ESTADÍSTICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS

PRÁCTICA 2 : Prueba Ji-cuadrado, Tablas de contingencia, bondad de ajuste

Ivan Svetlich

In [104…

```
#Librerias
library(IRdisplay)
library(ggplot2)
library(latex2exp)
```

Ejercicio 1

Se realizan pruebas acerca de la proporción de vaciados defectuosos producidos por 5 moldes diferentes. Si hubiera 14 defectuosos entre 100 vaciados hechos con el molde 1, 33 defectuosos entre 200 vaciados hechos con el molde 2, 21 defectuosos entre 180 vaciados hechos con el molde 3, 17 defectuosos entre 120 vaciados hechos con el molde 4 y 25 defectuosos entre 150 vaciados hechos con el molde 5, use el nivel de significancia 0.01 para probar si la verdadera proporción de defectuosos es la misma para cada molde.

Categoría	Vaciados correctos	Vaciados defectuosos	Total
Molde 1	86	14	**100**
Molde 2	167	33	**200**
Molde 3	159	21	**180**
Molde 4	103	17	**120**
Molde 5	125	25	**150**

Valores observados

Sean $r = 5$ el número de filas y $c = 2$ el número de columnas:

$$H_0 : p_{1,j} = p_{2,j} = \ldots = p_{r,j}, \quad j = 1, \ldots, c$$
$$H_1 : \text{El molde utilizado y el número de vaciados defectuosos son dependientes entre sí.}$$

In [73]:

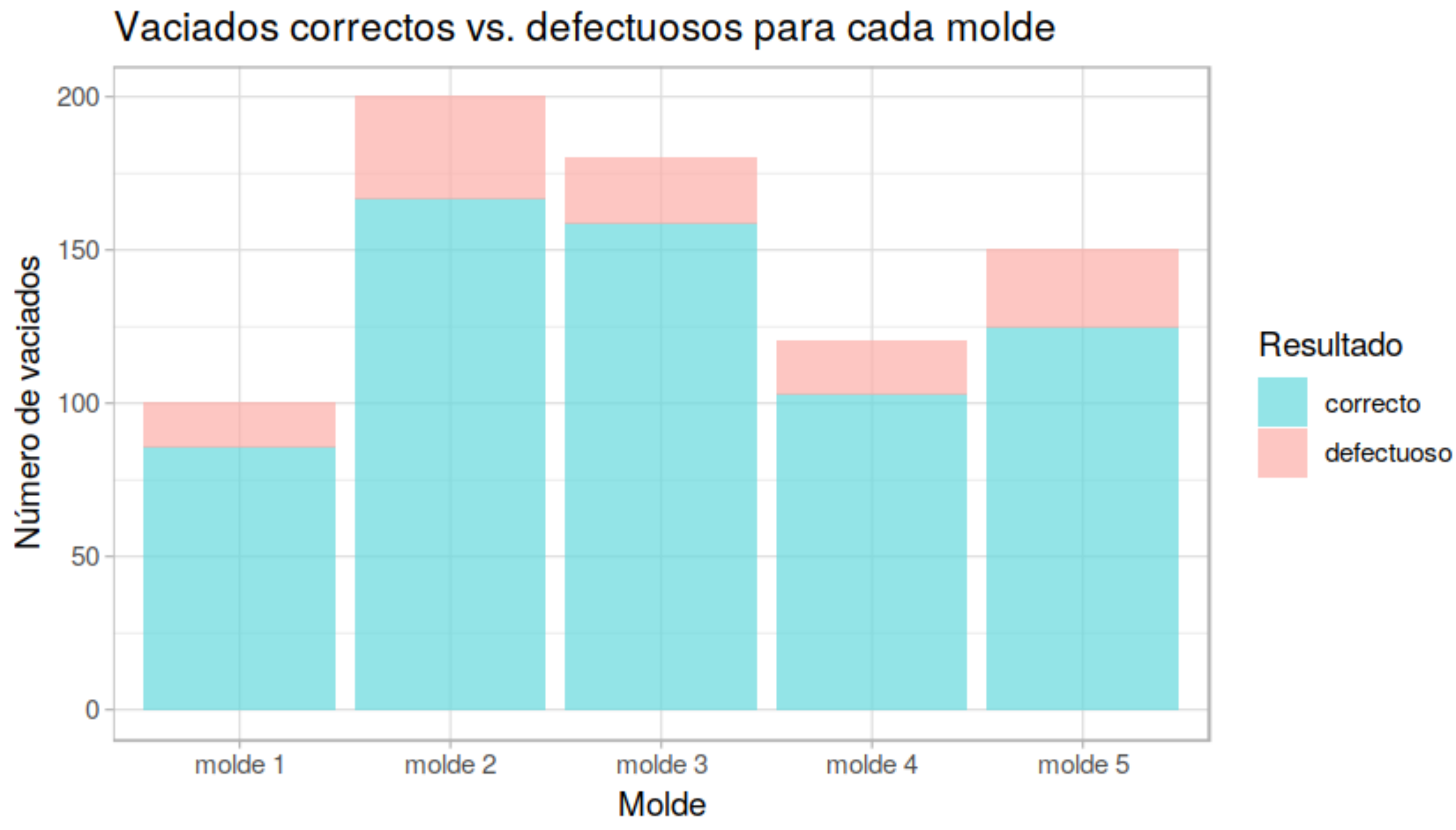
```
x <- c(14, 33, 21, 17, 25)
y <- c(86, 167, 159, 103, 125)
data <- data.frame(y, x)
rownames(data) <- c("molde 1", "molde 2", "molde 3", "molde 4", "molde 5")
colnames(data) <- c("correcto", "defectuoso")
data
```

	correcto	defectuoso
molde 1	86	14
molde 2	167	33
molde 3	159	21
molde 4	103	17
molde 5	125	25

In [120…

```
# Gráfico de las observaciones
molde <- rep(rownames(data), each=2)
estado <- rep(colnames(data), 5)
value <- c(rbind(y, x))
grouped_data <- data.frame(molde, estado, value)

ggplot(grouped_data, aes(fill=estado, y=value, x=molde)) +
    ggtitle("Vaciados correctos vs. defectuosos para cada molde") +
    geom_bar(position=position_stack(reverse = TRUE), stat="identity", alpha=0.7) +
    scale_fill_manual(name="Resultado", breaks=c("correcto", "defectuoso"),
                      values=c("correcto"="#66D9DC", "defectuoso"="#FCAEA8"),
                      labels= c("correcto", "defectuoso")) +
    xlab("Molde") +
    ylab("Número de vaciados") +
    theme_light()
```



In [118…

```
result <- chisq.test(data)
result
```

```
	Pearson's Chi-squared test

data:  data
X-squared = 2.3704, df = 4, p-value = 0.668
```

In [4]:

```
alpha <- 0.01
k <- (nrow(data)-1)*(ncol(data)-1)
chisq_value <- qchisq(1-alpha, k)
display_markdown(paste("$\\chi^2_{\\nu={{4}},\\alpha={{0.01}}}=$", round(chisq_value, digits=4)))
```

$\chi^2_{\nu=4,\alpha=0.01} =$ 13.2767

Como $\chi^2 = 2.3704 < 13.2767$, no hay evidencia suficiente para rechazar H_0. Se sostiene la hipótesis de que el número de vaciados defecuosos es independiente del molde utilizado.

Ejercicio 2

El propietario de un comercio debe decidir cuál de dos máquinas expendedoras de bocadillos instalar en su comercio. Si cada máquina se pone a prueba 250 veces y la primera máquina falla en su operación (no entrega el bocadillo y no devuelve el dinero) 13 veces y la segunda máquina falla 7 veces, pruebe, con el nivel de significancia de 0.05, si la diferencia entre la correspondientes proporciones muestrales es significativa.

Categoría	Operación correcta	Falla	Total
Máquina 1	237	13	**250**
Máquina 2	243	7	**250**

Valores observados

Las hipótesis son:

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0 \qquad H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$$

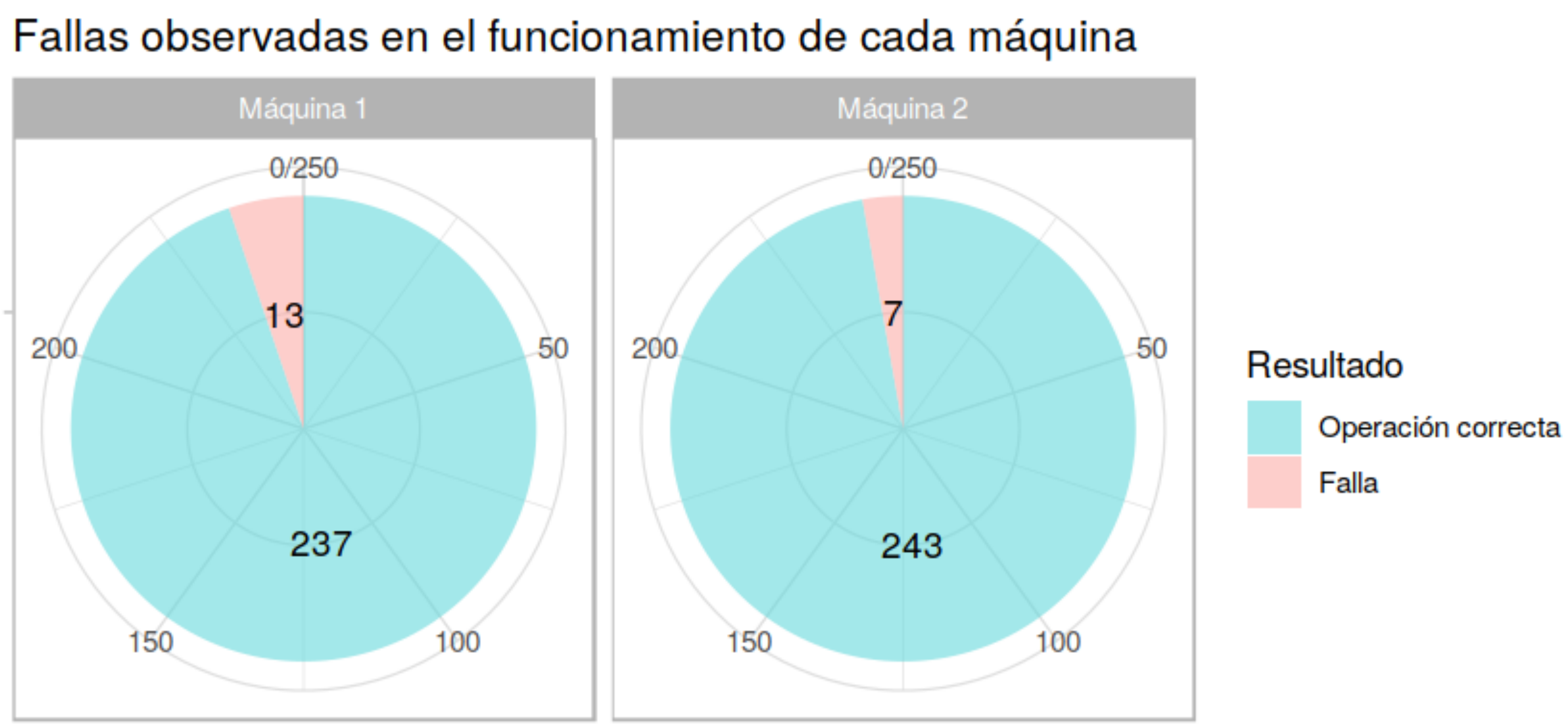
In [25]:

```
x <- c(13, 7)
y <- c(237, 243)
data <- data.frame(x, y)
rownames(data) <- c("Máquina 1", "Máquina 2")
colnames(data) <- c("Operación correcta", "Falla")
```

In [26]:

```
# Gráfico de las observaciones
maquina <- rep(rownames(data), each=2)
estado <- rep(colnames(data), 2)
value <- c(rbind(y, x))
grouped_data <- data.frame(maquina, estado, value)

options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
ggplot(data = grouped_data, aes(x = "", y = value, fill = estado )) +
    ggtitle("Fallas observadas en el funcionamiento de cada máquina") +
    geom_bar(stat = "identity", alpha=0.6) +
    geom_text(aes(label = value), position = position_stack(vjust = 0.5)) +
    scale_fill_manual(name="Resultado", breaks=c("Operación correcta", "Falla"),
                      values=c("Operación correcta"="#66D9DC", "Falla"="#FCAEA8"),
                      labels= c("Operación correcta", "Falla")) +
    coord_polar("y", start=0) +
    facet_wrap(~ maquina)  +
    scale_color_manual(name = "Resultado", labels = c('Operación correcta', 'Falla')) +
    theme_light() +
    theme(
        axis.title.x = element_blank(),
        axis.title.y = element_blank())
```



Utilice:

a) el estadístico χ^2

In [7]:

```
result <- chisq.test(data, correct = F) # Sin corrección de Yates, para que de igual que haciendo el cálculo
result
```

```
	Pearson's Chi-squared test

data:  data
X-squared = 1.875, df = 1, p-value = 0.1709
```

In [6]:

```
alpha <- 0.05
k <- (nrow(data)-1)*(ncol(data)-1)
chisq_value <- qchisq(1-alpha, k)
display_markdown(paste("$\\chi^2_{\\nu={{1}},\\alpha={{0.05}}}=$", round(chisq_value, digits=4)))
```

$\chi^2_{\nu=1,\alpha=0.05} =$ 3.8415

Como $\chi^2 = 1.875 < 3.842$, no hay evidencia suficiente para rechazar H_0. Se sostiene la hipótesis de que el número de fallas es independiente de la máquina utilizada.

b) el estadístico

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}\right)}}$$

In [19]:

```
n <- 250
p1_hat <- 13 / n
p2_hat <- 7 / n
p_hat <- (13 + 7) / (n + n)
z <- (p1_hat - p2_hat) / sqrt(p_hat*(1 - p_hat)*(1/n + 1/n))
p_value <- pnorm(z, mean = 0, sd = 1)
display_markdown(paste("$Z=$", round(z, digits=4)))
display_markdown(paste("$p$-$value =$", round(p_value, digits=4)))
```

$Z =$ 1.3693

$p\text{-}value =$ 0.9145

Como el $p\text{-}valor = 0.9145 > 0.05$, no hay evidencia suficiente para rechazar H_0. Nuevamente, se sostiene la hipótesis de que el número de fallas es independiente de la máquina utilizada.

c) Verifique que el cuadrado del valor obtenido para Z en el inciso b es igual al valor obtenido para χ^2 en el inciso a.

In [18]:

```
display_markdown(paste("$\\chi^2_{\\nu={{1}},\\alpha={{0.05}}}=$", round(result$statistic, digits=4)))
display_markdown(paste("$Z^2=$", round(z^2, digits=4)))
```

$\chi^2_{\nu=1,\alpha=0.05} =$ 1.875

$Z^2 =$ 1.875

Ejercicio 3

Las tuberías de enfriamiento en tres plantas de energía nuclear se investigan por depósitos que inhibirán el flujo de agua. A partir de 30 lugares seleccionados al azar en cada planta, 13 de la primera planta, 8 de la segunda planta y 19 de la tercera estaban obstruidos.

Planta	Sin obstrucción	Obstruídos	Total
Planta 1	17	13	**30**
Planta 2	22	8	**30**
Planta 3	11	19	**30**

Valores observados

In [113…

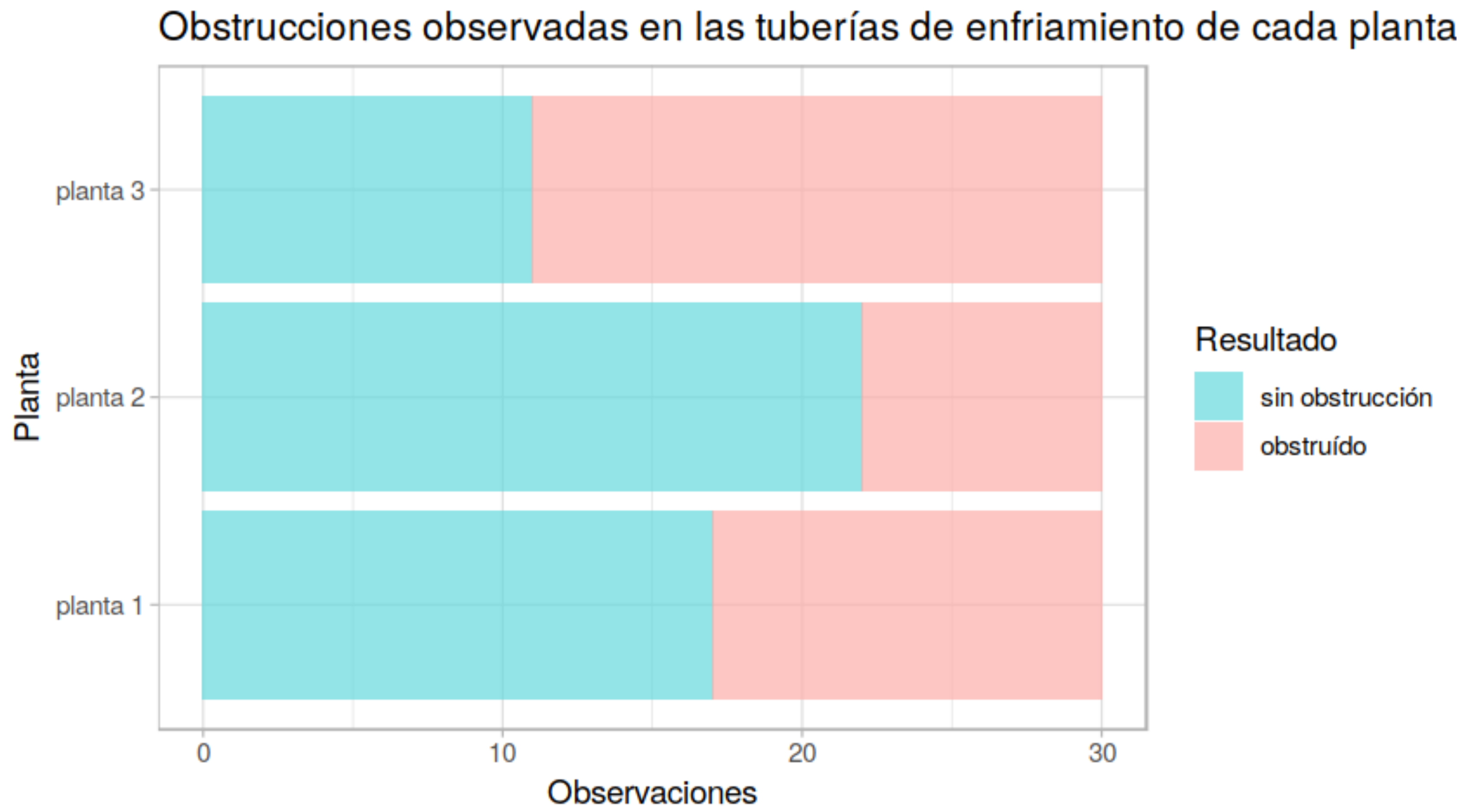
```
x <- c(13, 8, 19)
y <- c(30-13, 30-8, 30-19)
data <- data.frame(x, y)
rownames(data) <- c("planta 1", "planta 2", "planta 3")
colnames(data) <- c("sin obstrucción", "obstruído")
data
```

	sin obstrucción	obstruído
planta 1	13	17
planta 2	8	22
planta 3	19	11

In [150…

```
# Gráfico de las observaciones
planta <- rep(rownames(data), each=2)
estado <- rep(colnames(data), 3)
value <- c(rbind(y, x))
grouped_data <- data.frame(planta, estado, value)

ggplot(grouped_data, aes(fill=estado, y=value, x=planta)) +
    ggtitle("Obstrucciones observadas en las tuberías de enfriamiento de cada planta") +
    geom_bar(position=position_stack(reverse = FALSE), stat="identity", alpha=0.7) +
    scale_fill_manual(name="Resultado", breaks=c("sin obstrucción", "obstruído"),
                      values=c("sin obstrucción"="#66D9DC", "obstruído"="#FCAEA8"),
                      labels= c("sin obstrucción", "obstruído")) +
    xlab("Planta") +
    ylab("Observaciones") +
    coord_flip() + theme_light()
```



a) Use el nivel de 0.05 para probar la hipótesis nula de igualdad.

$$H_0 : p_1 = p_2 = p_3 \qquad H_1 : \text{La proporción de obstrucciones depende de la planta}$$

In [114…

```
result <- chisq.test(data)
result
```

```
	Pearson's Chi-squared test

data:  data
X-squared = 8.19, df = 2, p-value = 0.01666
```

In [115…

```
alpha <- 0.05
k <- (nrow(data)-1)*(ncol(data)-1)
chisq_value <- qchisq(1-alpha, k)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2_{\\nu={{%d}},\\alpha={{%.2f}}} = %.2f$", k, alpha, chisq_value))
```

$\chi^2_{\nu=2,\alpha=0.05} = 5.99$

Como $\chi^2 = 8.19 > 5.99$, se rechaza H_0 en favor de la hipótesis alternativa de que la proporión de obstrucciones depende de la plata.

b) Grafique los intervalos de confianza para las tres probabilidades de quedar obstruido.

In [116…

```
test1 <- prop.test(13,30,conf.level=0.95)
test2 <- prop.test(8,30,conf.level=0.95)
test3 <- prop.test(19,30,conf.level=0.95)
display_markdown("Intervalo de confianza de 95% para la proporción de obstrucciones:")
display_markdown(paste("$\\quad \\bullet$ Planta 1: (",
                       round(test1$conf.int[1], digits = 3), ", ",
                       round(test1$conf.int[2], digits = 3), "$)$", sep=""))
display_markdown(paste("$\\quad \\bullet$ Planta 2: (",
                       round(test2$conf.int[1], digits = 3), ", ",
                       round(test2$conf.int[2], digits = 3), ")", sep=""))
display_markdown(paste("$\\quad \\bullet$ Planta 3: (",
                       round(test3$conf.int[1], digits = 3), ", ",
                       round(test3$conf.int[2], digits = 3), ")", sep=""))
```

Intervalo de confianza de 95% para la proporción de obstrucciones:

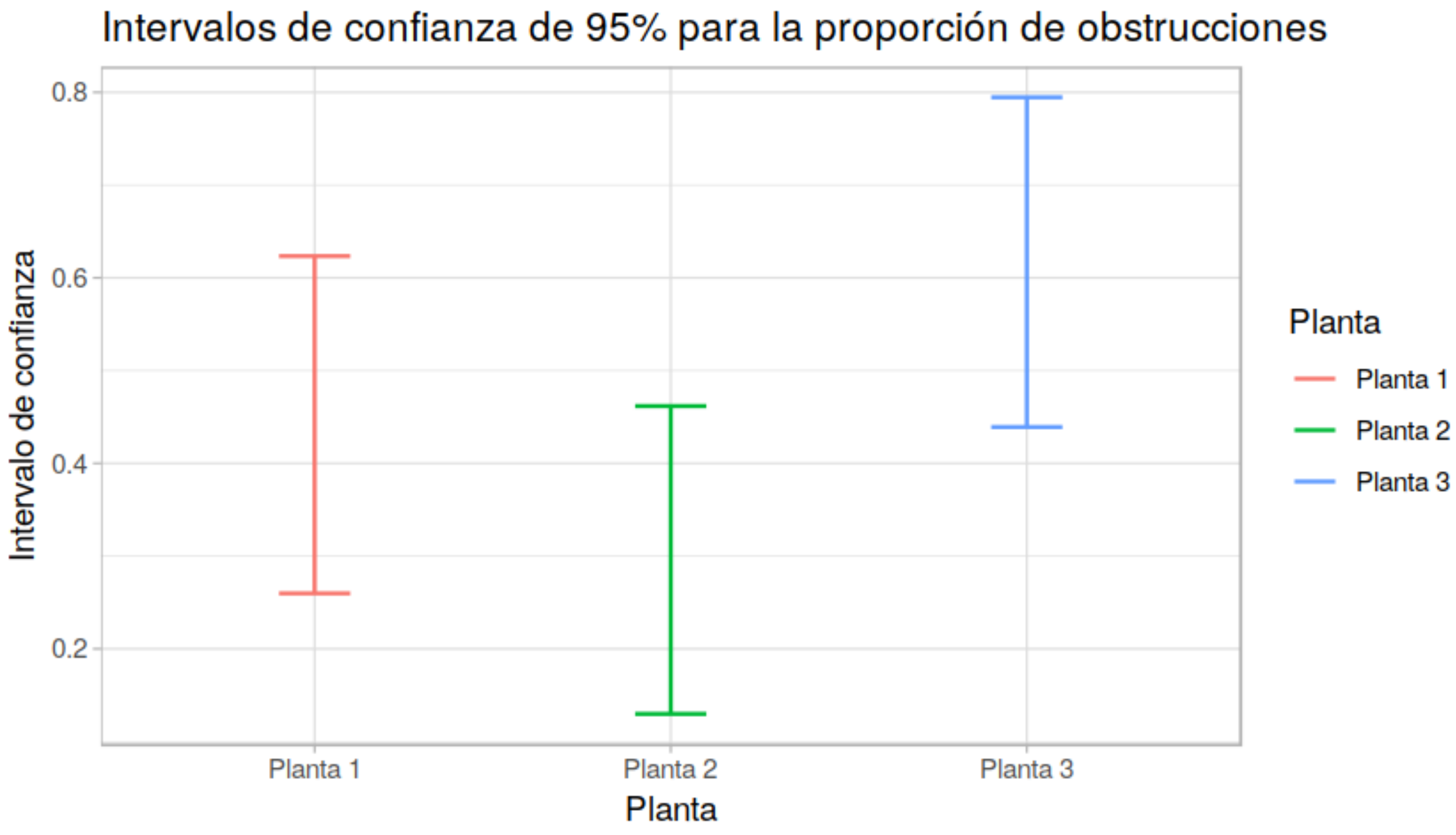
- Planta 1: (0.26, 0.623)
- Planta 2: (0.13, 0.462)
- Planta 3: (0.439, 0.795)

In [225…

```
data <- round(rbind(test1$conf.int, test2$conf.int, test3$conf.int), 4)
df <- data.frame(factor(c('Planta 1', 'Planta 2', 'Planta 3')), data)
colnames(df) <- c('Planta', 'q1', 'q2')
df$Intervalo <- apply(data, 1, mean)
```

In [232…

```
# Gráfico de los intervalos de confianza
ggplot(df, aes(Planta, Intervalo, colour = Planta)) +
    ggtitle("Intervalos de confianza de 95% para la proporción de obstrucciones") +
    geom_errorbar(aes(ymin = q1, ymax = q2), width = 0.2) +
    ylab('Intervalo de confianza') +
    theme_light()
```



Ejercicio 4

Se efectúa un estudio sobre las fallas de un componente electrónico. Existen cuatro tipos de fallas posibles y dos posiciones de montaje para el dispositivo. Se toman los datos siguientes

	Tipo de falla			
Posición de montaje	**A**	**B**	**C**	**D**
1	22	46	18	9
2	4	17	6	12

Valores observados

¿Puede concluir que el tipo de falla es independiente de la posición de montaje? Utilice $\alpha = 0.01$. Hallar el p-valor de la prueba.

In [154…

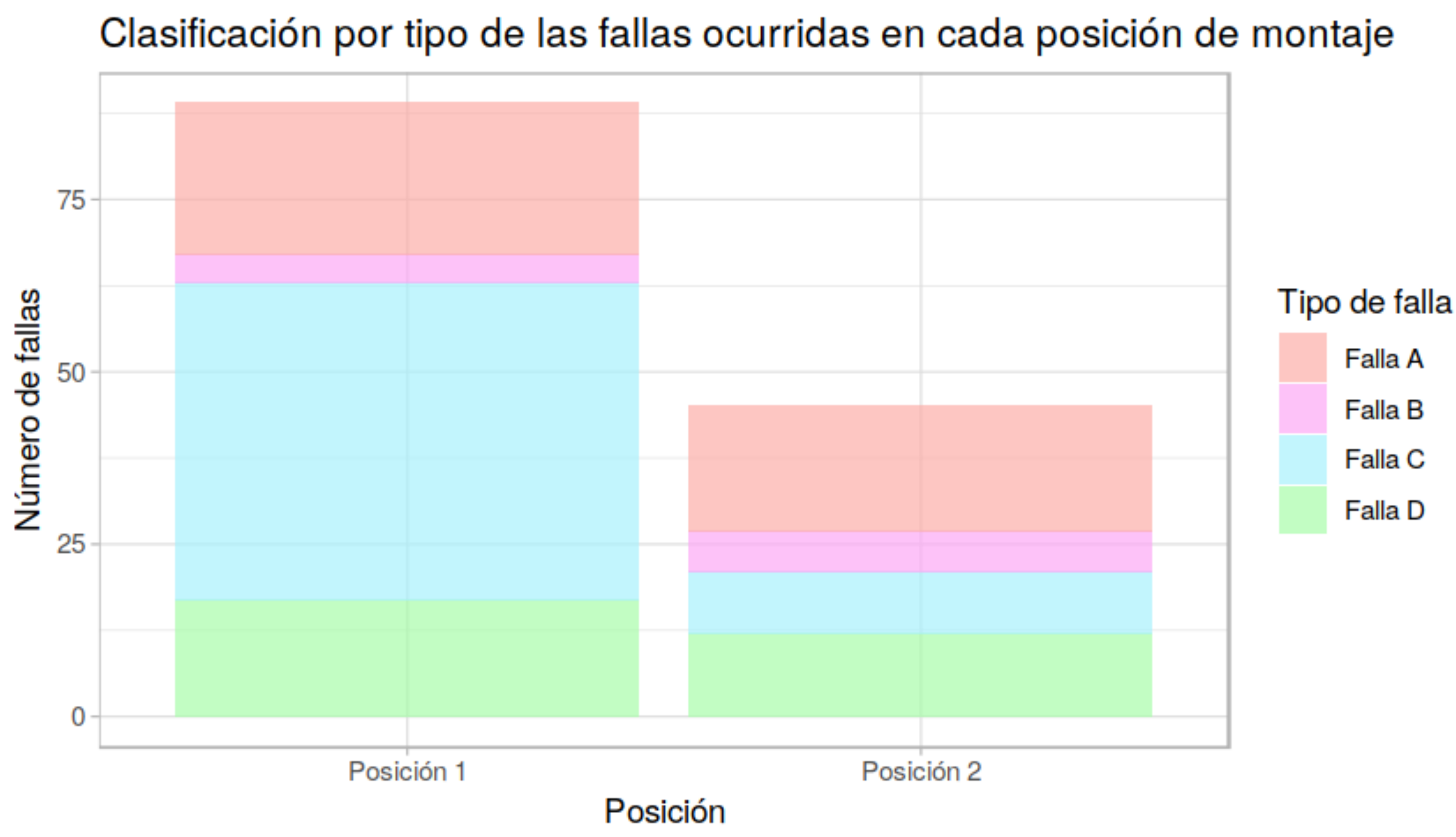
```
x1 <- c(22, 46, 18, 9)
x2 <- c(4, 17, 6 ,12)
data <- t(data.frame(x1, x2))
colnames(data) <- c("Falla A", "Falla B", "Falla C", "Falla D")
rownames(data) <- c("Posición 1", "Posición 2")
data
```

	Falla A	Falla B	Falla C	Falla D
Posición 1	22	46	18	9
Posición 2	4	17	6	12

In [170…

```
# Gráfico de las observaciones
posicion <- rep(rownames(data), each=4)
tipo_falla <- rep(colnames(data), 2)
value <- c(rbind(x1, x2))
grouped_data <- data.frame(posicion, tipo_falla, value)

ggplot(grouped_data, aes(fill=tipo_falla, y=value, x=posicion)) +
    ggtitle("Clasificación por tipo de las fallas ocurridas en cada posición de montaje") +
    geom_bar(position="stack", stat="identity", alpha=0.7) +
    scale_fill_manual(name="Tipo de falla", values=c("#FCAEA8", "#FCA8F5", "#A8F1FC", "#A8FCA9")) +
    xlab("Posición") +
    ylab("Número de fallas") +
    theme_light()
```



In [77]:

```
result <- chisq.test(data)
result
```

```
	Pearson's Chi-squared test

data:  data
X-squared = 10.706, df = 3, p-value = 0.01343
```

In [78]:

```
alpha <- 0.01
k <- (nrow(data)-1)*(ncol(data)-1)
chisq_value <- qchisq(1-alpha, k)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2_{\\nu={{%d}},\\alpha={{%.2f}}} = %.3f$", k, alpha, chisq_value))
```

$\chi^2_{\nu=3,\alpha=0.01} = 11.345$

Como $\chi^2 = 10.706 < 11.345$, no hay evidencia sufieciente para rechazar H_0 y se concluye que el tipo de falla es independiente de la posición de montaje.

In [79]:

```
display_markdown(sprintf("$p$-$valor = %.5f > %.2f$", result$p.value, alpha))
```

p-$valor = 0.01343 > 0.01$

Ejercicio 5

Una compañía opera cuatro máquinas tres turnos al día. De los registros de producción, se obtienen los datos siguientes sobre el número de fallas

	Máquina			
Turno	A	B	C	D
1	41	20	12	16
2	31	11	9	14
3	15	17	16	10

Valores observados

Pruebe la hipótesis, con nivel de significancia 0.05, de que el número de fallas es independiente del turno. Encuentre el P-valor de la prueba.

In [151…

```
x1 <- c(41, 20, 12, 16)
x2 <- c(31, 11, 9, 14)
x3 <- c(15, 17, 16, 10)
data <- t(data.frame(x1, x2, x3))
colnames(data) <- c("Máquina A", "Máquina B", "Máquina C", "Máquina D")
rownames(data) <- c("Turno 1", "Turno 2", "Turno 3")
data
```

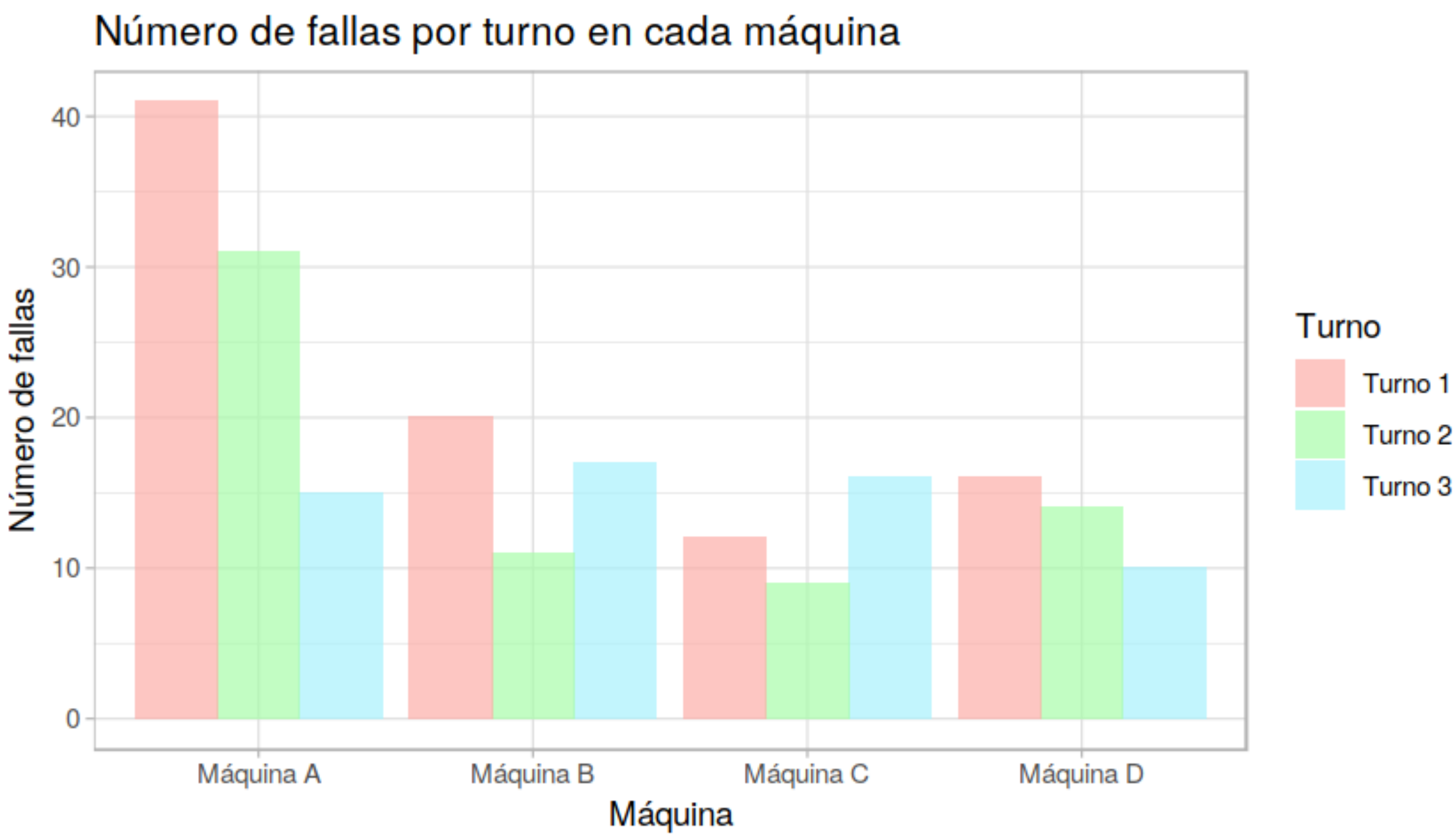
	Máquina A	Máquina B	Máquina C	Máquina D
Turno 1	41	20	12	16

	Máquina A	Máquina B	Máquina C	Máquina D
Turno 2	31	11	9	14

In [153…

```
# Gráfico de las observaciones
maquina <- rep(colnames(data), each=3)
turno <- rep(rownames(data), 4)
value <- c(rbind(x1, x2, x3))
grouped_data <- data.frame(maquina, turno, value)

ggplot(grouped_data, aes(fill=turno, y=value, x=maquina)) +
    ggtitle("Número de fallas por turno en cada máquina") +
    geom_bar(position="dodge", stat="identity", alpha=0.7) +
    scale_fill_manual(name="Turno", values=c("#FCAEA8", "#A8FCA9", "#A8F1FC")) +
    xlab("Máquina") +
    ylab("Número de fallas") + theme_light()
```



In [71]:

```
result <- chisq.test(data)
result
```

```
	Pearson's Chi-squared test

data:  data
X-squared = 11.649, df = 6, p-value = 0.07027
```

In [72]:

```
alpha <- 0.05
k <- (nrow(data)-1)*(ncol(data)-1)
chisq_value <- qchisq(1-alpha, k)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2_{\\nu={{%d}},\\alpha={{%.2f}}} = %.3f$", k, alpha, chisq_value))
```

$\chi^2_{\nu=6,\alpha=0.05} = 12.592$

Como $\chi^2 = 11.649 < 12.592$, no hay evidencia sufieciente para rechazar H_0 y se concluye que el número de fallas es independiente del turno.

In [73]:

```
display_markdown(sprintf("$p$-$valor = %.5f > %.2f$", result$p.value, alpha))
```

$p\text{-}valor = 0.07027 > 0.05$

Ejercicio 6

Un grupo de estudiantes de Ingeniería civil ha registrado el número de automóviles que transitan hacia el este en la intersección de dos avenidas y obtienen los siguientes datos

Vehículos por minuto	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
Frecuencia observada	14	24	57	111	194	256	296	378	250	185	171	150	110	102	96	90	81	73	64	61	59	50	42	29	18	15

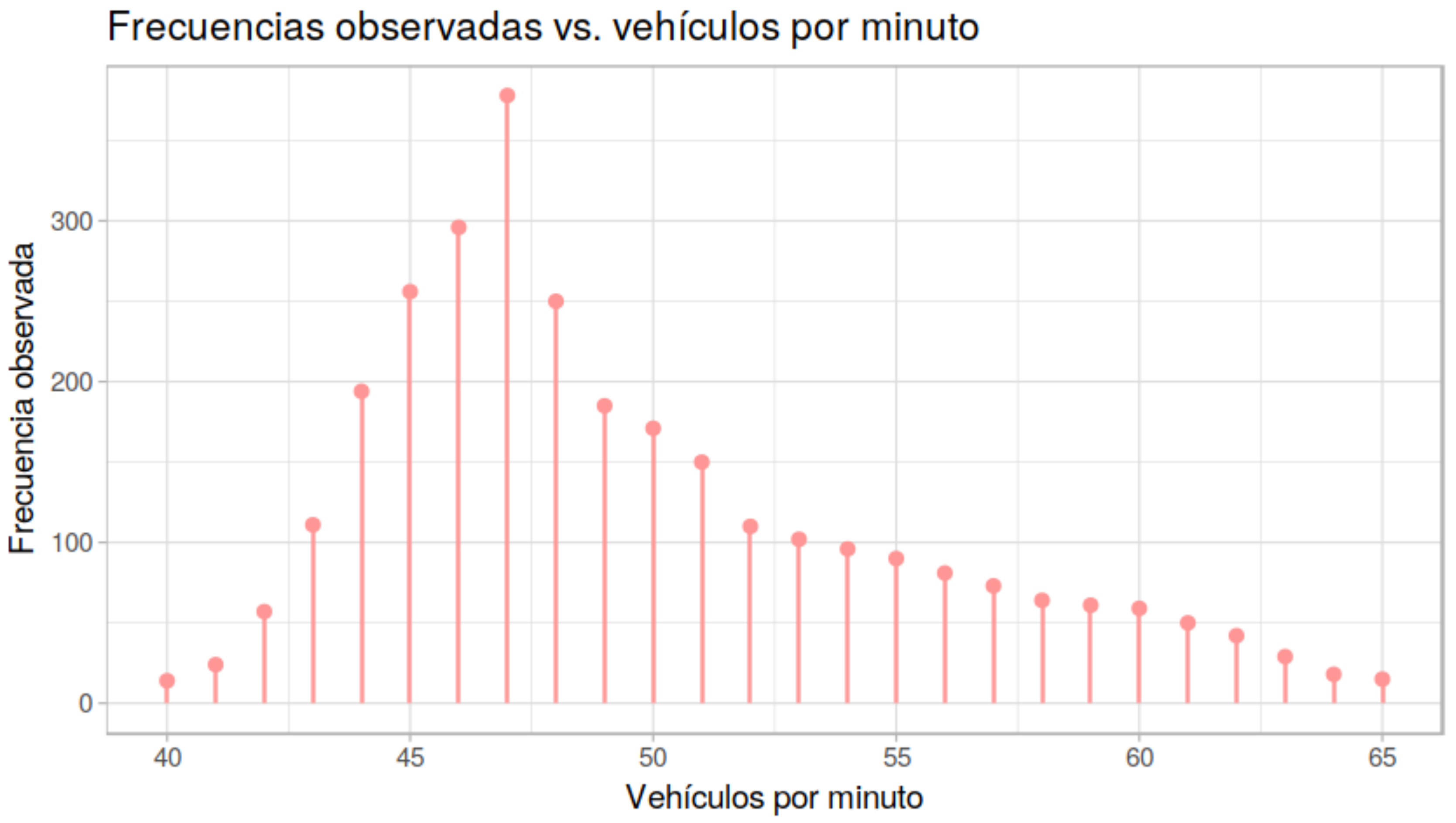
Valores observados

Para este proceso, ¿la hipótesis de una distribución Poisson resulta ser un modelo de probabilidad apropiado? Utilice $\alpha = 0.05$. Calcule el p-$valor$.

In [1]:
```
x <- 40:65
frec <- c(14, 24, 57, 111, 194, 256, 296, 378, 250, 185, 171, 150, 110, 102, 96, 90, 81, 73, 64, 61, 59, 50,
data <- t(data.frame(x, frec))
rownames(data) <- c("Vehículos por minuto", "Frecuencia observada")
data
```

Vehículos por minuto	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	...	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
Frecuencia observada	14	24	57	111	194	256	296	378	250	185	...	81	73	64	61	59	50	42	29	18	15

In [7]:
```
# Gráfico de los valores observados
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
df <- data.frame(x, frec)
ggplot(df, aes(x=x, y=frec)) +
    ggtitle("Frecuencias observadas vs. vehículos por minuto") +
    geom_point(color= '#ff9696') +
    geom_segment(aes(x=x, xend=x, y=0, yend=frec), color='#ff9696') +
    xlab("Vehículos por minuto") +
    ylab("Frecuencia observada") + theme_light()
```



In [10]:
```
N <- sum(frec)
n <- length(x)
lambda <- sum(x * frec) / N
e <- N * dpois(x, lambda) # P(X = x)
e[1] <- N * ppois(x[1], lambda) # P(X <= 40)
e[n] <- N * (1 - ppois(x[n - 1], lambda)) # P(X >= 65)
chi_sq <- sum((x - e)^2 / e)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2 = %.2f$", chi_sq))
```

$\chi^2 = 1302.81$

In [11]:
```
p <- 1 #se estima 1 parámetro
k <- n - p - 1
alpha <- 0.05
chisq_value <- qchisq(1-alpha, k)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2_{\\nu={{%d}},\\alpha={{%.2f}}} = %.2f$", k, alpha, chisq_value))
```

$\chi^2_{\nu=24,\alpha=0.05} = 36.42$

Como $\chi^2 = 1302.81 > 36.42$, se rechaza la hipótesis de que los datos obtenidos provienen de un distribución Poisson.

In [12]:
```
p_valor <- 1- pchisq(chi_sq, k)
display_markdown(sprintf("$p$-$valor = %.0f < %.2f$", p_valor, alpha))
```

p-$valor = 0 < 0.05$

Ejercicio 7

Se diseña un generador de números seudoaleatorios de modo que los enteros 0 a 9 tengan la misma probabilidad de ocurrencia. Los primeros 10000 números son

Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia observada	967	1008	975	1022	1003	989	1001	981	1043	1011

Valores observados

¿El generador trabaja de manera apropiada? Utilice $\alpha = 0.01$. Calcule el $p\text{-}valor$.

Sea p_i la probabilidad de ocurrencia del número i:

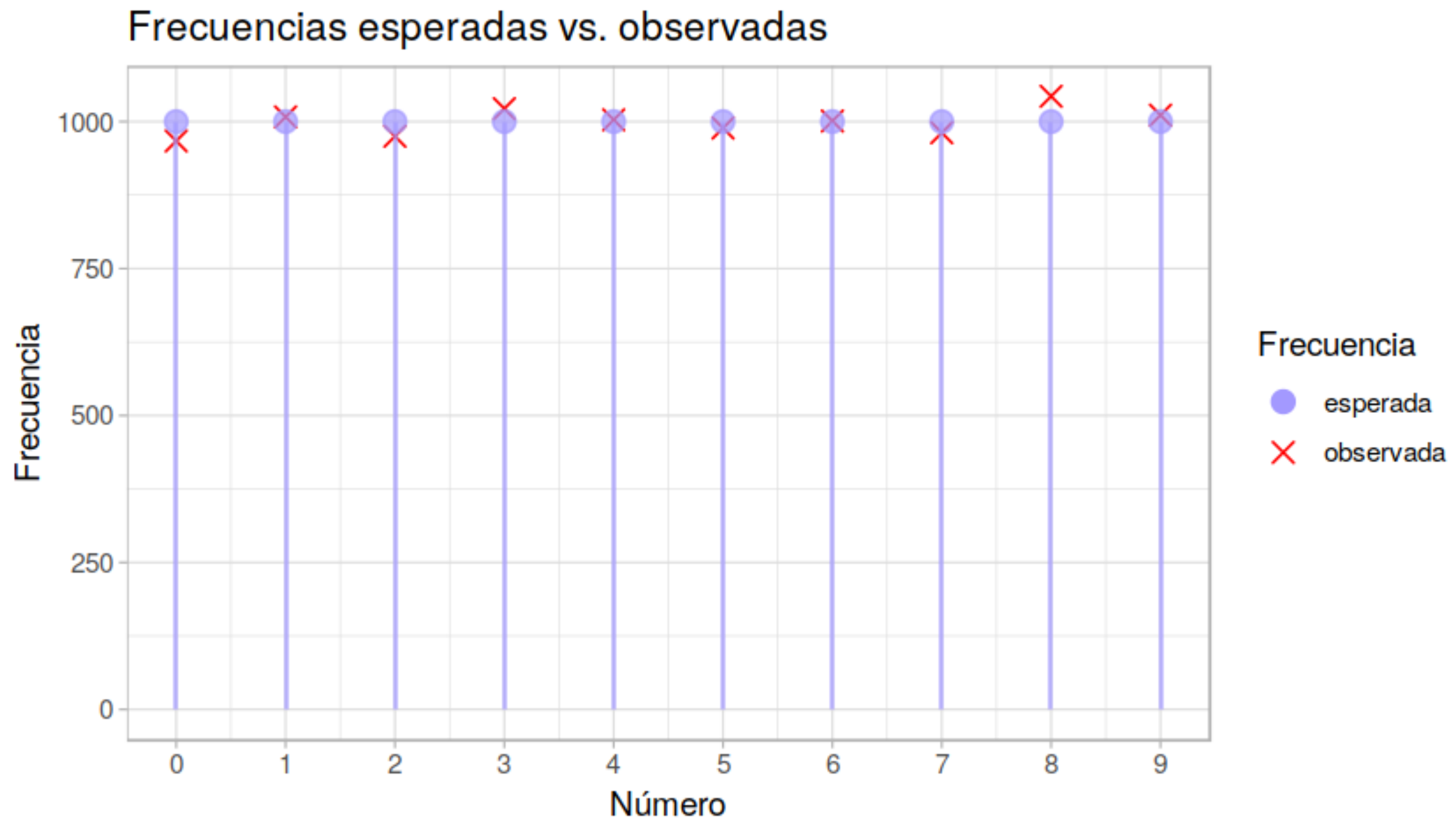
$$H_0 : p_0 = p_1 = \ldots = p_9 = 0.1$$

In [50]:
```
x <- 0:9
freq <- c(967, 1008, 975, 1022, 1003, 989, 1001, 981, 1043, 1011)
n <- 10000
df <- data.frame(x, freq)
data <- t(df)
rownames(data) <- c("Número", "Frecuencia")
data
```

Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia	967	1008	975	1022	1003	989	1001	981	1043	1011

In [51]:
```
e <- n / length(x) # valor esperado
df_unif <- data.frame(x=x, freq=rep(e, length(x))) # distribución uniforme discreta en el rango 0-9
all_values <- rbind(df,df_unif)
all_values$dataset <- c(rep("observada", nrow(df)), rep("esperada", nrow(df_unif)))
```

In [53]:
```
# Gráfico
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
df <- data.frame(x, freq)
ggplot(all_values, aes(x=all_values$x, y=all_values$freq, col=dataset, shape=dataset, alpha=dataset)) +
    ggtitle("Frecuencias esperadas vs. observadas") +
    geom_point(size=3) +
    geom_segment(aes(x=all_values$x, xend=all_values$x, y=0, yend=e), color='#a399ff', alpha=0.5) +
    scale_color_manual(name="Frecuencia ", labels = c("esperada","observada"),
                       values=c("#a399ff", "red")) +
    scale_shape_manual(name="Frecuencia ", labels = c("esperada","observada"), values=c(19,4)) +
    scale_alpha_manual(name="Frecuencia ", labels = c("esperada","observada"), values=c(0.7,1),
                       guide="none") +
    scale_x_continuous(breaks = function(x) seq(floor(min(x)), ceiling(max(x)))) +
    xlab("Número") +
    ylab("Frecuencia") + theme_light()
```



Para que el generador trabaje de forma apropiada, la distribución de los valores generados debe ser uniforme discreta en el rango de interés.

In [109…
```
chi_sq <- sum((freq - e)^2 / e)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2 = %.2f$", chi_sq))
```

$\chi^2 = 4.72$

In [111…
```
k <- length(x) - 1
alpha <- 0.01
chisq_value <- qchisq(1-alpha, k)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2_{\\nu={{%d}},\\alpha={{%.2f}}} = %.2f$", k, alpha, chisq_value))
```

$\chi^2_{\nu=9,\alpha=0.01} = 21.67$

Como $\chi^2 = 4.72 < 21.67$, no hay evidencia sufieciente para rechazar H_0 y se concluye que el generador trabaja de forma apropiada.

In [115…
```
p_valor <- 1 - pchisq(chi_sq, k)
display_markdown(sprintf("$p$-$valor = %.2f > %.2f$", p_valor, alpha))
```

$p\text{-}valor = 0.86 > 0.01$

Ejercicio 8

Se observa y anota la duración de un ciclo de una máquina automática

Segundos	2.10	2.11	2.12	2.13	2.14	2.15	2.16	2.17	2.18	2.19	2.20
Frecuencia	16	28	41	74	149	256	137	82	40	19	11

Valores observados

¿La probabilidad normal parece ser un modelo de probabilidad razonable para la duración del ciclo? Utilice la prueba ji-cuadrada de bondad de ajuste, con $\alpha = 0.05$. Calcule el $p\text{-}valor$.

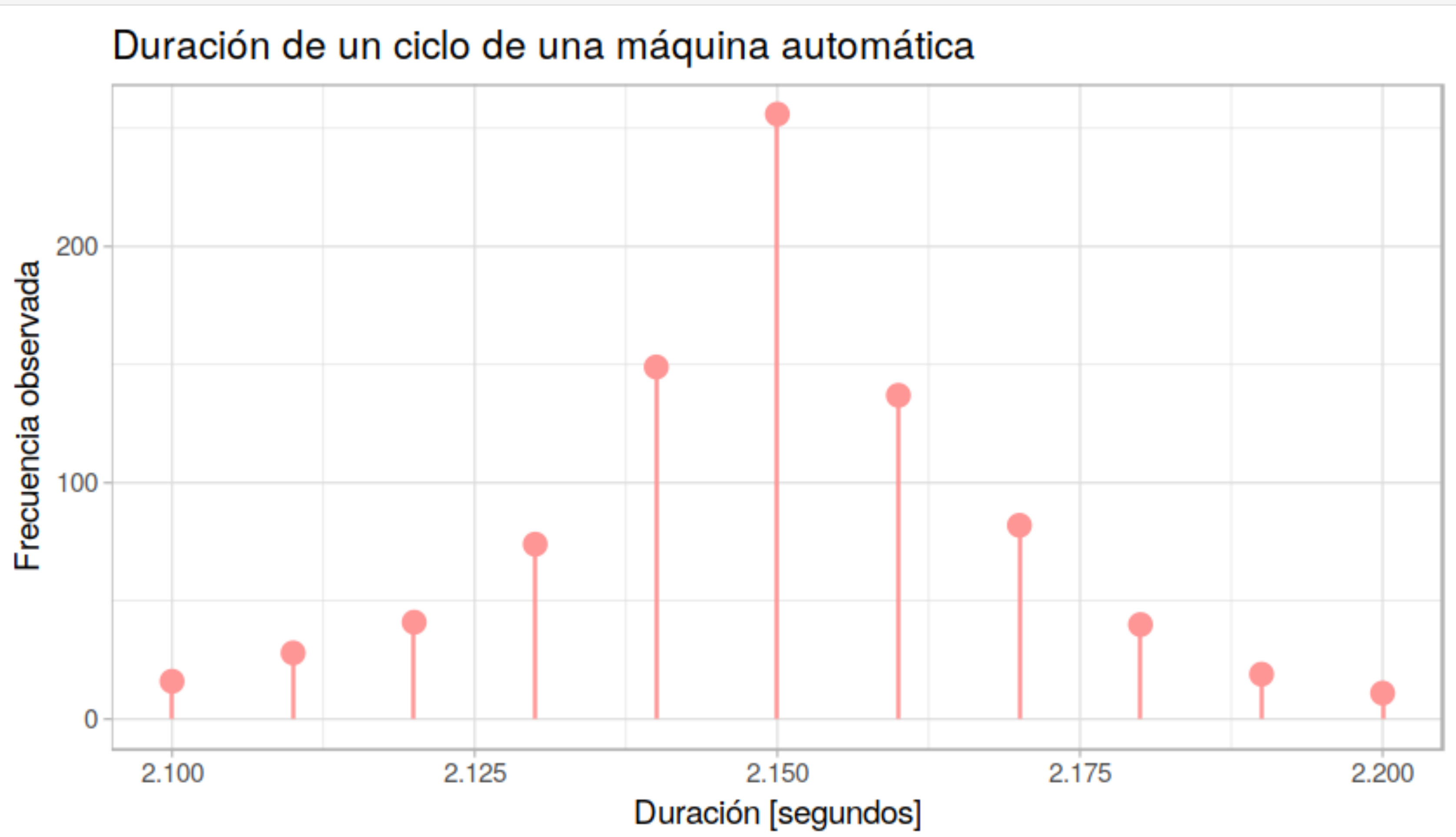
Sea X una variable aleatoria que representa la duración de un ciclo:

$$H_0 : X \sim N\left(u, \sigma^2\right)$$

In [26]:
```
sec <- c(2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20)
freq <- c(16, 28, 41, 74, 149, 256, 137, 82, 40, 19, 11)
n <- sum(freq)
df <- data.frame(sec, freq)
data <- t(df)
rownames(data) <- c("Segundos", "Frecuencia")
data
```

Segundos	2.1	2.11	2.12	2.13	2.14	2.15	2.16	2.17	2.18	2.19	2.2
Frecuencia	16.0	28.00	41.00	74.00	149.00	256.00	137.00	82.00	40.00	19.00	11.0

In [46]:
```
# Gráfico de las observaciones
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
ggplot(df, mapping = aes(x=sec, y=freq)) +
    ggtitle("Duración de un ciclo de una máquina automática") +
    geom_point(col="#ff9696", size=3) +
    geom_segment(aes(x=sec, xend=sec, y=0, yend=freq), color='#ff9696') +
    xlab("Duración [segundos]") +
    ylab("Frecuencia observada") + theme_light()
```



In [21]:
```
k <- 8 # número de celdas
p <- seq(from = 0, to = 1, by = 1/k) # elijo que cada celda tenga la misma probabilidad
mu <- mean(freq) # media estimada
std <- sd(freq) # desviación standard estimada
x <- qnorm(p, mu, std) # cuantiles para cada probabilidad
count <- colSums(outer(freq, x, `<`)) # cantidad de valores menores que cada cuantil
interval_count <- diff(count) # cantidad de valores dentro de cada intervalo (celda)
e <- n/k # valor esperado
chi_sq <- sum(((interval_count - e)^2) / e)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2 = %.2f$", chi_sq))
```

$\chi^2 = 7.18$

In [23]:
```
alpha <- 0.05
df <- k - 2 - 1 # Grados de libertad. Se estiman 2 parámetros
chisq_value <- qchisq(1-alpha, df)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2_{\\nu={{%d}},\\alpha={{%.2f}}} = %.2f$", df, alpha, chisq_value))
```

$\chi^2_{\nu=5,\alpha=0.05} = 11.07$

Como $\chi^2 = 7.18 < 11.07$, no hay evidencia sufieciente para rechazar H_0 y se acepta que la duración de un ciclo de la máquina sigue una distribución normal.

In [24]:
```
p_valor <- 1 - pchisq(chi_sq, k)
display_markdown(sprintf("$p$-$valor = %.2f > %.2f$", p_valor, alpha))
```

$p\text{-}valor = 0.52 > 0.05$

Ejercicio 9

Se ha teorizado el tiempo de respuesta de un sistema computarizado, a una petición de cierto tipo de información, como una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$

a) Si se hicieran n observaciones y se desea usar la prueba ji-cuadrado con cinco intervalos de clase de igual probabilidad bajo la hipótesis nula, ¿cuáles serían los intervalos de clase resultante?

Sea X una variable aleatoria que representa el tiempo de respuesta de un sistema computarizado:

$$H_0 : X \sim Exp\,(1)$$

In [112…
```
lambda <- 1
k <- 5 # cantidad de intervalos de clase
p <- seq(from = 0, to = 1, by = 1/k) # igual probabilidad en cada intervalo
q <- qexp(p, rate=lambda) #cuantiles
intervals <- rep('', k)

for (i in 1:length(q)-1)
{
    if(i != length(q)-1) {
        intervals[i] <- sprintf("$\\bullet\\quad\\text{Intervalo %d}:\\quad%.4f < x \\le %.4f$", i, q[i], q[
        display_markdown(intervals[i])
    }
    else {
        intervals[i] <- sprintf("$\\bullet\\quad\\text{Intervalo %d}:\\quad%.4f < x < %.4f$", i, q[i], q[i+1
        display_markdown(intervals[i])
    }
}
```

$\bullet\quad\text{Intervalo 1}:\quad 0.0000 < x \le 0.2231$

$\bullet\quad\text{Intervalo 2}:\quad 0.2231 < x \le 0.5108$

$\bullet\quad\text{Intervalo 3}:\quad 0.5108 < x \le 0.9163$

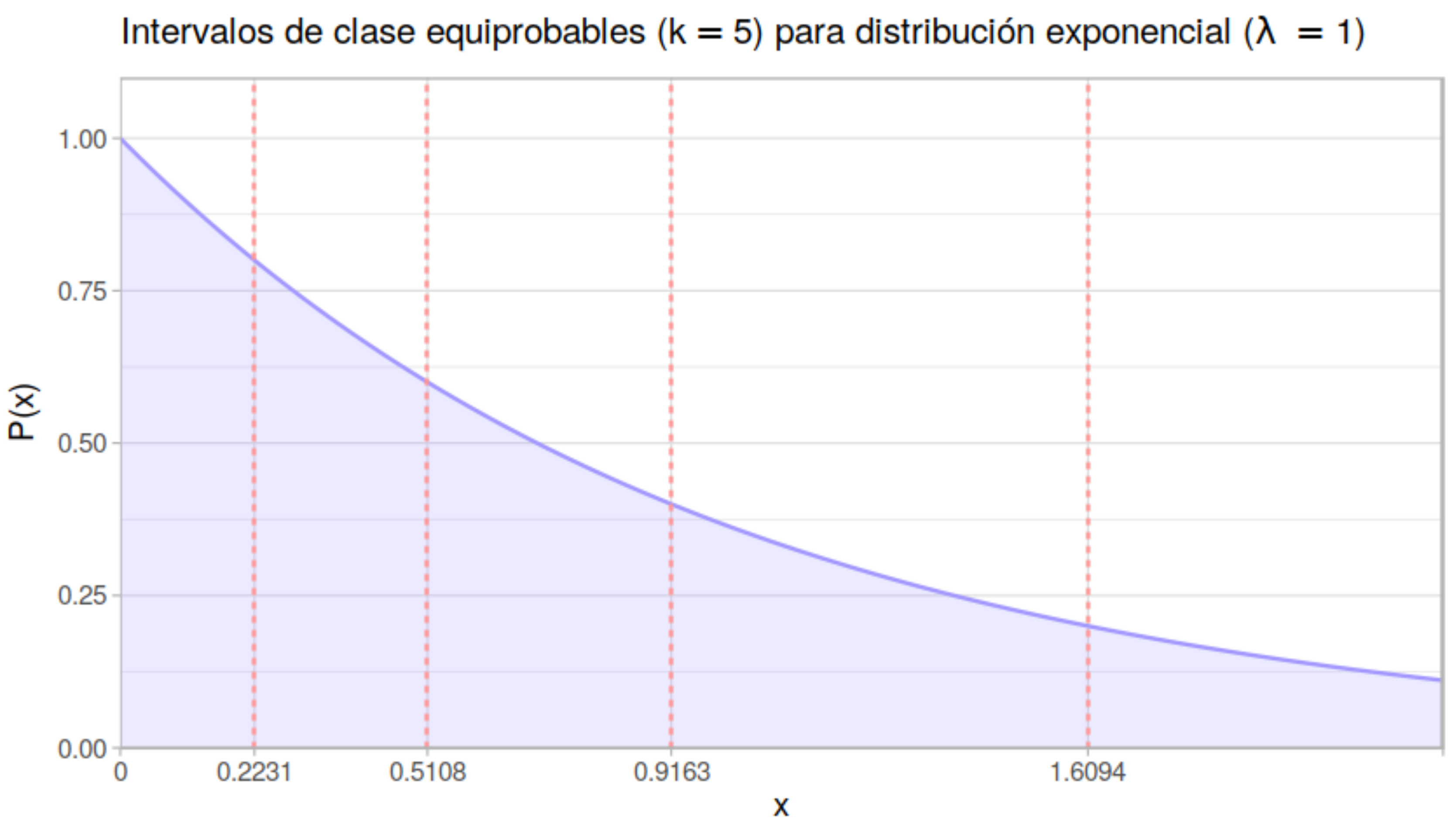
$\bullet\quad\text{Intervalo 4}:\quad 0.9163 < x \le 1.6094$

$\bullet\quad\text{Intervalo 5}:\quad 1.6094 < x < Inf$

In [97]:
```
x <- seq(from = 0, to = 2.2, by = 0.01)
y <- dexp(x, lambda, log = FALSE)
data <- data.frame(x, y)
colnames(data) <- c("x", "P(x)")
segments <- q[2:(length(q)-1)]
```

In [110…

```
# Gráfico de las observaciones
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=4)
ggplot(data, mapping = aes(x=x, y=y)) +
    ggtitle(TeX("Intervalos de clase equiprobables $(k = 5)$ para distribución exponencial $(\\lambda = 1)$"
    geom_line(col="#a399ff") +
    geom_area(aes(x = x, y = y), fill = "#a399ff", alpha=0.2) +
    geom_vline(xintercept = segments, linetype = "dashed", col="#ff9696") +
    scale_y_continuous(expand=c(0,0), limits = c(0, 1.1)) +
    scale_x_discrete(expand=c(0,0), limits=c(0, segments, 2.2),
              labels=c('0', paste(round(segments, 4)), '')) +
    xlab(TeX("$x$")) +
    ylab(TeX("$P(x)$")) +
    theme_light() + theme(plot.title = element_text(size=12))
```



b) Realice la prueba ji-cuadrado utilizando los siguientes datos de una muestra aleatoria de 40 tiempos de respuesta:

Tiempos de respuesta

0.10	0.99	1.14	1.26	3.24	0.12	0.26	0.80	0.79	1.16	1.76	0.41	0.59	0.27	2.22	0.66	0.71	2.21	0.68	0.43
0.11	0.46	0.69	0.38	0.91	0.55	0.81	2.51	2.77	0.16	1.11	0.02	2.13	0.19	1.21	1.13	2.93	2.14	0.34	0.44

Valores observados

In [20]:

```
data <- c(0.10, 0.99, 1.14, 1.26, 3.24, 0.12, 0.26, 0.80, 0.79, 1.16, 1.76, 0.41, 0.59, 0.27, 2.22, 0.66, 0.
n <- length(data)
```

In [21]:

```
count <- colSums(outer(data, x, `<`)) # cantidad de valores menores que cada cuantil
interval_count <- diff(count) # cantidad de valores dentro de cada intervalo (celda)
e <- n/k # valor esperado
chi_sq <- sum(((interval_count - e)^2) / e)
display_markdown(sprintf("$\\chi^2 = %.2f$", chi_sq))
```

$\chi^2 = 1.25$

In [23]:

```
alpha <- 0.05
df <- k - 1 # Grados de libertad
chisq_value <- qchisq(1-alpha, df)
display_markdown(sprintf("Utilizando un nivel de significancia $\\alpha = %.2f$:", alpha))
display_markdown(sprintf("$\\chi^2_{\\nu={%d}},\\alpha={%.2f}}} = %.2f$", df, alpha, chisq_value))
```

Utilizando un nivel de significancia $\alpha = 0.05$:

$\chi^2_{\nu=4,\alpha=0.05} = 9.49$

Como $\chi^2 = 1.25 < 9.49$, no hay evidencia sufieciente para rechazar H_0 y se acepta que el tiempo de respuesta tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$.

In [24]:

```
p_valor <- 1 - pchisq(chi_sq, k)
display_markdown(sprintf("$p$-$valor = %.2f > %.2f$", p_valor, alpha))
```

$p\text{-}valor = 0.94 > 0.05$