ESTADÍSTICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS

PRÁCTICA 4: Análisis de varianza

Ivan Svetlich

In [9…

```
#Librerias
library(IRdisplay)
library(formattable)
library(ggplot2)
library(cowplot)
library(dplyr)
library(stringr)
```

Ejercicio 1

Un fabricante está interesado en la resistencia a la tensión de una fibra sintética. Se sospecha que la resistencia está relacionada con el porcentaje de algodón en la fibra. Para ello se emplean cinco niveles de porcentaje de algodón, y se corren cinco réplicas en orden aleatorio obteniéndose los siguientes datos:

	Resistencia				
Porcentaje de algodón	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
15	7	7	15	11	9
20	12	17	12	18	18
25	14	18	18	19	19
30	19	25	22	19	23
35	7	10	11	15	11

In [2…

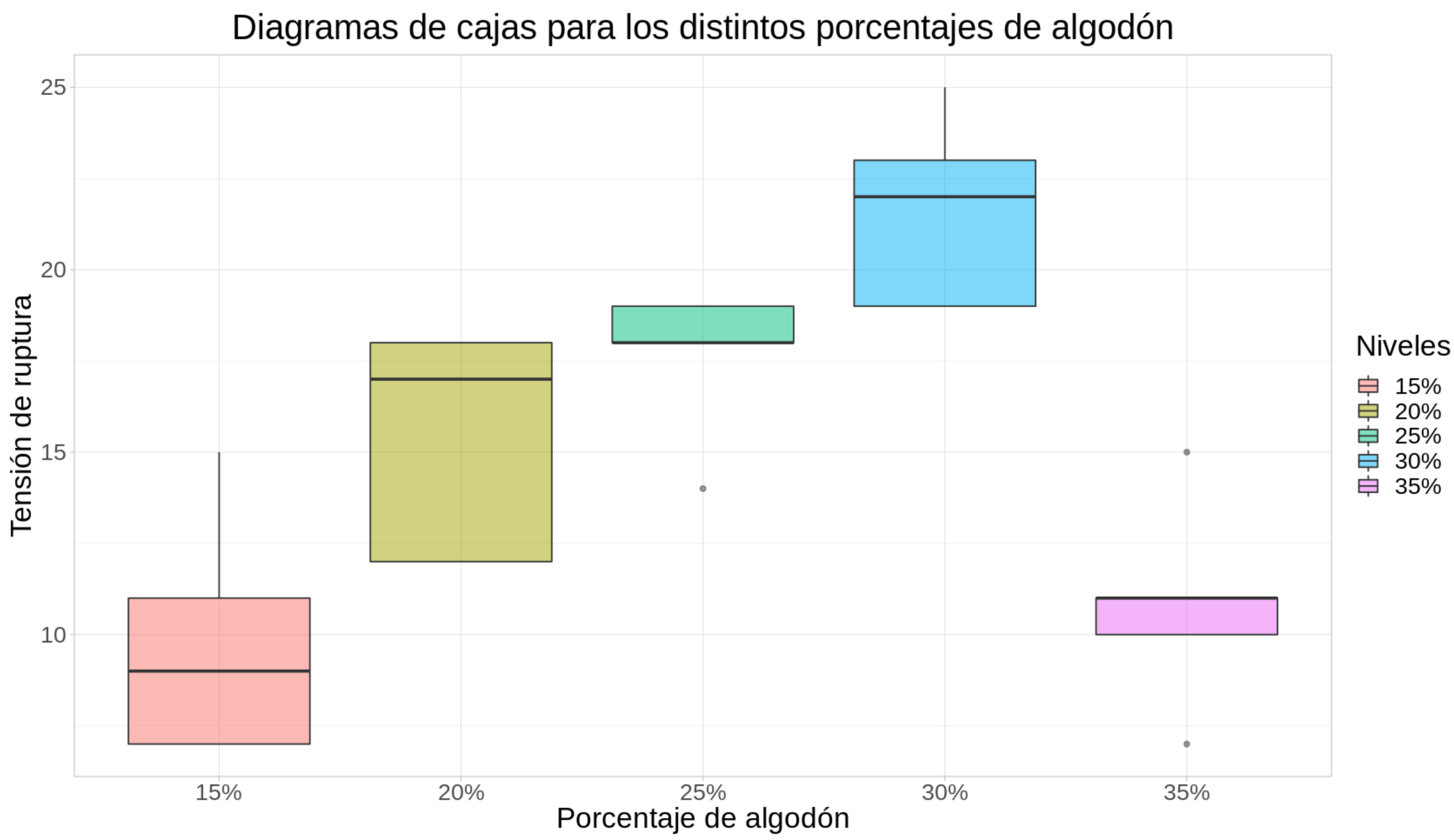
```
data_1 <- read.csv("./TP4_tables/data1.csv") # Leo los datos desde archivo .csv
```

a) ¿El porcentaje de algodón tiene algún efecto sobre la tensión de ruptura?. Dibuje diagramas de caja comparativos y realice un análisis de varianza. Utilice $\alpha = 0.05$.

Averiguar si el porcentaje de algodón en la fibra tiene un efecto sobre la tensión de ruptura implica determinar si las medias poblacionales de cada tratamiento son iguales o no. Como primer indicio, los diagramas de cajas permiten hacer una comparación visual de las distintas poblaciones:

In [3…

```
# Plot
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_1, aes(x=cotton_percentage, y=tensile_strength, fill=cotton_percentage)) +
    labs(
        title="Diagramas de cajas para los distintos porcentajes de algodón",
        x="Porcentaje de algodón",
        y="Tensión de ruptura",
        fill="Niveles") +
    geom_boxplot(alpha=0.5) +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



Un análisis visual de los diagramas de cajas sugiere que existen diferencias entre las medias de las poblaciones correspondientes a los distintos tratamientos.

La determinación formal respecto a si las medias del tratamiento son diferentes implica probar la hipótesis:

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5, \quad \text{contra } H_1\colon \text{dos o mas } \mu_i \text{ son diferentes}$$

seindo μ_i la media del tratamiento i. Para ello se utiliza el método de ***análisis de varianza en un sentido***. El estadístico es:

$$F = \frac{MST_r}{MSE}$$

donde MST_r es la media cuadrática de tratamiento y MSE la media cuadrática del error.

In [4…
```
data_1.aov <- aov(tensile_strength ~ cotton_percentage, data_1)
aov_test <- summary(data_1.aov)[[1]]
```

In [5…
```
display_markdown('#### **ANOVA de un sentido:**')
aov_test <- cbind(c('Porcentaje de algodón', 'Residuos'), aov_test)
colnames(aov_test)[1] <- 'Source'
rownames(aov_test) <- c()
table <- formattable(aov_test, align=c('l', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c'), list(`Source` = formatter("span",style
as.htmlwidget(table, width="70%", height=NULL)
```

ANOVA de un sentido:

Source	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Porcentaje de algodón	4	475.76	118.94	14.75682	9.127937e-06
Residuos	20	161.20	8.06	NA	NA

El resultado de la prueba es un $\text{p-valor} = 9.12793e-06 < 0.05$. Por lo tanto, hay evidencia significativa en contra de la hipótesis nula y se que concluye que el porcentaje de algodón en la fibra tiene un efecto sobre la tensión de ruptura de la misma.

b) Use el método de Tukey para identificar diferencias específicas entre los porcentajes.

El método de Tukey-Kramer está basado en la distribución de rango studentizado y se utiliza para construir intervalos de confianza y realizar pruebas de hipótesis de forma simultánea para todas las diferencias entre las medias de los distintos tratamientos. Esta herramienta permite determinar cuáles pares de tratamientos difieren en su efecto sobre la variable respuesta.

Los intervalos de confianza simultáneos de Tukey-Kramer de nivel $100(1-\alpha)$ para todas las diferencias $\mu_i - \mu_j$ son:

$$\overline{X}_i - \overline{X}_j \pm q_{I,N-I,\alpha}\sqrt{\frac{MSE}{2}\left(\frac{1}{J_i}+\frac{1}{J_j}\right)}$$

donde:

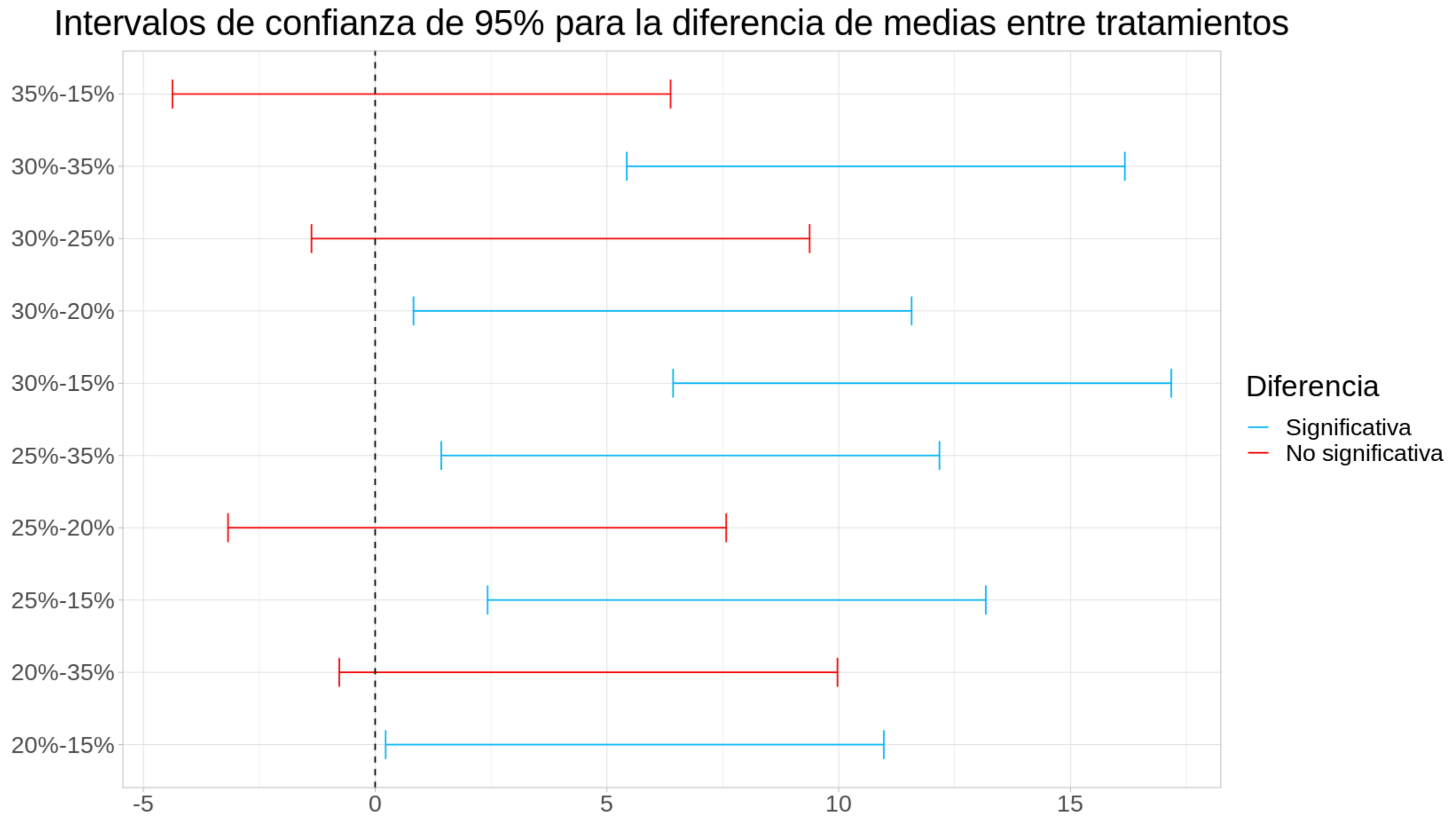
- $\overline{X}_i$ y $\overline{X}_j$: medias muestrales en los niveles i y j,
- I: número de tratamientos,
- J_i y J_j: tamaños de las muestras en los niveles i y j,
- N: número total de observaciones,
- MSE: media cuadrática del error.

In [6…

```
data_1.tukey <- as.data.frame(TukeyHSD(data_1.aov,ordered = TRUE, conf.level = 0.95)[1]$cotton_percentage)
```

In [7…

```
data_1.tukey$names <- c(rownames(data_1.tukey))
# Gráfico de los intervalos de confianza
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_1.tukey, aes(names, diff)) +
    labs(
        title="Intervalos de confianza de 95% para la diferencia de medias entre tratamientos",
        x="",
        y="",
        col="Diferencia") +
    geom_errorbar(aes(ymin=lwr, ymax=upr, col=ifelse(lwr*upr > 0,'1','2')), width = 0.4, alpha=1) +
    scale_color_manual(values=c('#05b5f5','#f50505'), labels=c('Significativa','No significativa'), breaks=c(
    geom_hline(yintercept=0, linetype="dashed", col="black") +
    theme_light() +
    coord_flip(expand = TRUE) +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



Los intervalos que no contienen al cero indican, con un nivel de confianza de 95%, que existe una diferencia en los efectos de los tratamientos considerados.

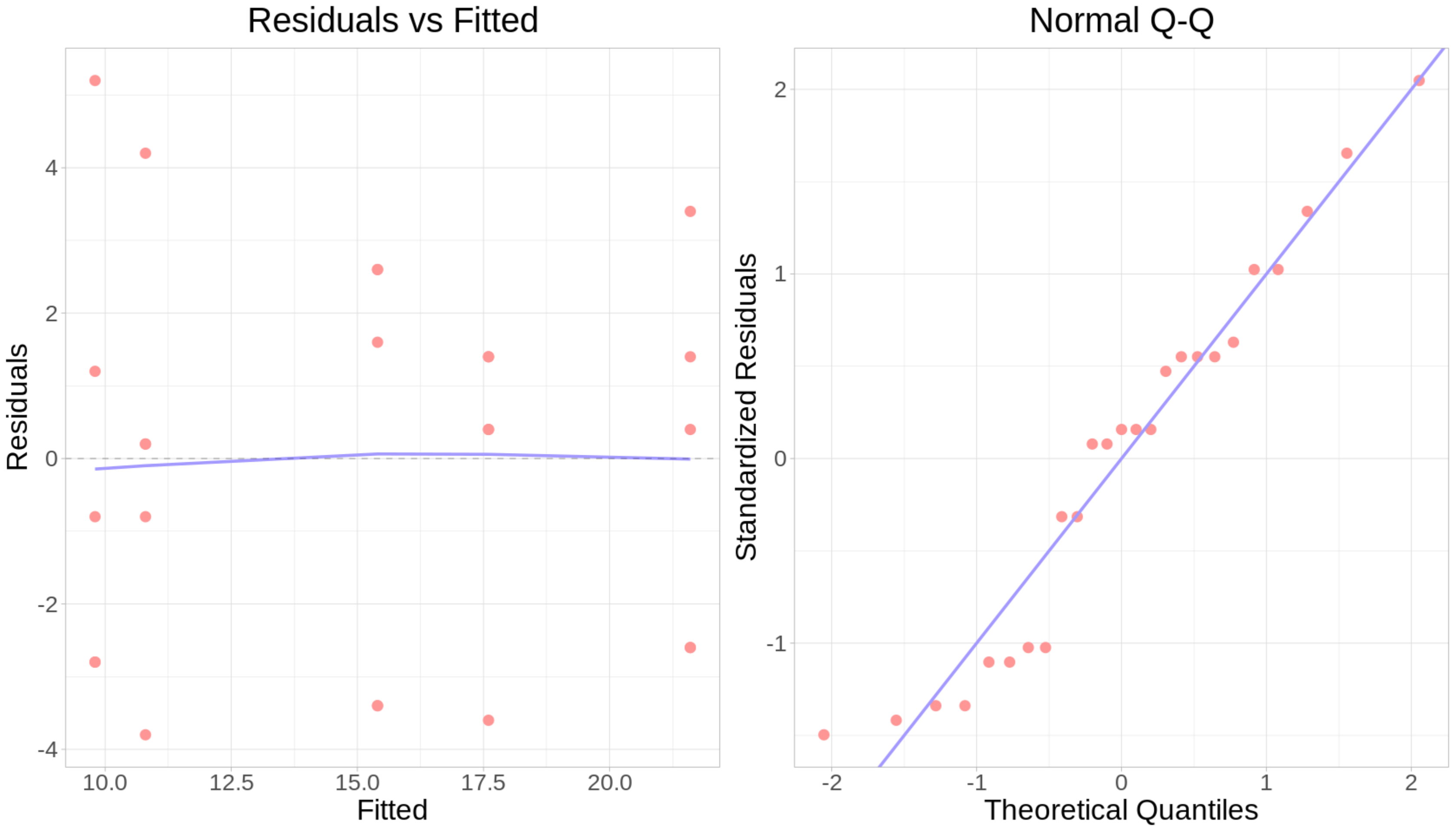
c) Encuentre los residuos y examínelos en lo que respecta a la insuficiencia del modelo.

Las pruebas de hipótesis usuales del ANOVA de un sentido son válidas si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Las poblaciones en tratamiento deben ser normales.
2. Las poblaciones en tratamiento deben tener todas la misma varianza.

In [8…

```
smoothed <- data.frame(with(data_1.aov, lowess(x = data_1.aov$fitted, y = data_1.aov$residuals)))
# Gráficos
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
res_vs_fit <- ggplot(data_1.aov) +
    geom_point(aes(x=data_1.aov$fitted, y=data_1.aov$residuals), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_path(data = smoothed, aes(x = x, y = y), col="#a399ff", size=1) +
    geom_hline(linetype = 2, yintercept=0, alpha=0.2) +
    ggtitle("Residuals vs Fitted") +
    xlab("Fitted") +
    ylab("Residuals") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

qq_plot <- ggplot(data_1.aov) +
    stat_qq(aes(sample = .stdresid), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_abline(col="#a399ff", size=1) +
    xlab("Theoretical Quantiles") +
    ylab("Standardized Residuals") +
    ggtitle("Normal Q-Q") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

plot_grid(res_vs_fit, qq_plot, ncol = 2)
```



La gráfica de residuos vs. valores ajustados no presenta patrones apreciables, y por lo tanto es razonable asumir que la varianza es constante. En cuanto al gráfico Q-Q, si bien los valores no se ajustan estrictamente a una recta, no hay evidencias de una violación grave del principio de normalidad.

Ejercicio 2

Se estudia la resistencia a la compresión del concreto, así como cuatro técnicas de mezclado diferentes. Se obtienen los siguientes datos:

	Resistencia a la compresión			
Técnica de mezclado	1	2	3	4
1	3129	3200	2800	2600
2	3000	3300	2900	2700
3	2865	2975	2985	2600
4	2890	3150	3050	2765

In [9…

```
data_2 <- read.csv("./TP4_tables/data2.csv") # Leo los datos desde archivo .csv
data_2$mixing_method <- as.factor(data_2$mixing_method)
```

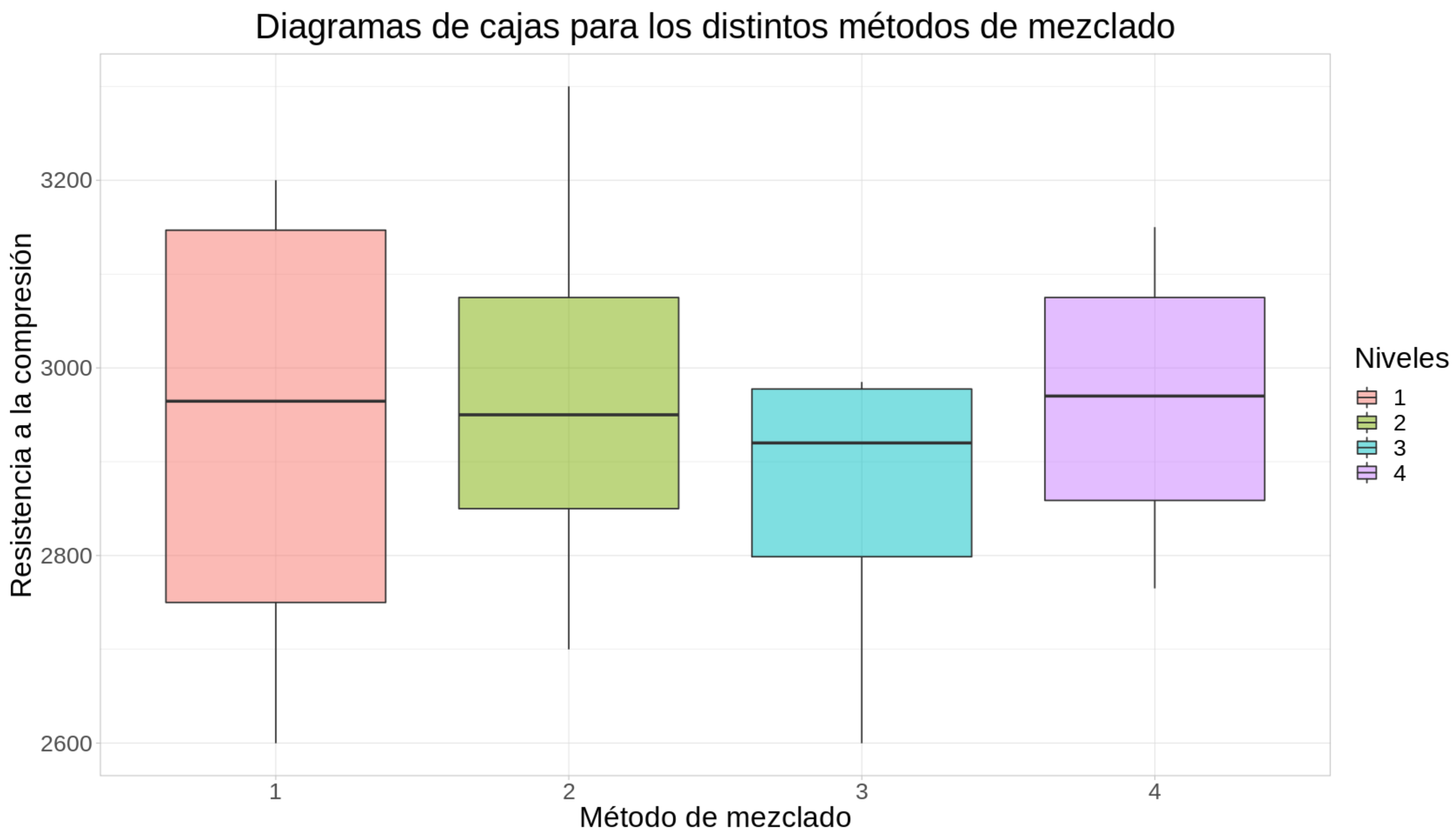
a) Pruebe la hipótesis de que las técnicas de mezclado afectan la resistencia del concreto. Utilice $\alpha = 0.05$.

Las hipótesis a probar son:

$$H_0\text{: } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, \quad \text{contra } H_1\text{: dos o mas } \mu_i \text{ son diferentes}$$

In [1…

```
# Plot
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_2, aes(x=mixing_method, y=compression_strength, fill=mixing_method)) +
    labs(
        title="Diagramas de cajas para los distintos métodos de mezclado",
        x="Método de mezclado",
        y="Resistencia a la compresión",
        fill="Niveles") +
    geom_boxplot(alpha=0.5) +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



En primera instancia, los diagramas de cajas sugieren que prodía no existir una diferencia entre los efectos de los métodos de mezclado estudiados.

In [1…

```
data_2.levels <- split(data_2 , f=data_2$mixing_method)
```

In [1…

```
# Cálculo de MSTr
grand_mean <- mean(data_2$compression_strength) # media general
treatment_means <- sapply(data_2.levels, function(x) {
    mean(x$compression_strength)
}) # media de cada tratamiento
J <- sapply(data_2.levels, nrow) # cantidad de observaciones para cada tratamiento
SSTr <- sum(J * (treatment_means - grand_mean)^2)
I <- length(data_2.levels) # cantidad de niveles
MSTr <- SSTr / (I - 1)
display_markdown(sprintf('$MSTr = %.f$', MSTr))
```

$MSTr = 11460$

In [1…

```
# Cálculo de MSE
samples <- t(sapply(data_2.levels, function(x) {x$compression_strength})) # matriz con todas las observacione
residuals <- samples - treatment_means #residuos
SSE <- sum(residuals^2)
N <- sum(J) # cantidad de observaciones
MSE <- SSE / (N - I)
display_markdown(sprintf('$MSE = %.f$', MSE))
```

$MSE = 50772$

In [1…

```
F <- MSTr / MSE
display_markdown(sprintf('$F = %.4f$', F))
```

$F = 0.2257$

In [1…

```
alpha <- 0.05
f_alpha <- qf(alpha, df1=I-1, df2=N-I, lower=FALSE)
display_markdown(sprintf('$f_{\\alpha=%.3f,\\: %.f,\\: %.f} = %.4f$', alpha, I-1, N-I, f_alpha))
```

$f_{\alpha=0.050,\: 3,\: 12} = 3.4903$

Como $F = 0.2257 < 3.4903$, no es posible rechazar la hipótesis nula y se concluye que la técnica de mezclado utilizada no afecta la resistencia del concreto.

b) Encuentre el p-valor para el estadístico F del inciso a).

In [1…

```
p_value <- pf(F, df1=I-1, df2=N-I, lower=FALSE)
display_markdown(sprintf('$\\text{p-valor} = %.4f$', p_value))
```

$\text{p-valor} = 0.8767$

Como el $\text{p-valor} = 0.8767 > 0.05$, se llega a la misma conclusión que en el inciso anterior.

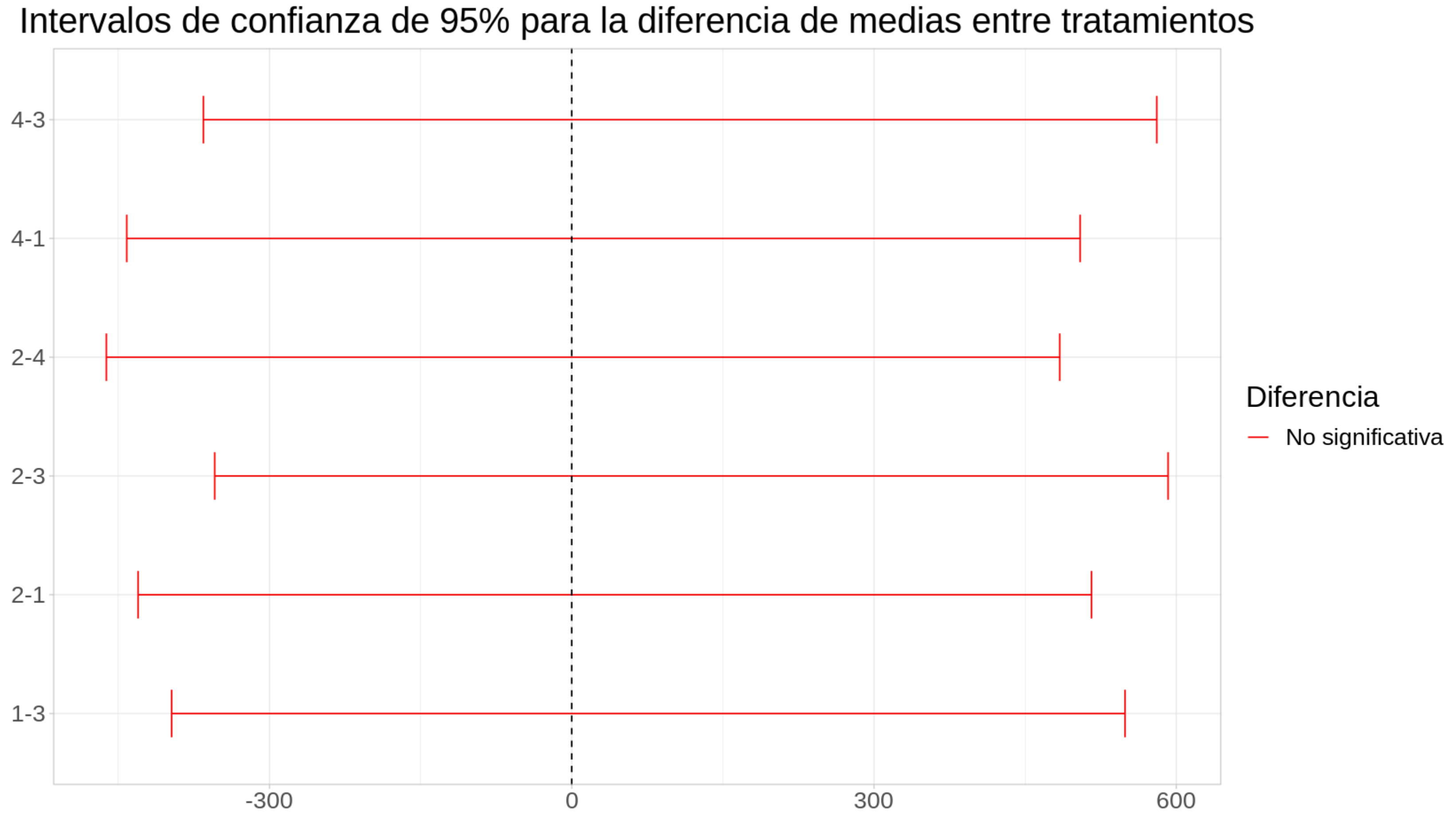
c) Use el método de Tukey para identificar diferencias específicas entre los porcentajes.

In [1…

```
data_2.aov <- aov(compression_strength ~ mixing_method, data_2)
data_2.tukey <- as.data.frame(TukeyHSD(data_2.aov, ordered = TRUE, conf.level = 0.95)[1]$mixing_method)
```

In [1…

```
data_2.tukey$names <- c(rownames(data_2.tukey))
# Gráfico de los intervalos de confianza
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_2.tukey, aes(names, diff)) +
    labs(
        title="Intervalos de confianza de 95% para la diferencia de medias entre tratamientos",
        x="",
        y="",
        col="Diferencia") +
    geom_errorbar(aes(ymin=lwr, ymax=upr, col=ifelse(lwr*upr > 0,'1','2')), width = 0.4, alpha=1) +
    scale_color_manual(values=c('#05b5f5','#f50505'), labels=c('Significativa','No significativa'), breaks=c(
    geom_hline(yintercept=0, linetype="dashed", col="black") +
    theme_light() +
    coord_flip(expand = TRUE) +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```

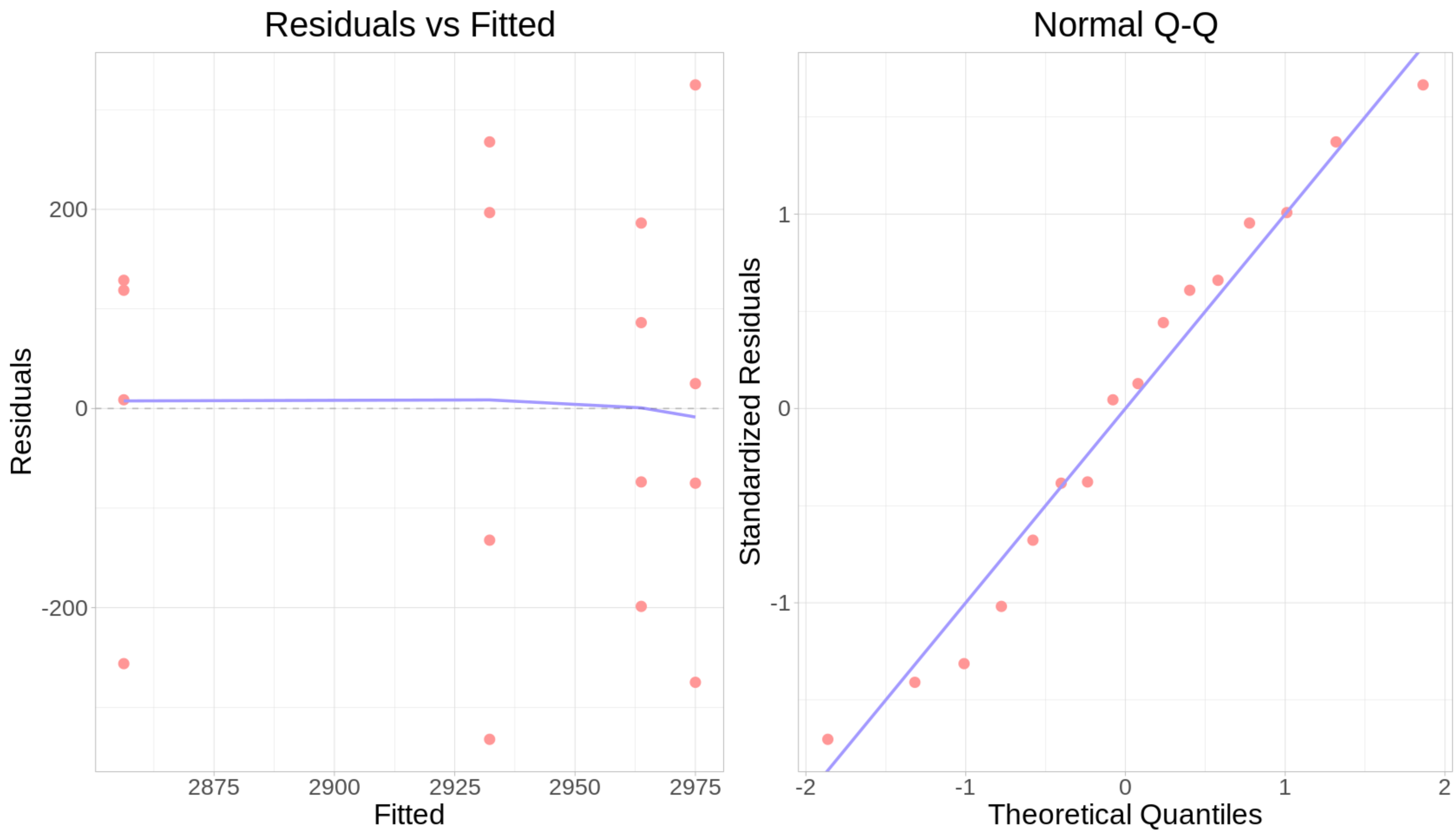


Todos los intervalos de confianza contienen al cero, lo cual indica que ningún par de tratamientos presenta una diferencia significativa entre sus medias.

d) Analice los residuos de este experimento.

In [1…

```
smoothed <- data.frame(with(data_2.aov, lowess(x = data_2.aov$fitted, y = data_2.aov$residuals)))
# Gráficos
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
res_vs_fit <- ggplot(data_2.aov) +
    geom_point(aes(x=data_2.aov$fitted, y=data_2.aov$residuals), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_path(data = smoothed, aes(x = x, y = y), col="#a399ff", size=1) +
    geom_hline(linetype = 2, yintercept=0, alpha=0.2) +
    ggtitle("Residuals vs Fitted") +
    xlab("Fitted") +
    ylab("Residuals") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

qq_plot <- ggplot(data_2.aov) +
    stat_qq(aes(sample = .stdresid), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_abline(col="#a399ff", size=1) +
    xlab("Theoretical Quantiles") +
    ylab("Standardized Residuals") +
    ggtitle("Normal Q-Q") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

plot_grid(res_vs_fit, qq_plot, ncol = 2)
```



La distribución de los valores en la gráfica de residuos vs. valores ajustados no presenta patrones apreciables, y por lo tanto es razonable asumir que la varianza es constante. El gráfico Q-Q sugiere que los residuos provienen de una distribución normal. En conclusión, no parece haber violaciones notables de las condiciones necesarias para la validez del modelo.

Ejercicio 3

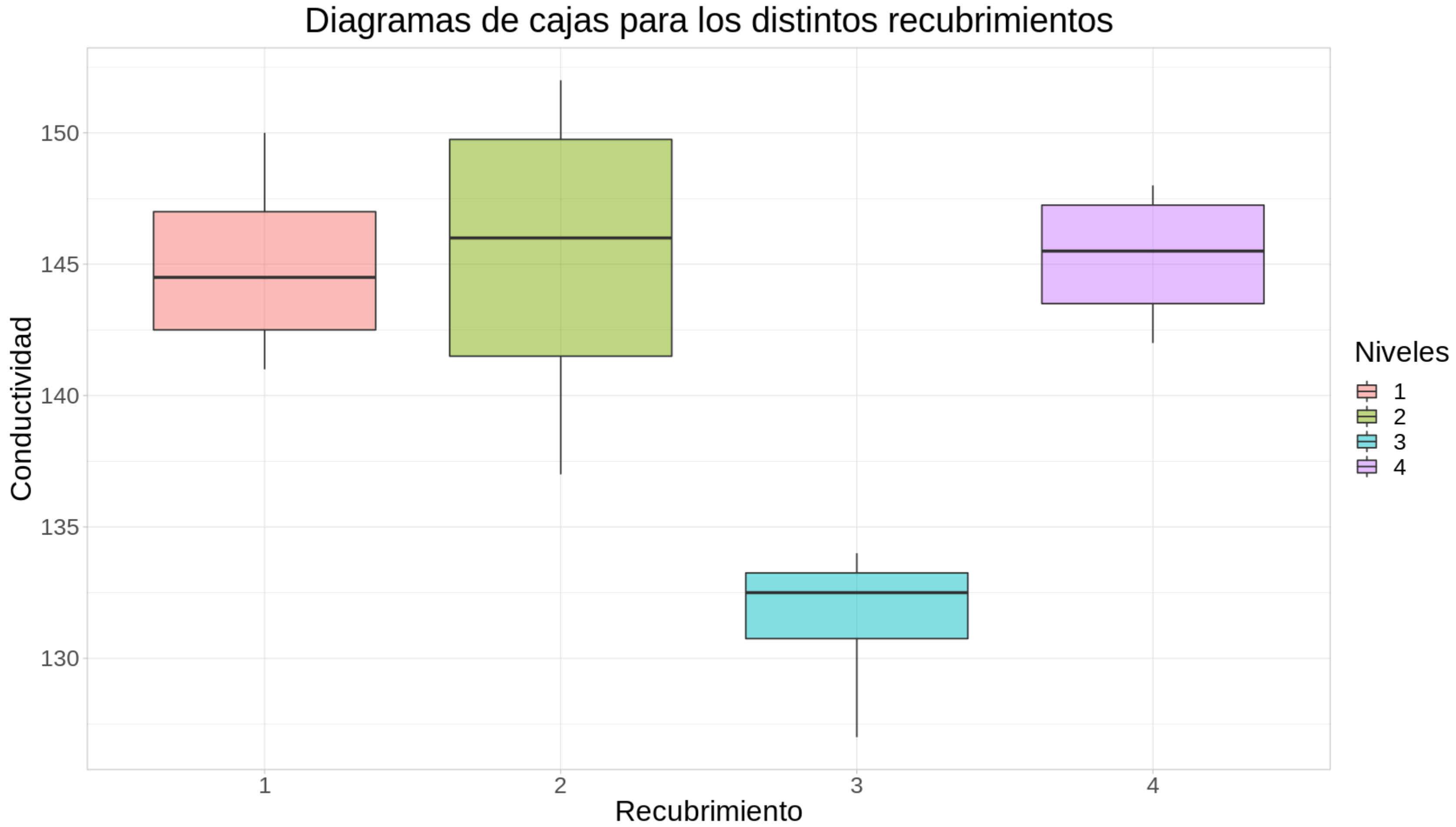
Un ingeniero en electrónica está interesado en el efecto sobre la conductividad de una válvula electrónica que tiene cinco tipos diferentes de recubrimiento para los tubos de rayos catódicos utilizados en un dispositivo de visualización de un sistema de telecomunicaciones. Se obtienen los datos siguientes sobre la conductividad:

	Conductividad			
Recubrimiento	1	2	3	4
1	143	141	150	146
2	152	149	137	143
3	134	133	132	127
4	147	148	144	142

In [2…
```
data_3 <- read.csv("./TP4_tables/data3.csv") # Leo los datos desde archivo .csv
data_3$protection <- factor(data_3$protection)
```

a) ¿Existe alguna diferencia en la conductividad debida al tipo de recubrimiento? Utilice $\alpha = 0.05$.

In [2…
```
# Plot
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_3, aes(x=protection, y=conductivity, fill=protection)) +
    labs(
        title="Diagramas de cajas para los distintos recubrimientos",
        x="Recubrimiento",
        y="Conductividad",
        fill="Niveles") +
    geom_boxplot(alpha=0.5) +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



Los gráficos de cajas sugieren que el recubrimiento tipo 3 produce un efecto diferente al del resto de los recubrimientos estudiados. Para determinar formalmente si existe alguna diferencia en la conductividad debida al tipo de recubrimiento se prueban las hipótesis:

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, \quad \text{contra } H_1\text{: dos o mas } \mu_i \text{ son diferentes}$$

donde μ_i es la media poblacional del tratamiento i $(i = [1, 2, 3, 4])$.

In [2…
```
data_3.aov <- aov(conductivity ~ protection, data_3)
aov_test3 <- summary(data_3.aov)[[1]]
```

In [2…
```
display_markdown('#### **ANOVA de un sentido:**')
aov_test3 <- cbind(c('Porcentaje de algodón', 'Residuos'), aov_test3)
colnames(aov_test3)[1] <- 'Source'
rownames(aov_test3) <- c()
table <- formattable(aov_test3, align=c('l', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c'), list(`Source` = formatter("span",style
as.htmlwidget(table, width="70%", height=NULL)
```

ANOVA de un sentido:

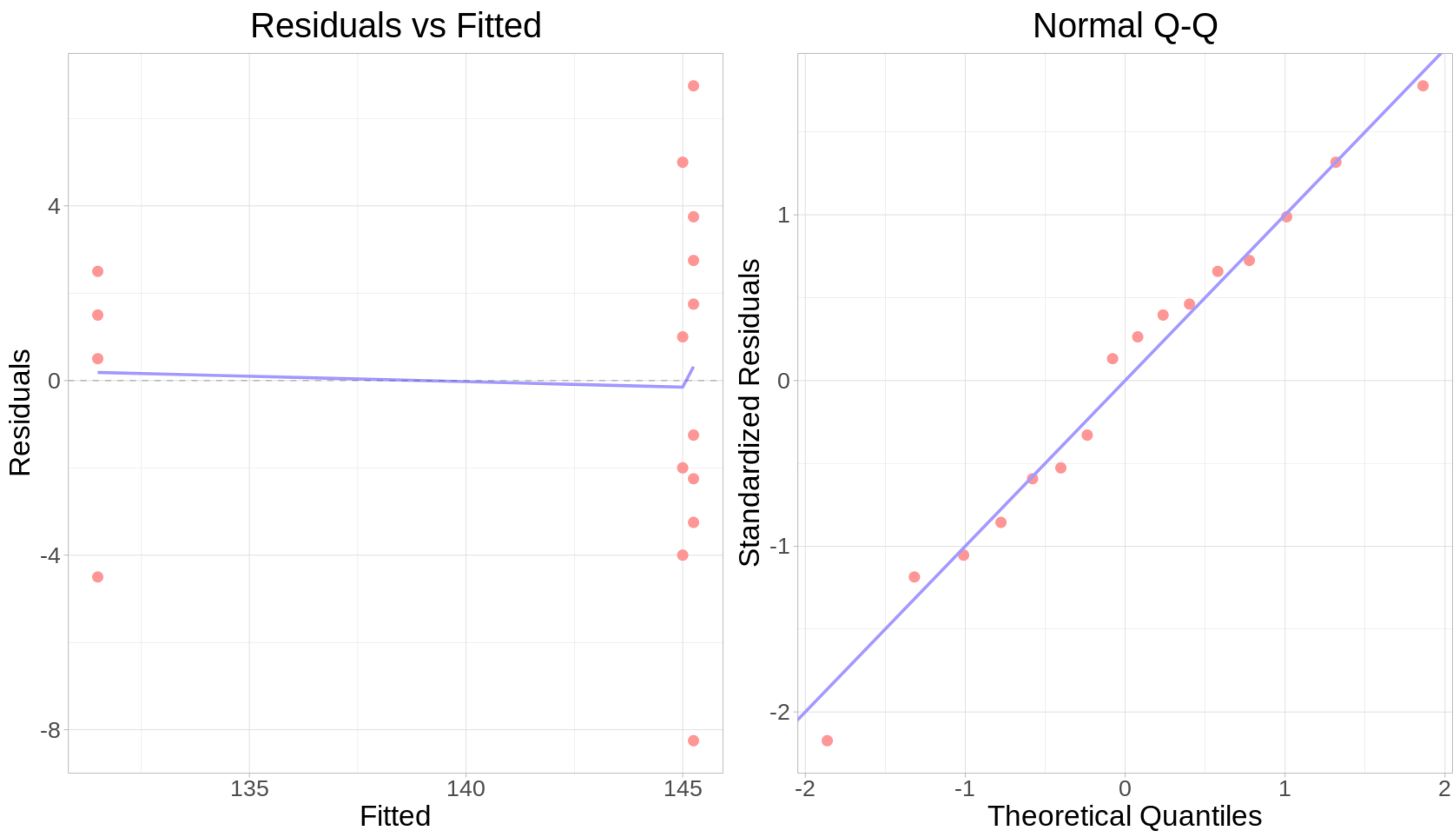
Source	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Porcentaje de algodón	3	560.5	186.83333	9.726681	0.001554877
Residuos	12	230.5	19.20833	NA	NA

El p-valor de la prueba es $0.0016 < 0.05$. Por lo tanto, hay evidencia significativa en contra de la hipótesis nula y se puede concluir que al menos dos medias difieren entre sí. Esto significa que el recubrimiento utilizado afecta la conductividad.

b) Analice los residuos de este experimento.

In [2…

```
smoothed <- data.frame(with(data_3.aov, lowess(x = data_3.aov$fitted, y = data_3.aov$residuals)))
# Gráficos
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
res_vs_fit <- ggplot(data_3.aov) +
    geom_point(aes(x=data_3.aov$fitted, y=data_3.aov$residuals), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_path(data = smoothed, aes(x = x, y = y), col="#a399ff", size=1) +
    geom_hline(linetype = 2, yintercept=0, alpha=0.2) +
    ggtitle("Residuals vs Fitted") +
    xlab("Fitted") +
    ylab("Residuals") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

qq_plot <- ggplot(data_3.aov) +
    stat_qq(aes(sample = .stdresid), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_abline(col="#a399ff", size=1) +
    xlab("Theoretical Quantiles") +
    ylab("Standardized Residuals") +
    ggtitle("Normal Q-Q") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

plot_grid(res_vs_fit, qq_plot, ncol = 2)
```



c) Construya un intervalo del 95% para la estimación de la media del recubrimiento de tipo 1. Construya in intervalo del 99% para la estimación de la diferencia de las medias entre los recubrimientos 1 y 4.

Un intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)\,\%$ para la media del tratamiento i está dado por:

$$\overline{X}_i \pm t_{N-I,\,\alpha/2}\sqrt{\frac{MSE}{J_i}}$$

In [2…

```
data_3.levels <- split(data_3 , f=data_3$protection)
sample_mean <- mean(data_3.levels[[1]]$conductivity) # media muestral para el recubrimiento tipo 1
display_markdown(sprintf('$\\overline{X}_1 = %.f$', sample_mean))
```

$\overline{X}_1 = 145$

In [2…
```r
J <- sapply(data_3.levels, nrow) # cantidad de observaciones para cada tratamiento
I <- length(data_3.levels) # cantidad de niveles
N <- sum(J) # número total de observaciones
samples <- t(sapply(data_3.levels, function(x) {x$conductivity})) # matriz con todas las observaciones
treatment_means <- sapply(data_3.levels, function(x) {
    mean(x$conductivity)
}) # media de cada tratamiento
residuals <- samples - treatment_means #residuos
SSE <- sum(residuals^2)
MSE <- SSE / (N - I)
display_markdown(sprintf('$MSE = %.4f$', MSE))
```

$MSE = 19.2083$

In [2…
```r
alpha <- 0.05
t <- qt(alpha/2, N-I, lower=FALSE) # distribución t de Student con alpha=0.05/2 y N-I grados de libertad
aux <- t * sqrt(MSE / J[1])
conf_int <- c(sample_mean - aux, sample_mean + aux) # intervalo de confianza
conf_int.df <- as.data.frame(cbind('Tratamiento 1', round(conf_int[1], 4), sample_mean, round(conf_int[2], 4)
colnames(conf_int.df) <- c(' ', '2.5%', 'Media estimada', '97.5%')
```

In [2…
```r
display_markdown('#### **Intervalo de confianza del $\\textbf{95%}$ para la estimación de la media del recubr
rownames(conf_int.df) <- c()
as.htmlwidget(formattable(conf_int.df, align='c', list(' ' = formatter("span",style = ~ style(
    'font-weight'='bold', 'text-align'='left')))), width="50%")
```

Intervalo de confianza del $\textbf{95%}$ para la estimación de la media del recubrimiento tipo 1:

	2.5%	Media estimada	97.5%
Tratamiento 1	140.2254	145	149.7746

Para contruir un intervalo de confianza para la diferencia entre las medias de dos tratamientos específicos, se utiliza el método de la diferencia significativa mínima de Fisher. El intervalo de nivel $(1-\alpha)$ para la diferencia $\mu_i - \mu_j$ es:

$$\overline{X}_i - \overline{X}_j \pm t_{N-I,\,\alpha/2}\sqrt{\frac{MSE}{J_i} + \frac{MSE}{J_j}}$$

In [2…
```r
x_bar_1 <- mean(data_3.levels[[1]]$conductivity) # media muestral para el recubrimiento tipo 1
x_bar_4 <- mean(data_3.levels[[4]]$conductivity) # media muestral para el recubrimiento tipo 4
x_bar_diff <- x_bar_1 - x_bar_4
display_markdown(sprintf('$\\overline{X}_1 - \\overline{X}_4 = %.2f$', x_bar_diff))
```

$\overline{X}_1 - \overline{X}_4 = -0.25$

In [3…
```r
alpha <- 0.01
t <- qt(alpha/2, N-I, lower=FALSE) # distribución t de Student con alpha=0.05/2 y N-I grados de libertad
aux <- t * sqrt(MSE / J[1] + MSE / J[4])
conf_int <- c(x_bar_diff - aux, x_bar_diff + aux) # intervalo de confianza
conf_int.df <- as.data.frame(cbind('μ1 - μ4', round(conf_int[1], 4), x_bar_diff, round(conf_int[2], 4)))
colnames(conf_int.df) <- c(' ', '0.5%', 'Valor estimado', '99.5%')
```

In [3…
```r
display_markdown('#### **Intervalo de confianza del $\\textbf{99%}$ para la estimación de $\\mu_1 - \\mu_4$:*
rownames(conf_int.df) <- c()
as.htmlwidget(formattable(conf_int.df, align='c', list(' ' = formatter("span",style = ~ style(
    'font-weight'='bold', 'text-align'='left')))), width="50%")
```

Intervalo de confianza del $\textbf{99%}$ para la estimación de $\mu_1 - \mu_4$:

	0.5%	Valor estimado	99.5%
μ1 - μ4	-9.7162	-0.25	9.2162

Ejercicio 4

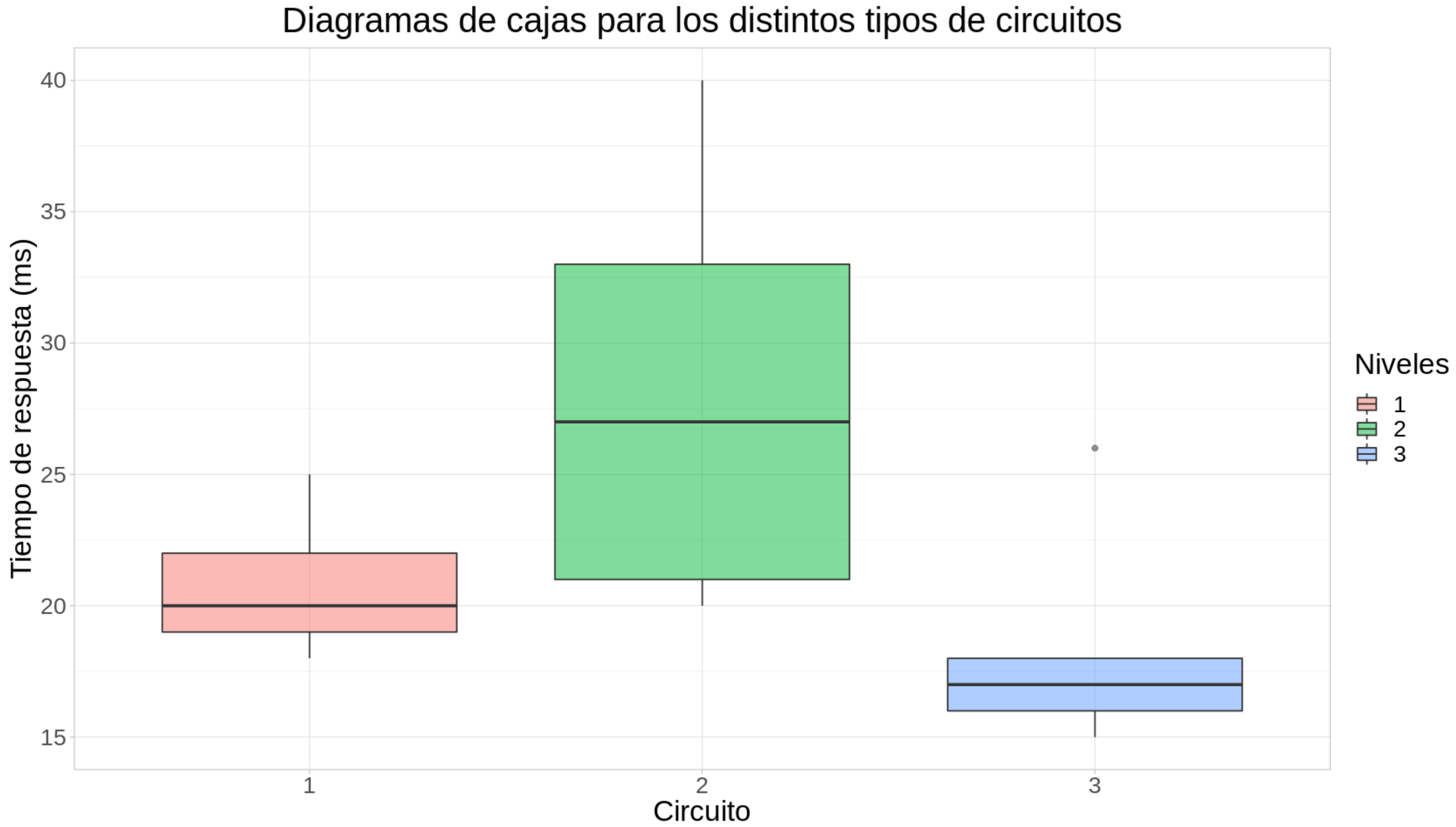
Se determina el tiempo de respuesta, en milisegundos, para tres tipos diferentes de circuitos en una calculadora electrónica. Los resultados son los siguientes:

	Tiempo de respuesta (ms)				
Tipo de circuito	1	2	3	4	5
1	19	22	20	18	25
2	20	21	33	27	40
3	16	15	18	26	17

In [3…
```
data_4 <- read.csv("./TP4_tables/data4.csv") # Leo los datos desde archivo .csv
data_4$circuit <- factor(data_4$circuit)
```

a) Utilice $\alpha = 0.01$ para probar la hipótesis de que el tiempo de respuesta de los tres circuitos es el mismo.

In [3…
```
# Plot
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_4, aes(x=circuit, y=response_time, fill=circuit)) +
    labs(
        title="Diagramas de cajas para los distintos tipos de circuitos",
        x="Circuito",
        y="Tiempo de respuesta (ms)",
        fill="Niveles") +
    geom_boxplot(alpha=0.5) +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



Un análisis visual sugiere que el tipo de ciruito utilizado afecta al tiempo de respuesta de la calculadora, y que los mejores resultados se obtienen con el circuito tipo 3. La hipótesis a probar es:

$$H_0\text{: } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad \text{contra } H_1\text{: dos o mas } \mu_i \text{ son diferentes}$$

In [3…
```
data_4.aov <- aov(response_time ~ circuit, data_4)
aov_test4 <- summary(data_4.aov)[[1]]
```

In [3…
```
display_markdown('#### **ANOVA de un sentido:**')
aov_test4 <- cbind(c('Porcentaje de algodón', 'Residuos'), aov_test4)
colnames(aov_test4)[1] <- 'Source'
rownames(aov_test4) <- c()
table <- formattable(aov_test4, align=c('l', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c'), list(`Source` = formatter("span",style
as.htmlwidget(table, width="70%", height=NULL)
```

ANOVA de un sentido:

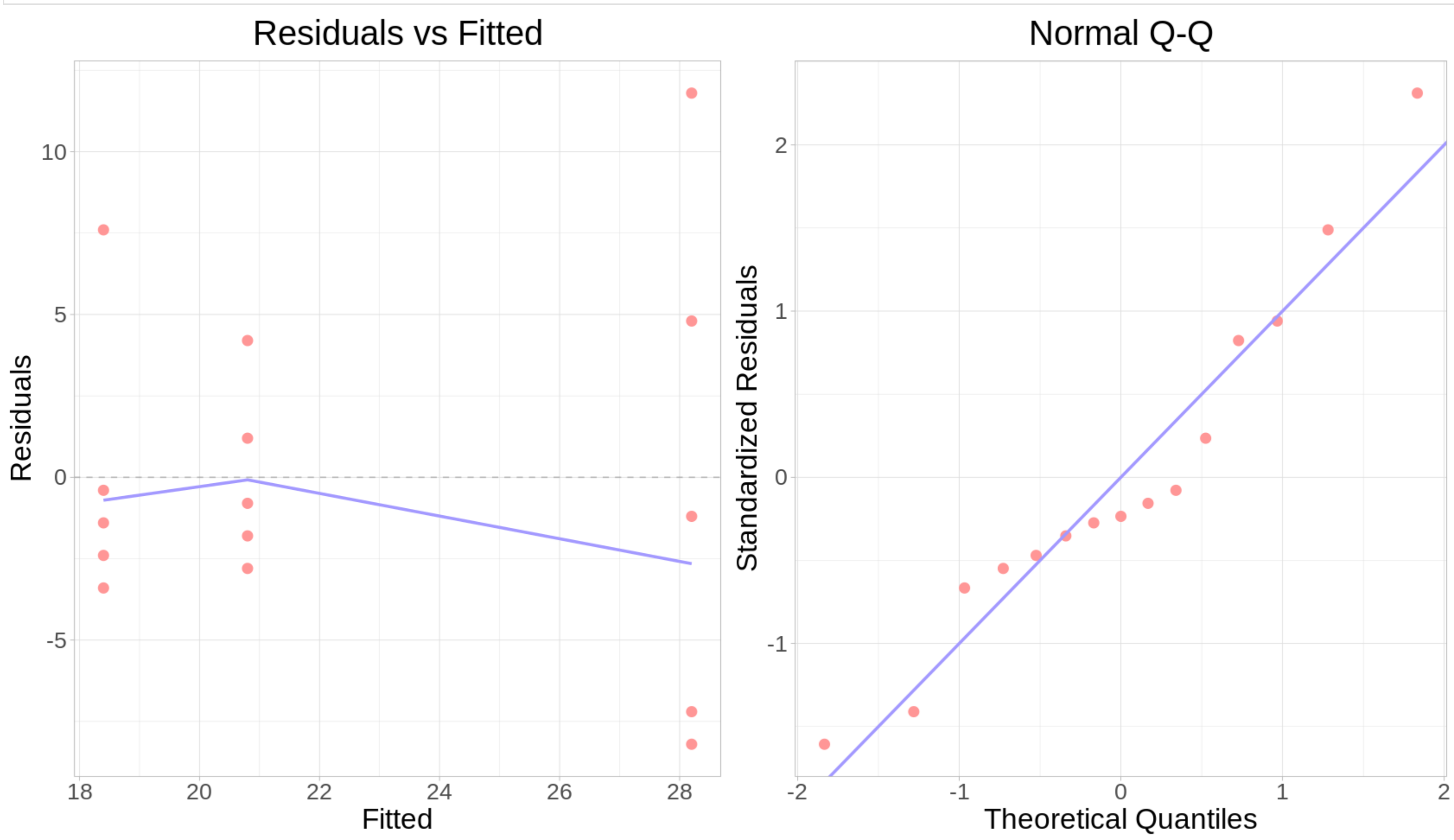
Source	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Porcentaje de algodón	2	260.9333	130.46667	4.006141	0.04648445
Residuos	12	390.8000	32.56667	NA	NA

La prueba arroja un $\text{p-valor} = 0.0465 > 0.01$. Por lo tanto, no hay evidencia suficiente en contra de la hipótesis nula y se concluye que el tipo de circuito utilizado no afecta el tiempo de respuesta de la calculadora.

b) Analice los residuos de este experimento.

In [3…

```
smoothed <- data.frame(with(data_4.aov, lowess(x = data_4.aov$fitted, y = data_4.aov$residuals)))
# Gráficos
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
res_vs_fit <- ggplot(data_4.aov) +
    geom_point(aes(x=data_4.aov$fitted, y=data_4.aov$residuals), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_path(data = smoothed, aes(x = x, y = y), col="#a399ff", size=1) +
    geom_hline(linetype = 2, yintercept=0, alpha=0.2) +
    ggtitle("Residuals vs Fitted") +
    xlab("Fitted") +
    ylab("Residuals") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

qq_plot <- ggplot(data_4.aov) +
    stat_qq(aes(sample = .stdresid), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_abline(col="#a399ff", size=1) +
    xlab("Theoretical Quantiles") +
    ylab("Standardized Residuals") +
    ggtitle("Normal Q-Q") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

plot_grid(res_vs_fit, qq_plot, ncol = 2)
```



La distribución de los residuos comprende .

Un intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)\,\%$ para la media del tratamiento i está dado por:

$$\overline{X}_i \pm t_{N-I,\,\alpha/2}\sqrt{\frac{MSE}{J_i}}$$

c) Encuentre un intervalo de confianza del 95% para el tiempo de respuesta del tercer circuito.

In [3…

```
data_4.levels <- split(data_4 , f=data_4$circuit)
x_bar_3 <- mean(data_4.levels[[3]]$response_time) # media muestral para el recubrimiento tipo 4
display_markdown(sprintf('$\\overline{X}_3 = %.2f$', x_bar_3))
```

$\overline{X}_3 = 18.40$

In [3…
```
J <- sapply(data_4.levels, nrow) # cantidad de observaciones para cada tratamiento
I <- length(data_4.levels) # cantidad de niveles
N <- sum(J) # número total de observaciones
samples <- t(sapply(data_4.levels, function(x) {x$response_time})) # matriz con todas las observaciones
treatment_means <- sapply(data_4.levels, function(x) {
    mean(x$response_time)
}) # media de cada tratamiento
residuals <- samples - treatment_means #residuos
SSE <- sum(residuals^2)
MSE <- SSE / (N - I)
display_markdown(sprintf('$MSE = %.4f$', MSE))
```

$MSE = 32.5667$

In [3…
```
alpha <- 0.05
t <- qt(alpha/2, N-I, lower=FALSE) # distribución t de Student con alpha=0.05/2 y N-I grados de libertad
aux <- t * sqrt(MSE / J[1])
conf_int <- c(x_bar_3 - aux, x_bar_3 + aux) # intervalo de confianza
conf_int.df <- as.data.frame(cbind('Tratamiento 3', round(conf_int[1], 4), sample_mean, round(conf_int[2], 4)
colnames(conf_int.df) <- c(' ', '2.5%', 'Media estimada', '97.5%')
```

In [4…
```
display_markdown('#### **Intervalo de confianza del $\\textbf{95%}$ para el tiempo de respuesta del tercer ci
rownames(conf_int.df) <- c()
as.htmlwidget(formattable(conf_int.df, align='c', list(' ' = formatter("span",style = ~ style(
    'font-weight'='bold', 'text-align'='left')))), width="50%")
```

Intervalo de confianza del $\textbf{95\%}$ para el tiempo de respuesta del tercer cicuito:

	2.5%	Media estimada	97.5%
Tratamiento 3	12.8394	145	23.9606

Ejercicio 5

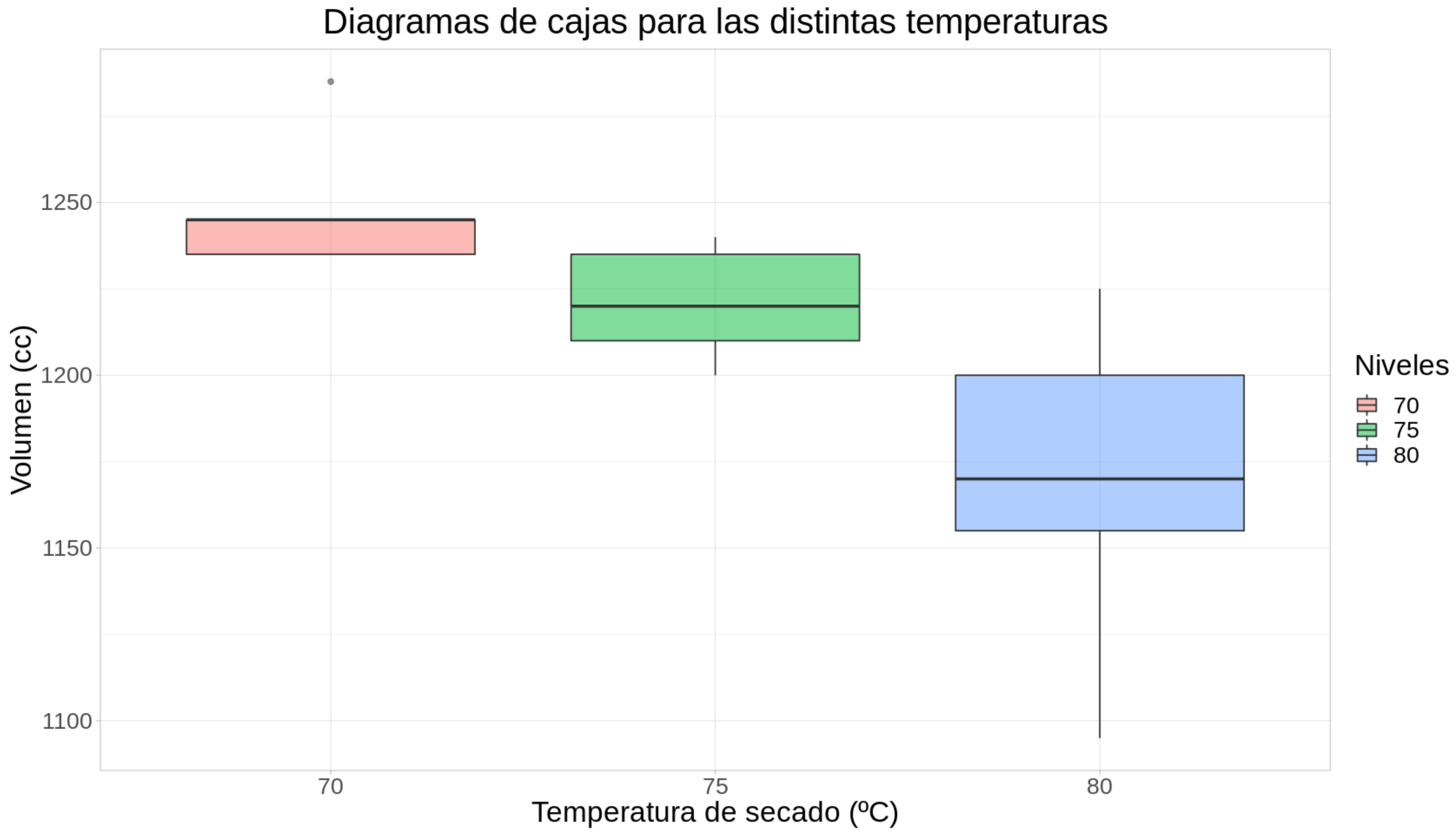
Para investigar el efecto de la temperatura de secado del grano de trigo sobre la calidad del horneado del pan se realiza un experimento en donde se emplean tres niveles de temperatura, y la variable de respuesta medida es el volumen de la hogaza de pan producida. Los datos son los siguientes:

Temperatura (ºC)	Volumen (cc)				
70.0	1245	1235	1285	1245	1235
75.0	1235	1240	1200	1220	1210
80.0	1225	1200	1170	1155	1095

In [4…
```
data_5 <- read.csv("./TP4_tables/data5.csv") # Leo los datos desde archivo .csv
data_5$temperature <- factor(data_5$temperature)
```

a) ¿La temperatura de secado afecta el volumen promedio del pan? Utilice $\alpha = 0.01$.

In [4…
```
# Plot
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_5, aes(x=temperature, y=volume, fill=temperature)) +
    labs(
        title="Diagramas de cajas para las distintas temperaturas",
        x="Temperatura de secado (ºC)",
        y="Volumen (cc)",
        fill="Niveles") +
    geom_boxplot(alpha=0.5) +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



Los gráficos de cajas sugieren que la temperatura de secado afecta el volumen del pan. Las hipótesis de la prueba son:

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad \text{contra } H_1\text{: dos o mas } \mu_i \text{ son diferentes}$$

In [4…

```
data_5.levels <- split(data_5 , f=data_5$temperature)
model_5 <- lm(volume ~ temperature, data_5)
```

In [4…

```
# Cálculo de MSTr
J <- sapply(data_5.levels, nrow) # cantidad de observaciones para cada tratamiento
I <- length(data_5.levels) # cantidad de niveles
SSTr <- sum((predict(model_5) - mean(data_5$volume))^2)
MSTr <- SSTr / (I - 1)
display_markdown(sprintf('$MSTr = %.2f$', MSTr))
```

$MSTr = 8240.00$

In [4…

```
# Cálculo de MSE
N <- sum(J) # cantidad total de observaciones
SSE <- sum(model_5$residuals^2)
MSE <- SSE / (N - I)
display_markdown(sprintf('$MSE = %.2f$', MSE))
```

$MSE = 1050.83$

In [4…

```
F <- MSTr / MSE
display_markdown(sprintf('$F = %.4f$', F))
```

$F = 7.8414$

In [4…

```
alpha <- 0.01
f_alpha <- qf(alpha, df1=I-1, df2=N-I, lower=FALSE)
display_markdown(sprintf('$f_{\\alpha=%.3f,\\: %.f,\\: %.f} = %.4f$', alpha, I-1, N-I, f_alpha))
```

$f_{\alpha=0.010,\: 2,\: 12} = 6.9266$

El valor del estadístico es $F = 7.8414 > 6.9266$. Por lo tanto, hay evidencia significativa en contra de la hipótesis nula y se concluye que la temperatura de secado del grano de trigo tiene un efecto sobre el volumen de la hogaza de pan.

b) Encuentre el p-valor de esta prueba.

In [4…

```
p_value <- pf(F, df1=I-1, df2=N-I, lower=FALSE)
display_markdown(sprintf('$\\text{p-valor} = %.4f$', p_value))
```

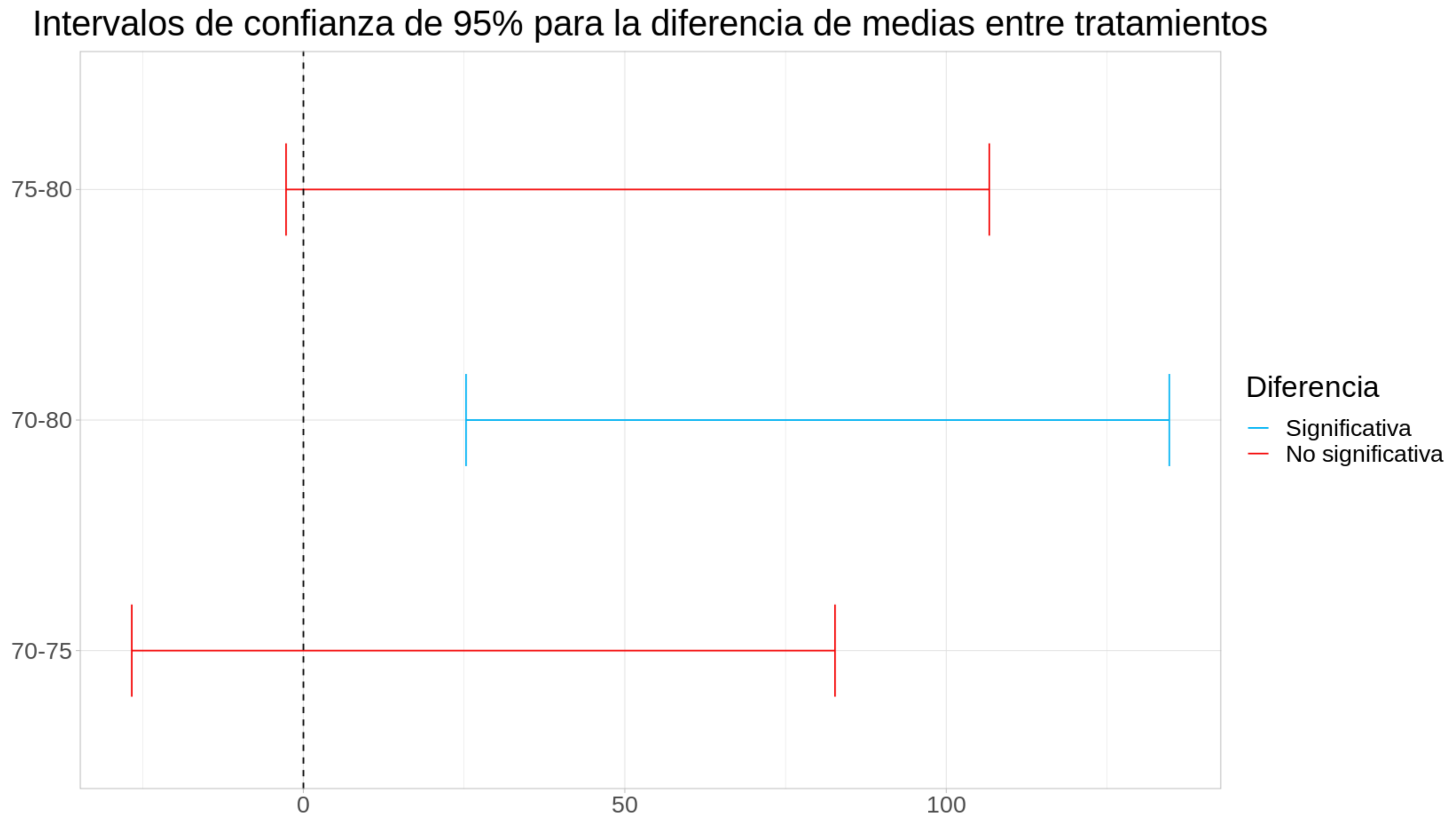
$\text{p-valor} = 0.0066$

Como el $\text{p-valor} = 0.0066 > 0.01$, se llega a la misma conclusión que en el inciso anterior.

c) Use el método de Tukey para identificar qué medias son diferentes.

In [4…
```
data_5.aov <- aov(volume ~ temperature, data_5)
data_5.tukey <- as.data.frame(TukeyHSD(data_5.aov, ordered = TRUE, conf.level = 0.95)[1]$temperature)
```

In [5…
```
data_5.tukey$names <- c(rownames(data_5.tukey))
# Gráfico de los intervalos de confianza
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_5.tukey, aes(names, diff)) +
    labs(
        title="Intervalos de confianza de 95% para la diferencia de medias entre tratamientos",
        x="",
        y="",
        col="Diferencia") +
    geom_errorbar(aes(ymin=lwr, ymax=upr, col=ifelse(lwr*upr > 0,'1','2')), width = 0.4, alpha=1) +
    scale_color_manual(values=c('#05b5f5','#f50505'), labels=c('Significativa','No significativa'), breaks=c(
    geom_hline(yintercept=0, linetype="dashed", col="black") +
    theme_light() +
    coord_flip(expand = TRUE) +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```

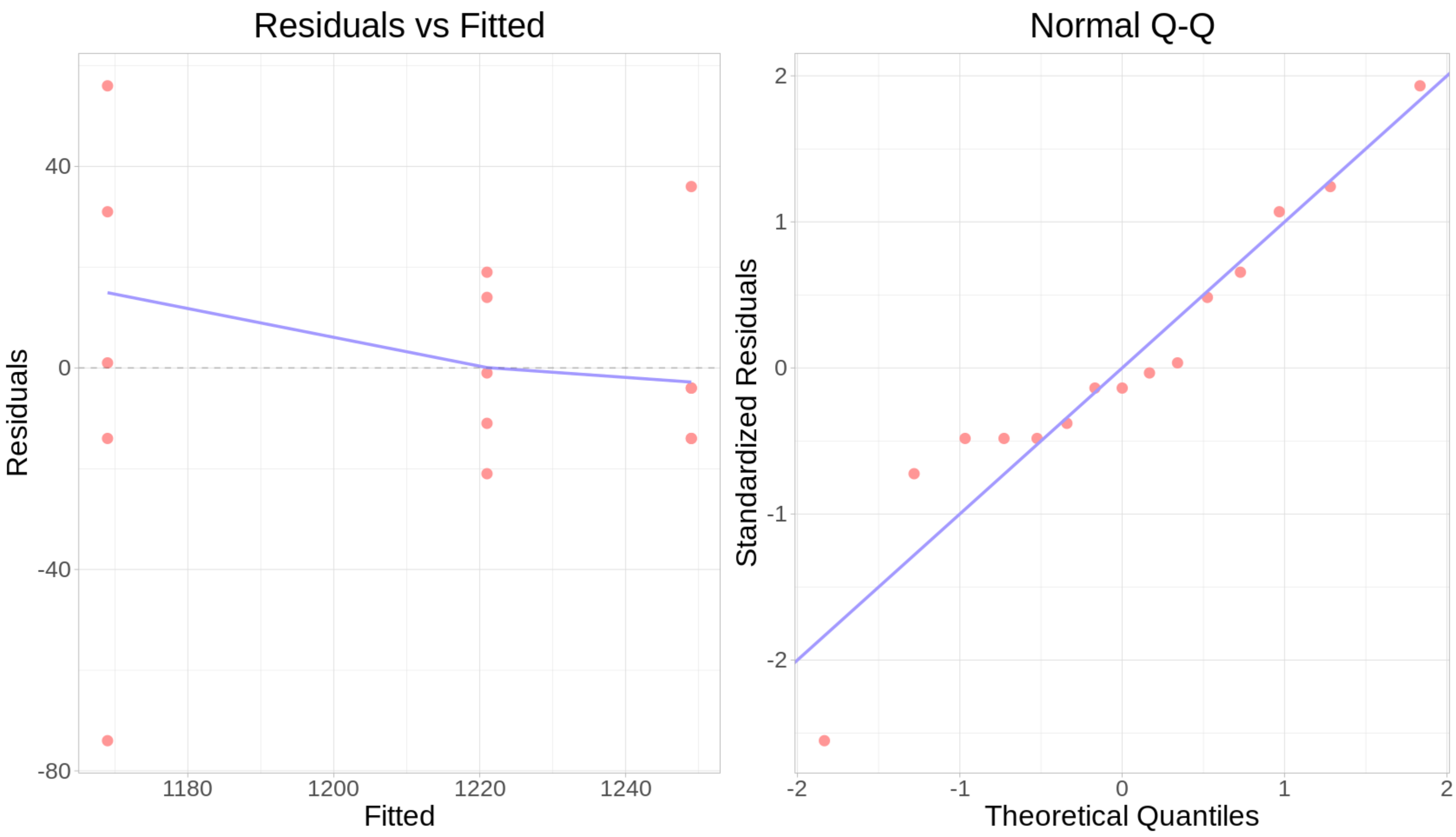


El gráfico anterior indica que existe una diferencia entre las medias de los tratamientos correspondientes a las temperaturas $70^{\underline{o}}C$ y $80^{\underline{o}}C$.

d) Analice los residuos de este experimento y haga un comentario sobre la adecuación del modelo.

In [5…

```
smoothed <- data.frame(with(data_5.aov, lowess(x = data_5.aov$fitted, y = data_5.aov$residuals)))
# Gráficos
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
res_vs_fit <- ggplot(data_5.aov) +
    geom_point(aes(x=data_5.aov$fitted, y=data_5.aov$residuals), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_path(data = smoothed, aes(x = x, y = y), col="#a399ff", size=1) +
    geom_hline(linetype = 2, yintercept=0, alpha=0.2) +
    ggtitle("Residuals vs Fitted") +
    xlab("Fitted") +
    ylab("Residuals") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

qq_plot <- ggplot(data_5.aov) +
    stat_qq(aes(sample = .stdresid), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_abline(col="#a399ff", size=1) +
    xlab("Theoretical Quantiles") +
    ylab("Standardized Residuals") +
    ggtitle("Normal Q-Q") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

plot_grid(res_vs_fit, qq_plot, ncol = 2)
```



In [5…

```
## TODO analizar los graficos de arriba
```

Ejercicio 6

Se realiza un experimento para determinar el efecto que tienen cuatro tipos diferentes de puntas de un probador de dureza sobre los valores de dureza observados de una aleación. Para ello se obtienen cuatro especímenes de aleación, y se prueba cada punta sobre cada uno de ellos. Los datos obtenidos son los siguientes:

Tipo de punta	**Espécimen**			
	1	**2**	**3**	**4**
1	9.3	9.4	9.6	10.0
2	9.4	9.3	9.8	9.9
3	9.2	9.4	9.5	9.7
4	9.7	9.6	10.0	10.2

In [5…

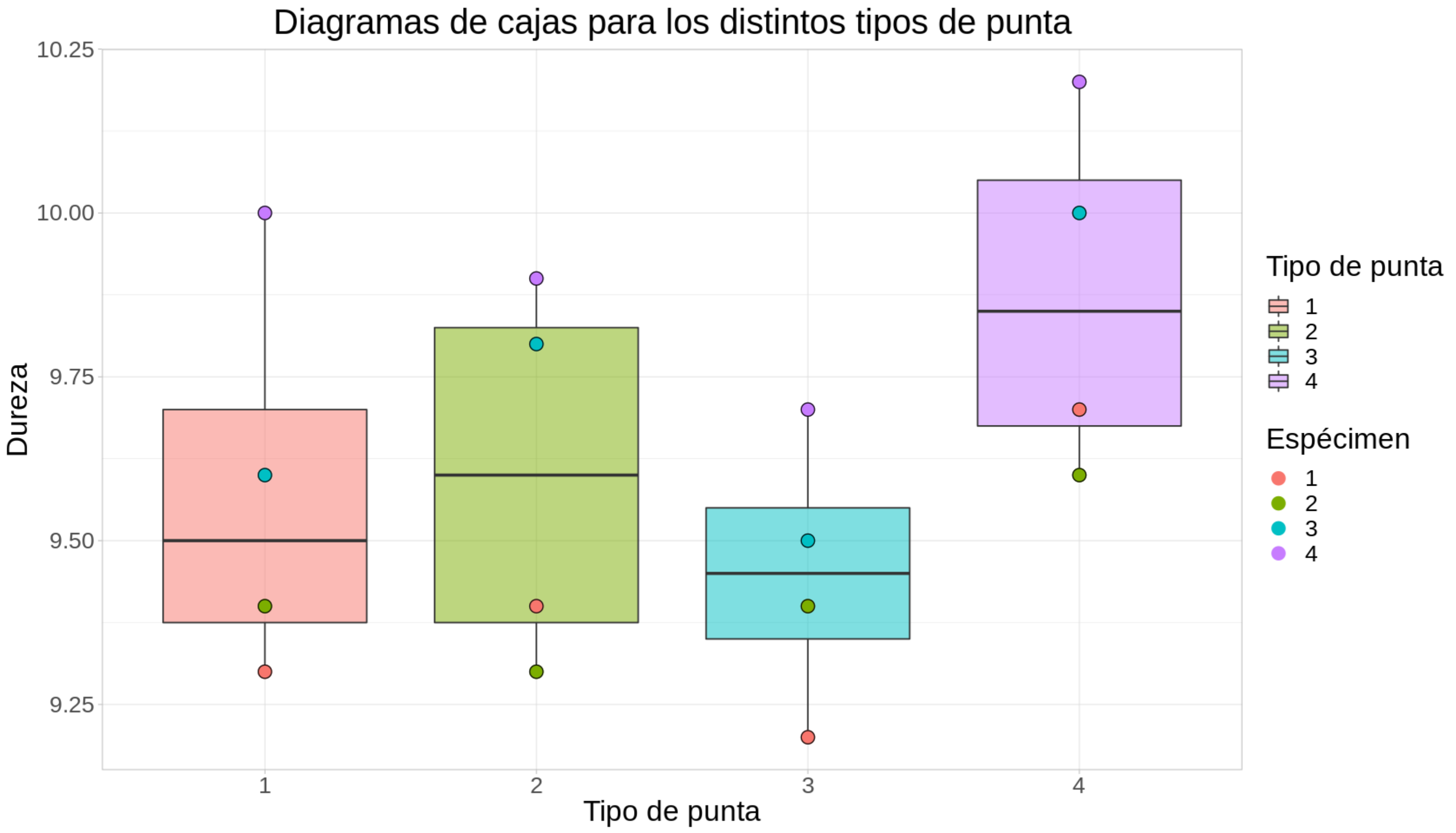
```
data_6 <- read.csv("./TP4_tables/data6.csv") # Leo los datos desde archivo .csv
data_6$indenter <- factor(data_6$indenter)
data_6$specimen <- factor(data_6$specimen)
```

a) ¿La temperatura de secado afecta el volumen promedio del pan? Utilice $\alpha = 0.01$.

Este experimento implica un diseño de bloques, donde el tipo de punta utilizada es el factor de interés y el espécimen sobre el cual se realiza la prueba es el factor bloqueado.

In [5…

```
# Plot
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_6, aes(x=indenter, y=hardness, fill=indenter)) +
    labs(
        title="Diagramas de cajas para los distintos tipos de punta",
        x="Tipo de punta",
        y="Dureza",
        fill="Tipo de punta",
        col="Espécimen") +
    geom_boxplot(alpha=0.5, aes(fill=indenter)) +
    geom_point(aes(col=specimen), size=4) +
    geom_point(size=4, shape=1) +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5)) +
    guides(fill = guide_legend(override.aes = list(shape = NA), order = 1))
```



Los gráficos de cajas sugieren que el tipo de punta utilizado podría no afectar significativamente a la lectura de dureza del espécimen. Las hipótesis de la prueba son:

$$H_0 \colon \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad \text{contra } H_1 \colon \text{dos o mas } \mu_i \text{ son diferentes}$$

In [5…

```
data_6.aov <- aov(hardness ~ indenter + specimen, data_6)
aov_test6 <- summary(data_6.aov)[[1]]
```

In [5…

```
display_markdown('#### **ANOVA de dos sentidos: Dureza vs Tipo de punta + Espécimen**')
display_markdown('\n')
aov_test6 <- cbind(c('Tipo de punta', 'Espécimen', 'Residuos'), aov_test6)
colnames(aov_test6)[1] <- 'Source'
rownames(aov_test6) <- c()
table <- formattable(aov_test6, align=c('l', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c'), list(`Source` = formatter("span",style
as.htmlwidget(table, width="70%", height=NULL)
```

ANOVA de dos sentidos: Dureza vs Tipo de punta + Espécimen

Source	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Tipo de punta	3	0.385	0.128333333	14.4375	0.0008712721
Espécimen	3	0.825	0.275000000	30.9375	0.0000452327
Residuos	9	0.080	0.008888889	NA	NA

El p-valor para el factor ***Tipo de punta*** es $0.0009 < 0.01$. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que el tipo de punta utilizada afecta al valor obtenido en la prueba de dureza.

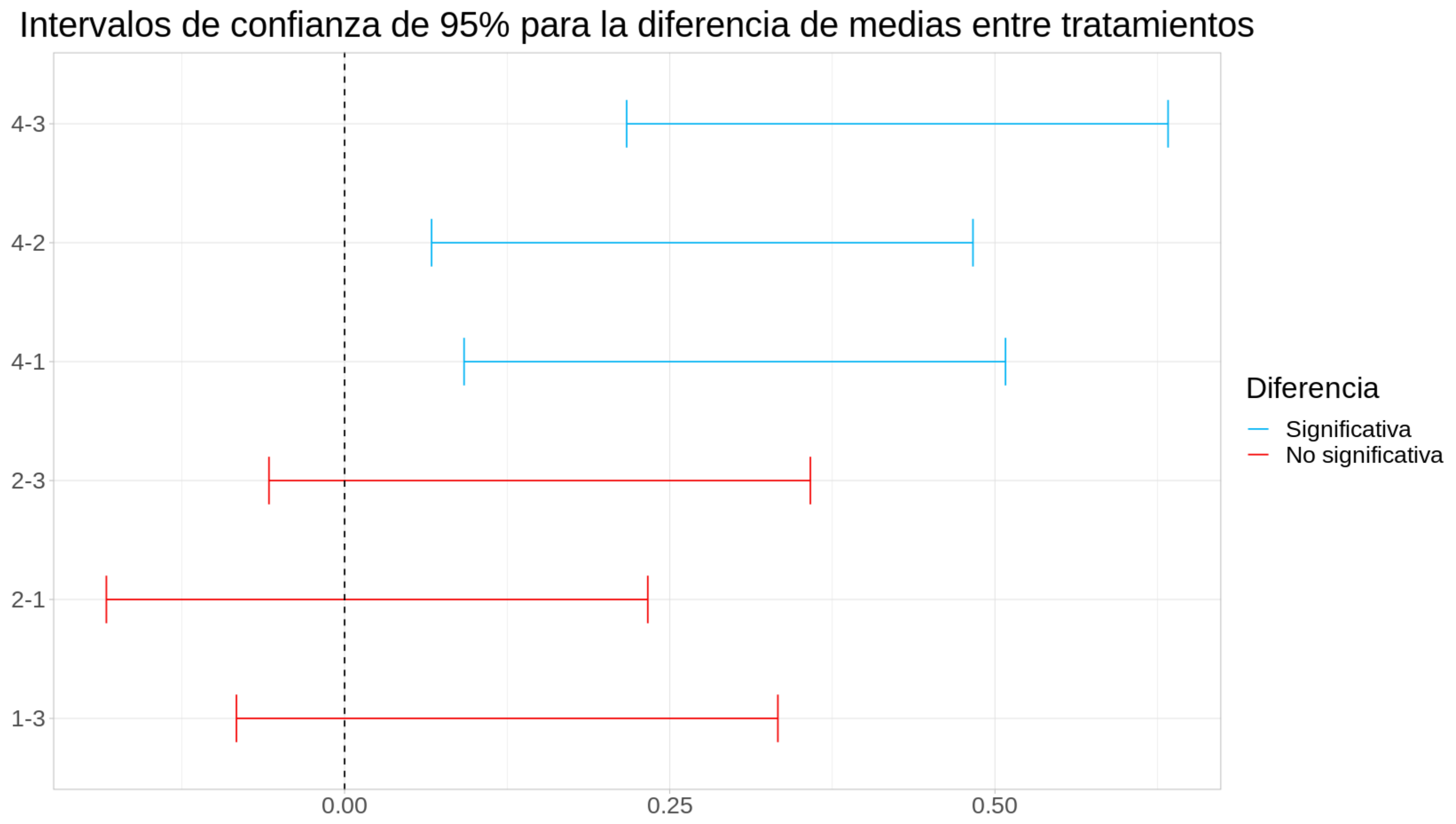
b) Use el método de Tukey para identificar diferencias específicas entre las puntas. Analice los residuos de este experimento.

In [5…

```
data_6.tukey <- as.data.frame(TukeyHSD(data_6.aov, ordered = TRUE, conf.level = 0.95)[1]$indenter)
```

In [5…

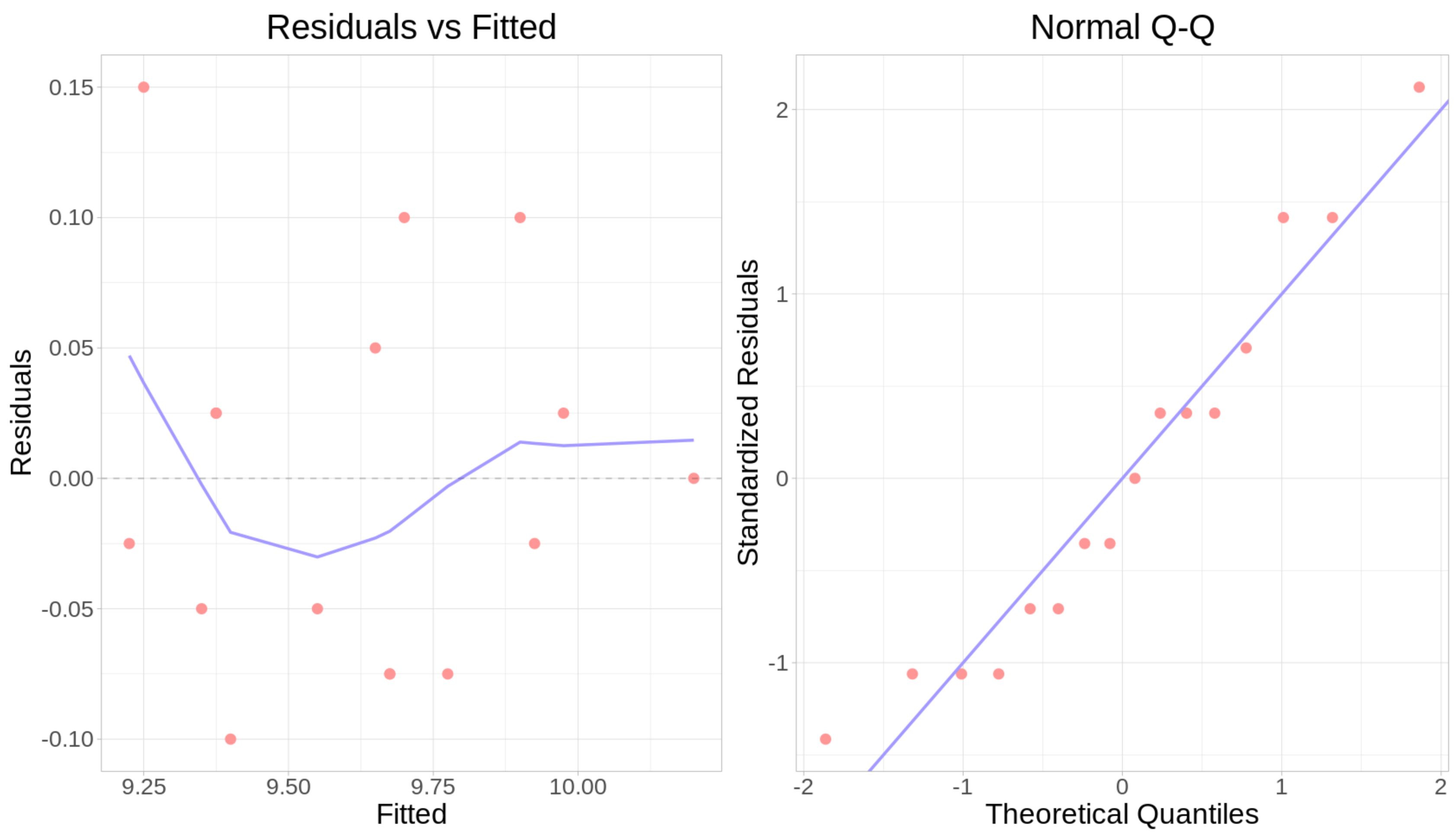
```
data_6.tukey$names <- c(rownames(data_6.tukey))
# Gráfico de los intervalos de confianza
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_6.tukey, aes(names, diff)) +
    labs(
        title="Intervalos de confianza de 95% para la diferencia de medias entre tratamientos",
        x="",
        y="",
        col="Diferencia") +
    geom_errorbar(aes(ymin=lwr, ymax=upr, col=ifelse(lwr*upr > 0,'1','2')), width = 0.4, alpha=1) +
    scale_color_manual(values=c('#05b5f5','#f50505'), labels=c('Significativa','No significativa'), breaks=c(
    geom_hline(yintercept=0, linetype="dashed", col="black") +
    theme_light() +
    coord_flip(expand = TRUE) +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



Los intervalos de confianza obtenidos indican que la punta tipo 4 difiere del resto de las puntas.

In [5…

```
smoothed <- data.frame(with(data_6.aov, lowess(x = data_6.aov$fitted, y = data_6.aov$residuals)))
# Gráficos
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
res_vs_fit <- ggplot(data_6.aov) +
    geom_point(aes(x=data_6.aov$fitted, y=data_6.aov$residuals), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_path(data = smoothed, aes(x = x, y = y), col="#a399ff", size=1) +
    geom_hline(linetype = 2, yintercept=0, alpha=0.2) +
    ggtitle("Residuals vs Fitted") +
    xlab("Fitted") +
    ylab("Residuals") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

qq_plot <- ggplot(data_6.aov) +
    stat_qq(aes(sample = .stdresid), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_abline(col="#a399ff", size=1) +
    xlab("Theoretical Quantiles") +
    ylab("Standardized Residuals") +
    ggtitle("Normal Q-Q") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

plot_grid(res_vs_fit, qq_plot, ncol = 2)
```



In [6…
```
## TODO analizar los graficos de arriba
```

Ejercicio 7

Se estudian diferentes algoritmos para estimar los costos de desarrollo de software. Para esto se aplican seis algoritmos a ocho proyectos de desarrollo de software y se observa el porcentaje de error al estimar los costos de desarrollo. Los datos son los siguientes:

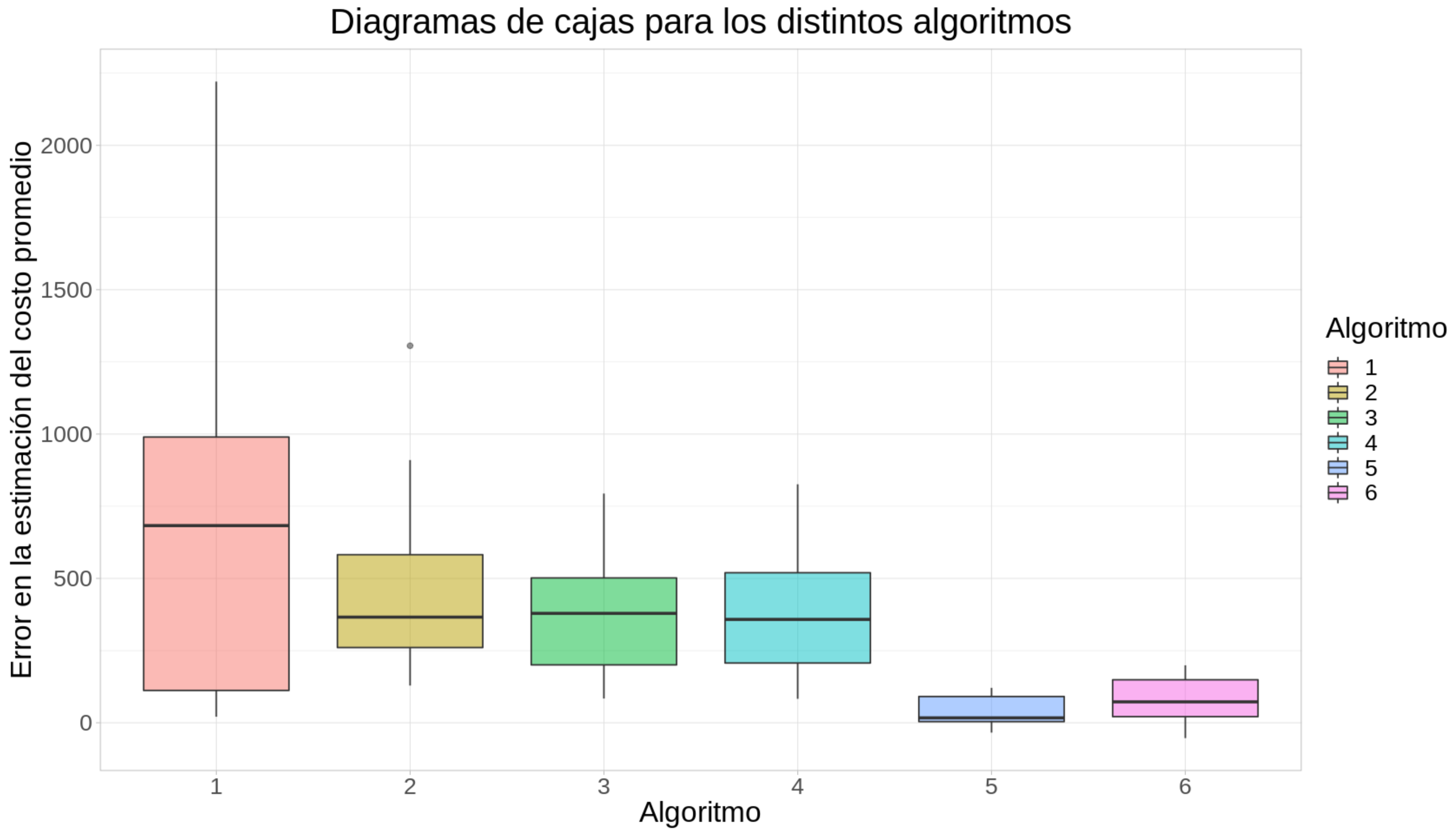
Algoritmo	Proyecto							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1244	21	82	2221	905	839	527	122
2	281	129	396	1306	336	910	473	199
3	220	84	458	543	300	794	488	142
4	225	83	425	552	291	826	509	153
5	19	11	-34	121	15	103	87	-17
6	-20	35	-53	170	104	199	142	41

In [6…
```
data_7 <- read.csv("./TP4_tables/data7.csv") # Leo los datos desde archivo .csv
data_7$algorithm <- factor(data_7$algorithm)
data_7$project <- factor(data_7$project)
```

a) ¿Existe alguna diferencia entre los algoritmos en cuanto a la exactitud de la estimación del costo promedio? Utilice $\alpha = 0.05$.

Este experimento requiere un diseño de bloques, donde el algoritmo utilizado es el factor de interés y el proyecto sobre el cual se aplica es el factor bloqueado.

In [6…
```
# Plot
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_7, aes(x=algorithm, y=estimation_error, fill=algorithm)) +
    labs(
        title="Diagramas de cajas para los distintos algoritmos",
        x="Algoritmo",
        y="Error en la estimación del costo promedio",
        fill="Algoritmo",
        col="Proyecto") +
    geom_boxplot(alpha=0.5, aes(fill=algorithm)) +
    #geom_point(aes(col=project), size=4, alpha=0.5) +
    #geom_point(shape=1, size=4) +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5)) +
    guides(fill = guide_legend(override.aes = list(shape = NA), order = 1))
```



Los gráficos de cajas sugieren que la exactitud de la estimación obtenida con los algoritmos 5 y 6 podría diferir de la del resto de los algoritmos. Las hipótesis de la prueba son:

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6, \quad \text{contra } H_1\colon \text{dos o mas } \mu_i \text{ son diferentes}$$

In [6…
```
data_7.aov <- aov(estimation_error ~ algorithm + project, data_7)
aov_test7 <- summary(data_7.aov)[[1]]
```

In [6…
```
display_markdown('#### **ANOVA de dos sentidos: Error de estimación vs Algoritmo + Proyecto**')
display_markdown('\n')
aov_test7 <- cbind(c('Algoritmo', 'Proyecto', 'Residuos'), aov_test7)
colnames(aov_test7)[1] <- 'Source'
rownames(aov_test7) <- c()
table <- formattable(aov_test7, align=c('l', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c'), list(`Source` = formatter("span",style
as.htmlwidget(table, width="70%", height=NULL)
```

ANOVA de dos sentidos: Error de estimación vs Algoritmo + Proyecto

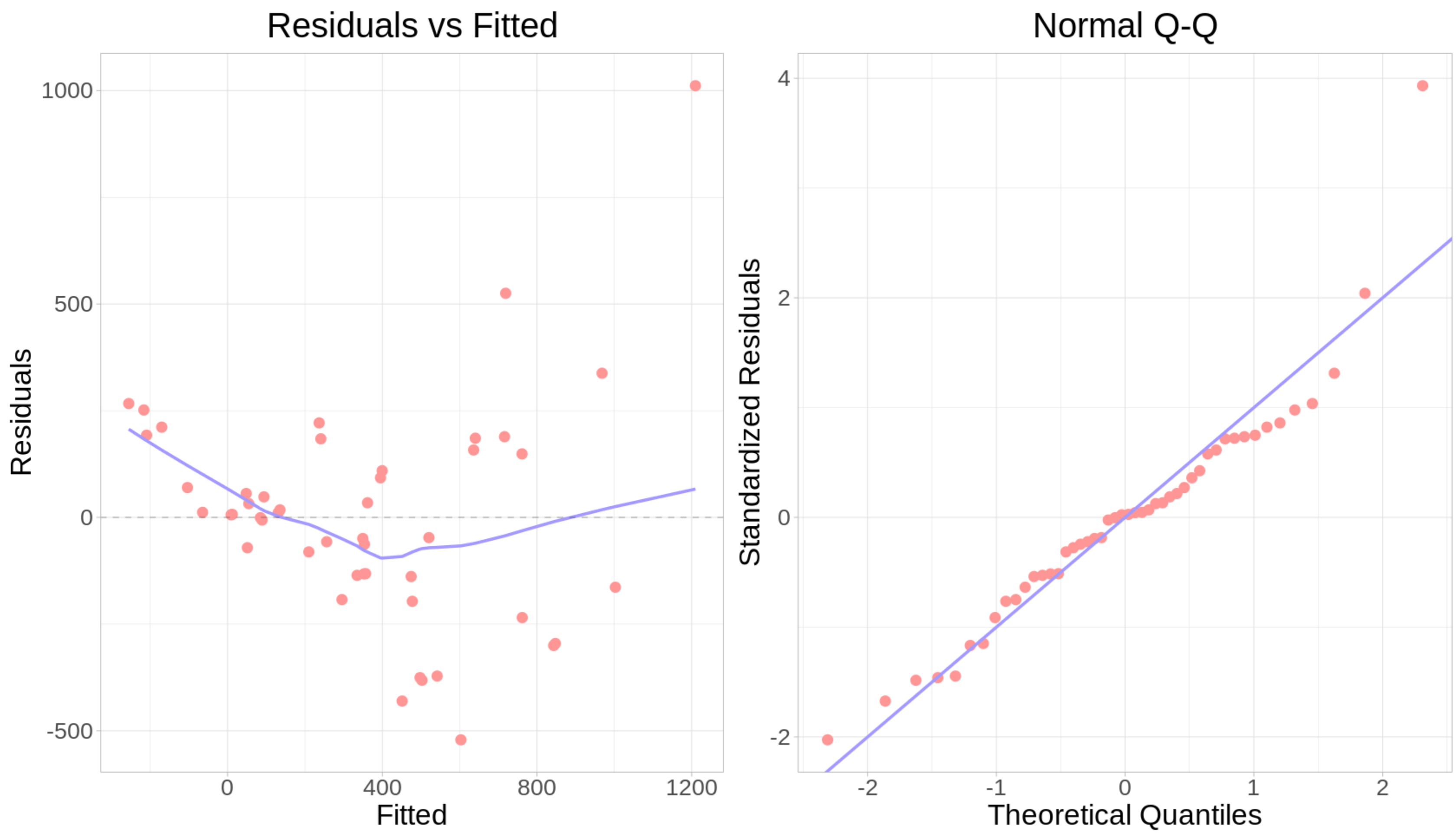
Source	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Algoritmo	5	2825746	565149.14	6.229422	0.0003135205
Proyecto	7	2710323	387188.97	4.267835	0.0016829800
Residuos	35	3175290	90722.57	NA	NA

El p-valor para el factor ***Algoritmo*** es $0.0003 < 0.05$. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que el algoritmo aplicado afecta al error de estimación del costo de desarrollo.

b) Analice los residuos de este experimento.

In [6…

```
smoothed <- data.frame(with(data_7.aov, lowess(x = data_7.aov$fitted, y = data_7.aov$residuals)))
# Gráficos
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
res_vs_fit <- ggplot(data_7.aov) +
    geom_point(aes(x=data_7.aov$fitted, y=data_7.aov$residuals), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_path(data = smoothed, aes(x = x, y = y), col="#a399ff", size=1) +
    geom_hline(linetype = 2, yintercept=0, alpha=0.2) +
    ggtitle("Residuals vs Fitted") +
    xlab("Fitted") +
    ylab("Residuals") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

qq_plot <- ggplot(data_7.aov) +
    stat_qq(aes(sample = .stdresid), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_abline(col="#a399ff", size=1) +
    xlab("Theoretical Quantiles") +
    ylab("Standardized Residuals") +
    ggtitle("Normal Q-Q") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

plot_grid(res_vs_fit, qq_plot, ncol = 2)
```



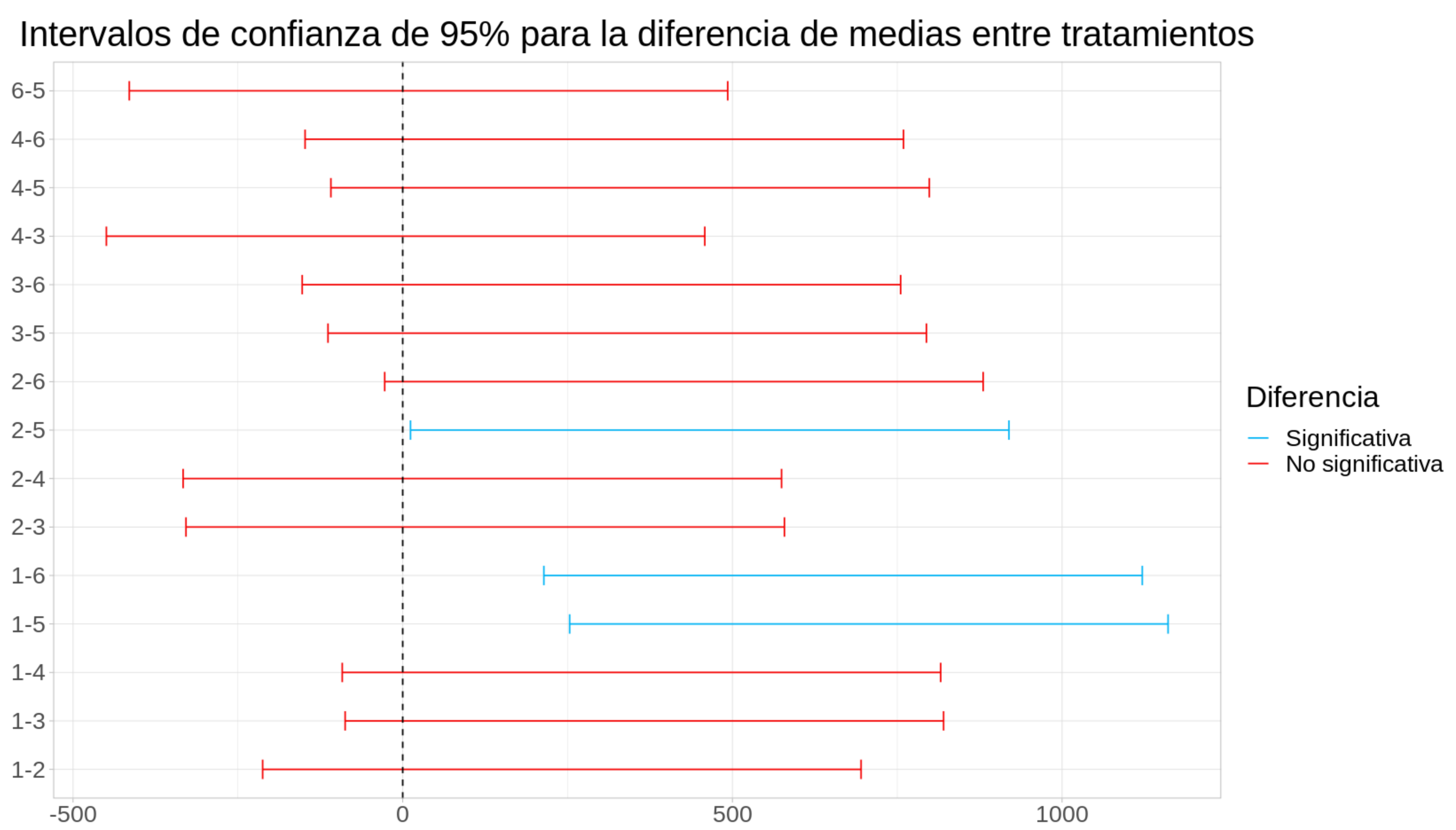
c) ¿Qué algoritmo recomendaría para usarlo en la práctica?

In [6…

```
data_7.tukey <- as.data.frame(TukeyHSD(data_7.aov, ordered = TRUE, conf.level = 0.95)[1]$algorithm)
```

In [6…

```
data_7.tukey$names <- c(rownames(data_7.tukey))
# Gráfico de los intervalos de confianza
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_7.tukey, aes(names, diff)) +
    labs(
        title="Intervalos de confianza de 95% para la diferencia de medias entre tratamientos",
        x="",
        y="",
        col="Diferencia") +
    geom_errorbar(aes(ymin=lwr, ymax=upr, col=ifelse(lwr*upr > 0,'1','2')), width = 0.4, alpha=1) +
    scale_color_manual(values=c('#05b5f5','#f50505'), labels=c('Significativa','No significativa'), breaks=c(
    geom_hline(yintercept=0, linetype="dashed", col="black") +
    theme_light() +
    coord_flip(expand = TRUE) +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



Una forma de determinar con cuáles de los algoritmos se obtienen mejores resultados es plantear la hipótesis:

$$H_0\colon \mu_i = 0 \quad \text{contra} \quad H_1\colon \mu_i \neq 0$$

donde $i = 1, \ldots, 6$. Para ello se construyen intervalos de confianza con $\alpha = 0.05$ para las medias de cada tratamiento y se observa cuales contienen al cero. Un intervalo que incluye al cero implica que no se puede afirmar (con un nivel de significancia α) que existe un error en la estimación de los costos de desarrrollo.

In [6…
```
data_7.levels <- split(data_7 , f=data_7$algorithm)
x_bar <- sapply(data_7.levels, function(x) {
    mean(x$estimation_error)
}) # media de cada tratamiento
```

In [6…
```
# Cálculo de MSE
model_7 <- lm(estimation_error ~ algorithm + project, data_7)
J <- sapply(data_7.levels, nrow) # cantidad de observaciones para cada tratamiento
I <- length(data_7.levels) # cantidad de niveles
N <- sum(J) # cantidad total de observaciones
SSE <- sum(model_7$residuals^2)
MSE <- SSE / (N - I)
display_markdown(sprintf('$MSE = %.2f$', MSE))
```

$MSE = 75602.14$

In [7…
```
alpha <- 0.05
t <- qt(alpha/2, N-I, lower=FALSE) # distribución t de Student con alpha=0.05/2 y N-I grados de libertad
aux <- t * sqrt(MSE / J)
conf_int <- matrix(c(x_bar - aux, x_bar + aux), ncol=2, byrow=FALSE) # intervalos de confianza
```

In [7…
```
conf_int.df <- as.data.frame(data.frame(paste("Algoritmo", 1:6, sep=" "), conf_int[,1], x_bar, conf_int[,2]))
colnames(conf_int.df) = c(" ", "2.5%", "Media estimada", "97.5%")
contains_zero <- conf_int.df[,"2.5%"] * conf_int.df[,"97.5%"] <= 0 # TRUE si el intervalo contiene al cero
conf_int.df <- cbind(conf_int.df, contains_zero)
colnames(conf_int.df)[5] <- "Contiene al 0"
```

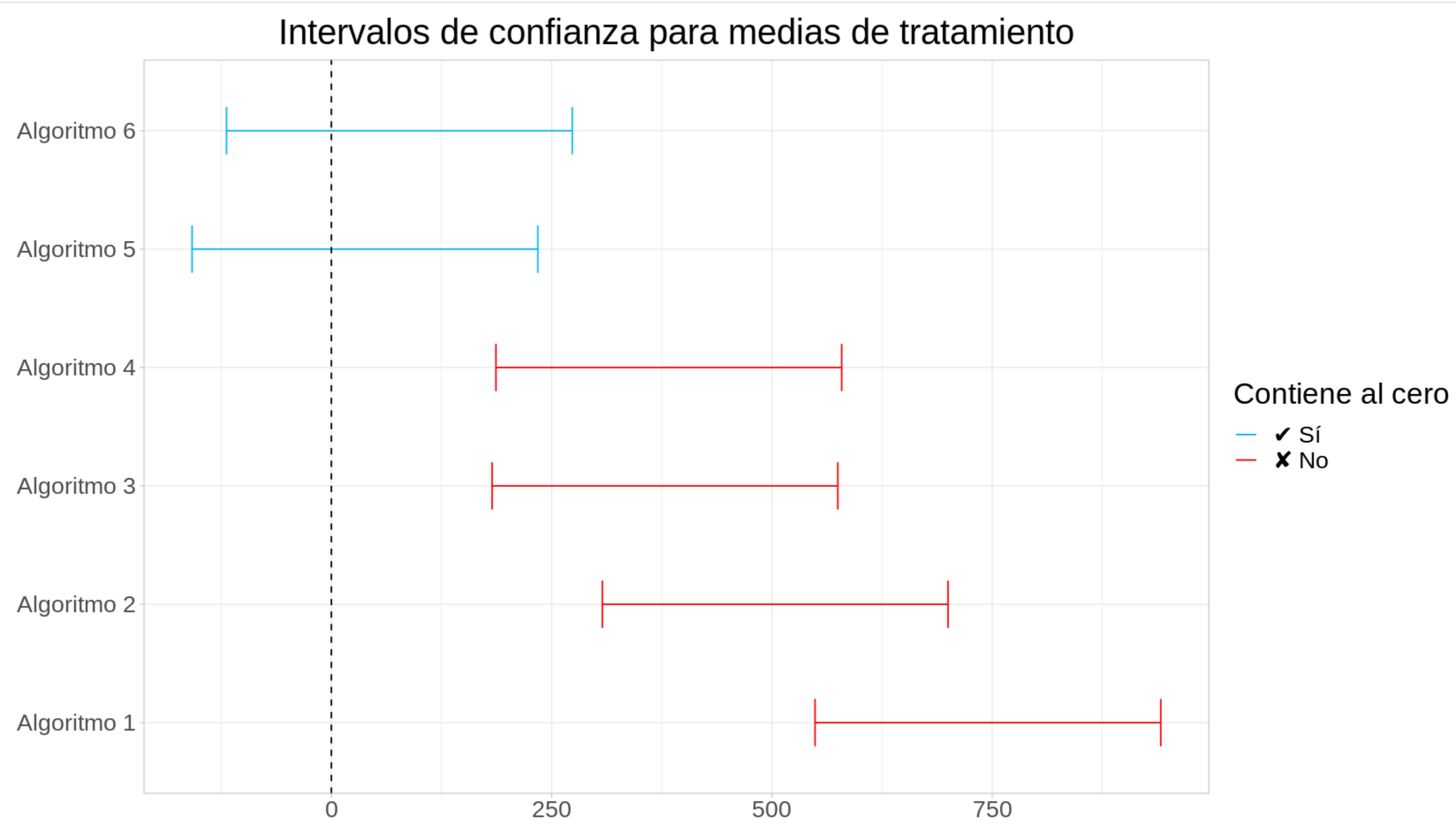
In [7…
```
display_markdown('#### **Intervalos de confianza para medias de tratamiento**')
display_markdown('\n')
table <- formattable(conf_int.df, align=c('l', 'c', 'c', 'c', 'c'), list(`Contiene al 0` = formatter("span",
x ~ ifelse(x, "✔ Sí", "✘ No"),
style = x ~ style(color = ifelse(x, "green", "red"))), `Media estimada` = formatter("span", style = ~ style("
#table <- format_table(table, list(area(1:2) ~ color_tile("transparent", "lightgray")))
as.htmlwidget(table, width="50%", height=NULL)
```

Intervalos de confianza para medias de tratamiento

	2.5%	Media estimada	97.5%	Contiene al 0
Algoritmo 1	548.9423	**745.125**	941.3077	✘ No
Algoritmo 2	307.5673	**503.750**	699.9327	✘ No
Algoritmo 3	182.4423	**378.625**	574.8077	✘ No
Algoritmo 4	186.8173	**383.000**	579.1827	✘ No
Algoritmo 5	-158.0577	**38.125**	234.3077	✔ Sí
Algoritmo 6	-118.9327	**77.250**	273.4327	✔ Sí

In [7…

```
colnames(conf_int.df) <- c("algorithm", "lwr", "mean", "upr", "contains_zero")
# Gráfico de los intervalos de confianza
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(conf_int.df, aes(algorithm)) +
    labs(
        title="Intervalos de confianza para medias de tratamiento",
        x="",
        y="",
        col="Contiene al cero") +
    geom_errorbar(aes(ymin=lwr, ymax=upr, col=ifelse(contains_zero==TRUE,'1','2')), width = 0.4, alpha=1) +
    scale_color_manual(values=c('#05b5f5','#f50505'), labels=c('✔ Sí','✘ No'), breaks=c('1','2')) +
    geom_hline(yintercept=0, linetype="dashed", col="black") +
    theme_light() +
    coord_flip(expand = TRUE) +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



Los resultados anteriores sugieren que los algoritmos 5 y 6 ofrecen mejor exactitud en la estimación del costo promedio que el resto. Entre ellos, el algoritmo 5 presenta el menor valor medio para el error de estimación.

Ejercicio 8

Se presentan los resultados de un experimento relacionado con la capacidad de una batería utilizada en el mecanismo de lanzamiento de un lanzacohetes tierra-aire. Las placas de la batería pueden fabricarse con tres materiales. El objetivo es diseñar una batería que no se vea afectada por la temperatura ambiente. La respuesta de la batería es la vida efectiva de ésta en horas. Para esto se fijan tres niveles de temperatura y se realiza un experimento factorial con cuatro réplicas.

Material	Temperatura (ºF)					
	baja		media		alta	
1	130	155	34	40	20	70
	74	180	80	75	82	58
2	150	188	136	122	25	70
	159	126	106	115	58	45
3	138	110	174	120	96	104
	168	160	150	139	82	60

In [7…
```
data_8 <- read.csv("./TP4_tables/data8.csv") # Leo los datos desde archivo .csv
data_8$material <- factor(data_8$material)
data_8$temperature <- factor(data_8$temperature)
```

Se trata de un experimento de dos factores, donde el material es el factor fila y la temperatura es el factor columna (siguiendo la distribución de la tabla provista), ambos con 3 niveles. Cada uno de los 9 tratamientos cuenta con 4 réplicas.

a) Pruebe las hipótesis apropiadas y obtenga conclusiones mediante el empleo del análisis de varianza con $\alpha = 0.05$.

In [7…
```
options(dplyr.summarise.inform = FALSE)
data_8.mean <- data_8 %>%
  group_by(material, temperature) %>%
  summarise(cell_mean=mean(lifespan)) # media de cada tratamiento

data_8.mean <- data_8.mean %>%
  group_by(material) %>%
  summarise(material_mean=mean(cell_mean), across()) # media de cada material

data_8.mean <- data_8.mean %>%
  group_by(temperature) %>%
  summarise(temperature_mean=mean(cell_mean), across()) # media de cada nivel de temperatura
```

In [7…
```
data_8.mean <- data_8.mean %>%
    arrange(match(temperature, c("low", "mid", "high"))) %>%
    arrange(match(material, c(1, 2, 3))) %>%
    select(material, temperature, cell_mean, material_mean, temperature_mean)
```

In [7…
```
eng_colnames <- colnames(data_8.mean)
colnames(data_8.mean) <- c("material", "temperatura", "media de la celda", "media de la fila", "media de la c
as.htmlwidget(formattable(data_8.mean, align="c"), width="80%", height=NULL)
```

material	temperatura	media de la celda	media de la fila	media de la columna
1	low	134.75	83.16667	144.83333
1	mid	57.25	83.16667	110.91667
1	high	57.50	83.16667	64.16667
2	low	155.75	111.66667	144.83333
2	mid	129.75	111.66667	110.91667
2	high	49.50	111.66667	64.16667
3	low	144.00	125.08333	144.83333
3	mid	145.75	125.08333	110.91667
3	high	85.50	125.08333	64.16667

Un análisis de varianza de dos sentidos está diseñado para responder tres preguntas principales:

1. ¿El modelo aditivo vale?
2. ¿Si es así, la media del resultado es la misma para todos los niveles del factor fila?
3. ¿Si es así, la media del resultado es la misma para todos los niveles del factor columna?

1. Para probar si el modelo aditivo vale se prueba la hipótesis nula de que todas las interacciones son iguales a 0:

$$H_0\colon \gamma_{11} = \gamma_{12} = \ldots = \gamma_{IJ} = 0$$

2. Para probar si la media del resultado es igual para todos los niveles del factor renglón, se prueba la hipótesis nula de que todos los efectos renglón son iguales a 0:

$$H_0\colon \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I = 0$$

3. Para probar si la media del resultado es igual para todos los niveles del factor columna, se prueba la hipótesis nula de que todos los efectos columna son iguales a 0:

$$H_0\colon \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_J = 0$$

In [7…
```
data_8.aov <- summary(aov(lifespan ~ material * temperature, data_8))[[1]]
```

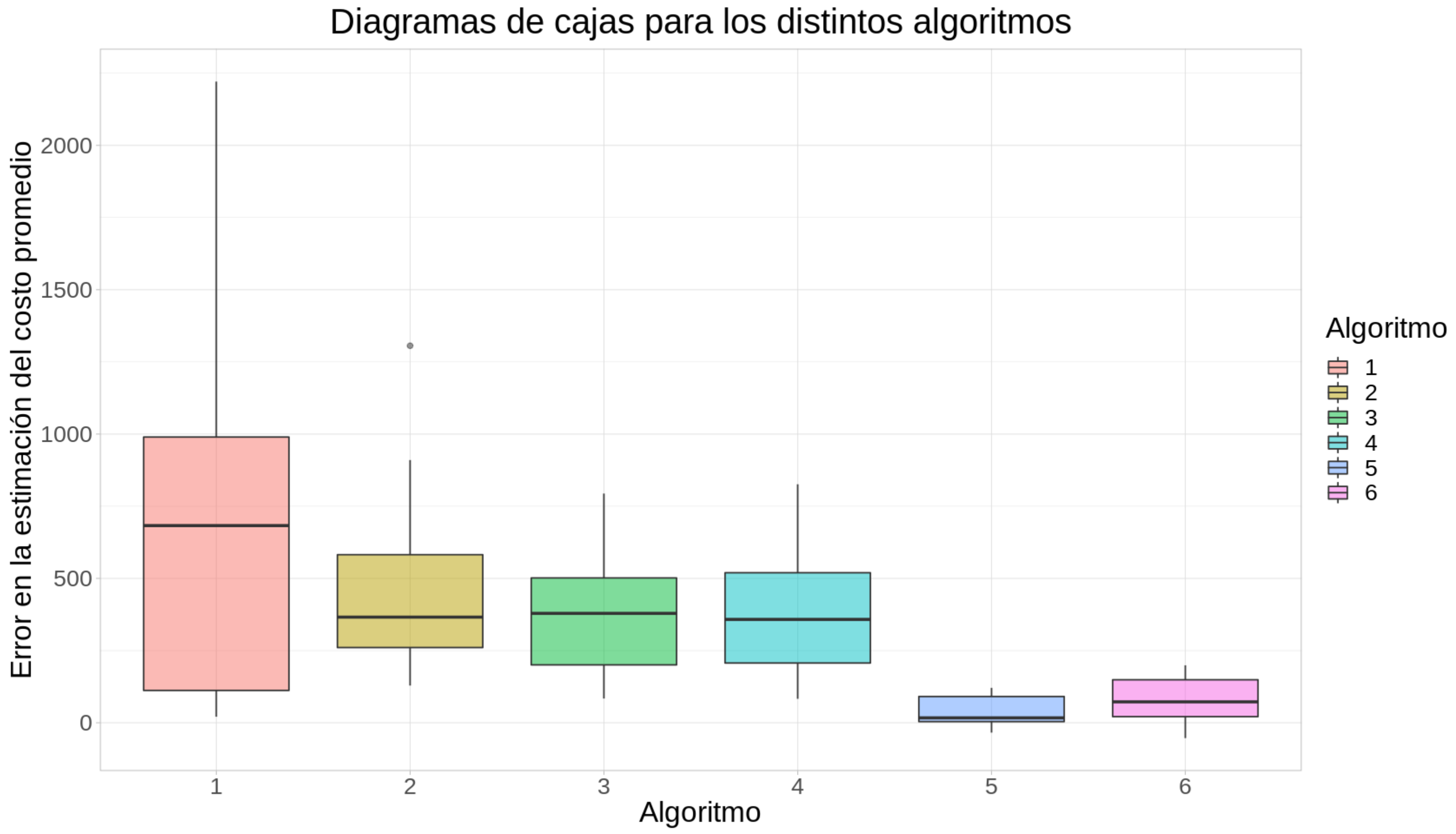
In [7…
```
display_markdown('#### **ANOVA de dos sentidos**')
display_markdown('\n')
data_8.aov <- cbind(c('Material', 'Temperatura', 'Interacción', 'Residuos'), data_8.aov)
colnames(data_8.aov)[1] <- 'Source'
rownames(data_8.aov) <- c()
data_8.aov["Pr(>F)"] <- round(data_8.aov["Pr(>F)"], 4)
table <- formattable(data_8.aov, align=c('l', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c'), list(`Source` = formatter("span",styl
as.htmlwidget(table, width="70%", height=NULL)
```

ANOVA de dos sentidos

Source	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Material	2	10997.06	5498.5278	7.792882	0.0021
Temperatura	2	39372.06	19686.0278	27.900358	0.0000
Interacción	4	10540.44	2635.1111	3.734656	0.0152
Residuos	27	19050.75	705.5833	NA	NA

El p-valor para la interacción es $0.00152 < 0.05$. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula de que todas las interacciones son iguales a 0 y se concluye que el modelo no es aditivo.

In [8…
```
# Plot
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_7, aes(x=algorithm, y=estimation_error, fill=algorithm)) +
    labs(
        title="Diagramas de cajas para los distintos algoritmos",
        x="Algoritmo",
        y="Error en la estimación del costo promedio",
        fill="Algoritmo",
        col="Proyecto") +
    geom_boxplot(alpha=0.5, aes(fill=algorithm)) +
    #geom_point(aes(col=project), size=4, alpha=0.5) +
    #geom_point(shape=1, size=4) +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5)) +
    guides(fill = guide_legend(override.aes = list(shape = NA), order = 1))
```



Los gráficos de cajas sugieren que la exactitud de la estimación obtenida con los algoritmos 5 y 6 podría diferir de la del resto de los algoritmos. Las hipótesis de la prueba son:

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6, \quad \text{contra } H_1\text{: dos o mas } \mu_i \text{ son diferentes}$$

In [8…

```r
data_7.aov <- aov(estimation_error ~ algorithm + project, data_7)
aov_test7 <- summary(data_7.aov)[[1]]
```

In [8…

```r
display_markdown('#### **ANOVA de dos sentidos: Error de estimación vs Algoritmo + Proyecto**')
display_markdown('\n')
aov_test7 <- cbind(c('Algoritmo', 'Proyecto', 'Residuos'), aov_test7)
colnames(aov_test7)[1] <- 'Source'
rownames(aov_test7) <- c()
table <- formattable(aov_test7, align=c('l', 'c', 'c', 'c', 'c', 'c'), list(`Source` = formatter("span",style
as.htmlwidget(table, width="70%", height=NULL)
```

ANOVA de dos sentidos: Error de estimación vs Algoritmo + Proyecto

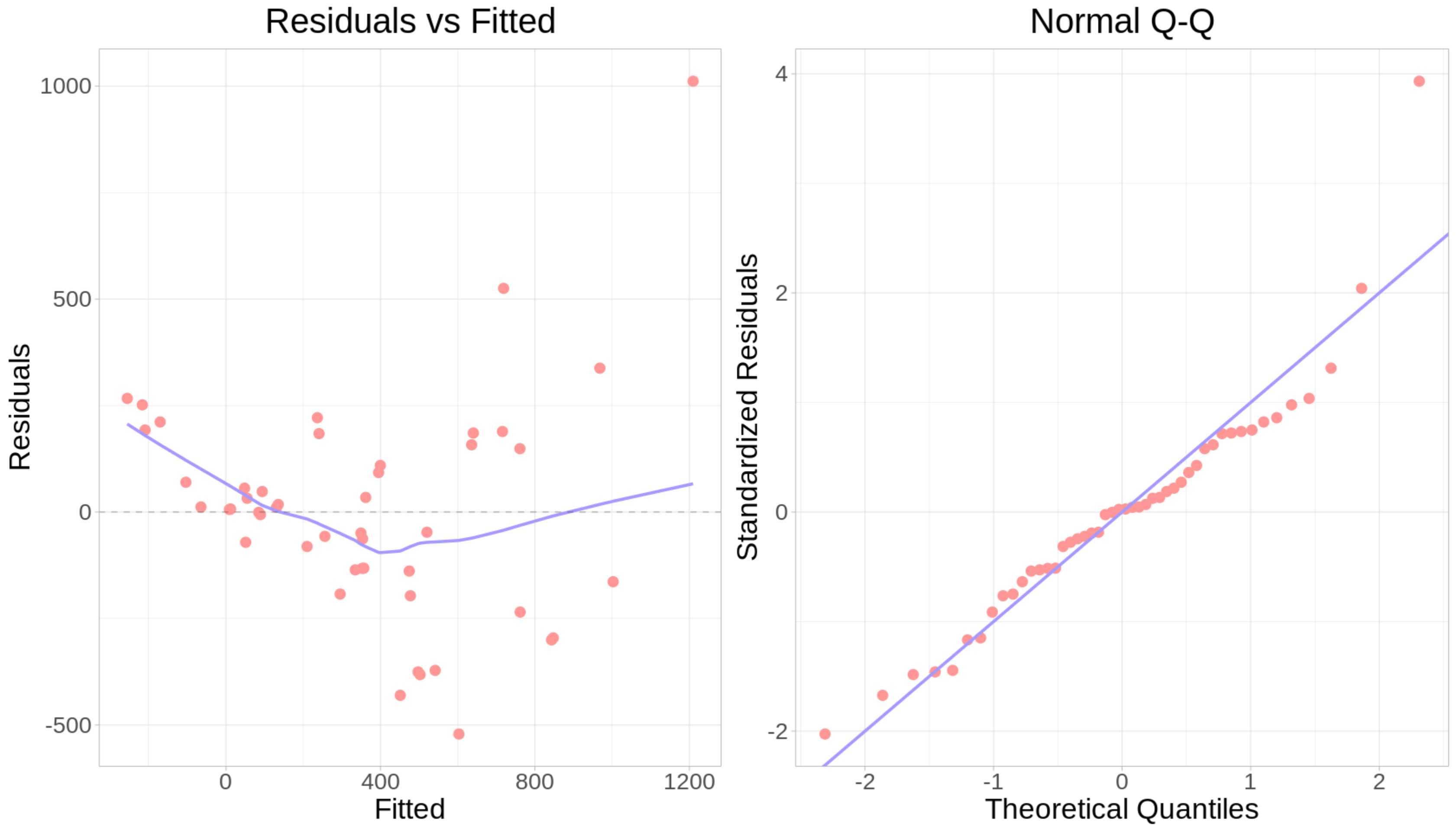
Source	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Algoritmo	5	2825746	565149.14	6.229422	0.0003135205
Proyecto	7	2710323	387188.97	4.267835	0.0016829800
Residuos	35	3175290	90722.57	NA	NA

El p-valor para el factor ***Algoritmo*** es $0.0003 < 0.05$. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que el algoritmo aplicado afecta al error de estimación del costo de desarrollo.

b) Analice los residuos de este experimento.

In [8…

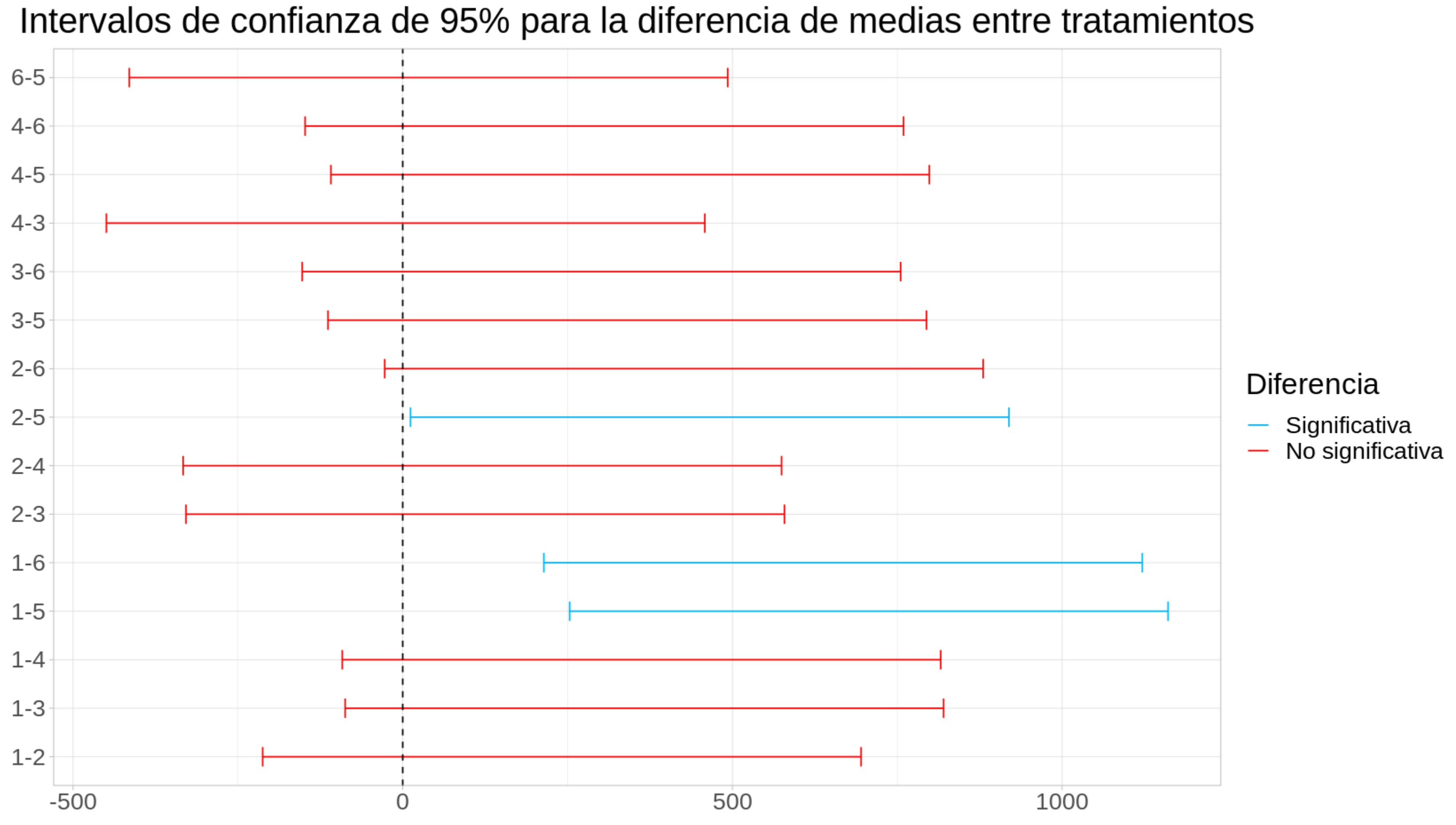
```r
smoothed <- data.frame(with(data_7.aov, lowess(x = data_7.aov$fitted, y = data_7.aov$residuals)))
# Gráficos
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
res_vs_fit <- ggplot(data_7.aov) +
    geom_point(aes(x=data_7.aov$fitted, y=data_7.aov$residuals), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_path(data = smoothed, aes(x = x, y = y), col="#a399ff", size=1) +
    geom_hline(linetype = 2, yintercept=0, alpha=0.2) +
    ggtitle("Residuals vs Fitted") +
    xlab("Fitted") +
    ylab("Residuals") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

qq_plot <- ggplot(data_7.aov) +
    stat_qq(aes(sample = .stdresid), color= '#ff9696', size=3) +
    geom_abline(col="#a399ff", size=1) +
    xlab("Theoretical Quantiles") +
    ylab("Standardized Residuals") +
    ggtitle("Normal Q-Q") +
    theme_light() +
    theme(text=element_text(size=20),
     plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))

plot_grid(res_vs_fit, qq_plot, ncol = 2)
```



c) ¿Qué algoritmo recomendaría para usarlo en la práctica?

In [8…
```
data_7.tukey <- as.data.frame(TukeyHSD(data_7.aov, ordered = TRUE, conf.level = 0.95)[1]$algorithm)
```

In [8…
```
data_7.tukey$names <- c(rownames(data_7.tukey))
# Gráfico de los intervalos de confianza
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(data_7.tukey, aes(names, diff)) +
    labs(
        title="Intervalos de confianza de 95% para la diferencia de medias entre tratamientos",
        x="",
        y="",
        col="Diferencia") +
    geom_errorbar(aes(ymin=lwr, ymax=upr, col=ifelse(lwr*upr > 0,'1','2')), width = 0.4, alpha=1) +
    scale_color_manual(values=c('#05b5f5','#f50505'), labels=c('Significativa','No significativa'), breaks=c(
    geom_hline(yintercept=0, linetype="dashed", col="black") +
    theme_light() +
    coord_flip(expand = TRUE) +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



In [8…
```
data_7.levels <- split(data_7 , f=data_7$algorithm)
x_bar <- sapply(data_7.levels, function(x) {
    mean(x$estimation_error)
}) # media de cada tratamiento
```

In [8…
```
# Cálculo de MSE
model_7 <- lm(estimation_error ~ algorithm + project, data_7)
J <- sapply(data_7.levels, nrow) # cantidad de observaciones para cada tratamiento
I <- length(data_7.levels) # cantidad de niveles
N <- sum(J) # cantidad total de observaciones
SSE <- sum(model_7$residuals^2)
MSE <- SSE / (N - I)
display_markdown(sprintf('$MSE = %.2f$', MSE))
```

$MSE = 75602.14$

In [8…
```
alpha <- 0.05
t <- qt(alpha/2, N-I, lower=FALSE) # distribución t de Student con alpha=0.05/2 y N-I grados de libertad
aux <- t * sqrt(MSE / J)
conf_int <- matrix(c(x_bar - aux, x_bar + aux), ncol=2, byrow=FALSE) # intervalos de confianza
```

In [8…
```
conf_int.df <- as.data.frame(data.frame(paste("Algoritmo", 1:6, sep=" "), conf_int[,1], x_bar, conf_int[,2]))
colnames(conf_int.df) = c(" ", "2.5%", "Media estimada", "97.5%")
contains_zero <- conf_int.df[,"2.5%"] * conf_int.df[,"97.5%"] <= 0 # TRUE si el intervalo contiene al cero
conf_int.df <- cbind(conf_int.df, contains_zero)
colnames(conf_int.df)[5] <- "Contiene al 0"
```

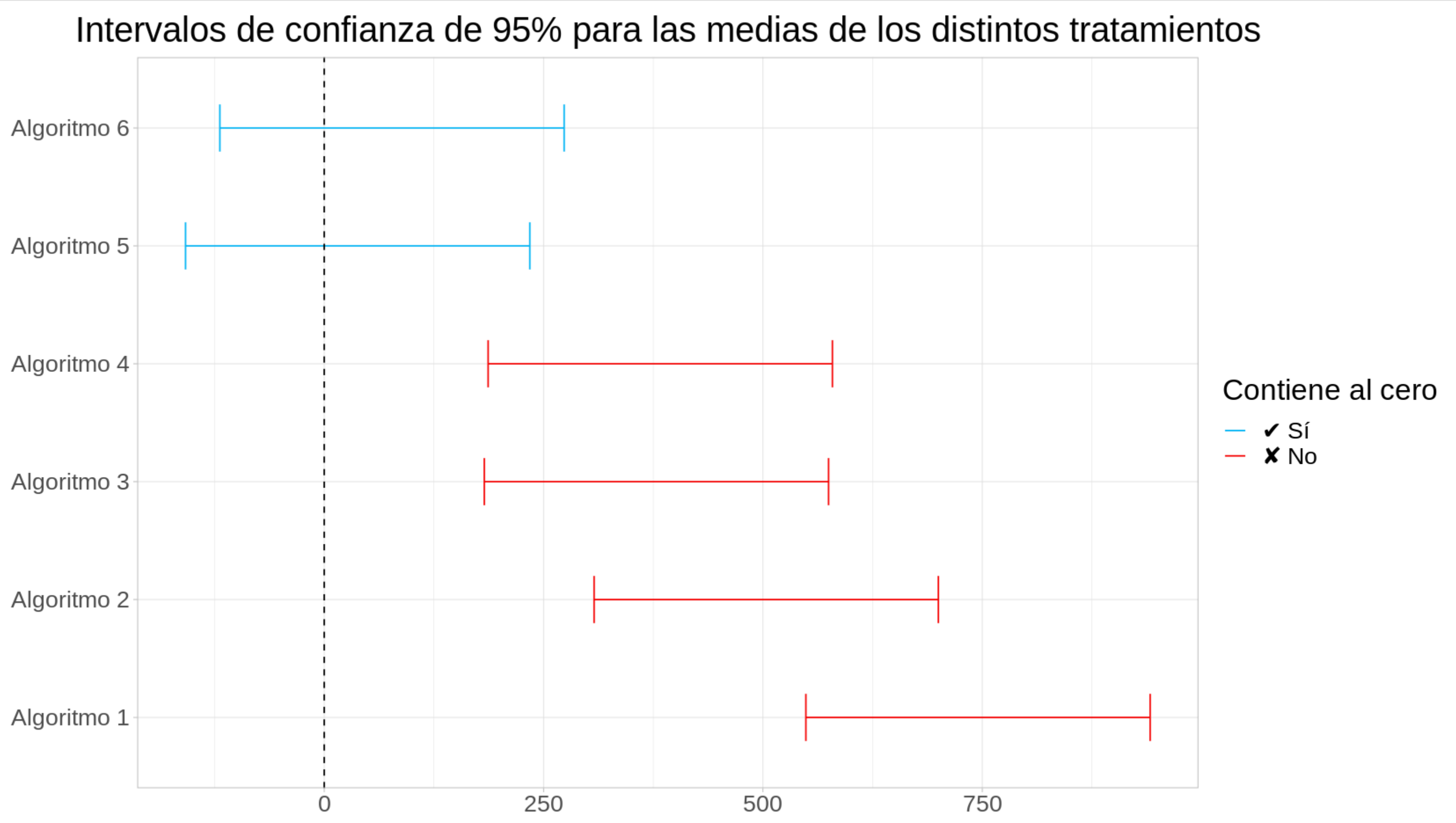
In [9…
```
display_markdown('#### **ANOVA de dos sentidos: Error de estimación vs Algoritmo + Proyecto**')
display_markdown('\n')
table <- formattable(conf_int.df, align=c('l', 'c', 'c', 'c', 'c'), list(`Contiene al 0` = formatter("span",
x ~ ifelse(x, "✔ Sí", "✘ No"),
style = x ~ style(color = ifelse(x, "green", "red"))), `Media estimada` = formatter("span", style = ~ style("
#table <- format_table(table, list(area(1:2) ~ color_tile("transparent", "lightgray")))
as.htmlwidget(table, width="50%", height=NULL)
```

ANOVA de dos sentidos: Error de estimación vs Algoritmo + Proyecto

	2.5%	Media estimada	97.5%	Contiene al 0
Algoritmo 1	548.9423	**745.125**	941.3077	✘ No
Algoritmo 2	307.5673	**503.750**	699.9327	✘ No
Algoritmo 3	182.4423	**378.625**	574.8077	✘ No
Algoritmo 4	186.8173	**383.000**	579.1827	✘ No
Algoritmo 5	-158.0577	**38.125**	234.3077	✔ Sí
Algoritmo 6	-118.9327	**77.250**	273.4327	✔ Sí

In [9…

```r
colnames(conf_int.df) <- c("algorithm", "lwr", "mean", "upr", "contains_zero")
# Gráfico de los intervalos de confianza
options(repr.plot.width=14, repr.plot.height=8)
ggplot(conf_int.df, aes(algorithm)) +
    labs(
        title="Intervalos de confianza de 95% para las medias de los distintos tratamientos",
        x="",
        y="",
        col="Contiene al cero") +
    geom_errorbar(aes(ymin=lwr, ymax=upr, col=ifelse(contains_zero==TRUE,'1','2')), width = 0.4, alpha=1) +
    scale_color_manual(values=c('#05b5f5','#f50505'), labels=c('✔ Sí','✘ No'), breaks=c('1','2')) +
    geom_hline(yintercept=0, linetype="dashed", col="black") +
    theme_light() +
    coord_flip(expand = TRUE) +
    theme(text=element_text(size=20),
         plot.title = element_text(size=24, hjust = 0.5))
```



In […