Procenjivanje minimalne površine pravougaonih i konveksnih kontejnera za problem pakovanja konveksnih poligona koristeći translacije

Seminarski rad u okviru kursa
Geometrijski algoritmi
Matematički fakultet

Ivan Ristović

decembar 2018.

Sažetak

Algoritmi za efikasno pakovanje objekata imaju važne primene. Sam problem ima raznorazne varijante, od kojih su autori izabrali pakovanje konveksnih poligona u kontejner oblika pravougaonika pri čemu su dozvoljene samo translacije poligona. Autori predstavljaju algoritam vremenske složenosti $O(n \log n)$ za rešavanje datog problema. Štaviše, autori dokazuju da je površina dobijenog rešenja najviše 17.45 puta veća od optimalne, što je prvi poznati dokaz da se ovako teški NP-teški problemi uopšte mogu aproksimirati. Takodje, autori razmatraju problem pakovanje poligona u konveksne kontejnere površine najviše 27 puta veće od optimalne.

Sadržaj

1 Uvod

Problem efikasnog pakovanja objekata u kontejnere ima raznolike varijacije i ogromne primene od kojih će par biti navedeno. Dvodimenzionalne verzije problema se javljaju u tzv. *pakovanju u trake* [1] [12, 13, 5], gde se dati skup objekata pakuje u pravougaone trake fiksne širine minimizujući širinu trake. U tri dimenzije, problem se prirodno javlja u minimizaciji prostora prilikom transportovanja objekata.

Oblik objekata je od velikog uticaja na složenost problema. U dve dimenzije možemo razmatrati pravilne poligone, pravougaonike, proste ili konveksne poligone. Pritom, mora se specifikovati koje transformacije objekata su dozvoljene - da li ih je dozvoljeno rotirati ili samo translirati.

Već su jednostavne varijante ovog problema NP-teške, recimo pakovanje skupa pravougaonika sa stranicama paralelnim koordinatnim osama koristeći samo translacije, što je pokazano u [1] [4] tako da se polinomijalni algoritmi mogu konstruisati samo ukoliko je broj objekata konstantan [1] [1, 2, 14, 3, 8, 9, 10, 7]. Stoga su konstruisani razni algoritmi za aproksimaciju koristeći svakojake heuristike, ali mali je broj takvih algoritama za problem nalaženja *kontejnera minimalne površine* za objekte.

Ukoliko dozvolimo samo translacije objekata, svi poznati algoritmi koji daju optimalne rezultate ili dokazive aproksimacije spadaju u dve kategorije: ili pakuju speficične tipove objekata, ili pakuju konstantni broj objekata. S obzirom da je problem pakovanja proizvoljnog broja objekata NP-težak, postavlja se pitanje: *Da li je moguće efikasno aproksimirati re'vsenje problema pakovanja n objekata koji nisu paralelni sa koordinatnim osama?* Autori rada odgovaraju pozitivno, dajući algoritam za aproksimaciju problema pakovanja skupa P konveksnih poligona u pravougaoni kontejner minimalne površine (opisan u delu 2). Koristeći ove rezultate moguće je takodje aproksimirati minimalni konveksni kontejner za P (opisan u delu 3). Oba algoritma imaju vremensku složenost $O(n \log n)$.

2 Pravougaoni kontejneri

Definicija 2.1. Neka je $P = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ skup k konveksnih poligona sa ukupno n temena. Pravougaonik sa stranicama paralelnim koordinatnim osama u koji možemo da spakujemo sve poligone bez njihove rotacije nazivamo *kontejner* za P.

Cilj je pronaći kontejner za P minimalne površine, u daljem tekstu *optimalni kontejner*. Neka je b_{opt} optimalni kontejner za P i neka je njegova površina OPT. Algoritam koji autori predstavljaju nalazi kontejner površine ne veće od $17,45 * \mathrm{OPT}$.

Definicija 2.2. *Visina* poligona p, u oznaci $height(p)$, se definiše kao razlika njegove maksimalne i minimalne y-koordinate. *Širina* poligona p, u oznaci $width(p)$, se definiše kao razlika njegove maksimalne i minimalne x-koordinate.

Definicija 2.3. *Maksimalna visina* skupa P, u oznaci h_{max}, se definiše kao maksimum visina svih poligona iz P, tj. $h_{max} = max_{p \in P} height(p)$. *Maksimalna širina* skupa P, u oznaci w_{max}, se definiše kao maksimum širina svih poligona iz P, tj. $w_{max} = max_{p \in P} width(p)$.

Rešenje se zasniva na particionisanju P na *visinske klase* koristeći parametar $\alpha \in [0, 1]$ koji se kasnije bira tako da je aproksimativni faktor optimalan. Preciznije, P se particioniše u podskupove $P_0, P_1, \ldots$ po visini: Poligoni sa visinom izmedju h_{max} i αh_{max} se nalaze u P_0, poligoni sa visinom izmedju h_{max} i $\alpha^2 h_{max}$ se nalaze u P_1, itd. Generalno, P_i sadrži sve poligone $p \in P$ takve da je $h_{i+1} < height(p) \leq h_i$, gde je $h_i = \alpha^i h_{max}$. Algoritam se sastoji iz dva velika koraka:

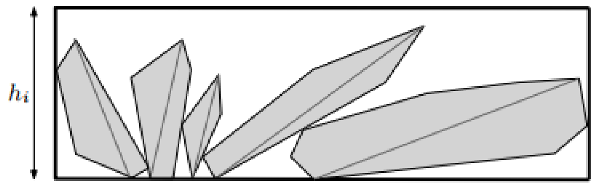
- Spakovati svaku visinsku klasu P_i zasebno u kontejner B_i visine h_i.
- Zameniti svaki neprazni kontejner B_i kolekcijom *mini-kontejnera* poravnatih sa koordinatnim osama koji nisu previše široki. Spakovati sve mini-kontejnere u jedinstveni kontejner B.

2.1 Pakovanje poligona iz jedne visinske klase

Bez umanjenja opštosti, izaberimo proizvoljnu visinsku klasu P_i. Poligoni iz te klase imaju visine u opsegu $(\alpha h_i, h_i]$. Neka je $\sigma = [0, \infty) \times [0, h_i]$ polu-biskonačna traka visine h_i. Poligoni se u σ stavljaju pohlepno.

Definicija 2.4. Za poligon p, neka je $s(p)$ duž koja spaja najniže i najviše teme poligona p posmatrajući y-koordinatu. $s(p)$ nazivamo *kičmom* poligona p.

Poligone iz P_i sortiramo po nagibu njihovih kičmi i postavljamo ih jedan po jedan u σ, pomerajući svaki ulevo sve dok ne dodiruje drugi poligon ili granicu od σ (videti sliku 2.1). Kad se svi poligoni ubace u σ, trivijalno se formiraju granice kontejnera B_i.



Slika 2.1: Primer pakovanja poligona iz iste visinskoj klasi

Lema 2.5. Površina kontejnera B_i formiranog na gore opisani način zadovoljava:

$$area(P_i) \leq 2/\alpha \cdot \sum_{p \in P_i} area(p) + 2h_i \cdot max_{p \in P_i} width(p)$$

2.2 Generisanje i pakovanje mini-kontejnera

3 Konveksni kontejneri

Literatura

[1] Helmut Alt, Mark de Berg, and Christian Knauer. APPROXIMATING MINIMUM-AREA RECTANGULAR AND CONVEX CONTAINERS FOR PACKING CONVEX POLYGONS, 2017. on-line at: jocg.org/index.php/jocg/article/view/289/128.