ESTADÍSTICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS

PRÁCTICA 1: Simulación

Ivan Svetlich

In [4]:
```
#Librerias
library(IRdisplay)
library(ggplot2)
```

Ejercicio 1

El vendedor A distribuye partes, donde cada una tiene una probabilidad de 0.03 de estar defectuosa. El vendedor B también distribuye partes y cada parte tiene una probabilidad de 0.05 de estar defectuosa. Usted recibe un envío de 100 partes de cada vendedor.

a) Sea X el número de partes defectuosas en el envío proveniente del vendedor A e Y el número de partes defectuosas en el envío proveniente del vendedor B. ¿Cuáles son las distribuciones de X e Y?

X e Y tienen distribución binomial con parámetros $n = 100$, y $p_x = 0.03$ y $p_y = 0.05$ respectivamente:

$$X \sim B(100, 0.03) \qquad Y \sim B(100, 0.05)$$

b) Genere muestras simuladas de tamaño 1000 a partir de las distribuciones de X e Y.

In [10]:
```
m <- 1000
n <- 100
px <- 0.03
py <- 0.05
X <- rbinom(m, n, px)
Y <- rbinom(m, n, py)
```

c) Utilice las muestras para estimar la probabilidad de que el número total de partes defectuosas sea menor a 10.

In [11]:
```
total <- X + Y
P1 <- sum(total < 10) / length(total)
display_markdown(paste("$P(X + Y < 10) =$", P1))
```

$P(X + Y < 10) =$ 0.746

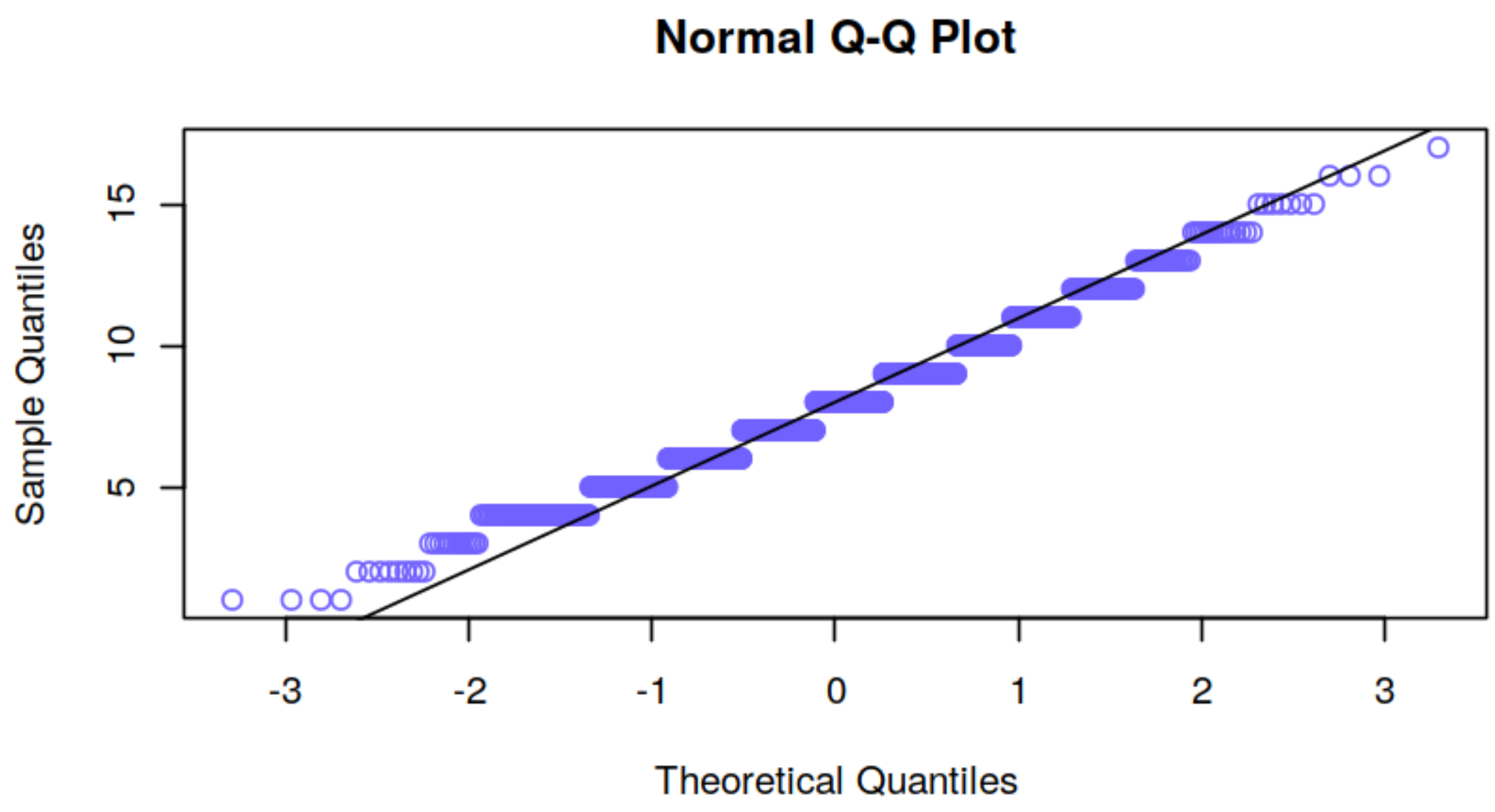
d) Utilice las muestras para estimar la probabilidad de que el envío del vendedor A tiene más partes defectuosas que el envío del vendedor B.

In [12]:
```
P2 <- sum(X > Y) / length(X)
display_markdown(paste("$P(X > Y) =$", P2))
```

$P(X > Y) =$ 0.179

e) Construya una gráfica de probabilidad normal para el número total de partes defectuosas.

In [23]:
```
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
qqnorm(total, col="#7161ff")
qqline(total, col="black")
```



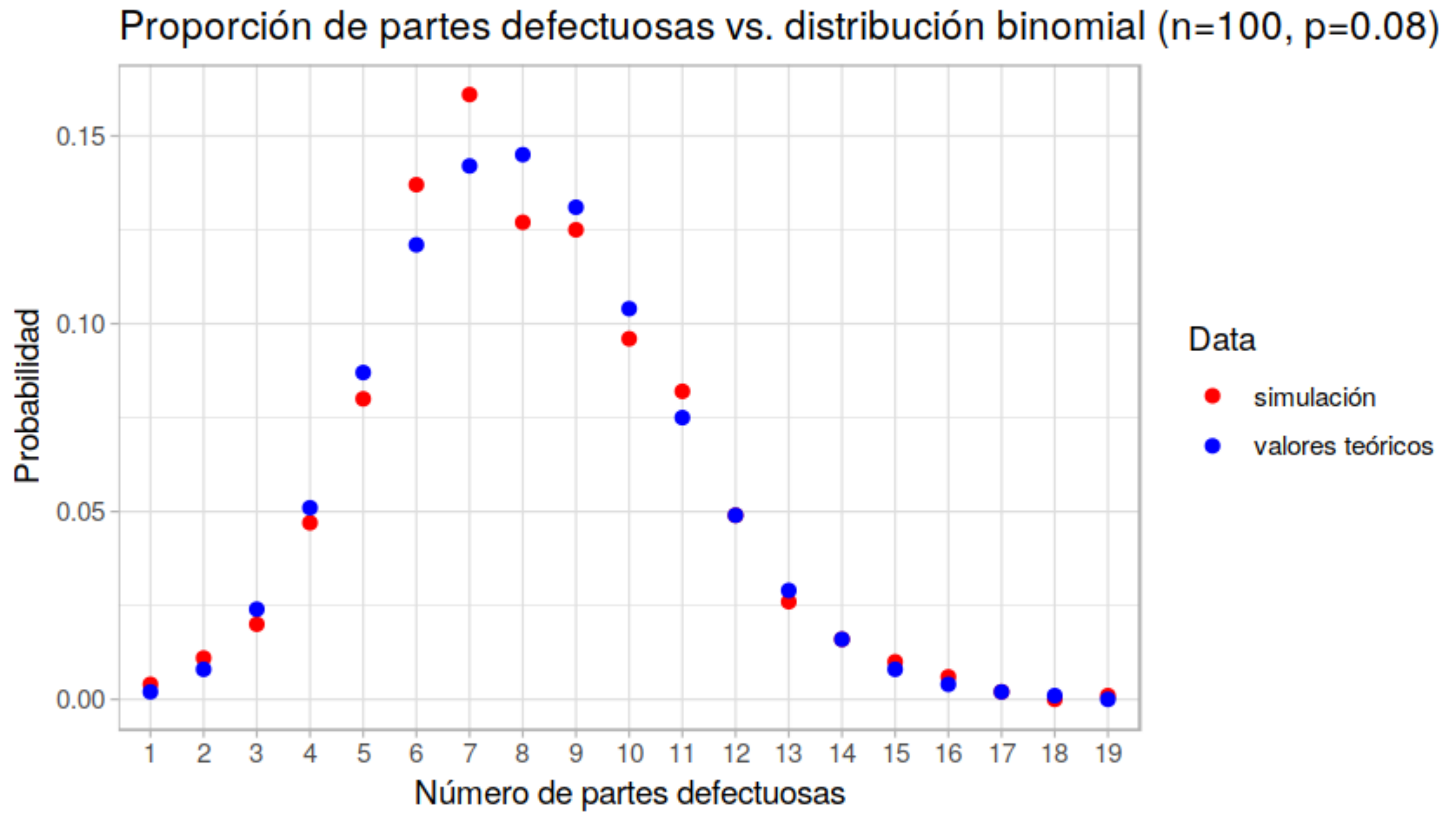
La forma particular de la gráfica de probabilidad normal se debe a que los datos provienen de distribuciones binomiales, y por lo tanto los cuantiles solo toman valores discretos.

In [187…

```
# Gráfico Proporción de partes defectuosas vs. distribución binomial teórica

# Obtengo las frecuencias
rango <- range(total)
df_sample <- data.frame(table(factor(total, levels = rango[1]:rango[2])))
colnames(df_sample) <- c("total", "freq")

# Calculo los valores teóricos de la binomial estimando el parámetro p
p_star <- sum(total) / (m*n)
x_binom <- rango[1]:rango[2]
y_binom <- dbinom(x_binom, n, p_star)

# Uno los valores simulados y los teóricos en un mismo dataframe
A <- data.frame(x=df_sample$total, y=df_sample$freq / m)
B <- data.frame(x=x_binom, y=round(y_binom, 3))
df <- rbind(A,B)
df$dataset <- c(rep("A", nrow(A)), rep("B", nrow(B)))
```

In [189…

```
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
ggplot(df, aes(x=df$x, y=df$y, col=dataset)) +
ggtitle(sprintf("Proporción de partes defectuosas vs. distribución binomial (n=%d, p=%.2f)", n, p_star)) +
geom_point() +
scale_color_manual(name="Data", labels = c("simulación","valores teóricos"), values=c("red", "blue")) +
xlab("Número de partes defectuosas") +
ylab("Probabilidad") +
theme_light()
```



La distribucón del número total de partes defectuosas obtenida mediante simulación parece corresponder a una Binomial con parámetros $n = 100$ y $p = 0.08$.

Ejercicio 2

Dos diseños de cierto circuito de semiconductores están compitiendo entre sí. La duración del primero, en horas, se distribuye exponencialmente con $\lambda = 10^{-4}$, y la duración del segundo tiene una distribución lognormal con $\mu = 6$ y $\sigma^2 = 5.4$.

a) Utilice una muestra simulada de tamaño 1000 para estimar la probabilidad de que un circuito con el primer diseño dure más que otro con el segundo diseño.

In [6]:
```
n <- 1000
lambda <- 1e-4
u <- 6
s <- sqrt(5.4)
X <- rexp(n, lambda)
Y <- rlnorm(n, u, s)
P1 <- sum(X > Y) / n
display_markdown(paste("$P(X > Y) =$", P1))
```

$P(X > Y) =$ 0.846

b) Utilice una muestra simulada de tamaño 1000 para estimar la probabilidad de que un circuito con el primer diseño dure el doble de tiempo que otro con el segundo diseño.

In [7]:
```
P2 <- sum(X > 2*Y) / n
display_markdown(paste("$P(X > 2Y) =$", P2))
```

$P(X > 2Y) =$ 0.783

Ejercicio 3

Un cable está compuesto por cuatro alambres. La fuerza de ruptura de cada alambre es una variable aleatoria distribuida normalmente con media de 10 kN y desviación estándar de 1 kN. Utilizando el método del cable quebradizo, se estima que la fuerza del cable es igual a la fuerza del alambre más frágil multiplicada por el número de alambres.

a) Utilice muestras simuladas de tamaño 1000 para estimar la fuerza media de este tipo de cable.

In [8]:
```
m <- 4 # cantidad de cables
n <- 1000 # numero de muestras
u <- 10 # media poblacional
s <- 1 # desviacion standard
X <- rnorm(m*n, u, s)
data <- matrix(X, nrow = m)
Y <- apply(data, 2, min) * 4 # fuerza
Y_avg <- mean(Y) # fuerza media
display_markdown(paste("$\\overline{Y}^* =$", Y_avg))
```

$\overline{Y}^* =$ 35.9806358308349

b) Estime la mediana de la fuerza del cable.

In [10]:
```
Y_median <- median(Y) #mediana de la fuerza
display_markdown(paste("$\\widetilde{Y}^* =$", Y_median))
```

$\widetilde{Y}^* =$ 36.0481153402195

c) Estime la desviación estándar de la fuerza del cable.

In [11]:
```
Y_sd <- sd(Y) #desviacion standard
display_markdown(paste("$\\sigma^* =$", Y_sd))
```

$\sigma^* =$ 2.73537397009268

d) Para que sea aceptable en cierta aplicación, la probabilidad de que el cable se rompa con una carga de 28 kN debe ser menor a 0.01. ¿Parece ser que el cable es aceptable?. Explique.

In [12]:
```
P <- (sum(Y < 28) / length(Y))
display_markdown(paste("$P(Y < 28) =$", P))
```

$P(Y < 28) =$ 0.005

La probabilidad de que un cable tenga una fuerza de ruptura menor a 28kN, obtenida mediante simulación, es menor a 0.01 (aprox. 0.005). Por lo tanto, el cable parece ser aceptable para esta aplicación.

Ejercicio 4

Un sistema está compuesto por los componentes A y B conectados en serie, como en la figura. El tiempo de vida en meses del componente A sigue una distribución lognormal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.5$, y la duración en meses del componente B tiene una distribución lognormal con $\mu = 2$ y $\sigma = 1$. El sistema solo funcionaría si A y B lo hacen.

a) Genere, por simulación un gran número de los tiempos de vida del sistema (por lo menos 1000).

In [16]:
```
n <- 10000
ua <- 1
sa <- 0.5
ub <- 2
sb <- 1
Xa <- rlnorm(n, ua, sa)
Xb <- rlnorm(n, ub, sb)
M <- cbind(Xa, Xb)
L <- apply(M, 1, min) #tiempo de vida del sistema
```

b) Estime la media del tiempo de vida del sistema.

In [195…
```
avg <- mean(L)
display_markdown(paste("$\\overline{L}^* =$", avg))
```

$\overline{L}^* =$ 2.77982178747906

c) Estime la probabilidad de que el sistema falle en dos meses.

In [196…
```
P1 <- sum(L <= 2) / length(L) #probabilidad de que falle en 2 meses
display_markdown(paste("$P(L <= 2) =$", P1))
```

$P(L <= 2) =$ 0.34

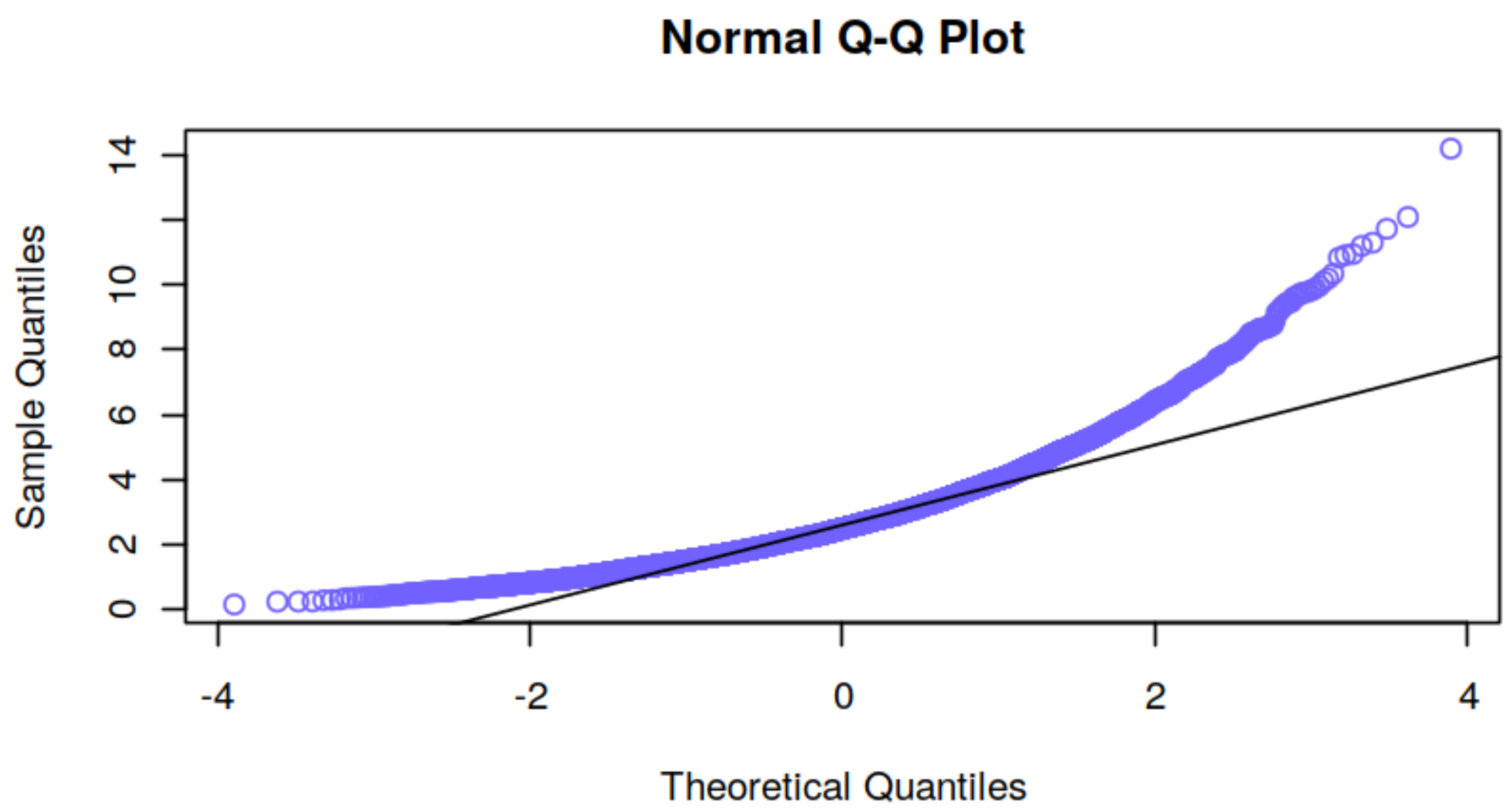
d) Estime el 20% percentil de los tiempos de vida del sistema.

In [197…
```
qnt <- quantile(L, 0.20)
display_markdown(paste("$Q_{0.20}$ =", qnt))
```

$Q_{0.20}$ = 1.60349375381956

e) Construya una gráfica de probabilidad normal de los tiempos de vida del sistema. ¿El tiempo de vida del sistema tiene una distribución aproximadamente normal?

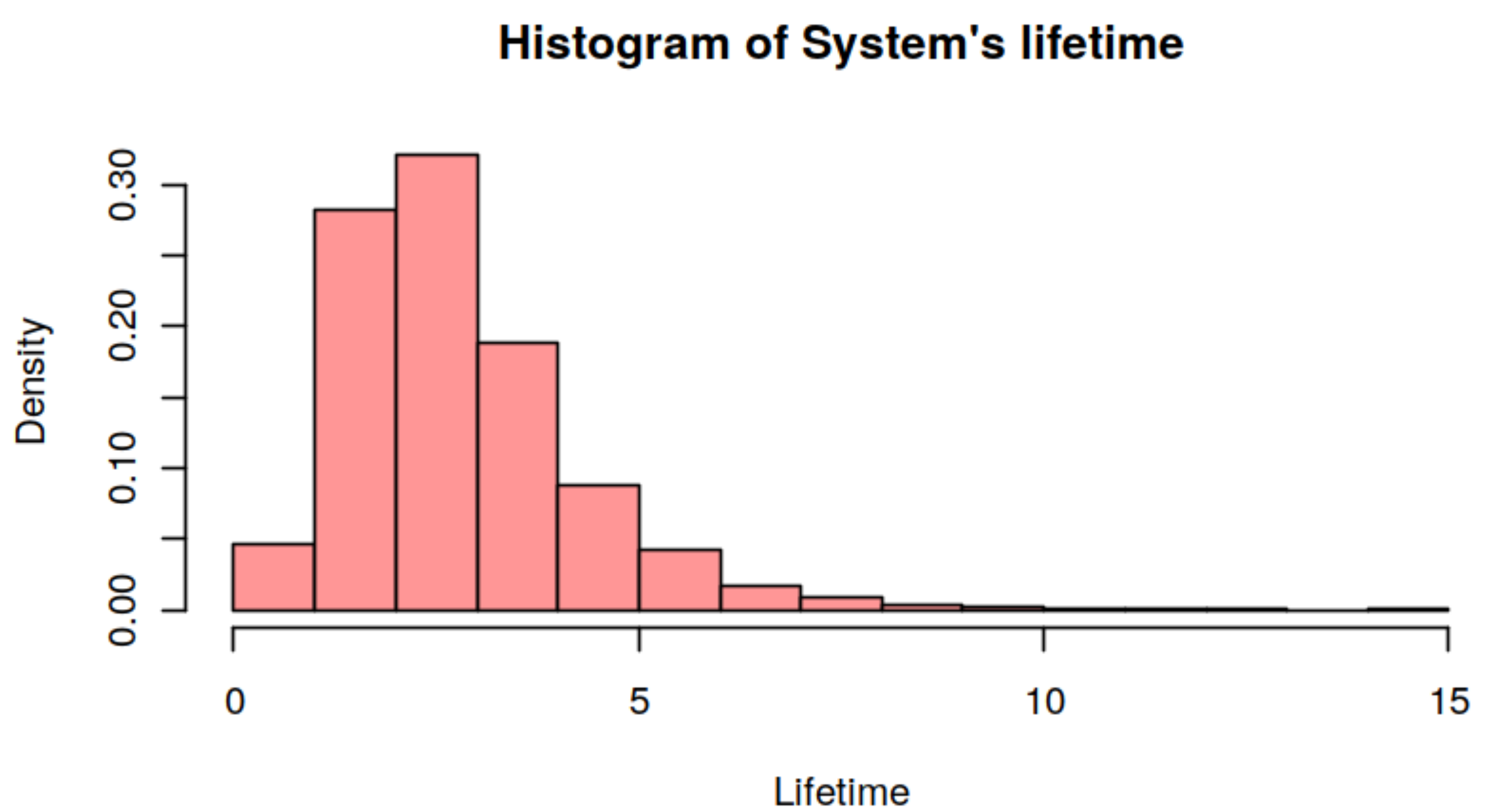
In [24]:
```
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
qqnorm(L, col="#7161ff")
qqline(L)
```



El patrón de la gráfica de distribución normal es no-lineal, lo cual sugiere que el tiempo de vida no sigue una distribución normal.

f) Construya un histograma de los tiempos de vida del sistema.

In [21]:
```
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
hist(L, probability=T, main="Histogram of System's lifetime", xlab="Lifetime", col="#ff9696")
```



El histograma del tiempo de vida muestra una asimetría positiva: la cola derecha es más larga y la masa de la distribución se concentra en la parte izquierda.

Ejercicio 5

Se toma una muestra aleatoria de tamaño 8 de una distribución exponencial con parámetro λ desconocido. Los valores de la muestra son: 2.74, 6.41, 4.96, 1.65, 6.38, 0.19, 0.52 y 8.38. Este ejercicio muestra cómo se emplea la estimación bootstrap para estimar el sesgo y la incertidumbre $\sigma_{\hat{\lambda}}$ en la estimación de $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$.

a) Calcule $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$ para la muestra específica.

In [9]:
```
x <- c(2.74, 6.41, 4.96, 1.65, 6.38, 0.19, 0.52, 8.38)
n <- length(x)
nboot <- 1000
lambda_sample <- 1 / mean(x)
display_markdown(paste("$\\hat{\\lambda} =$", lambda_sample))
```

$\hat{\lambda} =$ 0.256163944924752

b) Genere 1000 muestras de estimación bootstrap de tamaño 8 a partir de la distribución $Exp\left(\hat{\lambda}\right)$.

In [10]:
```
y <- rexp(n*nboot, lambda_sample)
data <- matrix(y, ncol=n, byrow = T)
```

c) Calcule los valores $\hat{\lambda}_i^* = 1/\overline{X}_i$ para cada una de las 1000 muestras bootstrap.

In [11]:
```
lambda_boot <- n / rowSums(data)
```

d) Calcule la media muestral y la desviación estándar muestral de $\hat{\lambda}_1^*, \ldots, \hat{\lambda}_{1000}^*$.

In [12]:
```
lambda_mean <- mean(lambda_boot)
display_markdown(paste("$\\overline{\\hat\\lambda^*} =$", lambda_mean))
lambda_sd <- sd(lambda_boot)
display_markdown(paste("$\\sigma^*_{\\hat\\lambda} =$", lambda_sd))
```

$\overline{\hat\lambda^*} =$ 0.292460848018654

$\sigma^*_{\hat\lambda} =$ 0.115142591829353

e) Estime el sesgo y la incertidumbre en $\hat{\lambda}$.

In [31]:
```
bias <- lambda_mean - lambda_sample #sesgo del estimador
display_markdown(paste("$bias\\left(\\hat\\lambda\\right) =$", bias))
un <- sqrt(lambda_mean*(1 - lambda_mean) / n) #incertidumbre
display_markdown(paste("$\\sigma_{\\hat\\lambda} =$", un))
```

$bias\left(\hat\lambda\right) =$ 0.034126419085569

$\sigma_{\hat\lambda} =$ 0.160476582626982

Ejercicio 6

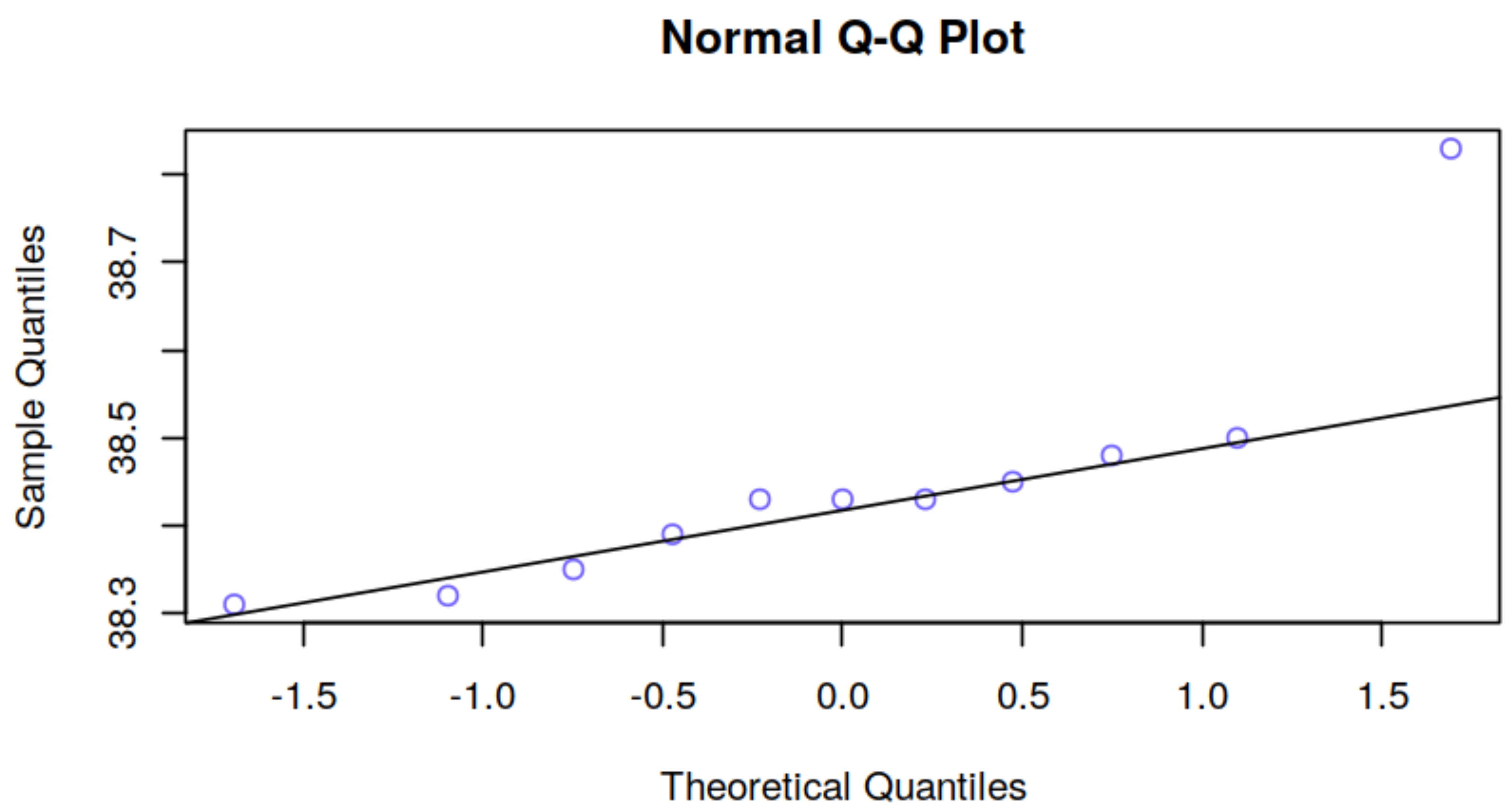
La fuerza compresiva cilíndrica (en MPa) fue medida para 11 vigas. Los resultados fueron:

38.43, 38.43, 38.39, 38.83, 38.45, 38.35, 38.43, 38.31, 38.32, 38.48, 38.50

a) ¿Es adecuado utilizar el estadístico Student para construir un intervalo de confianza de 95% para la media de la fuerza compresiva cilíndrica?

El estadístico Student se aplica cuando la población estudiada sigue una distribución normal, pero el tamaño muestral es demasiado pequeño como para que el estadístico en el que está basada la inferencia esté normalmente distribuido. Para determinar si su utilización es adecuada, se realiza un gráfico Q-Q normal y se comprueba si la muestras obtenidas parecen provenir de una población con distribucón normal.

In [26]:
```
x <- c(38.43, 38.43, 38.39, 38.83, 38.45, 38.35, 38.43, 38.31, 38.32, 38.48, 38.50)

options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
qqnorm(x, col="#7161ff")
qqline(x)
```



Observando el gráfico Q-Q se comprueba la no-normalidad de las muestras. Por lo tanto no es posible utilizar el estadístico Student para construir el intervalo de confianza.

b) Genere 1000 muestras de estimación bootstrap de estos datos. Determine los percentiles 2.5% y 97.5%.

In [9]:
```
x_mean <- mean(x)
n <- length(x)
nboot <- 1000
data <-matrix(sample(x, size = n * nboot, replace = T), nrow = nboot, byrow = T)

x_star_mean <- apply(data, 1, mean)
qnt <- quantile(x_star_mean , probs = c(0.025, 0.975))
display_markdown("Percentiles determinados a partir de 1000 muestras de estimación bootstrap:")
qnt
```

Percentiles determinados a partir de 1000 muestras de estimación bootstrap:

2.5%	38.3854545454545
97.5%	38.5472727272727

c) Calcule un intervalo de confianza de estimación bootstrap de 95% para la media de la fuerza compresiva, usando el método 1.

En el método 1, el intervalo de confianza de 95% es $\left(\overline{X}^*_{0.025}, \overline{X}^*_{0.975}\right)$.

In [10]:
```
display_markdown(paste("Intervalo de confianza de 95% con el método 1: (",
                       round(qnt[1], digits = 3), ", ", round(qnt[2], digits =3), ")",sep=""))
```

Intervalo de confianza de 95% con el método 1: (38.385, 38.547)

d) Calcule un intervalo de confianza de estimación bootstrap de 95% para la media de la fuerza compresiva, usando el método 2.

El método 2 utiliza la media X de la muestra original, además de los percentiles; con el método 2 el intervalo de confianza de 95% es $\left(2\overline{X} - \overline{X}^*_{0.975}, 2\overline{X} - \overline{X}^*_{0.025}\right)$.

In [11]:
```
conf_interval <- 2*x_mean - qnt
display_markdown(paste("Intervalo de confianza de 95% con el método 2: (",
                       round(conf_interval[2], digits = 3), ", ",
                       round(conf_interval[1], digits = 3), ")", sep=""))
```

Intervalo de confianza de 95% con el método 2: (38.347, 38.509)

Ejercicio 7

Una muestra de 7 bloques de concreto tenía su fuerza de compresión medida en MPa. Los resultados fueron:

1367.6, 1411.5, 1318.7, 1193.6, 1406.2, 1425.7, 1572.4

a) Genere 10000 muestras de estimación bootstrap de los datos.

In [14]:
```
x <- c(1367.6,1411.5,1318.7,1193.6,1406.2,1425.7,1572.4)
n <- length(x)
x_mean <- mean(x)
nboot <- 10000
data <-matrix(sample(x, size = n * nboot, replace = T), nrow = nboot, byrow = T)
```

b) Calcule un intervalo de confianza de estimación bootstrap de 99% para la media de la fuerza compresiva, usando el método 1.

In [15]:
```
x_star_mean <- apply(data, 1, mean)
qnt <- quantile(x_star_mean , probs = c(0.005, 0.995))
display_markdown(paste("Intervalo de confianza de 99% con el método 1: (",
                       round(qnt[1], digits = 3), ", ", round(qnt[2], digits =3), ")",sep=""))
```

Intervalo de confianza de 99% con el método 1: (1280.714, 1483.914)

c) Calcule un intervalo de confianza de estimación bootstrap de 99% para la media de la fuerza compresiva, usando el método 2.

In [16]:
```
conf_interval <- 2*x_mean - qnt
display_markdown(paste("Intervalo de confianza de 99% con el método 2: (",
                       round(conf_interval[2], digits = 3), ", ",
                       round(conf_interval[1], digits = 3), ")", sep=""))
```

Intervalo de confianza de 99% con el método 2: (1286.286, 1489.486)

Ejercicio 8

Con referencia al ejercicio 6, sea μ la media poblacional de la fuerza compresiva, en MPa. Considere las siguientes hipótesis nulas:

$$i) H_0 : \mu = 38.53 \quad ii) H_0 : \mu = 38.35 \quad iii) H_0 : \mu = 38.45 \quad iv) H_0 : \mu = 38.55$$

Genere 1000 muestras bootstrap.

In [7]:
```
x <- c(38.43, 38.43, 38.39, 38.83, 38.45, 38.35, 38.43, 38.31, 38.32, 38.48, 38.50)
x_mean <- mean(x)
n <- length(x)
nboot<-1000
data <-matrix(sample(x, size = n * nboot, replace = T), nrow = nboot, byrow = T)
```

a) Utilizando los datos bootstrap que usted generó, ¿cuál de estas hipótesis nulas se puede rechazar a un nivel de 5%, utilizando el método 1?

In [8]:
```
x_star_mean <- apply(data, 1, mean)
qnt5 <- quantile(x_star_mean , probs = c(0.025, 0.975))
display_markdown(paste("Intervalo de confianza de 95% con el método 1: (",
                       round(qnt5[1], digits = 3), ", ", round(qnt5[2], digits =3), ")",sep=""))
```

Intervalo de confianza de 95% con el método 1: (38.382, 38.539)

Se pueden rechazar las hipótesis que cuyo valor no este contenido en el intervalo:

- $ii) H_0 : \mu = 38.35$
- $iv) H_0 : \mu = 38.55$

b) Utilizando los datos bootstrap que usted generó, ¿cuál de estas hipótesis nulas se puede rechazar a un nivel de 10%, utilizando el método 1?

In [9]:
```
qnt10 <- quantile(x_star_mean , probs = c(0.05, 0.95))
display_markdown(paste("Intervalo de confianza de 90% con el método 1: (",
                       round(qnt10[1], digits = 3), ", ", round(qnt10[2], digits =3), ")",sep=""))
```

Intervalo de confianza de 90% con el método 1: (38.389, 38.521)

Se pueden rechazar:

- $i) H_0 : \mu = 38.53$
- $ii) H_0 : \mu = 38.35$
- $iv) H_0 : \mu = 38.55$

c) Si se realiza un experimento bootstrap dos veces con los mismos datos, ¿es necesario que los resultados concuerden?. Explique.

Los resultados de dos experimentos bootstrap no necesariamente coinciden debido a la característica aleatoria del muestreo.

Ejercicio 9

Se sospecha que utilizar gasolina premium en lugar de regular aumentará el millaje para automóviles con un diseño de motor especial. Se usan 16 automóviles en un experimento aleatorio. De la misma manera se eligen 8 para probarlos con gasolina regular, mientras que los otros 8 se prueban con gasolina premium. Los resultados en mi/galón, son:

Tipo				mi/galón				
Regular	29.1	27.1	30.8	17.3	27.6	16.3	28.4	30.2
Premium	28.3	32.0	27.4	35.3	29.9	35.6	30.9	29.7

a) Bajo la hipótesis nula de que cada automóvil obtendrá el mismo millaje con cualquier tipo de gasolina, ¿cuántos resultados diferentes son posibles para este experimento?

Existen dos resultados posibles:

- No hay evidencias en contra de la hipótesis nula
- Hay evidencias en contra de la hipótesis nula, por lo que esta se rechaza en favor de la hipótesis alternativa

b) Sean $\overline{R}$ y $\overline{P}$ las medias muestrales de los millajes de para los grupos de gasolina regular y premium respectivamente. Calcule $\overline{R}$ y $\overline{P}$.

In [27]:
```
R <- c(29.1,27.1,30.8,17.3,27.6,16.3,28.4,30.2) #Regular
P <- c(28.3,32.0,27.4,35.3,29.9,35.6,30.9,29.7) #Premium
R_mean <- mean(R)
P_mean <- mean(P)
display_markdown(paste("$\\overline{R} = $", R_mean))
display_markdown(paste("$\\overline{P} = $", P_mean))
```

$\overline{R} =$ 25.85

$\overline{P} =$ 31.1375

c) Realice una prueba aleatoria para determinar si se puede concluir que la gasolina premium tiende a incrementar el millaje. Utilice el estadístico de prueba $\overline{P} - \overline{R}$. Genere al menos 1000 resultados aleatorios y calcule el p-valor.

$$H_0 : \mu_P - \mu_R = 0 \qquad H_1 : \mu_P - \mu_R > 0$$

In [24]:
```
x <- c(R, P)
s0 <- P_mean - R_mean #diferencia de medias
n <- length(x) / 2
nboot <- 1000
data <- array(sample(x, size = n*nboot*2, replace=T), dim = c(nboot,n,2)) # array de 3 dimensiones
P_star_mean <- apply(data[,,1], 1, mean)
R_star_mean <- apply(data[,,2], 1, mean)
mean_diff <- P_star_mean - R_star_mean
p_value <- length(mean_diff[mean_diff >= s0]) / length(mean_diff)
display_markdown(paste("$p$-$valor =$", p_value))
```

p-$valor =$ 0.011

Utilizando un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ se rechaza la hipótesis nula y se verifica que la media de millas/galón con gasolina premium es mayor que con gasolina regular. Sin embargo, cabe destacar que si se considera un nivel de significancia menor, por ejemplo $\alpha = 0.01$, no es posible rechazar la hipótesis nula.

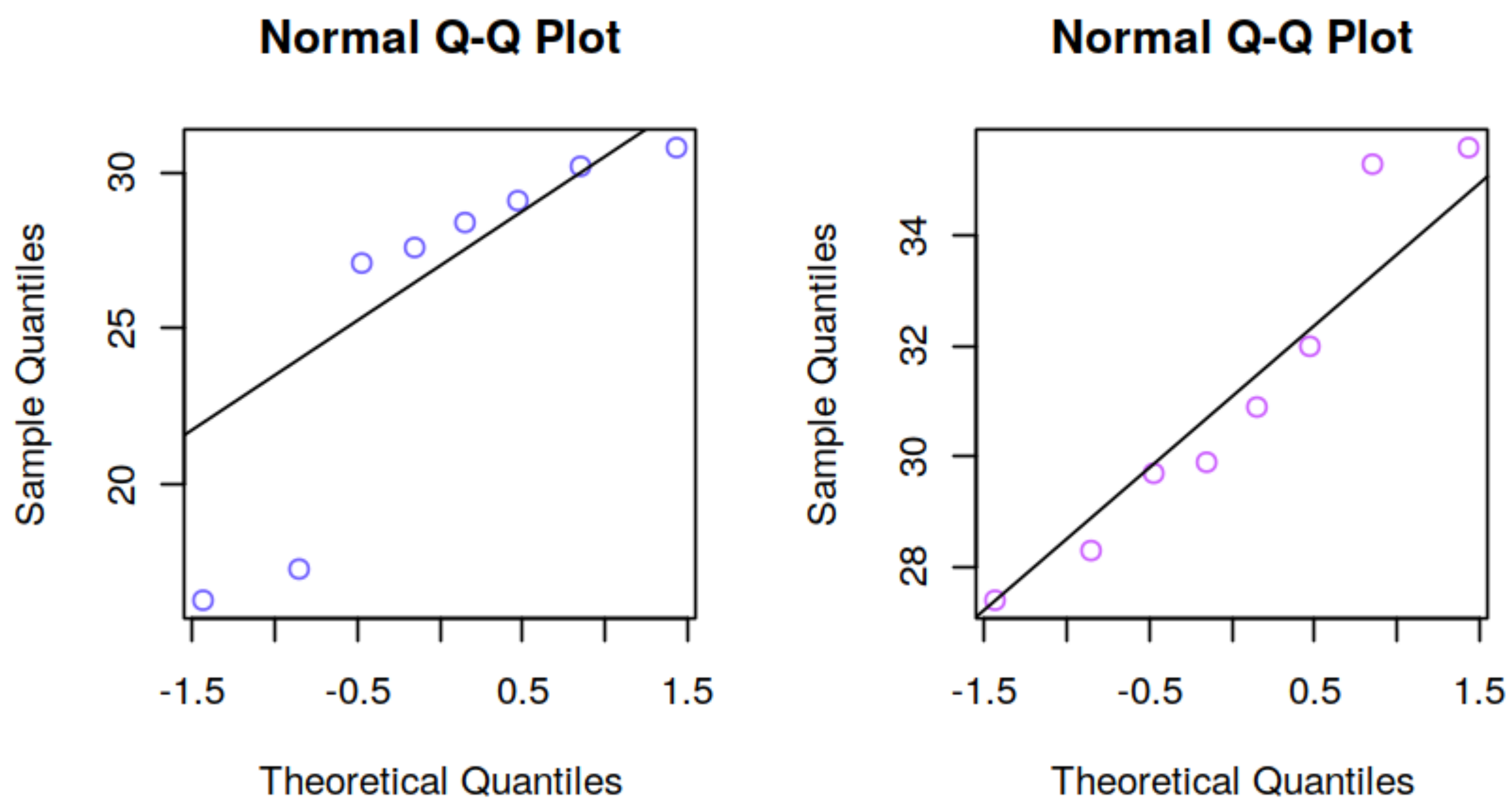
d) Utilice la prueba Student para probar la hipótesis nula de que la media del millaje utilizando gasolina regular es mayor que o igual a la media del millaje utilizando gasolina premium. ¿Este resultado es confiable?. Explique.

In [31]:
```
student <- t.test(
  x           = R,
  y           = P,
  alternative = "less",
  mu          = 0,
  conf.level  = 0.95
)
display_markdown(paste("$p$-$valor =$", student$p.value))
```

p-$valor =$ 0.0210104827638615

La distribución t de Student se puede utilizar para calcular un intervalo de confianza para la diferencia entre las dos medias poblacionales solo si ambas poblaciones son normales.

In [29]:
```
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
par(mfcol = c(1, 2))
qqnorm(R, col="#7161ff")
qqline(R)
qqnorm(P, col="#cd61ff")
qqline(P)
```



Los gráficos Q-Q sugieren que las muestras no provienen de poblaciones con distribución normal. Por lo tanto no es adecuado utilizar la prueba t de Student y los resultados obtenidos no son confiables.

Ejercicio 10

Con referencia al ejercicio anterior, realice una prueba aleatoria para determinar si el millaje de gasolina regular tiene una varianza mayor que la varianza del millaje utilizando gasolina premium. Genere al menos 1000 resultados aleatorios.

$$H_0: \sigma_R^2 - \sigma_P^2 = 0 \qquad H_1: \sigma_R^2 - \sigma_P^2 > 0$$

In [37]:
```
R <- c(29.1,27.1,30.8,17.3,27.6,16.3,28.4,30.2) #Regular
P <- c(28.3,32.0,27.4,35.3,29.9,35.6,30.9,29.7) #Premium
R_var <- sd(R)^2
P_var <- sd(P)^2
s0 <- R_var - P_var #diferencia de varianzas
n <- length(x) / 2
nboot <- 1000
x <- c(R, P)
data <- array(sample(x, size = n*nboot*2, replace=T), dim = c(nboot,n,2)) # array de 3 dimensiones
P_star_var <- apply(data[,,1], 1, sd)^2
R_star_var <- apply(data[,,2], 1, sd)^2
var_diff <- R_star_var - P_star_var
p_value <- length(var_diff[var_diff >= s0]) / length(var_diff)
display_markdown(paste("$p$-$valor =$", p_value))
```

p-$valor =$ 0.179

No hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula.

Ejercicio 11

Suponga que ha comprado una máquina de llenado para bolsas de dulces que contendrá 16oz de éstos. Una muestra aleatoria de 10 bolsas produce los siguientes datos (en oz)

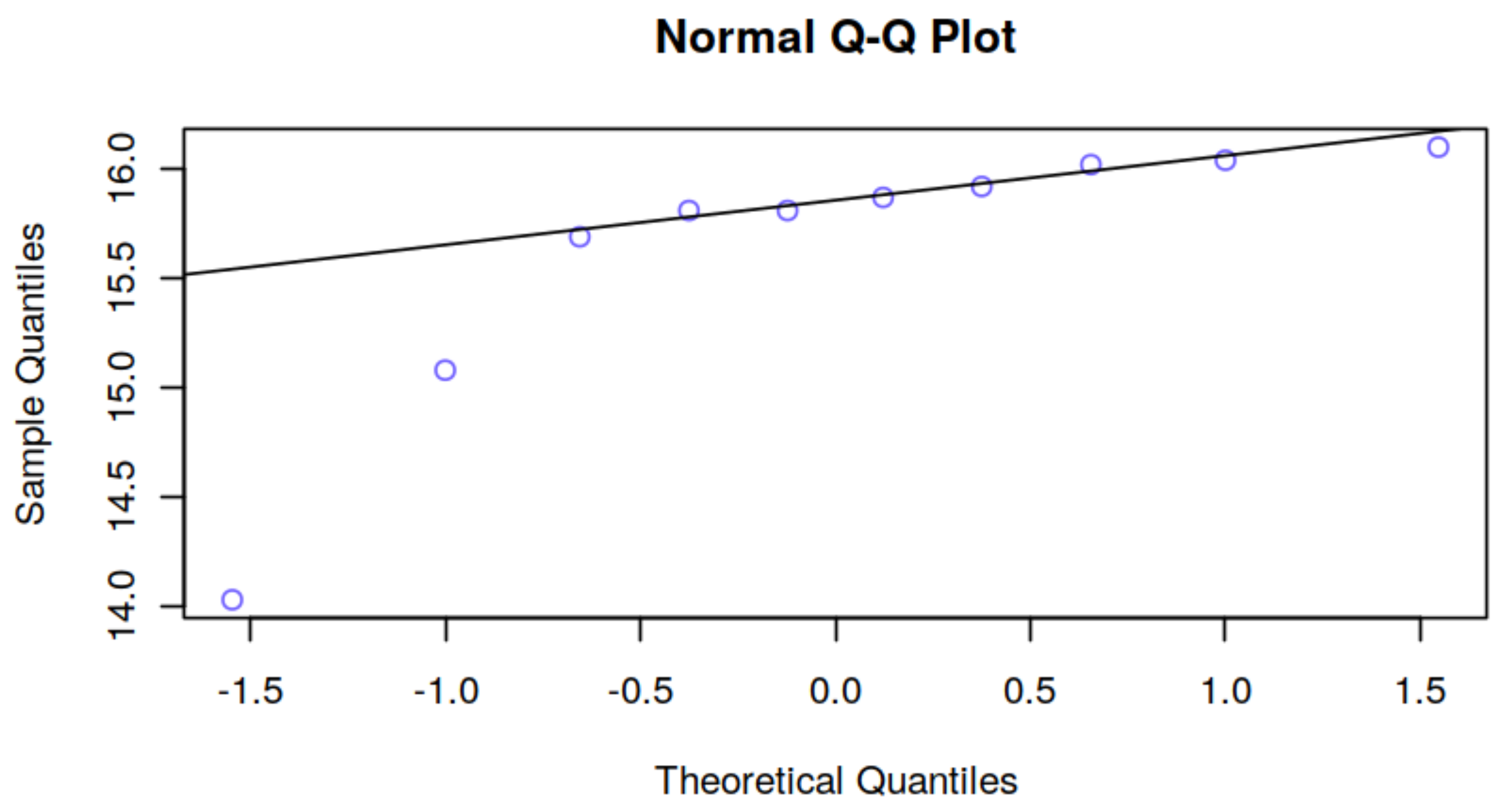
15.87 16.02 15.08 14.03 15.69 15.81 16.04 15.81 15.92 16.10

Con base en estos datos, ¿puede concluir que la media del peso de llenado es en realidad menor que 16 oz? Realice un test de hipótesis con bootstrap.

$$H_0: \mu = 16 \qquad H_1: \mu < 16$$

In [30]:

```
x <- c(15.87, 16.02, 15.08, 14.03, 15.69, 15.81, 16.04, 15.81, 15.92, 16.10)

options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
qqnorm(x, col="#7161ff")
qqline(x)
```



Como el gráfico Q-Q sugiere que las muestras no provienen de poblaciones con distribución normal, no es adecuado utilizar la prueba t de Student para construir un intervalo de confianza para la media poblacional.

Por lo tanto, se utiliza estimación bootstrap para hallar un intervalo de confianza de 95% y se comprueba si el valor $\mu = 16$ se encuentra dentro de dicho intervalo.

In [65]:

```
nboot <- 10000
n <- length(x)
data <- matrix(sample(x, size = n * nboot, replace = T), nrow = nboot, byrow = T)
x_star_mean <- apply(data, 1, mean)
qnt <- quantile(x_star_mean, probs = c(2.5, 97.5)/100) # 15.2 - 15.9 menor que 16
display_markdown(paste("Intervalo de confianza de 95% con el método 1: (",
                       round(qnt[1], digits = 3), ", ", round(qnt[2], digits =3), ")",sep=""))
x_mean <- mean(x)
conf_interval_2 <- 2*x_mean - qnt
display_markdown(paste("Intervalo de confianza de 95% con el método 2: (",
                       round(conf_interval_2[2], digits = 3), ", ",
                       round(conf_interval_2[1], digits = 3), ")", sep=""))
```

Intervalo de confianza de 95% con el método 1: (15.209, 15.938)

Intervalo de confianza de 95% con el método 2: (15.336, 16.065)

Las conclusiones del experimento difieren dependiendo del método utilizado para construir el intervalo de confianza:

- Con el método 1, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa de que la media es en realidad menor que 16.
- Con el método 2, el intervalo de confianza contiene al valor de la hipótesis nula y por lo tanto no hay evidencia suficiente para rechazarla.

Ejercicio 12

Dos máquinas se utilizan para empacar detergente de lavandería. Cuatro cajas de cada máquina tienen sus contenidos cuidadosamente pesados, con los siguientes resultados en gramos

Máquina	contenido [gramos]			
Máquina 1	1702	1727	1751	1754
Máquina 2	1706	1720	1752	1746

Un ingeniero desea probar la hipótesis nula de que las medias de los pesos de las cajas de las dos máquinas son iguales.

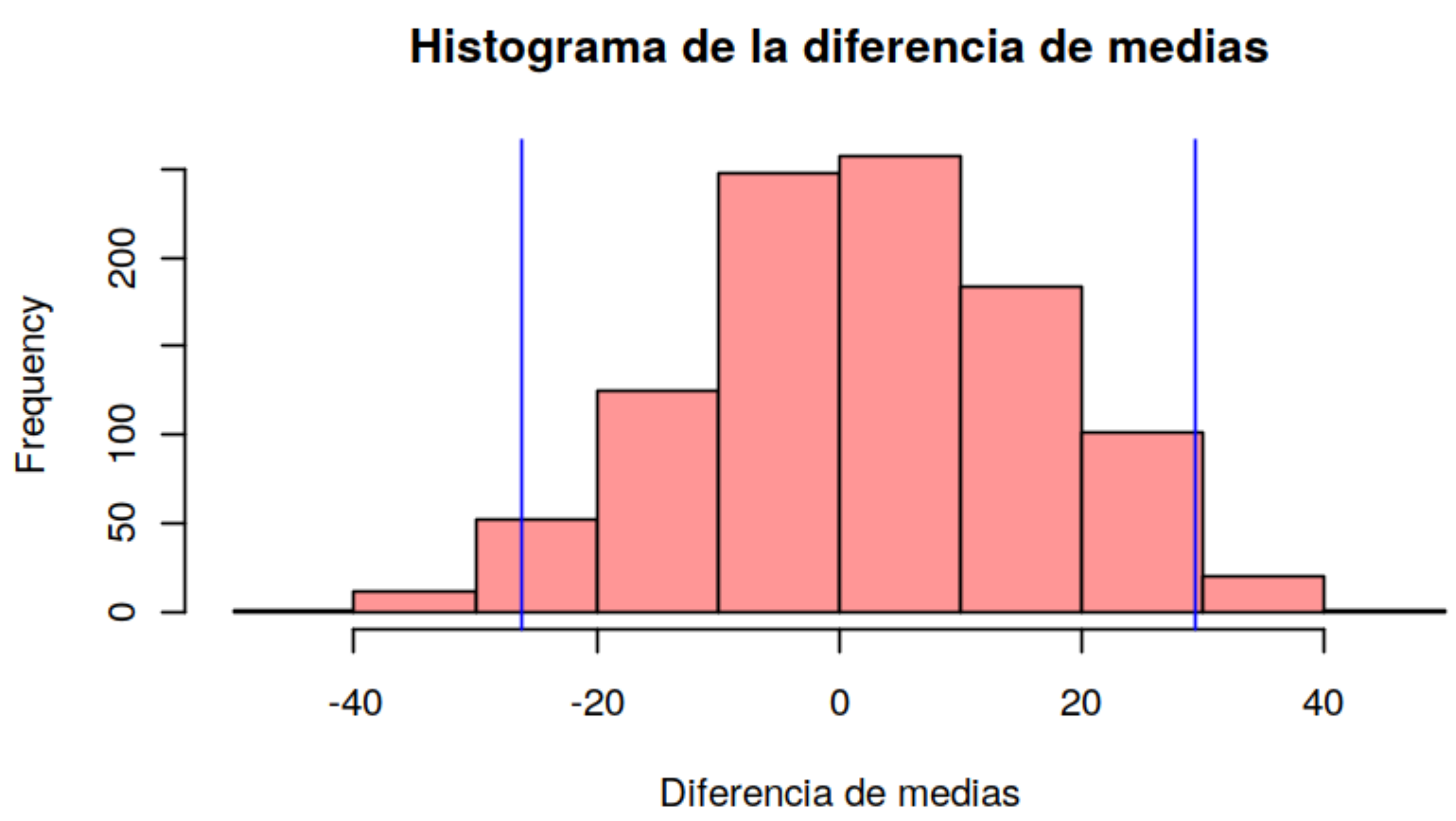
$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

a) Realice un test de hipótesis utilizando el procedimiento A.

In [31]:
```
m1 <- c(1702, 1727, 1751, 1754)
m2 <- c(1706, 1720, 1752, 1746)

nboot <- 1000

n1 <- length(m1)
data1 <-matrix(sample(m1, size = n1 * nboot, replace = T), nrow = nboot, byrow = T)
m1_mean <- apply(data1, 1, mean)
n2 <- length(m2)
data2 <-matrix(sample(m2, size = n2 * nboot, replace = T), nrow = nboot, byrow = T)
m2_mean <- apply(data2, 1, mean)
diff_mean <- m1_mean - m2_mean
qnt <- quantile(diff_mean, probs = c(0.025, 0.975))
display_markdown(paste("Intervalo de confianza de 95% con el procedimiento A: (",
                       round(qnt[1], digits = 3), ", ", round(qnt[2], digits =3), ")",sep=""))
```

Intervalo de confianza de 95% con el procedimiento A: (-26.25, 29.5)

In [32]:
```
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
hist(diff_mean, main = paste("Histograma de" , "la diferencia de medias"), xlab="Diferencia de medias", col=
abline ( v = qnt, col='blue')
```



Como el intervalo de confianza contiene al valor 0 (ambas medias son iguales), no hay evidencia para rechazar la hipótesis H_0.

b) Realice un test de hipótesis utilizando el procedimiento B.

In [37]:
```
m1 <- c(1702, 1727, 1751, 1754)
m2 <- c(1706, 1720, 1752, 1746)

n1 <- length(m1)
m1_mean <- mean(m1)
m1_var <- var(m1)

n2 <- length(m2)
m2_mean <- mean(m2)
m2_var <- var(m2)

s0 <- (m1_mean - m2_mean) / sqrt(m1_var/n1 + m2_var/n2)

x <- c(m1, m2)
mu <- mean(x)

m1_t <- m1 - m1_mean + mu
m2_t <- m2 - m2_mean + mu

nboot <- 1000
```

In [38]:

```
data1 <-matrix(sample(m1_t, size = n1 * nboot, replace = T), nrow = nboot, byrow = T)
m1_star_mean <- apply(data1, 1, mean)
m1_star_sd <- apply(data1, 1, sd)

data2 <-matrix(sample(m2_t, size = n2 * nboot, replace = T), nrow = nboot, byrow = T)
m2_star_mean <- apply(data2, 1, mean)
m2_star_sd <- apply(data2, 1, sd)

t_boot <-(m1_star_mean - m2_star_mean) / sqrt((m1_star_sd^2)/n1 + (m2_star_sd^2)/n2)

# hipotesis bilateral
ASL_t <- length(t_boot[abs(t_boot) >= abs(s0)])/nboot
display_markdown(sprintf("$$P\\left(-s_0 < \\frac{\\overline{X^*_1} - \\overline{X^*_2}}
{\\sqrt{\\frac{S^*_1}{n_1} + \\frac{S^*_2}{n_2}}} < s_0\\right) = %.3f$$", ASL_t))
```

$$P\left(-s_0 < \frac{\overline{X^*_1} - \overline{X^*_2}}{\sqrt{\frac{S^*_1}{n_1} + \frac{S^*_2}{n_2}}} < s_0\right) = 0.890$$

Considerando un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, no hay evidencia para rechazar H_0.
