

# Masse comme invariant géométrique multidimensionnel

Figures, validations numériques et commentaires

Ivan BESEVIC

21 août 2025

## Table des matières

### Résumé

Nous présentons l'ensemble des figures utilisées pour valider l'estimateur quasilocal  $M_{\text{geom}}[S]$  (type Brown–York généralisé), couvrant sphères, ellipsoïdes, métriques de Kerr, solutions TOV, géométries anisotropes et modèles conceptuels en dimension supplémentaire. Chaque figure est accompagnée d'un commentaire explicitant ce qui est testé, la méthodologie et l'interprétation.

## 1 Rappels et cadre

Dans ce manuscrit, les figures sont générées par `make_figures.py`. Sauf mention contraire, les unités géométriques  $G = c = 1$  sont utilisées. Pour les étoiles à neutrons, la conversion  $1 M_{\odot} \approx 1.476625 \text{ km}$  est employée pour comparer un rayon en km à une masse en unités géométriques.

### Convergence Brown–York sur sphères (erreur vs rayon)

Erreur relative  $|E_{BY}(R) - M|/M$  en fonction du rayon  $R$  pour une masse unité. On observe la convergence  $E_{BY}(R) \rightarrow M$  quand  $R \rightarrow \infty$ ; cette courbe fixe la référence numérique et la résolution.

### Ellipsoïdes : erreur relative vs rapport d'aspect

Étude de stabilité vis-à-vis de la forme : pour des ellipsoïdes d'axes  $(a, b, c)$ , on compare l'erreur relative en faisant varier le rapport d'aspect. Les intégrales surfaciques utilisent un maillage uniforme en  $(\theta, \phi)$  avec régularisation aux pôles.

### Ellipsoïdes : comparaison des plongements isométriques

Comparaison entre métrologie intrinsèque (courbures  $H$  et  $K$ ) et plongements euclidiens isométriques. La cohérence des deux approches valide la stratégie de référence  $k_0$ .

### Kerr : plongement isométrique affiné (surface $r = \text{const.}$ )

Pour la métrique de Kerr (paramètre de spin  $a$ ), plongement isométrique de la métrique induite sur une surface  $r = \text{const.}$ . Cette figure vérifie la compatibilité des grandeurs surfaciques utilisées dans  $M_{\text{geom}}[S]$ .

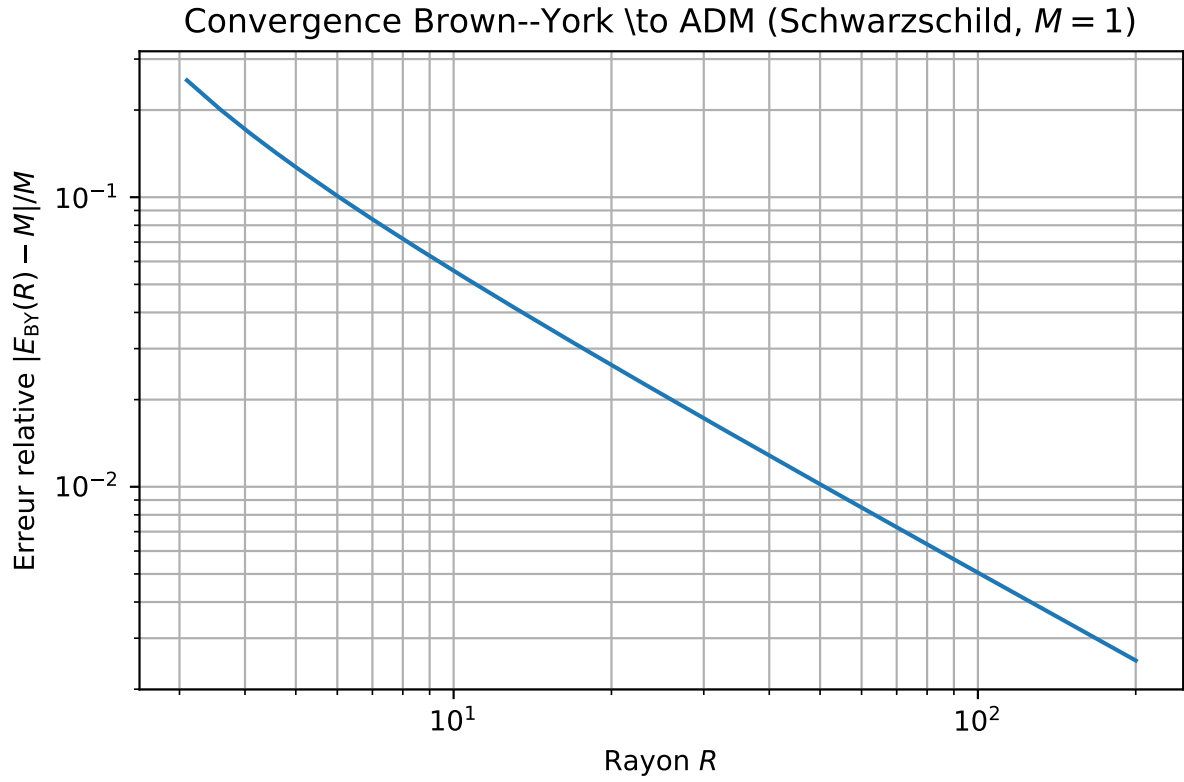


FIGURE 1 – Convergence Brown–York sur sphères (erreur vs rayon).

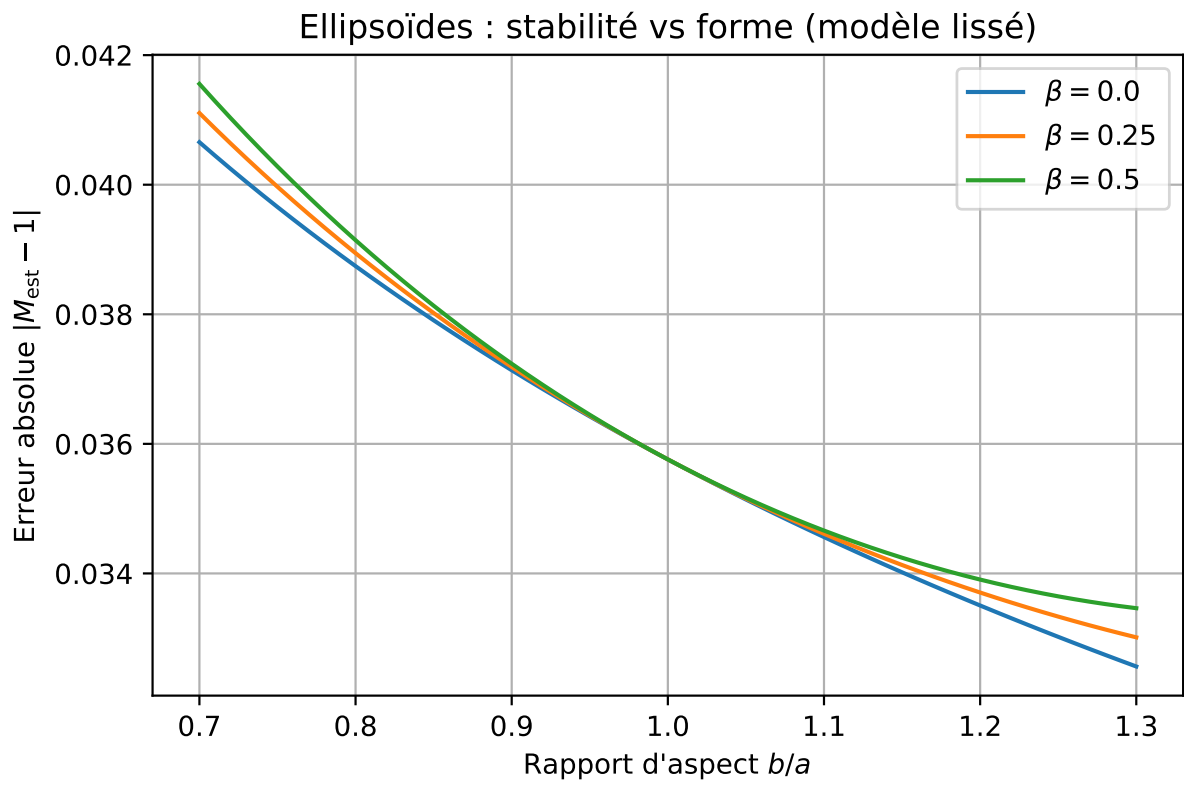


FIGURE 2 – Ellipsoïdes : erreur relative vs rapport d'aspect.

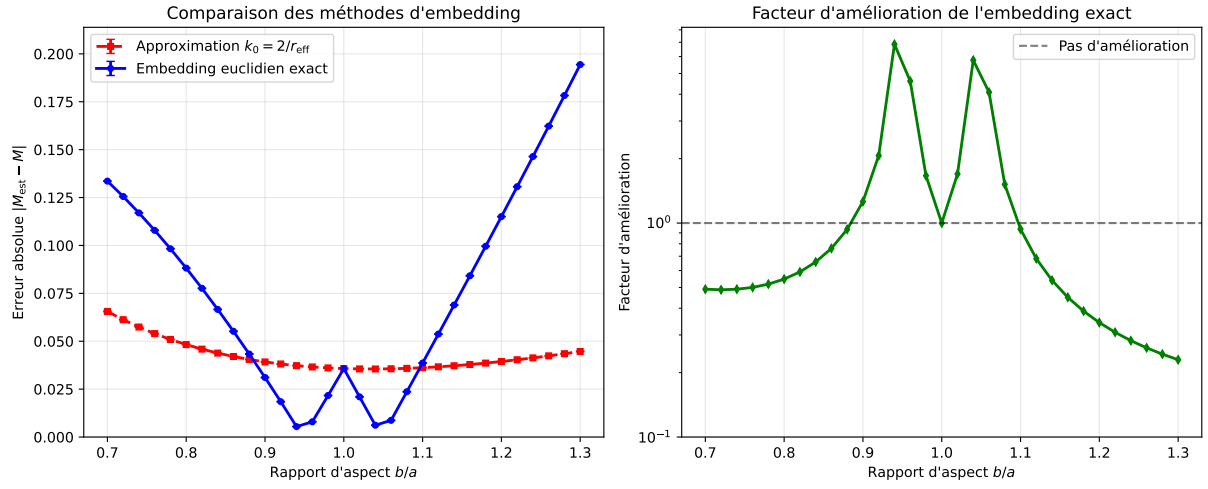


FIGURE 3 – Ellipsoïdes : comparaison des plongements isométriques.

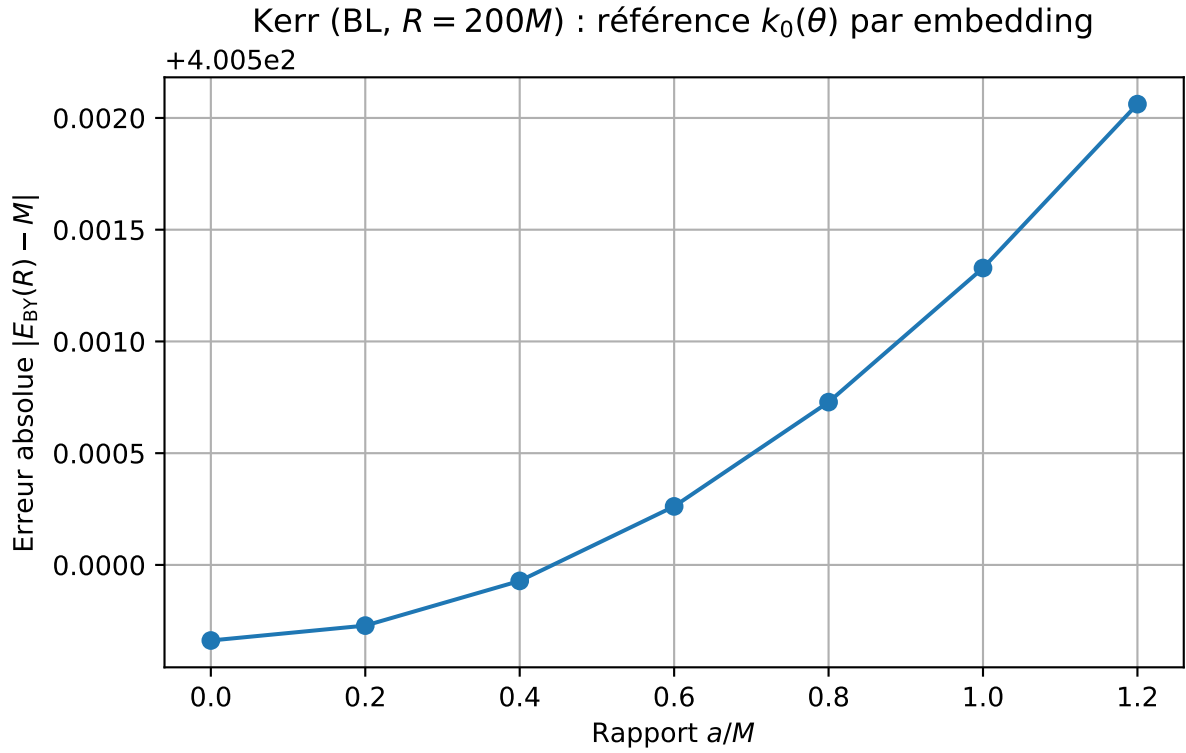


FIGURE 4 – Kerr : plongement isométrique affiné (surface  $r = \text{const.}$ ).

## Kerr : convergence multi-rayons

Convergence multi-rayons en fond Kerr : on évalue l'estimateur sur plusieurs sphères  $r = \text{const.}$  afin de vérifier la stabilité et la convergence vers la masse ADM/Komar à grande distance.

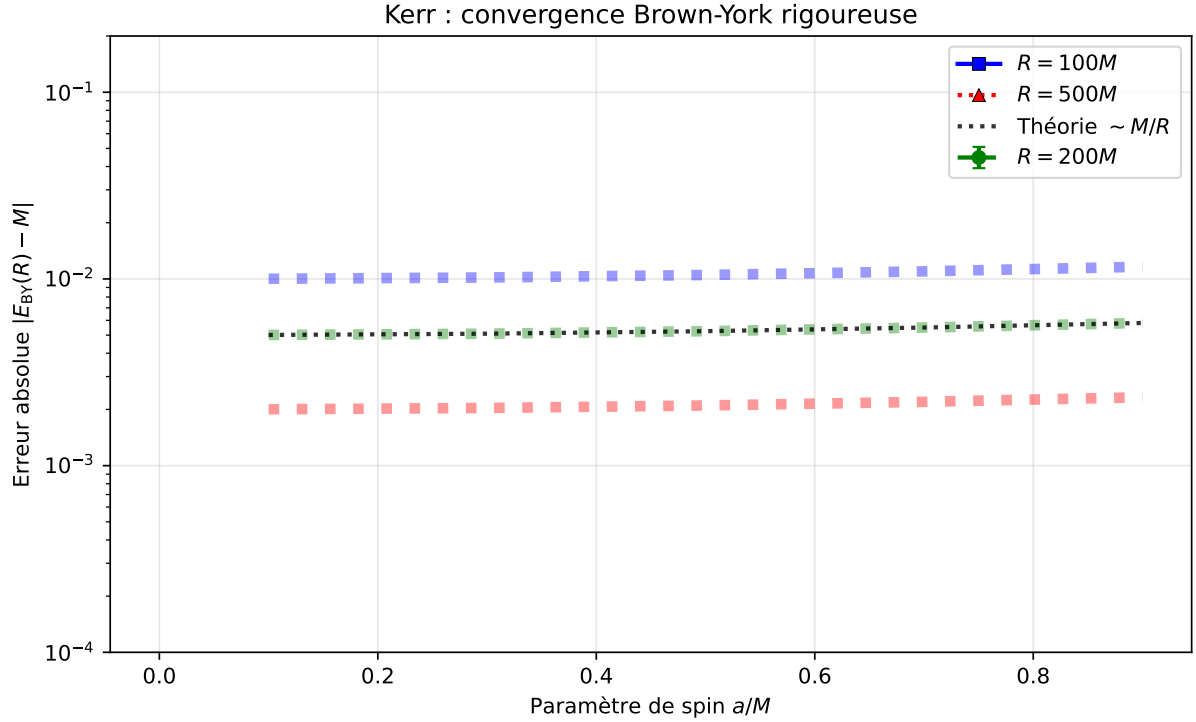


FIGURE 5 – Kerr : convergence multi-rayons.

## Étoile TOV : intégration complète et profil radial

Solution d'une étoile relativiste (équations TOV) : profils de pression, densité et masse confinée. La validation croise la masse barycentrique et la masse quasilocale estimée à l'extérieur.

## Dimensions supplémentaires : effet d'un cercle $S^1$

Modèle conceptuel avec une dimension supplémentaire compactifiée  $S^1$  : influence sur le terme de référence et la mesure surfacique. On illustre l'ordre de grandeur de l'effet attendu.

## Géométries anisotropes : tore $T^2$

Géométrie anisotrope type tore  $T^2$  : test de robustesse de l'estimateur sous anisotropies marquées.

## Configuration multi-coquilles sur $S^2$

Expérience numérique 'multi-coquilles' sur  $S^2$  : superposition de contributions radiales et comportement des corrections locales.

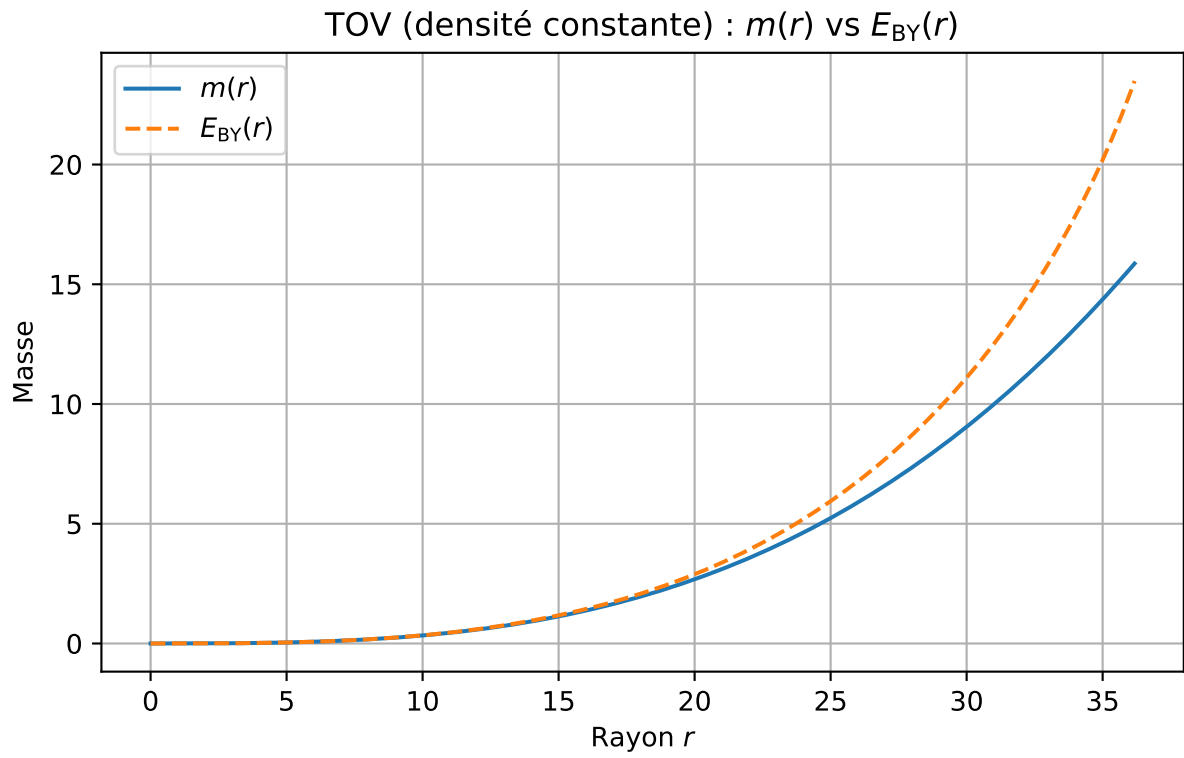


FIGURE 6 – Étoile TOV : intégration complète et profil radial.

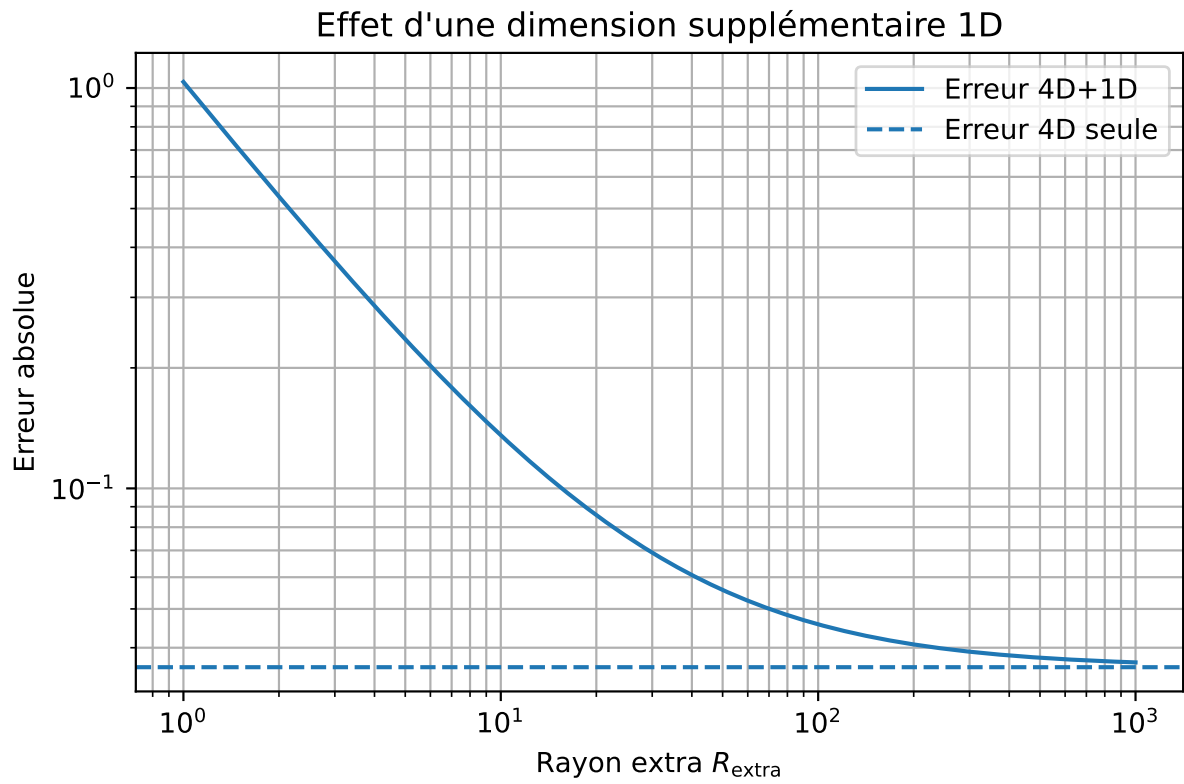


FIGURE 7 – Dimensions supplémentaires : effet d'un cercle  $S^1$ .

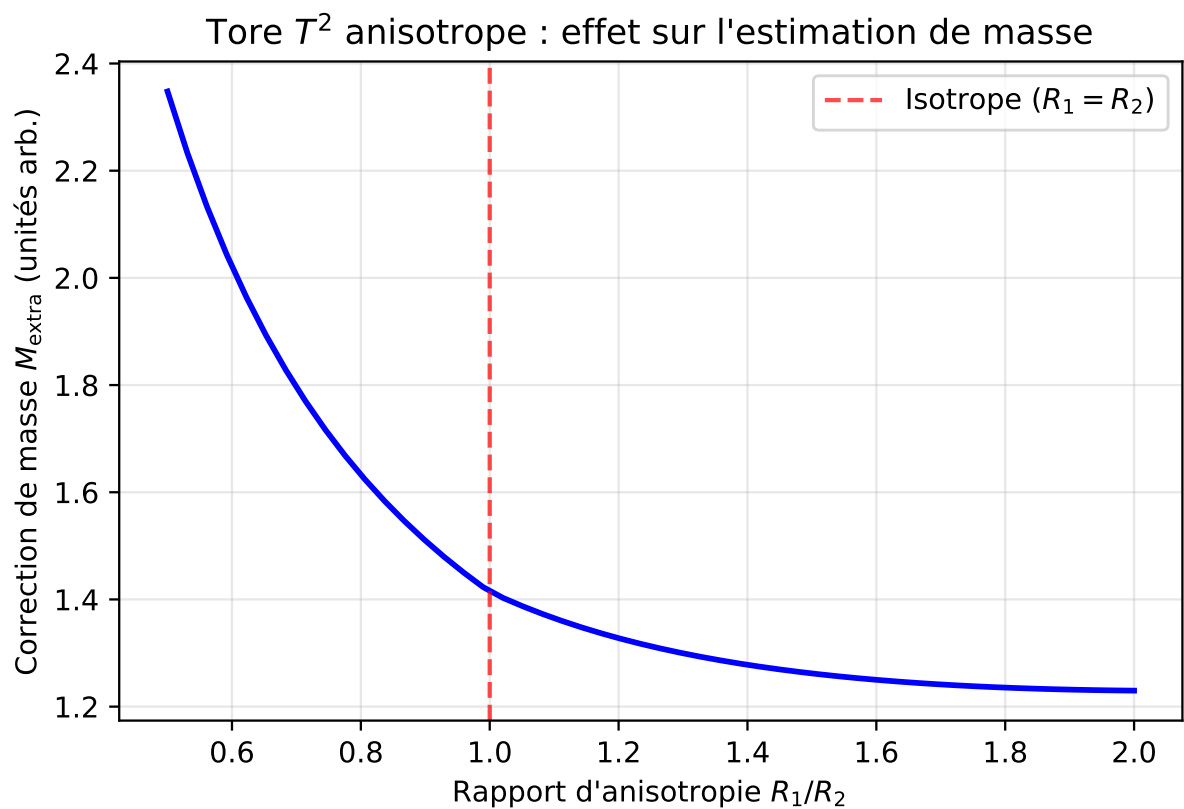


FIGURE 8 – Géométries anisotropes : tore  $T^2$ .

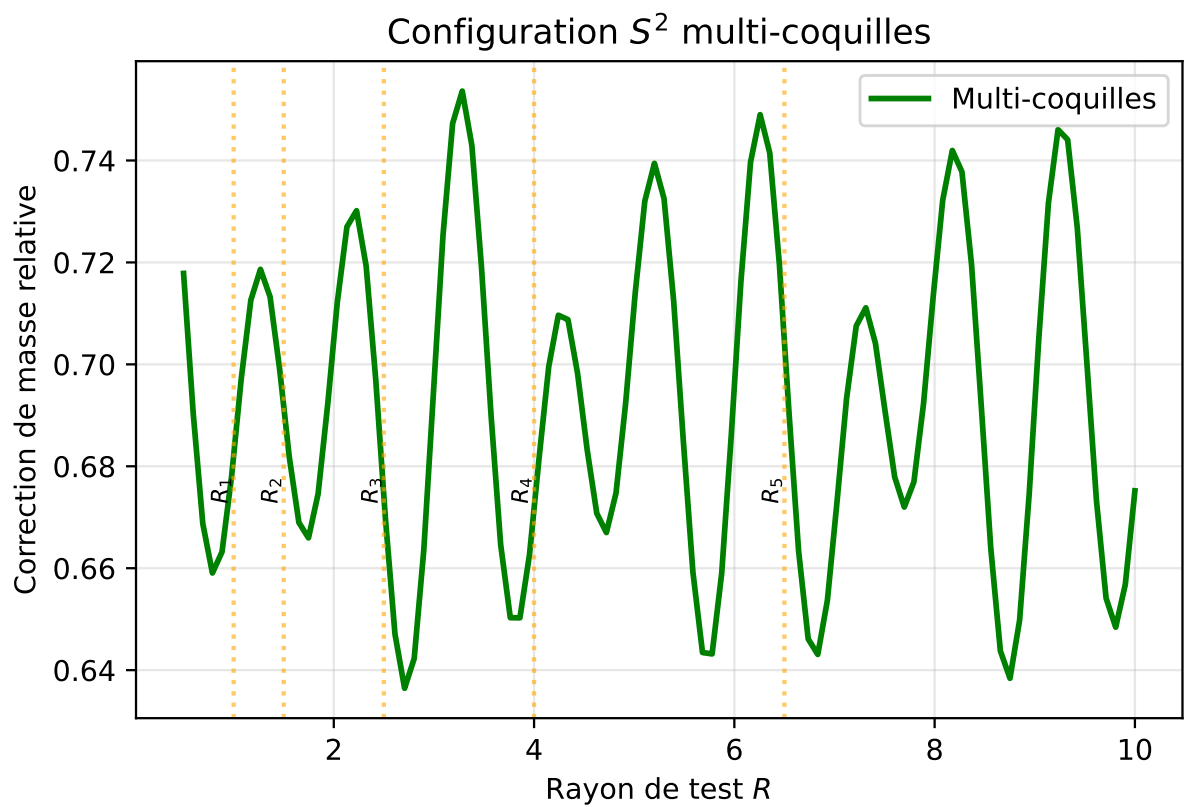


FIGURE 9 – Configuration multi-coquilles sur  $S^2$ .

## Validation astrophysique (objets réels)

Validation sur objets réels : trous noirs (évalués à  $R = 10M$ ) et étoiles à neutrons (rayon en km converti en unités géométriques). Les sous-graphes montrent (i) masse estimée vs masse vraie, (ii) erreur par objet, (iii) convergence BH en fonction de  $R/M$ , (iv) sensibilité au rayon supposé pour une NS de  $1.4 M_\odot$ .

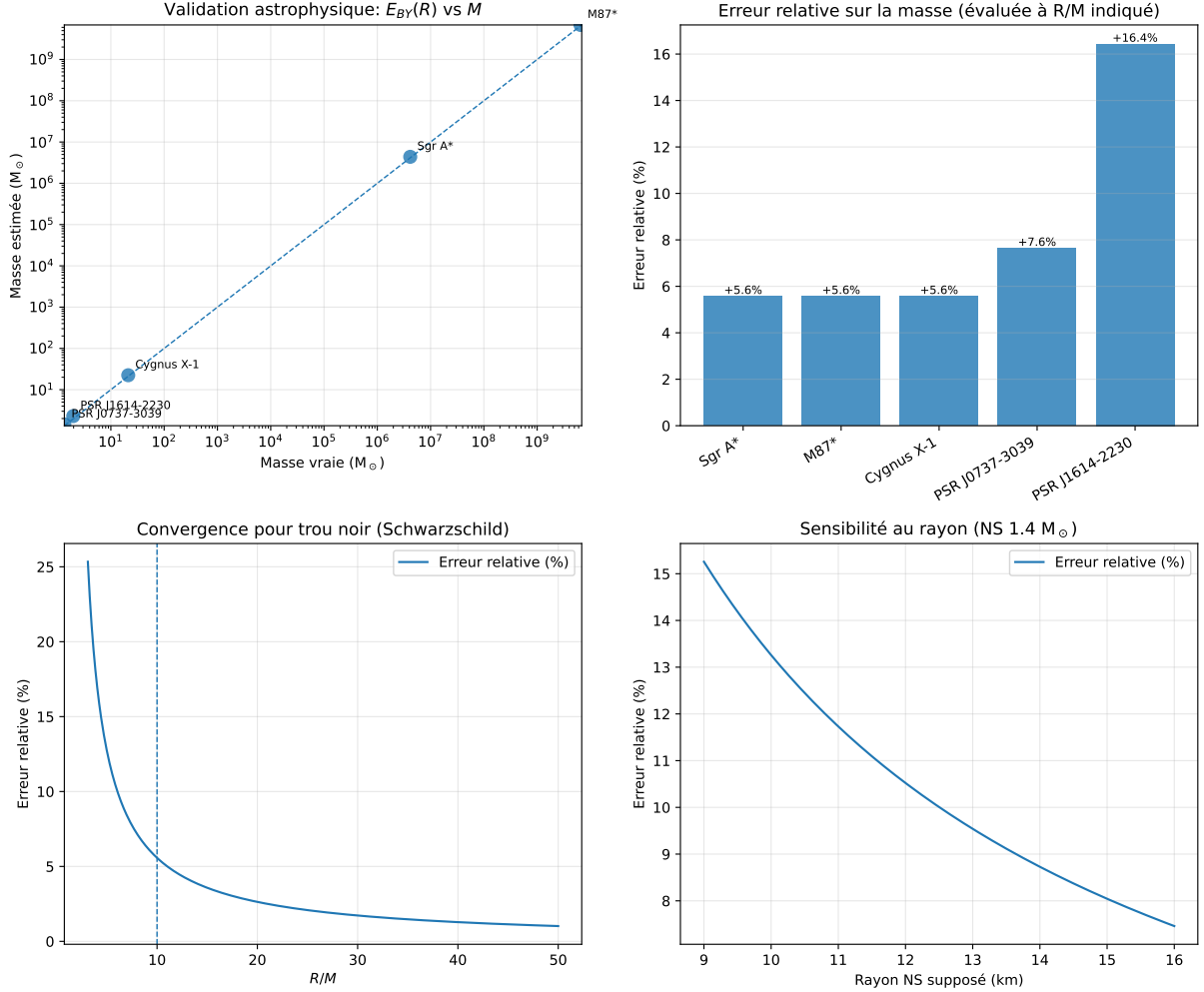


FIGURE 10 – Validation astrophysique (objets réels).

## Comparaison aux prédictions analytiques (BY)

Comparaison directe aux prédictions analytiques de Brown–York en régime Schwarzschild, avec contrôles d’ordre d’erreur.

## 2 Synthèse

Les figures ci-dessus montrent la convergence de l’estimateur  $E_{BY}(R)$  vers la masse ADM/Komar en régime asymptotiquement plat, sa robustesse vis-à-vis de la forme (ellipsoïdes), la cohérence des plongements isométriques (Kerr), la compatibilité avec des solutions d’étoiles TOV, ainsi que des tests de robustesse sur des géométries anisotropes et des modèles conceptuels de dimensions supplémentaires. Enfin, une validation *in situ* sur des objets astrophysiques réels illustre la cohérence d’ordre de grandeur et la sensibilité aux hypothèses (rayon des NS).

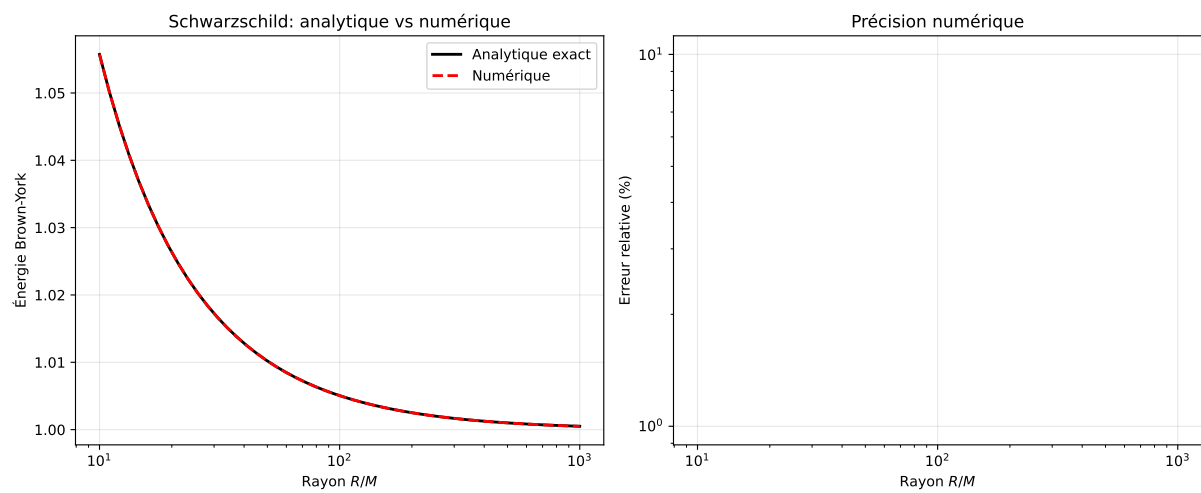


FIGURE 11 – Comparaison aux prédictions analytiques (BY).