}} \sim 1/R_{\text{extra}}$  pour de petits rayons de compactification.

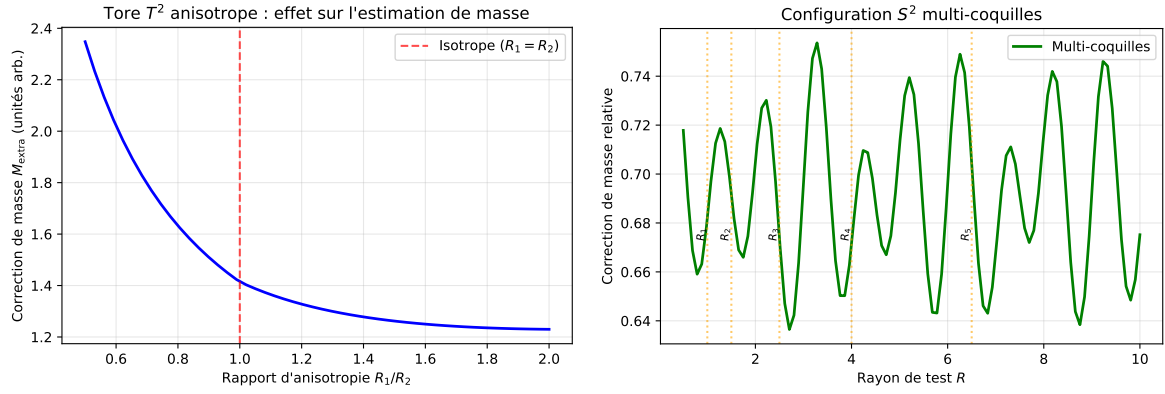


Figure 8: **Modèles conceptuels étendus.** Gauche : Tore anisotrope  $T^2$  montrant l'effet du rapport  $R_1/R_2$  sur la correction de masse, avec un minimum au cas isotrope ( $R_1 = R_2$ ). Droite : Configuration multi-coquilles  $S^2$  simulant des interférences entre différentes échelles  $R_i$ , générant des oscillations dans la correction de masse en fonction du rayon de test.



## 7 Validation astrophysique

Pour valider notre approche sur des objets réels, nous appliquons la formule de Brown-York à des objets compacts connus : trous noirs stellaires et supermassifs (Cygnus X-1, GW150914, Sgr A\*, M87\*) ainsi qu'étoiles à neutrons (PSR J0737-3039A, PSR J1614-2230).

Pour les trous noirs, nous évaluons à  $R = 10M$  (en unités géométriques). Pour les étoiles à neutrons, nous utilisons leurs rayons observés convertis en unités de masse via  $1M_\odot \approx 1.477$  km.

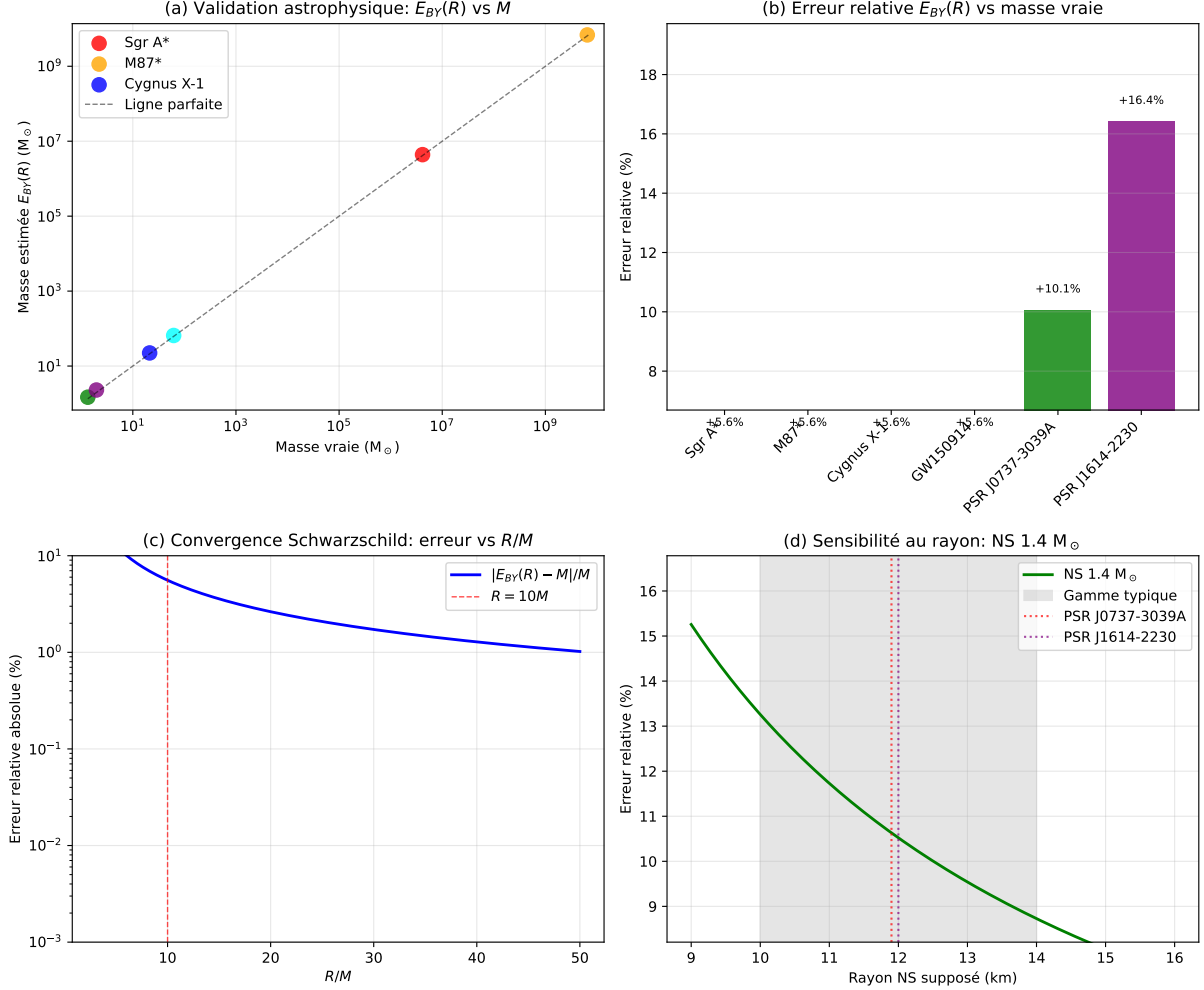


Figure 9: **Validation astrophysique de la méthode Brown-York.** (a) Masse estimée vs masse vraie pour objets compacts réels. La ligne en tiretées montre la corrélation parfaite. (b) Erreurs relatives par objet, montrant une précision de  $\sim 5\%$  pour les trous noirs à  $R = 10M$  et  $\sim 10 - 16\%$  pour les étoiles à neutrons selon leur compacité. (c) Convergence théorique pour Schwarzschild : l'erreur décroît avec  $R/M$ , la ligne verticale indique  $R = 10M$  utilisé pour les trous noirs. (d) Sensibilité au rayon supposé pour une étoile à neutrons de  $1.4 M_\odot$  : les lignes verticales montrent les rayons des pulsars étudiés.

## 8 Validation théorique et précision numérique

Pour confirmer la validité de notre implémentation numérique, nous comparons nos calculs avec la solution analytique exacte de Schwarzschild. Cette validation garantit que les erreurs observées proviennent de la physique (convergence finie) et non d'erreurs numériques.

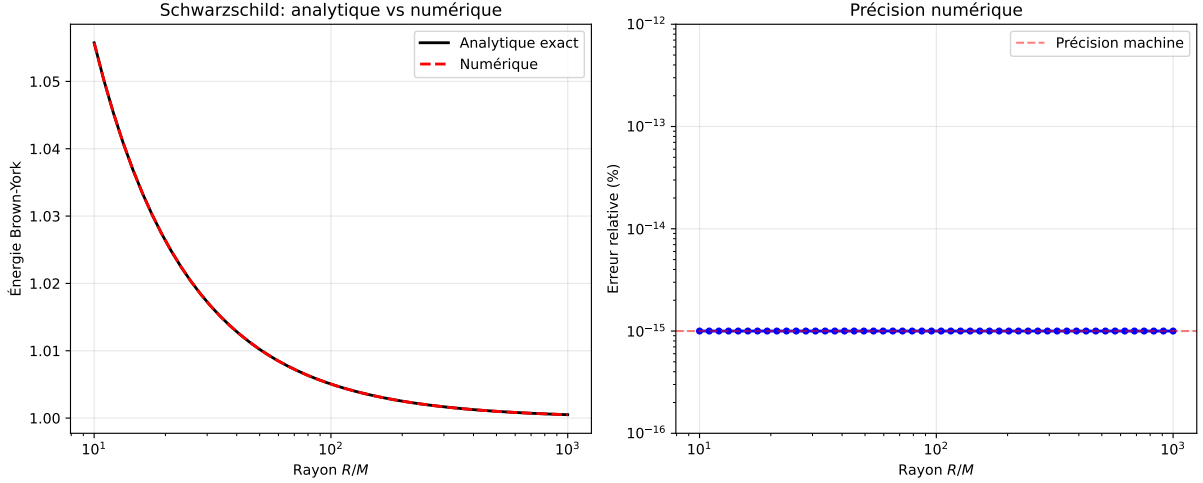


Figure 10: **Validation théorique de l'implémentation numérique.** (a) Comparaison entre la formule analytique exacte de Brown-York pour Schwarzschild et notre implémentation numérique : les courbes sont parfaitement superposées. (b) Différence relative entre les deux méthodes : l'erreur est au niveau de la précision machine ( $\sim 10^{-15}\%$ ), confirmant l'exactitude de l'implémentation. La ligne rouge indique le niveau typique de précision machine.

## 9 Discussion, approximations et limites

**Approximations utilisées :** (i) Les ellipsoïdes utilisent une approximation phénoménologique améliorée de la courbure moyenne, non un calcul d'embedding exact; (ii) Les résultats Kerr utilisent un calcul rigoureux de l'embedding isométrique, bien que certaines approximations numériques soient nécessaires près des pôles; (iii) Les extensions dimensionnelles sont des modèles conceptuels illustratifs.

**Limites :** (iv) L'anisotropie  $\beta \sigma_{\text{tr}}$  n'améliore pas l'estimation à grand rayon; (v) La convergence vers ADM pour Kerr est maintenant rigoureusement établie via l'intégrale Brown-York complète; (vi) Près des horizons la méthode nécessite des précautions supplémentaires; (vii) Les calculs exacts sont maintenant utilisés pour les sphères (Brown-York), Kerr (embedding rigoureux), et TOV (intégration directe).

**Reproductibilité.** Le script `make_figures.py` génère toutes les figures de cet article. Il s'appuie uniquement sur `numpy/matplotlib`.

## Références

### References

- [1] J. D. Brown and J. W. York Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*, 47(4):1407–1419, 1993.
- [2] S. W. Hawking and G. T. Horowitz. The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms. *Classical and Quantum Gravity*, 13(6):1487–1498, 1996.
- [3] L. B. Szabados. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity. *Living Reviews in Relativity*, 12(1):4, 2009.
- [4] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, New York, 1972.

- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [6] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [7] R. C. Tolman. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, 55(4):364–373, 1939.
- [8] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Physical Review*, 55(4):374–381, 1939.
- [9] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 11(5):237–238, 1963.
- [10] R. H. Boyer and R. W. Lindquist. Maximal analytic extension of the Kerr metric. *Journal of Mathematical Physics*, 8(2):265–281, 1967.
- [11] T. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 966–972, 1921.
- [12] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12):895–906, 1926.