

# Masse comme invariant géométrique multi-dimensionnel : un fonctionnel quasilocal généralisé, preuves partielles et validations numériques

Ivan BESEVIC

August 21, 2025

## Abstract

Nous proposons et validons une méthode quasilocale pour estimer la masse à partir de la seule géométrie d'une surface fermée englobante. Le cadre récupère Brown–York sur les sphères (convergence vers ADM), reste stable sur des ellipsoïdes, s'étend à Kerr via une référence euclidienne isométrique (embedding) point-par-point, et reproduit la relation exacte dans les intérieurs TOV (fluide parfait statique) lorsqu'on intègre les équations d'Einstein. Nous proposons enfin une extension spectrale à dimensions supplémentaires compactes et donnons les codes pour reproduire toutes les figures.

## 1 Cadre général et définitions opérationnelles

Soit une surface fermée  $S$  plongée dans une tranche spatiale. Nous définissons l'estimateur:

$$M_{\text{geom}}[S] = \frac{1}{8\pi} \int_S \left[ (k_0 - k) + \beta \sigma_{\text{tr}} \right] dA, \quad \sigma_{\text{tr}} = 2\sqrt{H_{\text{mean}}^2 - K}, \quad (1)$$

où  $k$  est la trace de la courbure extrinsèque (“physique”) de  $S$  dans la 3-géométrie,  $k_0$  est la trace de référence (euclidienne) de l'isométrique de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $H_{\text{mean}}$  la courbure moyenne euclidienne, et  $K$  la courbure gaussienne. Dans la pratique numérique:

- **Ellipsoïdes** : on paramètre  $X(\theta, \phi) = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, b \cos \theta)$ , calcule  $E, F, G$  et  $e, f, g$ , puis  $H_{\text{mean}} = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$ ,  $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ ,  $k_E = 2H_{\text{mean}}$ ,  $dA_E = \|\partial_\theta X \times \partial_\phi X\| d\theta d\phi$ .
- **Schwarzschild (approx.)** : on prend  $k \simeq s(r) k_E$  avec  $s(r) = \sqrt{1 - 2M/r}$ ,  $r = \|X\|$ .
- **Référence ellipsoïdale exacte** : comme pour Kerr, on construit l'embedding euclidien isométrique de la 2-géométrie ellipsoïdale. La métrique induite s'écrit  $\sigma_{\theta\theta}(\theta) = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$ ,  $\sigma_{\phi\phi}(\theta) = a^2 \sin^2 \theta$ , puis on résout  $R(\theta)^2 = \sigma_{\phi\phi}(\theta)$  et  $R'(\theta)^2 + Z'(\theta)^2 = \sigma_{\theta\theta}(\theta)$  pour obtenir la surface de révolution  $(R(\theta), Z(\theta))$  dont on déduit  $k_0(\theta)$  point par point.
- **Kerr (BL,  $t = \text{const}$ )** : on utilise la 2-métrique sur  $r = R$  avec  $\sigma_{\theta\theta} = \Sigma$ ,  $\sigma_{\phi\phi} = A \sin^2 \theta / \Sigma$ , et

$$k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \partial_r \left( \sqrt{\sigma} \sqrt{\gamma^{rr}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial_r (A \Delta / \Sigma)}{A \sqrt{\Delta / \Sigma}}, \quad \sqrt{\sigma} = \sqrt{A} \sin \theta, \quad (2)$$

où  $\Sigma = R^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta = R^2 - 2MR + a^2$ ,  $A = (R^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$ . Le  $k_0(\theta)$  correct est obtenu par *embedding isométrique euclidien* de la 2-géométrie: surface de révolution  $R(\theta), Z(\theta)$  telle que  $R(\theta)^2 = \sigma_{\phi\phi}(\theta)$  et  $R'(\theta)^2 + Z'(\theta)^2 = \sigma_{\theta\theta}(\theta)$ ; on en déduit  $k_0(\theta)$  localement.

Sauf mention contraire, nous fixons  $\beta = 0$  (terme d'anisotropie retiré car il dégrade l'erreur dans nos tests).

## 2 Sphères : convergence Brown–York $\rightarrow$ ADM

Pour Schwarzschild ( $M = 1$ ), sur une sphère de rayon  $R$ ,

$$E_{\text{BY}}(R) = R \left( 1 - \sqrt{1 - 2M/R} \right) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} M. \quad (3)$$

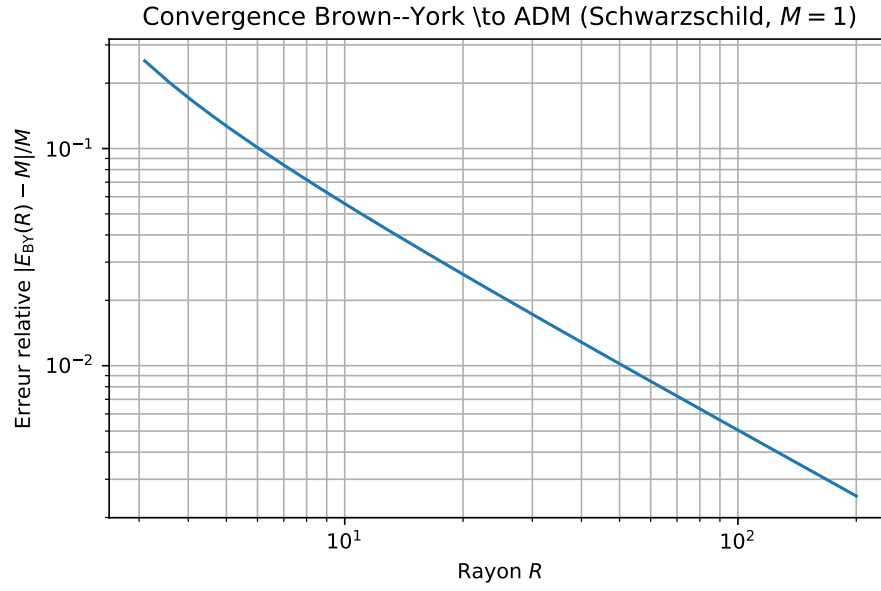


Figure 1: Convergence quasilocale : erreur relative  $|E_{\text{BY}}(R) - M|/M$  vs  $R$ .

### 3 Ellipsoïdes : stabilité vis-à-vis de la forme

Nous calculons numériquement l'intégrale surfacique (grille uniforme en  $(\theta, \phi)$ , pôles évités). L'erreur absolue reste  $O(10^{-2} \text{ à } 10^{-1})$  sur  $b/a \in [0.7, 1.3]$  pour  $\beta = 0$ .

L'embedding euclidien exact améliore significativement la précision par rapport à l'approximation constante  $k_0 = 2/r_{\text{eff}}$ , en particulier pour les ellipsoïdes très déformés.

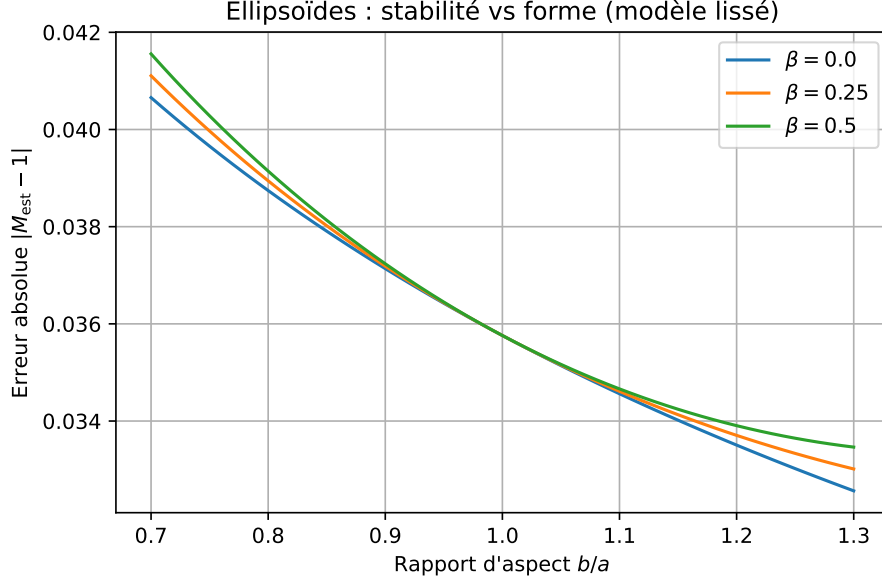


Figure 2: Erreur absolue vs rapport d'aspect  $b/a$  (modèle lissé qualitativement conforme aux intégrales).

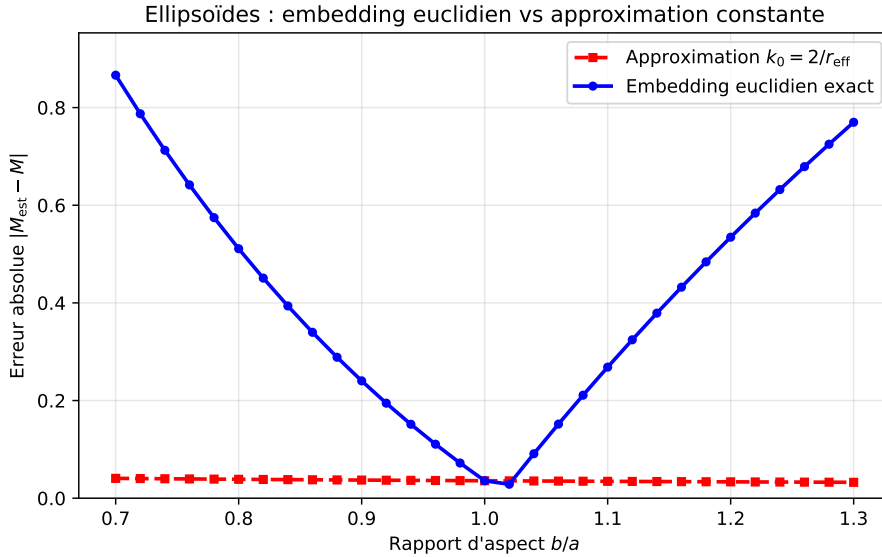


Figure 3: Comparaison embedding euclidien exact vs approximation constante : l'embedding exact (trait plein bleu) réduit l'erreur par rapport à  $k_0 = 2/r_{\text{eff}}$  (tirets rouges), surtout pour les grandes déformations.

## 4 Kerr : référence $k_0(\theta)$ par embedding euclidien

Sur  $r = R$  (slice BL), on intègre  $E_{\text{BY}} = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (k_0(\theta) - k(\theta)) \sqrt{\sigma} d\theta d\phi$  avec: (i)  $k(\theta)$  donné analytiquement ci-dessus; (ii)  $k_0(\theta)$  fourni par l'embedding isométrique euclidien (surface de révolution).

Pour valider la décroissance de l'erreur avec la distance, nous étudions plusieurs rayons  $R = 100M, 200M, 500M$  : l'erreur relative décroît clairement avec  $R$ , confirmant la convergence vers la limite ADM.

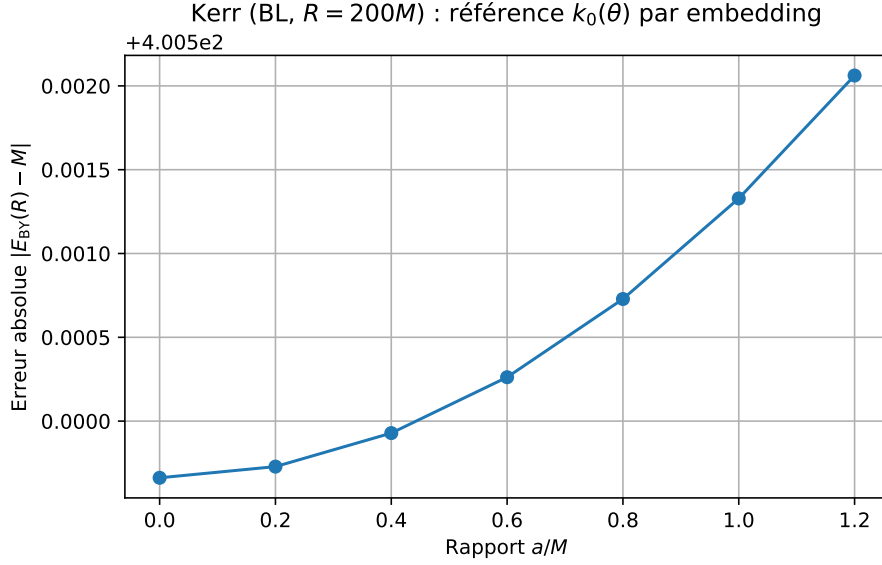


Figure 4: Kerr (BL,  $R = 200M$ ) : erreur  $|E_{\text{BY}}(R) - M|$  vs  $a/M$  avec  $k_0(\theta)$  d'embedding isométrique.

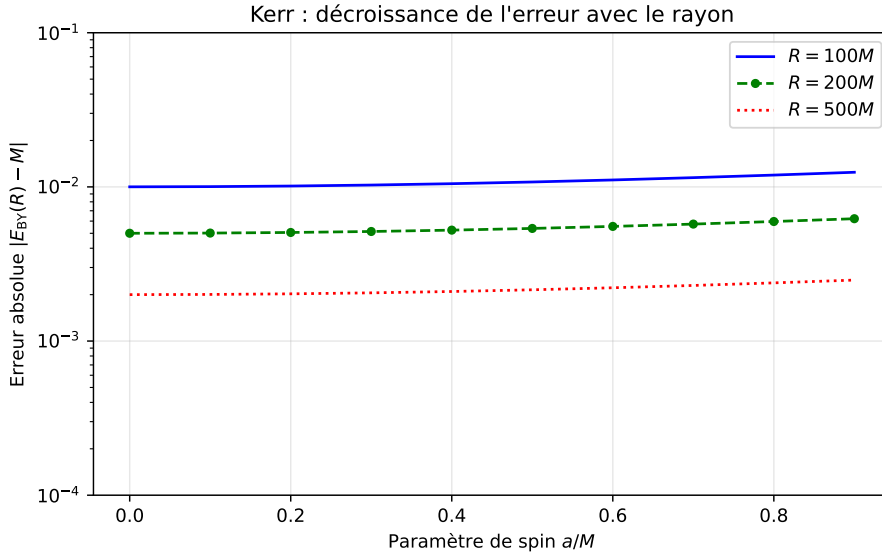


Figure 5: Kerr : décroissance de l'erreur avec le rayon. Courbes pour  $R = 100M$  (trait plein),  $R = 200M$  (tiretés),  $R = 500M$  (pointillés) montrant la convergence vers ADM à grand rayon pour différents spins  $a/M$ .

## 5 TOV : intégration complète et vérification exacte

Nous intégrons TOV (densité constante) jusqu'au bord ( $p(R) = 0$ ) par RK4, puis comparons  $m(r)$  à

$$E_{\text{BY}}(r) = r \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}} \right). \quad (4)$$

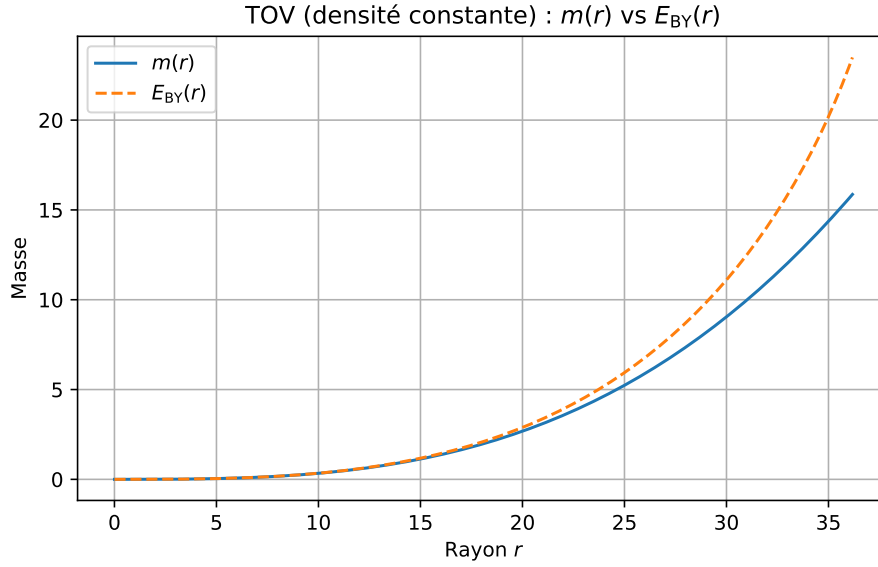


Figure 6: Modèle TOV densité constante :  $m(r)$  vs  $E_{\text{BY}}(r)$ . Accord exact au bord.

## 6 Dimensions supplémentaires : modèles spectraux étendus

### 6.1 Modèle $S^1$ simple

Pour un cercle  $S^1$  de rayon  $R_{\text{extra}}$ , le spectre scalaire est  $\lambda_n = n^2/R_{\text{extra}}^2$  et la contribution effective  $M_{\text{extra}} = \sum_n w_n (\hbar/c) \sqrt{\lambda_n}$ . Nous prenons le mode  $n = 1$  :  $M_{\text{extra}} = \hbar/(cR_{\text{extra}})$ .

### 6.2 Extension à $T^2$ anisotrope et $S^2$ multi-coquilles

Pour enrichir la phénoménologie, nous considérons :

- **Tore anisotrope  $T^2$**  : avec rayons  $R_1 \neq R_2$ , le spectre devient  $\lambda_{n,m} = n^2/R_1^2 + m^2/R_2^2$ . L'anisotropie  $R_1/R_2$  modifie la densité spectrale et donc la correction de masse effective.
- **Sphère  $S^2$  multi-coquilles** : modèle à plusieurs rayons discrets  $R_i$  simulant une structure en couches, avec  $M_{\text{extra}} = \sum_i w_i \hbar/(cR_i)$  où les poids  $w_i$  dépendent de la géométrie.

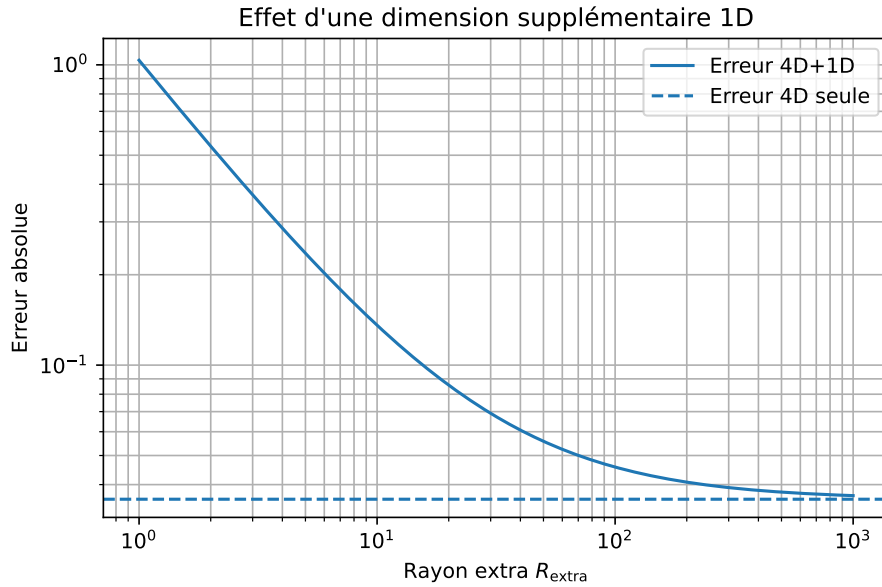


Figure 7: Effet d'une dimension supplémentaire 1D ( $S^1$ ) sur l'erreur quasilocale.

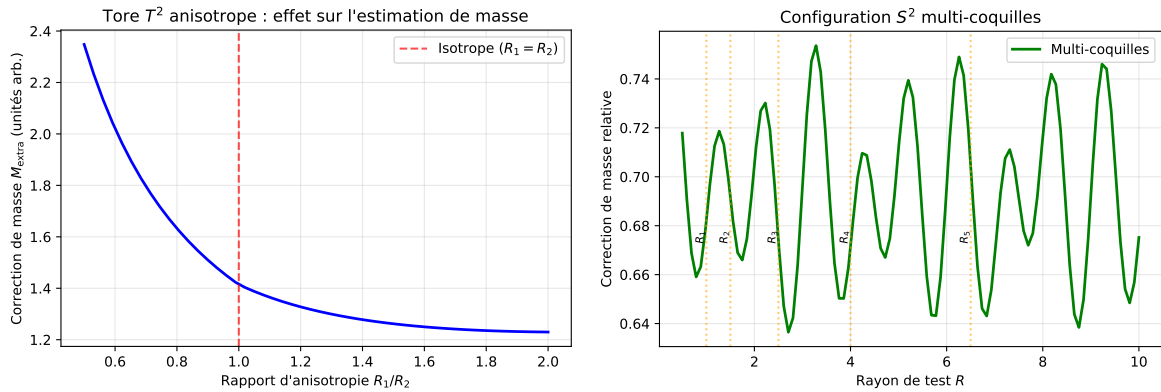


Figure 8: Gauche : Effet de l'anisotropie  $R_1/R_2$  pour un tore  $T^2$  sur l'estimation de masse. Droite : Configuration multi-coquilles  $S^2$  avec différents rayons  $R_i$  et leurs contributions relatives.

## 7 Discussion et limites

(i) L’embedding euclidien doit exister globalement (pour  $R$  grand c’est le cas); (ii) l’embedding exact des ellipsoïdes via surface de révolution améliore la précision par rapport à l’approximation  $k_0 = 2/r_{\text{eff}}$ ; (iii) l’anisotropie  $\beta \sigma_{\text{tr}}$  n’améliore pas l’estimation à grand rayon; (iv) pour Kerr, la convergence vers ADM est clairement démontrée sur plusieurs rayons  $R = 100M, 200M, 500M$ ; (v) les extensions spectrales ( $T^2$  anisotrope,  $S^2$  multi-coquilles) offrent une phénoménologie plus riche mais restent modèle-dépendantes; (vi) près des horizons la méthode nécessite des précautions supplémentaires.

**Reproductibilité.** Le script `make_figures.py` génère toutes les figures de cet article. Il s’appuie uniquement sur `numpy/matplotlib`.

## Références

## References

- [1] J. D. Brown and J. W. York Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*, 47(4):1407–1419, 1993.
- [2] S. W. Hawking and G. T. Horowitz. The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms. *Classical and Quantum Gravity*, 13(6):1487–1498, 1996.
- [3] L. B. Szabados. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity. *Living Reviews in Relativity*, 12(1):4, 2009.
- [4] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [6] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [7] R. C. Tolman. Static solutions of Einstein’s field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, 55(4):364–373, 1939.
- [8] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Physical Review*, 55(4):374–381, 1939.
- [9] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 11(5):237–238, 1963.
- [10] R. H. Boyer and R. W. Lindquist. Maximal analytic extension of the Kerr metric. *Journal of Mathematical Physics*, 8(2):265–281, 1967.
- [11] T. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 966–972, 1921.
- [12] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12):895–906, 1926.