"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Regularidad métrica en teoremas de inversión global

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Iván Fernando Vázquez López

Directora de Tesis:

Dra. Olivia Carolina Gutú Ocampo

Hermosillo, Sonora, México, Febrero de 2021

SINODALES

Dr.......

Dr........

Dr.......

Dr.......

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección, enunciaremos algunas definiciones y la notación que se estará utilizando a lo largo de esta tesis.

Definición 1.0.1. *Un espacio vectorial normado* $(X, \|\cdot\|)$ *es completo (en la métrica definida por la norma) si toda sucesión de Cauchy en* X *tiene límite en* X *[4]; un espacio vectorial normado y completo se le llama espacio de Banach. Un espacio con producto interior (o pre-Hilbert) es un espacio vectorial* X *con un producto interior definido en* X*. Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interior que además es completo en la métrica definida por el producto interior.*

A continuación algunos ejemplos de espacios de Banach:

1. Espacios L^p.
   Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$. El espacio $L^p(X)$ consiste en las clases de equivalencia de funciones medibles $f : X \to \mathbb{R}$ tales que
   $$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$$
   Cuando dos funciones medibles son equivalentes, son iguales μ-casi-dondequiera. La norma L^p de $f \in L^p(X)$ se define como:
   $$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$
   Un caso especial de estos espacios es cuando consideramos $X = \mathbb{N}$ y μ la medida de contar, es decir, a cada conjunto se le asigna su cardinalidad como medida si éste es finito, o ∞ para el caso contrario. Así obtenemos el espacio $L^p(\mathbb{N})$, denotado ℓ^p, entonces tenemos:
   $$\ell^p = \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$
   Este espacio hereda la propiedad de ser de Banach.

2. Espacio $W_0^{1,p}(0,1)$.
   Sean $I = (0,1)$ y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{1,p}$ se define en [1] como todas las clases localmente integrables de u que admiten una derivada $\dot{u}$ y que a su vez son p-integrables en $(0,1)$:

   $$W^{1,p}(I) = \big\{ u \in L^p(I) \mid \exists\ \dot{u} \in L^p(I) \big\} \subset L^p(0,1).$$

   El espacio $W^{1,p}$ está dotado de la norma

   $$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\dot{u}\|_{L^p}$$

   y éste es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. Ahora definimos el espacio $W_0^{1,p}(0,1)$ como la cerradura con respecto a la norma $\| \cdot \|_{W^{1,p}}$ del subespacio $\iota\big(C_0^1(0,1)\big) \subset W^{1,p}(0,1)$, que consiste en las funciones suaves con soporte compacto en $(0,1)$, es decir, aquellas $v \in C^\infty(0,1)$ tales que $v(t) \neq 0$ para $t \in K \subset (0,1)$ compacto. Aquí, $\iota(u) := [u]$. $W_0^{1,p}[0,1]$ es un espacio de Banach.

— — — —

Definición 1.0.2. *$f(h) = o(g(h))$ cuando $h \to 0$ (se lee «$f(h)$ es de orden más pequeño que $g(h)$ cuando $t \to 0$». Significa $f(h)/g(h) \to 0$ cuando $h \to 0$:*

$$f(h) = o(g(h)) \iff lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0$$

Capítulo 2

Inversión local

2.1. Homeomorfismos entre espacios de Banach

Dados dos espacios topológicos X y Y, un *homeomorfismo* es una función $f : X \to Y$ continua, biyectiva y con inversa continua. Diremos que un homeomorfismo $f : X \to Y$ es local si para cada $x \in X$ existe un abierto U de x tal que $f(U)$ sea abierto en Y y $f|_U : U \to f(U)$ sea un homeomorfismo. Observemos que siempre que f sea un homeomorfismo, será en particular un homeomorfismo local.

2.2. Derivadas entre espacios de Banach

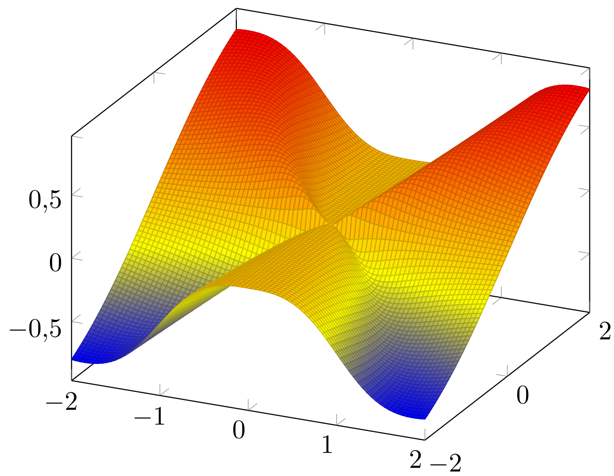
Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios de Banach y sea U un subconjunto abierto de X. Para $x_0 \in U$ presentamos algunas definiciones de suavidad.

Derivada Gâteaux. La función f es *Gâteaux diferenciable* en x_0 si existe una transformación lineal continua de X a Y, denotada $df(x_0)$, tal que:

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} - df(x_0)u \right| = 0, \qquad \forall u \in X.$$

Es posible encontrarnos con diferentes versiónes (no necesariamente equivalentes) de la derivada Gâteaux en las que tal vez no sea necesario que la transformación sea continua o incluso lineal. Aquí usaremos la versión descrita con anterioridad. Un ejemplo de una función Gâteaux diferenciable es la siguiente:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{|x^3|y}{x^4+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



La función es Gâteaux diferenciable y continiua en el orígen, pero no es Fréchet diferenciable; además, $df(0,0)=0$, pues

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{|t^3x^3|\,ty}{t(t^4x^4+t^2x^2)}\right| = \lim_{t\to 0}\left|\frac{|tx^3|\,y}{t^2x^2+y^2}\right| = 0\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

La razón por la cual no es Fréchet diferenciable es sencilla de ver, pues basta acercarnos al origen con la curva (s,s^2):

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\frac{|f(s)|}{|s|} &= \lim_{s\to 0}\frac{|s^3|s^2}{(s^4+s^4)\sqrt{s^2+s^4}} = \lim_{s\to 0}\frac{|s|}{2\sqrt{s^2(1+s^2)}}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{|s|}{2|s|\sqrt{1+s^2}} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{2}\neq 0.\end{aligned}$$

Derivada Fréchet. La función f es *Fréchet diferenciable* en x_0 si es Gâteaux diferenciable y para cada $\epsilon>0$ existe un $r>0$ tal que, si $u\in B_r(x_0)$, entonces:

$$\big|f(u)-f(x_0)-df(x_0)(u-x_0)\big|\leq \epsilon|u-x_0|\,.$$

Un ejemplo muy simple de esta derivada es si tomamos $T:X\to Y$ un operador lineal y continuo, es fácil ver que $dT(x)=T$, pues si consideramos

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{T(x+tu)-T(x)}{t}-dT(x)u\right| = \lim_{t\to 0}\left|\frac{T(x)+tT(u)-T(x)}{t}-dT(x)u\right| = 0$$
$$\iff dT(x)=T\ \forall u\in X.$$

lo que nos dice que es Gâteaux diferenciable, además, para $\epsilon>0$:

$$\big|T(u)-T(x)-dT(x)(u-x)\big| = \big|T(u-x)-dT(x)(u-x)\big| = 0\leq \epsilon|u-x|\,.$$

siendo gracias a esto, Fréchet diferenciable.

Derivada estricta. La función f es *estrictamente diferenciable* en x_0 si existe un operador lineal continuo, llamado $df(x_0)$, tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que si $u, v \in B_r(x_0)$ entonces

$$\left| f(u) - f(v) - df(x_0)(u - v) \right| \leq \epsilon |u - v| \, .$$

Una función estrictamente diferenciable la podemos encontrar en [9].
Para $j \in \mathbb{Z}$ definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$f(t) = \begin{cases} 2^{2j} + (|t| - 2^j)(2^{j+2} - 2^j), & \text{si } |t| \in [2^j, 2^{j+1}); \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

La cual es continua a trozos y no es diferenciable en ningún $t = 2^j$, pues tiene pendientes distinitas a la izquierda y a la derecha; aún así, podemos verificar que la funcion es estrictamente diferenciable en $t = 0$ con derivada 0, pues para x, y,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \frac{|f(|x|) - f(|y|)|}{||x| - |y||}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que x, y tienen el mismo signo y gracias a la convexidad de la función, podemos poner una cota superior a $f(x) - f(y)$, siendo esta $3x(x - y)$ siempre y cuando $x > y$. Así, cuando $x, y \to 0$, el límite existe y es 0.

Función continuamente diferenciable (o C^1). La función f es *continuamente diferenciable* o de *clase* C^1 en x_0 si es Gâteaux diferenciable en x_0 y la transformación df es continua en x_0. Un ejemplo de una función continuamente diferenciable es $f(x) = e^x$, que además tiene la propiedad de ser su propia derivada.

Función localmente Lipschitz. La función f es *localmente Lipschitz* en x_0 si existen $k \geq 0$ y $V_{x_0} \subset U$ tal que $\|f(u) - f(w)\| \leq k\|u - w\|$ para todo $u, w \in V_{x_0}$. La constante $\text{lip}(f, x_0)$ se define como:

$$\text{lip} f(x_0) := \inf_{R>0} \sup \left\{ \frac{|f(u) - f(w)|}{|u - w|} : u, w \in B_R(x_0) \text{ y } u \neq w \right\}.$$

A continuación dejamos un esquema por razones de claridad:

$$
\begin{tikzcd}
 & & C^1 \arrow[d] \\
\textbf{Gâteaux} & \textbf{Fréchet} \arrow[l] \arrow[ddr, bend right] & \textbf{estricta} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & & \textbf{localmente Lipschitz} \arrow[d] \\
 & & \textbf{continua}
\end{tikzcd}
$$

2.3. Constantes de inyección y sobreyectividad

2.3.1. Constante de Banach

Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal continua entre espacios de Banach. El teorema de la función abierta implica que si T es sobreyectiva entonces es una función abierta (manda abiertos en abiertos). En particular implica que existe un $\alpha > 0$ tal que $B_\alpha(0) \subset T(B_1(0))$. Con estas α definimos la siguiente constante:

$$C(T) = \sup\left\{\alpha \geq 0 : B_\alpha(0) \subset T(B_1(0))\right\}$$

y es llamada *constante de Banach* [3].

También podemos calcularla en términos del operador adjunto $T^* : Y^* \to X^*$:

$$C(T) = \inf_{\|y^*\|=1} \|T^* y^*\|.$$

La *constante dual de Banach* es definida:

$$C^*(T) = \inf_{\|u\|=1} |Tu|.$$

Proposición 2.3.1. *$C(T) > 0$ si y solo si T es sobreyectiva.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $C(T) > 0$, por definición del supremo, podemos elegir un $0 < \alpha \leq C(T)$ tal que $B_\alpha(0) \subset T(B_1(0))$. Como T es lineal, basta probar que para $0 \neq y \in Y$ existe un u tal que $T(u) = y$. Consideremos el elemento $\frac{\alpha y}{2\|y\|} \in B_\alpha(0) \subset Y$ y al cumplir α la propiedad antes mencionada, entonces $\frac{\alpha y}{2\|y\|} \in T(B_1(0))$, es decir, existe $x \in B_1(0) \subset X$ tal que $T(x) = \frac{\alpha y}{2\|y\|}$, lo que nos indica que, por la linealidad de T, el elemento $y \in Y$ es obtenido de aplicar la transformación T a $u = \frac{2\|y\|x}{\alpha} \in X$.
($\Leftarrow$) Si T es sobre, al ser por hipótesis continua, gracias al teorema de la función abierta, T es también abierta [7], luego, como $B_1(0)$ es abierto en X entonces $T(B_1(0))$ es abierto en Y, además $0 \in T(B_1(0))$ existe un $\alpha > 0$ tal que $B_\alpha(0) \subset T((B_1(0))$. Por tanto $C(T) > \alpha > 0$.

□

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotación de un ángulo θ. Su matriz está dada por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

   Para calcular su constante de Banach es bastante sencillo, pues basta con encontrar el mayor α tal que $B_\alpha(0) \subset T(B_1(0))$ y tal α es justamente 1, es decir, $C(T) = 1$, lo que nos asegura la sobreyectividad de T.

2. $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una proyección sobre el plano xy. La matriz correspondiente a U es:

$$U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, el α que nos funciona para calcular $C(U)$ es 0, pues notemos que proyectando la bola unitaria $B_1(0)$ nos queda el disco unitario centrado en el orígen sobre el plano xy y no podemos meter una bola en un disco, lo que nos dice que U no es sobre.

3. $S : \ell^2 \to \ell^2$ tal que $Sx = f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) = (0, \xi_1, ..., \xi_{n+1}, ...)$ el operador desplazamiento a la derecha. Para el cálculo de su constante de Banach usamos la caracterización antes vista, es decir, $C(S) = \inf_{\|y^*\|=1} \|S^* y^*\|$. Para el cálculo del operador adjunto utilizamos la siguiente identidad: si $x, y \in \ell^2$, se cumple que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

y si usamos esta identidad para la base ortonormal estándar $\{e_n\}$ de ℓ^2, con $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{gathered} \langle Se_n, e_{n+1} \rangle = \langle e_n, S^* e_{n+1} \rangle \\ \langle Se_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \langle e_n, S^* e_{n+1} \rangle = 1 \implies \\ S^* e_{n+1} = e_n \end{gathered}$$

Solo restaría ver que $S^* e_1 = (0, 0, 0, ...)$. En efecto, para $x \in X$:

$$\langle S^* e_1, x \rangle = \langle S^* e_1, \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \rangle$$

donde $\sum a_n e_n$ es la representación de x en términos de su base estándar. Gracias a la linealidad del producto interior podemos escribir:

$$\langle S^* e_1, \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \rangle = \langle S^* e_1, \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle S^* e_1, \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \rangle$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \overline{a_n} \langle S^* e_1, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \langle S^* e_1, e_n \rangle$$

Es suficiente ver que $\langle S^* e_1, e_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\langle S^* e_1, e_n \rangle = \langle e_1, Se_n \rangle = \langle e_1, e_{n+1} \rangle = 0.$$

como necesitábamos, lo que nos indica que el operador adjunto S^* es un desplazamiento a la izquierda. Con esto, ya podemos calcular la constante de Banach, basta ver que $C(S) = \inf_{\|y^*\|=1} \|S^* y^*\| = 0$ para $y^* = e_1 = (1, 0, 0, ...)$.

2.4. Inversión local de una función de clase C^1. Teorema de la función implícita

Definición 2.4.1. *Sean X y Y dos espacios de Banach, U un abierto de X y V un abierto de Y. Por definición, $f : U \to V$ es de clase C^1 (o C^1 difeomorfismo) si f es biyectiva, de clase C^1 y además la función inversa $g = f^{-1} : V \to U$ es de clase C^1.*

Proposición 2.4.1. *Sea $f : U \to V$ un homeomorfismo de clase C^1 (U y V definidos como antes). Para que f sea un difeomorfismo de clase C^1 es necesario y suficiente que para toda $x \in V$ la derivada $f'(x)$ debe pertenecer a $Isom(U; V)$.*

Primero probaremos un lema.

Lema 2.4.1. *Sea $f : U \to V$ un homeomorfismo, supongamos que f es diferenciable en un punto $x_0 \in U$. Para que $g = f^{-1}$ sea diferenciable en $y_0 = f(x_0) \in V$ es necesario y suficiente que $f'(x_0) \in$ Isom(U; V) y además*

$$g'(y_o) = \frac{1}{(f'(x_0))}$$

Demostración. ($\Rightarrow$) La condición es necesaria, pues si g es diferenciable en y_0 el teorema de diferenciación de una función compuesta nos dice

$$g'(y_0) \circ f'(x_0) = 1_X \qquad\qquad f'(x_o) \circ g'(y_o) = 1_Y$$

lo cual prueba que $f'(x_0)$ es un isomorfismo de X sobre Y y que $g'(y_0)$ es el isomorfismo inverso.

($\Leftarrow$) Para mostrar que la condición es suficiente, supongamos que $f'(x_0) \in$ Isom(U;V), queremos mostrar que g es diferenciable en y_0. Como f es diferenciable en x_0, fijando $y = f(x)$ para x cercano a x_0:

$$y - y_0 = f^{-1}(x_0) \cdot (x - x_0) + ||x - x_0|| \cdot \varphi(x - x_0)$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x - x_0) = 0.$$

Aplicando la transformación lineal $(f'(x_0))^{-1}$:

$$x - x_0 = (f'(x_0))^{-1} \cdot (y - y_0) - ||x - x_0|| \cdot \frac{\varphi(x - x_0)}{f'(x_0)}. \tag{2.1}$$

Lo que resta demostrar es que $||x - x_0|| \cdot (f'(x_0))^{-1}\varphi(x - x_0) = o(||x - x_0||)$. Denotamos $(f'(x_0)^{-1}) \cdot \varphi(x - x_0) = \psi(x - x_0)$ lo cual tiende a 0 cuando

$x \to x_0$ ya que $(f'(x_0)^{-1})$ es un mapeo lineal de Y sobre X.
La relación 2.1 implica:

$$||(f'(x_0))^{-1} \cdot (y - y_0)|| \geq ||x - x_0|| \cdot (1 - ||\psi(x - x_0)||),$$

así, si $||x - x_0||$ es suficientemente pequeño, tal que $||\psi(x - x_0)|| < 1$,

$$||x - x_0|| \leq ||y - y_0|| \cdot \frac{||(f'(x_0)^{-1})||}{1 - ||\psi(x - x_0)||}.$$

Luego,

$$||x-x_0||\cdot||\psi(x-x_0)|| \leq ||y-y_0||\cdot||(f'(x_0)^{-1})||\cdot\frac{||\psi(x - x_0)||}{1 - ||\psi(x - x_0)||} = o(||y-y_0||)$$

como requeríamos. □

Habiendo establecido el lema, ahora probaremos la proposición 2.4.1. La necesariedad es evidente, pues si f es un difeomorfismo de clase C^1, entonces formará parte de $\mathrm{Isom}(U; V)$. Ahora, si $f(x) \in \mathrm{Isom}(U; V)$ para toda $x \in X$, se sigue del lema que $g = f^{-1}$ es diferenciable en cada $y \in Y$ y además

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Resta mostrar que g es de clase C^1, eso es, que el mapeo

$$g' : Y \to \mathcal{L}(V; U)$$

es continuo. Luego, de observar que $g'(y) = \left[f'(g(y))\right]^{-1}$, es posible ver a g' como la composición de 3 funciones:

1. el mapeo $y \mapsto g(y)$ de Y a X que es continuo ya que f es un homeomorfismo;
2. el mapeo $x \mapsto f'(x)$ de X a $\mathrm{Isom}(U; V)$ que es continuo porque f es de clase C^1;
3. el mapeo $u \mapsto u^{-1}$ de $\mathrm{Isom}(U; V)$ a $\mathcal{L}(V; U)$ que es continuo por un teorema en [2].

Esto completa nuestra prueba.

Capítulo 3

Teoremas clásicos de inversión global

Definición 3.0.1. *Una función continua f entre dos espacios topológicos X y Y es propia [8] si y solo si $f^{-1}(C)$ es compacto en X siempre que C sea compacto en Y.*

Definición 3.0.2. *Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es coerciva [6] si y solo si*

$$\|f(x)\|_Y \to +\infty \text{ cuando } \|x\| \to +\infty.$$

En otras palabras, la función $f : X \to Y$ es coerciva si la pre-imágen $f^{-1}(B) \subseteq X$ de cada conjunto acotado $B \subseteq Y$ es acotada en X.

Proposición 3.0.1. *En dimensión finita, una función continua $f : X \to Y$ es coerciva si y solo si es propia.*

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es coerciva y sea $C \subset Y$ un compacto. C es cerrado y acotado y gracias a la coercividad, $f^{-1}(C)$ también lo es. Ahora, como $f^{-1}(C)$ es un compacto contenido en un espacio de dimensión finita, se sigue que el conjunto es compacto. Para demostrar lo inverso, es suficiente ver que los conjuntos compactos coinciden con los conjuntos cerrados y acotados en espacios de Banach de dimensión finita. □

Condición de Palais-Smale [5]. Una función continuamente Fréchet diferenciable $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ de un espacio de Hilbert H a los reales satisface la condición de Palais-Smale si cada sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ tal que:

- $\left\{f(u_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada y
- $f'(u_n) \to 0$ en H

tiene una subsucesión convergente en H.

Condición de Palais-Smale débil. Sean X un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R}$ una función Gâteaux diferenciable. La función f satisface la condición de Palais-Smale débil si para cada sucesión $\{x_n\} \subset X$ tal que:

- $\sup |x_n| < \infty$,

- $\lim f'(x_n) = 0$ en X^*,
- $f(x_n) \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

existe un punto crítico $\bar{x} \in X$ de f con

$$\liminf f(x_n) \leq f(\bar{x}) \leq \limsup f(x_n).$$

Teorema 3.0.1 (Banach-Mazur [8]). *Sean X y Y dos espacios de Banach y $f : X \to Y$ una función continua, entonces f es un homeomorfismo de X en Y si y solo si f es un homeomorfismo local y una funciónl propia.*

Teorema 3.0.2 (Ekeland). *Sea X un espacio métrico completo y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semi-continua inferiormente, no idénticamente $+\infty$ y acotada inferiormente. Para cada $x \in X$ tal que satisfaga*

$$\inf f \leq f(x) \leq \inf f + \epsilon \tag{3.1}$$

y cada $\lambda > 0$, existe un punto $y \in X$ tal que

$$f(y) \leq f(x), \tag{3.2}$$
$$d(x, y) \leq \lambda \tag{3.3}$$
$$\forall v \neq y, f(v) > f(y) - (\epsilon/\lambda) d(y, v). \tag{3.4}$$

Dado un $\alpha > 0$, definimos un orden en $X \times \mathbb{R}$ como

$$(x_1, a_1) \prec (x_2, a_2) \text{ si y solo si } (a_2 - a_1) + \alpha d(x_1, x_2) \leq 0.$$

Veremos que la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es también continua, en el sentido que, para cada $(x_1, a_1) \in X \times \mathbb{R}$, el conjunto $\{(x, a) \mid (x, a) \succ (x_1, a_1)\}$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$. Probaremos que cada subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$ tiene un elemento maximal, dado que está «acotado inferiormente».

Lema 3.0.1. *Si S es un subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$ tal que:*

$$\exists m \in \mathbb{R} : (x, a) \in S \implies a \geq m.$$

Entonces, para cada $(x_1, a_1) \in S$ existe un elemento $(\bar{x}, \bar{a})$ del orden $\succ$ el cual es maximal y mayor que (x_1, a_1).

Demostración. Definiremos una sucesión $(x_n, a_n) \in S, n \in \mathbb{N}$, empezando con (x_1, a_1). Suponiendo que (x_n, a_n) es desconocido. Denotamos

$$S_n = \{(x, a) \in S \mid (x, a) \succ (x_n, a_n)\} \tag{3.5}$$
$$m_n = \inf \{a \in \mathbb{R} \mid (x, a) \in S_n\} \tag{3.6}$$

Claramente, $m_n \geq m$. Definimos ahora (x_{n+1}, a_{n+1}) como cualquier punto en S_n tal que

$$a_n - a_{n+1} \geq \frac{1}{2}(a_n - m_n). \tag{3.7}$$

Todos los conjuntos S_n son cerrados y no vacíos y además $S_{n+1} \subset S_n$ para cada n. Más aún, de 3.9 tenemos

$$|a_{n+1} - m_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n - m_n| \leq \frac{1}{2^n}|a_1 - m|.$$

Así, para cada $(x, a) \in S_{n+1}$ tenemos, usando 3.5:

$$|a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2^n}|a_1 - m|$$

Lo cual demuestra que el diámetro de S_n tiende a cero cuando $n \to \infty$. Como $X \times \mathbb{R}$ es métrico completo, los conjuntos S_n tienen un punto $(\bar{x}, \bar{a})$ en común:

$$\{(\bar{x}, \bar{a})\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Por definición, $(\bar{x}, \bar{a}) \succ (x_n, a_n)$ para toda n, en particular para $n = 1$. Supongamos que existe algún $(\tilde{x}, \tilde{a}) \in S$ mayor que $(\bar{x}, \bar{a})$. Por transitividad, obtenemos $(\tilde{x}, \tilde{a}) \succ (x_n, a_n)$ para toda n, es decir, $(\tilde{x}, \tilde{a}) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, por lo tanto $(\tilde{x}, \tilde{a}) = (\bar{x}, \bar{a})$. Esto demuestra que $(\bar{x}, \bar{a})$ es, en efecto, maximal. $\square$

Ahora, podemos fácilmente probar el teorema 3.0.2. Tomamos S como el epigrafo de f

$$S = \left\{(x, a) \mid x \in X, a \geq f(x)\right\}.$$

Es un subconjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$, ya que f es semi-continua inferiormente. Tomando $\alpha = \frac{\epsilon}{\lambda}$ y (x_1, a_1) como $(x, f(x))$. Aplicando el lema 3.0.1 para obtener un elemento maximal (y, a) en S que satisfaga:

$$(y, a) \succ (x, f(x)).$$

Como $(y, a) \in S$, también tenemos $(y, f(y)) \succ (y, a)$. Como (y, a) es maximal, $a = f(y)$. La máximallidad se puede escribir

$$(v, b) \in S \implies (b - f(v)) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(y, v) > 0,$$

a menos que $v = y$ y $b = f(y)$. Haciendo $b = f(v)$ tenemos 3.4. Volviendo a 3, obtenemos

$$f(y) - f(x) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(x, y) \leq 0. \tag{3.8}$$

Entonces, es claro que $f(y) \leq f(x)$. Gracias a 3.1, tenemos que $f(y) \geq f(x) - \epsilon$. Escribiendo en 3.8, obtenemos $\frac{\epsilon}{\lambda} d(x, y) \leq \epsilon$, terminando la prueba.

Propiedad. Si $\alpha > 0$, entonces existe la inversa por la derecha.

Teorema 3.0.3. *Sean X y Y espacios de Banach, U un subconjunto abierto y convexo de X y $f : U \to Y$ una función continua y con derivada Gâteaux df en U. Suponemos*

$$\alpha := \inf_{x \in U} C(df(x)) > 0,$$

donde $C(df(x))$ es la constante de Banach para la derivada Gâteaux de f en el punto x. Entonces, para cada bola abierta $B(x_0, \delta) \subset U$, tenemos

$$B(f(x_0), \delta\alpha) \subset f(B(x_0, \delta)). \tag{3.9}$$

Entonces, el conjunto $V = f(U)$ es abierto en Y y f es una función abierta de U a V.

Demostración. Consideremos la bola abierta $B(x_0, \delta) \subset U$ y sea $0 < \eta < \delta$. Para $y \in B(f(x_0), \eta\alpha)$ fijo, elegimos $\epsilon, \lambda > 0$ tales que

$$\frac{\epsilon}{\eta} < \lambda < \alpha \text{ y } \|f(x_0) - y\| < \epsilon$$

Sea $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la función definida como $\varphi(x) = \|f(x) - y\|$ si $x \in \overline{B}(x_0, \eta)$ y $\varphi(x) = +\infty$ en otro caso. Es fácil ver que φ es continua en $B(x_0, \eta)$ y semi-continua inferiormente en X. Más aún,

$$\varphi(x_0) < \inf_{x \in X} \varphi(x) + \epsilon.$$

Aplicando el principio variacional de Ekeland (3.0.2) a x_0 y $\epsilon/\lambda > 0$, aseguramos la existencia de un vector $z \in X$ tal que

a) $\|z - x_0\| \leq \frac{\epsilon}{\lambda} < \eta$, y

b) $\varphi(z) < \varphi(x) + \lambda\|z - x\|$, para toda $x \neq z$.

Mostraremos que $f(z) = y$. Supongamos lo contrario, es decir, $f(z) \neq y$. Escribiendo la desigualdad b) con $x = z + tu$, obtenemos,

$$\forall t > 0, \forall u \in X, \frac{\|f(z + tu) - y\| - \|f(z) - y\|}{t} > -\lambda\|u\| \tag{3.10}$$

Veremos a continuación que la función $t \to \|f(z + tu) - y\|$ es diferenciable por la derecha en 0 y su derivada está dada por:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\|f(z + tu) - y\| - \|f(z) - y\|}{t} = \langle y^*, df(z)u \rangle$$

para algún $y^* \in Y^*$ con $\|y^*\| = 1$ y $\langle y^*, f(z) - y \rangle = \|f(z) - y\|$. Haciendo $t \to 0$ en 3.10, tenemos:

$$\forall u, \langle y^*, df(z)u \rangle \geq -\lambda\|u\|$$

Recordando la proposición 2.3.1, podemos decir que la transfomación $df(z)$ es sobreyectiva, por lo que podemos hallar un mapeo $L(z)$, el cual es su inversa por la derecha y es continuo, por lo tanto acotado. Ahora hacemos $u = -L(z)(f(z) - y)$, para que $df(z)u = -(f(z) - y)$. La desigualdad nos da:

$$\|f(z) - y\| \leq \lambda\|u\| \leq \lambda\|L(z)\|_{op}\|f(z) - y\|. \tag{3.11}$$

La contradicción vendrá de ver que $\|L(z)\|_{op} \leq 1/\alpha$. Notemos que $C(id) = 1$, así, $C(df(z) \circ L(z)) = 1$, de aquí, por la definición de constante de Banach

$$\begin{aligned} 1 &= \inf_{\|y^*\|=1} \|(df(z) \circ L(z))^* y^*\| \\ &= \inf_{\|y^*\|=1} \|(L(z)^* \circ df(z)^*) y^*\| \end{aligned}$$

.

Pero

$$\begin{aligned} \|L(z)^* \circ df(z)^*\| &= \sup_{\|y\|=1} \|\langle (L(z)^* \circ df(z)^*) y^*, y \rangle \\ &= \sup_{\|y\|=1} \|\langle df(z)^* y^*, L(z) y \rangle\|. \end{aligned}$$

Además

$$\|\langle df(z)^* y^*, L(z) y \rangle\| \leq \|df(z)^* y^*\| \|L(z)\|_{op}$$

En resumen:

$$\|L(z)\|_{op}$$

Por lo tanto, como $C(df(z)) \geq \alpha$ al ser α un ínfimo, se sigue que $\|L(z)\|_{op} \leq 1/\alpha$, así, para $v \in X$, tenemos que $\|L(z)v\| \leq \|L(z)\|_{op}\|v\| \leq (1/\alpha)\|v\|$. Aplicando el resultado a 3.11, nos queda

$$\|f(z) - y\| < \lambda\|u\| \leq \lambda\|L(z)\|_{op}\|f(z) - y\| \leq (\lambda/\alpha)\|f(z) - y\|,$$

lo cual es una contradicción, pues $\lambda < \alpha$. Por consiguiente, $f(z) = y$. De esta forma vemos que $B(f(x_0), \delta\alpha) \subset f(B(x_0, \delta)$. Se sigue que $V = f(U)$ es abierto y que f es un mapeo abierto. □

Proposición 3.0.2. *Si tomamos y, z en Y, entonces existe algún $y^* \in N(y)$ tal que*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\|y + tz\| - \|y\|}{t} = \langle y^*, z \rangle$$

donde $N(y) \subset Y^*$ se define en cada punto y como:

$$y^* \in N(y) \iff \forall z \in Y, \|y + z\| \geq \|y\| + \langle y^*, z \rangle.$$

Cuando $y \neq 0$, tenemos la caracterización

$$y^* \in N(y) \iff \|y^*\|^* = 1 \text{ y } \langle y^*, y \rangle = \|y\|$$

Lema 3.0.2. *Supongamos que $f : X \to Y$ es Gâteaux diferenciable. Tomamos x y ξ en X y definimos una función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ como:*

$$F(t) := \|f(x+t\xi)\|, 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces F tiene una derivada por la derecha y existe algún $y^* \in N(f(x+t\xi)$ tal que:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \langle y^*, df(x+t\xi)\xi\rangle.$$

Demostración. Tenemos que

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{\|f(x+(t+h)\xi)\| - \|f(x+t\xi)\|}{h} \tag{3.12}$$

$$= \frac{\|f(x+t\xi)+hz(h)\| - \|f(x+t\xi\|)}{h} \tag{3.13}$$

con

$$z(h) = \frac{f(x+(t+h)\xi) - f(x+t\xi)}{h}.$$

Como f es Gâteaux diferenciable, tenemos que

$$\lim_{h\to 0} z(h) = df(x+t\xi)\xi := z(0).$$

Por la desigualdad del triángulo, tenemos

$$\big| \|f(x+t\xi)+hz(h)\| - \|f(x+t\xi)+hz(0)\| \big| \leq h\|z(h)-z(0)\|$$

Escribiendo este resultado en 3.13 y usando la proposición anterior, nos queda

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\|f(x+t\xi)+hz(0)\| - \|f(x+t\xi)\|}{h}$$

$$= \langle y^*, df(x+t\xi)\xi\rangle$$

para algún $y^* \in N(f(x+t\xi))$. $\square$

Bibliografía

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010. ISBN: 9780387709147.

[2] H.P. Cartan. *Differential Calculus*. 1971. URL: https://books.google.com.mx/books?id=kFa8tQEACAAJ.

[3] A. Ioffe. «On the local surjection property». En: *Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications* 11 (1987), págs. 565-592.

[4] E. Kreyszig y Karreman Mathematics Research Collection. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley classics library. Wiley, 1978. ISBN: 9780471507314.

[5] Jean Mawhin y Michel Willem. «Origin and evolution of the Palais–Smale condition in critical point theory». En: *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 7 (oct. de 2010), págs. 265-290. DOI: 10.1007/s11784-010-0019-7.

[6] Michael Renardy y Robert C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Undetermined. Texts in Applied Mathematics. ISBN: 978-0-387-00444-0. DOI: 10.1007/b97427.

[7] W. Rudin y Karreman Mathematics Research Collection. *Functional Analysis*. Higher mathematics series. 1973. ISBN: 9780070542259. URL: https://books.google.com.mx/books?id=ehzvAAAAMAAJ.

[8] S. Banach y S. Mazur. «Über mehrdeutige stetige Abbildungen». En: *Studia Mathematica* 5 (1934), págs. 174-178. DOI: 10.4064/sm-5-1-174-178.

[9] Eric Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. San Diego: Academic Press, 1997. ISBN: 978-0-12-622760-4. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-012622760-4/50009-1. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780126227604500091.